



УДК 548.571; 539.23

З.К. Аймаганбетова, С.Я. Максимова

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

К.Ш. Шункеев

Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова, г. Актюбе

M. Grinberg

Institute of Experimental Physics, University of Gdansk

**ГАЛОГЕННЫЕ РАДИАЦИОННЫЕ ДЕФЕКТЫ В КРИСТАЛЛАХ KCl
ПРИ НАНОРАЗМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ**

Экспериментально установлено, что в кристалле KCl после рентгеновского облучения при температуре выше температуры делокализации ($> 50\text{K}$) междуузельных атомов галогена в результате их взаимодействия между собой в регулярных узлах решетки образуются как изолированные $(Cl_3^-)_{aca}^0$ -центры, так и ассоциированные $(Cl_3^-)_{aca} K_i^+ Cl_i^-$ -центры с максимумами спектров поглощения при 5,3 эВ и 4,9 эВ, соответственно [1, 2]. $(Cl_3^-)_{aca}^0$ - и $(Cl_3^-)_{aca} K_i^+ Cl_i^-$ - центры имеют полосы поглощения в области спектра соответствующих Cl_3^- -молекулам и их по классификации Дорендорфа [3] называют V_2 - и V_4 -центрами, соответственно.

В настоящей работе для детального исследования механизмов образования Cl_3^- -центров в кристаллах KCl были применены различные внешние воздействия, приводящие к предварительному созданию наноразмерных возмущений кристаллической решетки (легкие катионы, дивакансии, локальные напряжения и т.д.).

Экспериментальная методика и объекты исследования. Спектры поглощения радиационных дефектов, наведенных радиацией, в кристаллах KCl-Li, KCl-Na, KCl-Sr и пластически деформированных кристаллах KCl измерялись при 90 K на спектрофотометре Evolution-300 в автоматическом режиме в интервале спектра 1,6÷6,2 эВ. Специально была разработана конструкция криостата, без помех регистрирующая спектры поглощения кристаллов [4]. В качестве ионизирующего излучения применялись рентгеновские лучи от установки РУП-120, работающей в режиме 120 кВ, 5мА.

Активированные KCl-Li, KCl-Na, KCl-Sr и чистые кристаллы KCl были приготовлены по технологии, разработанной в Институте физики Тартуского университета (Эстония).

Понижение симметрии решетки кристалла KCl наноразмерными катионными гомологами. На основе абсорбционной спектроскопии кристаллов с применением импульсных отжигов кристаллов были выделены спектры поглощения Cl_3^- -центров в кристаллах KCl-Li, KCl-Na и KCl-Sr (рис. 1).

Следует обратить внимание на тот факт, что зарегистрирована полоса поглощения в области спектра поглощения при 6,35-6,4 эВ, характерная для междуузельного иона галогена - (Cl_i^-) входящего в состав $(Cl_3^-)_{aca} Li_i^+ Cl_i^-$, $(Cl_3^-)_{aca} Na_i^+ Cl_i^-$ и $(Cl_3^-)_{aca} Sr_i^+ Cl_i^-$ -центра в кристаллах KCl-Li, KCl-Na и KCl-Sr.

В кристаллах KCl-Li и KCl-Na радиацией преимущественно создается вместо основного катиона междуузельный примесный катион-гомолог - Li_i^+ и Na_i^+ , ассоциированный междуузельным галогеном с образованием $(Cl_3^-)_{aca} Li_i^+ Cl_i^-$ - и $(Cl_3^-)_{aca} Na_i^+ Cl_i^-$ -центров, соответственно. В кристалле KCl-Sr (из-за компенсации заряда) до рентгеновского облучения в решетке образуется комплекс $Sr^{++} U_c^-$, поэтому взаимодействия двух междуузельных атомов галогена происходят практически в месте катионной вакансии, слегка возмущенной зарядом стронция, занимающего катионный узел решетки, с образованием $(Sr^{2+})_c^+ (Cl_3^-)_{aca} (Cl_i^-)^-$ - центров.

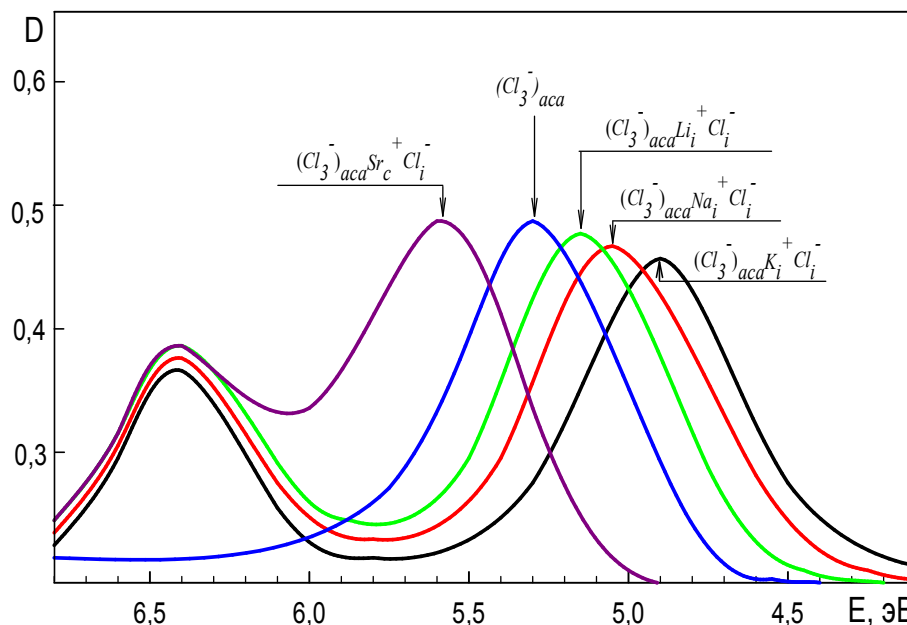


Рисунок 1 - Нормированный спектр поглощения $(Cl_3^-)_{aca}^0$ - центров (KCl), $(Cl_3^-)_{aca} Li_i^+ Cl_i^-$ - центров (KCl-Li), $(Cl_3^-)_{aca} Na_i^+ Cl_i^-$ - центров (KCl-Na) и $(Cl_3^-)_{aca} (Sr^{++})_c^+ Cl_i^-$ - центров (KCl-Sr)

Из рис. 1 видно, что в зависимости от размера междуузельного катиона (M_{Ai}^+) максимум спектра поглощения $(Cl_3^-)_{aca} M_{Ai}^+ Cl_i^-$ -центров смещается от положения чистого Cl_3^- - центра, т.е. чем больше размер катиона, тем больше смещается в сторону низких энергий. Например, в чистом кристалле KCl $(Cl_3^-)_{aca} K_i^+ Cl_i^-$ -центры имеют максимум спектра поглощения при 4,9 эВ, в кристалле KCl-Na $(Cl_3^-)_{aca} Na_i^+ Cl_i^-$ - центры имеют максимум спектра поглощения при 5,05 эВ, в кристалле KCl-Li $(Cl_3^-)_{aca} Li_i^+ Cl_i^-$ - центры имеют максимум спектра поглощения при 5,1 эВ. В кристалле KCl-Sr, где по структуре центров отсутствует междуузельный катион, $(Cl_3^-)_{aca} (Sr^{++})_c^+ Cl_i^-$ -центры имеют максимум относительно Cl_3^- -центра со стороны высоких энергий при 5,6 эВ. Доказательством того, что в состав $(Cl_3^-)_{aca} M_{Ai}^+ Cl_i^-$ - центров входит междуузельный ион хлора (Cl_i^-), является спектр поглощения с максимумом

мом при 6,35-6,4 эВ, характерный для междоузельного иона галогена в щелочногалогидном кристалле (ЩГК).

В спектре поглощения чистого Cl_3^- - центра имеется один максимум при 5,3 эВ без полосы поглощения при 6,4 эВ, характерной для междоузельных ионов галогена, как в случае $(Cl_3^-)_0 M_{Ai}^+ Cl_i^-$ - центров.

Критерием реализации механизма образования катионных френкелевских дефектов при ассоциации двух междоузельных атомов галогена в поле наноразмерного катиона-гомолога является тот факт, что в кристаллах KCl радиус примесного (r_{Li}) или собственного (r_K) катиона должен быть меньше радиусов тетраэдрической пустоты ($r_{Li} < r_\tau$ и $r_K < r_\tau$) и «окна» ($r_{Li} < r_x$, $r_K < r_x$) в тетраэдрическую пустоту по направлению $\langle 111 \rangle$.

Согласно полученным расчетным данным исследуемые кристаллы можно условно разделить на три группы:

1) $r_c > r_\tau$ и $r_c > r_x$. В этот класс входит кристалл KCl, в котором процесс создания катионных френкелевских дефектов при ассоциации $H-H_A$ взаимодействия должен быть затруднен;

2) $r_c < r_\tau$ и $r_c > r_x$. В этот класс входит кристалл KCl-Na, в котором существует определенный барьер, так как радиус катиона превышает радиус «окна», которое он должен преодолеть ($r_x/r_c = 0,78$);

3) $r_c < r_\tau$ и $r_c < r_x$. В кристалле KCl-Li ион лития беспрепятственно может попасть в междоузелье, так как его радиус меньше как радиуса «окна», так и радиуса тетраэдрической пустоты ($r_\tau/r_{Li} = 1,66$ и $r_x/r_{Li} = 1,12$).

На основании вышеуказанных расчетных данных можно предположить, что для чистого кристалла KCl образование катионных френкелевских дефектов требует больших затрат энергии для «проталкивания» катиона через «окно», состоящее из ближайших анионов, в тетраэдрическую пустоту. Поэтому при взаимодействии двух H -центров около иона лития легко образуются $(Cl_3^-)_{aca} Li_i^+ Cl_i^-$ - центры по аналогии с $(Cl_3^-)_{aca} (Sr^{++})_c^+ Cl_i^-$ - центрами в кристалле KCl-Sr.

Понижение симметрии решетки кристалла KCl пластической и упругой деформацией. Пластическая деформация кристаллов ($\epsilon=4-5\%$) осуществлялась в условиях высокого вакуума в криостате при 300 К, упругая деформация ($\epsilon=0,8\%$) - при 90 К. Пластически деформированные кристаллы KCl облучались рентгеновскими лучами в одинаковых экспозициях (в течение 3 часов) при двух температурах: при 300 К и при 80 К, и после чего кристалл охлаждался до 90 К для измерения спектров поглощения.

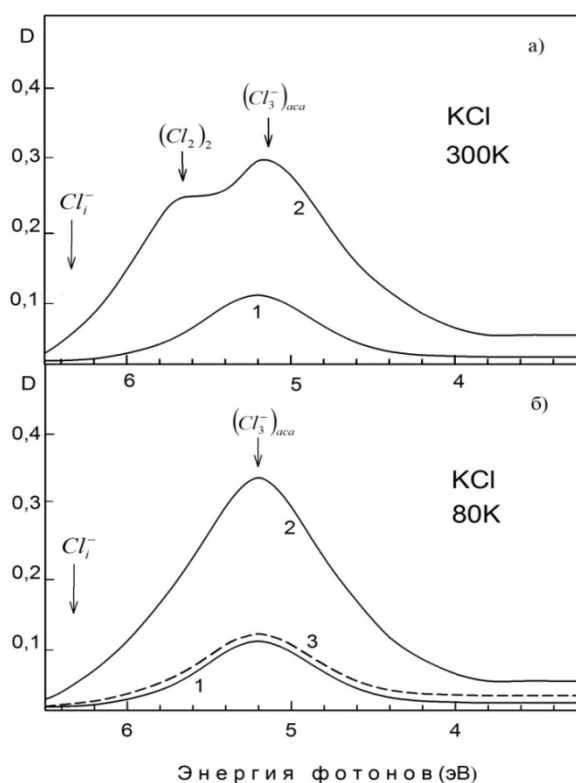
Главным индикатором влияния деформации в KCl являлась эффективность генерации галогенных радиационных дефектов [2]. Поэтому все кристаллы как до деформации, так и после пластической или упругой деформации облучались рентгеновскими лучами в одинаковых экспозициях в течение 3 часов.

В качестве примера на рисунке 2 приведены спектры поглощения кристалла KCl.

Из рис. 2,а видно, что рентгеновское облучение при 300 К в предварительно пластически деформированных кристаллах KCl помимо элементарного $(Cl_3^-)_0$ -центра с максимумом при 5,3 эВ создает $[(Cl_2)_2]_{acc}$ -центры с максимумом при 5,8 эВ. В таких же условиях в пластически деформированных кристаллах KCl рентгеновское облучение при 80 К

генерирует элементарный $(Cl_3^-)_{aca}^0$ -центра с максимумом спектров поглощения при 5,3 эВ (рис. 2,б). Следует отметить, что, во-первых, отсутствуют дополнительные полосы поглощения, характерные дипольным $(Cl_3^-)_{aca}^0 M_i^+ Cl_i^-$ -центрам, во-вторых, эффективность элементарных $(Cl_3^-)_{aca}^0$ -центров возрастает более чем в 3 раза, по сравнению с не деформированным кристаллом KCl (сравните кривые 1 и 2, рис. 2).

Следует особо отметить, что после пластической деформации кристалла KCl отсутствует полоса поглощения при 6,35 эВ, зарегистрированная в кристаллах KCl-Li, KCl-Na и KCl-Sr (рис.1). Это свидетельствует о том, что в процессе ассоциации междуузельных атомов галогена в пластически деформированных кристаллах KCl создается «чистый» $(Cl_3^-)_{aca}^0$ -центр. Междуузельный ион галогена (Cl_i^-) стабилизируется в поле междуузельного катиона (M_i^+), в результате в решетке образуется диполь, состоящий из междуузельного катиона и аниона ($M_i^+ Cl_i^-$). Отсутствие спектра поглощения, характерного для междуузельного иона галогена (Cl_i^-), доказывает, что в пластически деформированном кристалле KCl также не образуется междуузельный катион (M_i^+).



1 – недеформированный; 2 - пластически деформированный при 300 К до 4-5 %; 3 – упругодеформированный при 80 К до 0,8 %

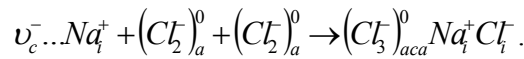
Рисунок 2 – Спектры поглощения облученного рентгеновскими лучами (РУП-120, 5 мА, 120 кВ) в изодозном режиме в течение 3 часов кристалла KCl: а) облучение при 300 К, измерение 80 К; б) облучение при 80 К, измерение 80 К

По эффективности образования $(Cl_3^-)_{aca}^0$ - центров в пластически деформированном кристалле KCl по сравнению с недеформированным кристаллом можно заключить, что пластическая деформация, осуществляемая при 300 К, создает дивакансию ($v_c^- v_a^+$).

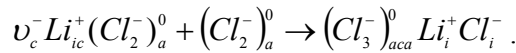
Экспериментальные результаты свидетельствуют об отсутствии влияния низкотемпературной упругой деформации на эффективность радиационного создания $(Cl_3^-)_{aca}^0$ - центра в кристалле KCl (рис. 2, б; кривая 3). Возможно, это является одной из причин отсутствия в кристаллах KCl и KBr уменьшения эффективности радиационного дефектообразования при понижении температуры [1].

Эффективность образования галогенных радиационных дефектов в кристаллах KCl-Li, KCl-Na, KCl-Sr и KCl (пластически деформированный) обсуждается по двум механизмам: экситонный и ассоциативный, путем ассоциации двух атомов галогена в поле нанообразований.

В кристалле KCl-Na $(Cl_3^-)_{aca} Na_i^+ Cl_i^-$ -центры образуются по экситонному механизму, путем взаимодействия двух междоузельных атомов галогена в поле катионных френкелевских дефектов – ($v_c^- \dots M_i^+$), при распаде автолокализованного анионного экситона - по следующей реакции:

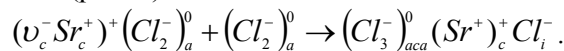


Экспериментальные результаты по абсорбционной спектроскопии и расчеты по созданию междоузельных катионов в кристалле KCl-Li показывают, что реакция взаимодействия подвижных междоузельных атомов галогена вблизи $Li_{ic}^+ v_c^-$ является энергетически выгодной, так как Li_{ic}^+ смещен от центрального положения в междоузлии по направлению $\langle 111 \rangle$ [5]. В кристаллах KCl-Li $(Cl_3^-)_{aca} Li_i^+ Cl_i^-$ -центры образуются по ассоциативному механизму, путем взаимодействия двух междоузельных атомов галогена в поле $Li_{ic}^+ v_c^-$ по следующей реакции [6] (рис. 3):

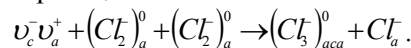


В кристалле KCl-Sr для сохранения электронейтральности решетки образуется диполь, состоящий из стронция в катионном узле и катионной вакансии - $Sr_c^{++} v_c^-$.

Для такой системы нет необходимости выталкивать катион в междоузлии при ассоциации H-центров, так как электронейтральность кристалла KCl-Sr создает в решетке катионную вакансию в паре с двухвалентным стронцием - $Sr_c^{++} v_c^-$. Итак, в кристалле KCl-Sr ассоциация двух H-центров будет происходить около уже созданной катионной вакансии по следующей реакции (рис. 3):



В кристалле KCl предварительно созданные пластической деформацией дивакансии ($v_c^- v_a^+$) способствуют эффективному образованию «чистых» $(Cl_3^-)_{aca}^0$ -центров при взаимодействии двух междоузельных атомов галогена в их поле, схематически представленных на рис. 3, согласно следующей реакции:



Действительно, эффективное радиационное создание $(Cl_3^-)_aca^0$ -центров говорит о многочисленности дивакансий в деформированном кристалле, т.к. $(Cl_3^-)_aca^0$ -центры легко возникают при заполнении дивакансий двумя H -центрами (рис. 3). Радиационное создание $[(Cl_2)_2]_{acac}$ -центров указывает на наличие в деформированном кристалле квартетов вакансий, на базе которых при участии четырех H -центров формируется $[(Cl_2)_2]_{acac}$ -центр.

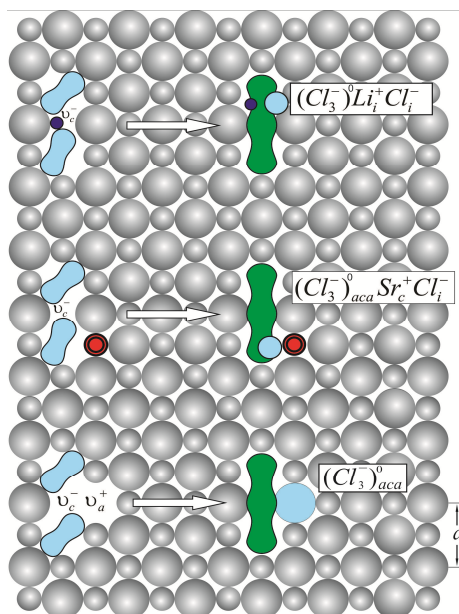


Рисунок 3 – Схема взаимодействия двух H -центров в поле $Li_{ic}^+ v_c^-$, $Sr_c^{++} v_c^-$ и дивакансии $(v_c^- v_a^+)$ с образованием $(Cl_3^-)_{aca} Li_i^+ Cl_i^-$, $(Cl_3^-)_{aca} Sr_c^+ Cl_i^-$ и $(Cl_3^-)_{aca}^0$ -центров в кристаллах KCl-Li, KCl-Sr и пластически деформированном KCl, соответственно [6, 7]

Итак, на основе кристаллов KCl-Li, KCl-Na и KCl-Sr установлены закономерности расположения по спектральному составу $(X_3^-)_{aca}^0 M_i^+ X_i^-$ -центров в зависимости от размера катиона-гомолога, входящего в состав данного образования. Их структура и спектральный состав аналогичны, но механизмы образования различаются.

В кристалле KCl-Na $(Cl_3^-)_{aca} Na_i^+ Cl_i^-$ -центры образуются по экситонному механизму, а в кристаллах KCl-Li, KCl-Sr и KCl (пластически деформированный) $(Cl_3^-)_{aca} Li_i^+ Cl_i^-$, $(Cl_3^-)_{aca} Sr_c^+ Cl_i^-$ и $(Cl_3^-)_{aca}^0$ -центры образуются по ассоциативному механизму при взаимодействии двух междоузельных атомов галогена в поле нанообразований - $Li_{ic}^+ v_c^-$, $Sr_c^{++} v_c^-$ и $v_c^- v_a^+$.

Пластическая деформация в ЦГК создает вакансионные дефекты (ди-, и квартет вакансии) и на их базе при облучении кристаллов радиационно создаются $(Cl_3^-)_{aca}^0$ и $[(Cl_2)_2]_{acac}$ -центры.

Список литературы

1. Лушик Ч.Б. Распад электронных возбуждений с образованием дефектов в твердых телах / Ч.Б. Лушик, А.Ч. Лушик. - М.: Наука, 1989.
2. Лушик Ч.Б. Радиационное создание катионных дефектов в кристаллах KCl / Ч.Б. Лушик, Р.И. Гиндина, А.А. Маароос и др. // ФТТ. - 1977. - Т. 19. в. 12. - с. 3625-3630.
3. Dorendorf H. Ultraviolette Absorbtionsbanden und photochemision veranderten KCl und KBr kristallen // Z. Phys. - 1951. - 129. p. 317-326.
4. Пат. на изобретение № 26141. Универсальный криостат для регистрации спектров поглощения кристаллов при низкой температуре под воздействием деформации и радиации / К.Ш. Шункев, Е.Т. Сармуханов, А.А. Вармина и др. - Оpubл. 03.08.2012.
5. Schoemaker D., Yasaities E. Reorientation Motions of $H_A(Li^+)$ - Center in KCl-Li⁺. // Phys. Rev., B., 1972, v. 5, p. 4970-4986.
6. Schoemaker D., Kolopus J.L. Electron Paramagnetic Resonance and Optical Absorbtion Studies of the $V_1(Li)$ Center in KCl-Li // Phys. Rev., B. - 1970. - 2, 4. p. 1148-1159.
7. Бижанова К. Ассоциация междоузельных атомов галгена в кристаллах KCl в поле примеси легких катионов-гомологов / К. Бижанова, К. Шункеев // Вестник КарГУ им. Е. Букегова. - Сер. физическая. - 2010. - № 2(58). - с. 9-16.

Получено 2.03.2016

УДК 004.942

А.С. Алпыспаева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана қ.

ТАБИҒИ СИПАТТАҒЫ АПАТТЫ ЖАҒДАЙЛАРДЫ МОДЕЛЬДЕУ. ОРМАН ӨРТІНІҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖӘНЕ КОМПЬЮТЕРЛІК МОДЕЛІ

Берілген мақала тақырыбының өзектілігі қазіргі таңдағы биосфера мен техносфераға түсірілетін кері антропогенді факторлардың артуына байланысты. Кері антропогенді факторлар табиғи және техногенді сипаттағы: орман өрті, өндірістік орындардағы жарылыстар салдарынан атмосфераға таралатын зиянды заттардың апатты мөлшерде шығарылуы және т.б. апатты жағдайлардың туындауына әкеліп соқтырады. Сондықтан басты мақсаттардың біріне табиғи және техногенді сипаттағы апатты жағдайлардың зардабын азайту және оларды болдырмау жатқызылады.

Орман өрті өте күрделі және зардап мөлшері үлкен табиғи апаттарға жатқызылады, өрттің қарқындылығы жанғыш орман заттарының көлемі мен санына, метеорологиялық жағдайларға тікелей байланысты. Әдетте орман өртін зерттегенде математикалық және физикалық әдістер қолданылады. Берілген жағдайда зерттеу объектісі - табиғат емес, орман өртінің математикалық моделі. Математикалық модельді құру бірқатар артықшылықтарға ие: физикалық тәжірибелерге қарағандағы сақтық және экономикалық тұрғыдағы тиімділік.

Орман өртінің пайда болуы және олардың өрбу үрдісі жайлы алғашқы жұмыстар [1-3] зерттеулерінде келтірілген. Сонымен қатар математикалық модельдеу әдістері [4-8] жұмыстарында қарастырылады. Берілген мәселені зерттеумен соңғы жылдары Ресей ғалымы А.М. Гришин айналысуда [9, 10]. Аталған жұмыста орман өртінің жалпы моделі ұсынылған болатын. Қазіргі кезде орман өртінің пайда болу үрдісі, өрт аумағындағы ғимараттарға әсер етуі, өрт сөндіру жұмыстарына қатысатын адамдарға келетін зардаптар, үрдістің экологияға әкелетін кері әсері жайлы мәселелер қатты толғандыруда.

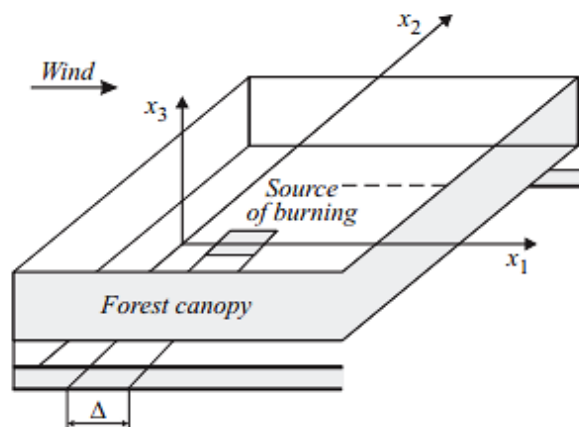
Бұл жұмыста орманның жоғарғы бөлігінен басталатын өрттің математикалық моделі

қарастырылады. Сипатталатын модель нәтижелері орманның жоғарғы жағынан басталатын өртті болжауға және өрт тудыратын кері әсерлерді зерттеуге мүмкіндік береді.

Есептің физикалық және математикалық бөлігін сипаттауға көшейік. Теңдеулер жүйесін, бастапқы және шекаралық шарттарды алу мақсатымен келесі негізгі ұйғарымдар жасалған:

- орман көпдеңгейлі, көпкомпонентті, күрделі, біркелкі емес орта ретінде алынған;
- өрт аумағында орман көпіршікті-дисперсиялы, екі температураға (газ және конденсатталған фазалы температуралар ажыратылған), бір жылдамдыққа ие күрделі жүйе;
- орман жамылғысы деформацияланбайтын орта болып ұйғарылады (ағаш тікендері, үлкен және кіші бұтақтар, ағаш діңгектері), орман жамылғысының өртке қарсы тұру күші газ ортасындағы импульстің сақталу заңымен келтіріледі;
- орманды құрғақ органикалық заттардан, судан, күлден тұратын желдетілетін массив ретінде қарастырамыз;
- қарастырылатын облыстағы ағын турбулентті сипатқа ие, мұнда молекулаларлы көшіру есепке алынбайды;
- газ түзуші фазасының тығыздығы қысымға байланысты болмайды.

Декарт жазықтығының басы өрт тудырған бастапқы аймақта орналассын, Ox_1 осі жер бетіне параллель жер жылдамдығы бағытының оң жағына қарай бағытталсын, Ox_2 горизонталь жазықтықта орналасып, Ox_1 –ге перпендикуляр орналассын, ал Ox_3 жоғары қарай бағытталсын (1-сур.).



1-сурет – Өрт аумағының сызбасы

Орман массивінің горизонталь шамасы вертикаль шамасын (орман ұзындығы) басып озатындықтан, орман өртінің жалпы математикалық моделі [9] орманның кедір-бұдырлы биіктік деңгейінен – 0 – орманның төменгі жамылғысының шекарасына дейін интегралданған. Жоғарыда сипатталған есеп келесі теңдеулер жүйесімен анықталады:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) = \dot{m} - \frac{c^- + c^+}{h}, j = 1, 2, i = 1, 2, \quad (1)$$

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\rho \bar{v}_i' \bar{v}_j') - \rho s c_d v_i |v| - \rho g_i - \dot{m} v_i + \frac{\tau_i^- - \tau_j^+}{h}, \quad (2)$$

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} (-\rho c_p v_j' T') + q_5 R_5 - \alpha_v (T - T_s) + \frac{q_T^- - q_T^+}{h} + k_g (cU_R - 4\sigma T^4), \quad (3)$$

$$\rho \frac{dc_\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} (-\rho \bar{v}_i' \bar{v}_j') + R_{5\alpha} - \dot{m} c_\alpha + \frac{J_\alpha^- - J_\alpha^+}{h}, \alpha = 1, 5, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{c}{3k} \frac{\partial U_R}{\partial x_j} \right) - kcU_R + 4k_s \sigma T_s^4 + 4k_g \sigma T^4 + \frac{q_R^- - q_R^+}{h} = 0, k = k_g + k_s, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^4 \rho_i c_{pi} \varphi_i \frac{\partial T_s}{\partial t} = q_3 R_3 - q_2 R_2 + k_s (cU_R - 4\sigma T_s^4) + \alpha_v (T - T_s), \quad (6)$$

$$\rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = -R_1, \quad \rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = -R_2, \quad (7)$$

$$\rho_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} = \alpha_c R_1 - \frac{M_c}{M_1} R_5, \quad \rho_4 \frac{\partial \varphi_4}{\partial t} = 0,$$

$$\sum_{\alpha=1}^5 c_\alpha = 1, \quad p_e = \rho RT \sum_{\alpha=1}^5 \frac{c_\alpha}{M_\alpha},$$

$$v = (v_1, v_2, v_3), \quad g = (0, 0, g).$$

Теңдеулер жүйесі үшін бастапқы және шекаралық шарттар келесі түрде анықталған:

$$t=0: \quad v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0, \quad T = T_e, \quad (8)$$

$$c_\alpha = c_{\alpha e}, \quad T_s = T_e, \quad \varphi_1 = \varphi_{ie},$$

$$x_1 = -x_{1e}: \quad v_1 = V_e, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0, \quad T = T_e.$$

$$c_\alpha = c_{\alpha e}, \quad -\frac{c}{3k} \frac{\partial U_R}{\partial x_1} + \frac{cU_R}{2} = 0, \quad (9)$$

$$x_1 = -x_{1e}: \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial v_{31}}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial c_\alpha}{\partial x_1} = 0.$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{c}{3k} \frac{\partial U_R}{\partial x_1} + \frac{cU_R}{2} = 0, \quad (10)$$

$$x_1 = -x_{2e}: \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial v_3}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial c_\alpha}{\partial x_2} = 0.$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = 0, \quad -\frac{c}{3k} \frac{\partial U_R}{\partial x_2} + \frac{cU_R}{2} = 0. \quad (11)$$

$$x_2 = x_{2e}: \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial v_3}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial c_\alpha}{\partial x_2} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{c}{3k} \frac{\partial U_R}{\partial x_2} + \frac{cU_R}{2} = 0.$$

Өрттің пайда болу көзінде функциялар мәні келесі түрде берілген:

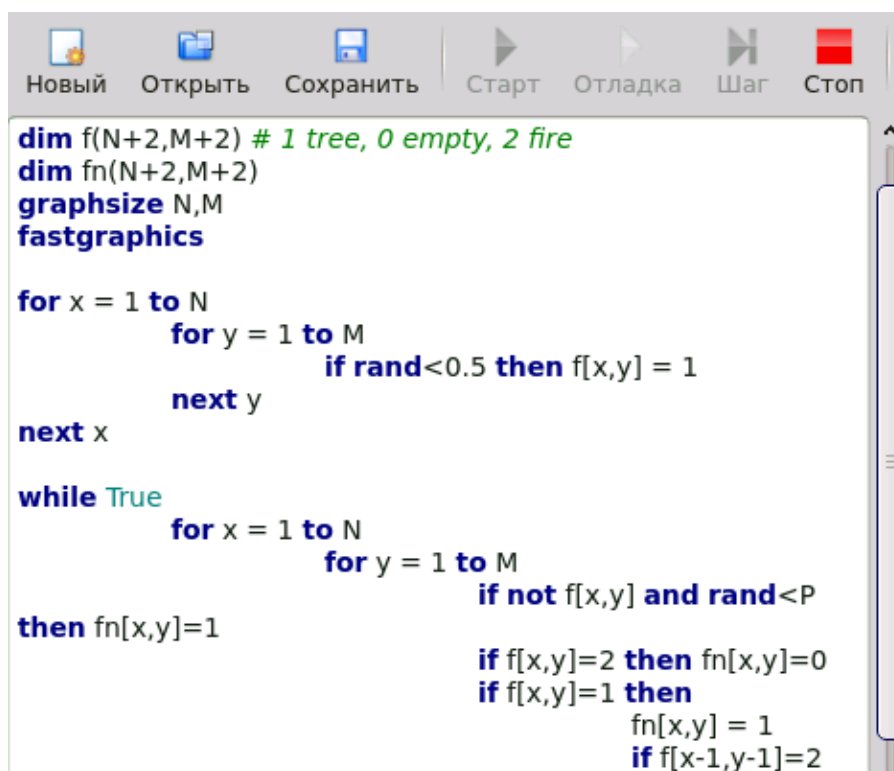
$$T = T_s = \begin{cases} T_e + \frac{t}{t_0} \cdot (T_0 - T_e), & t \leq t_0, \\ T_e + (T_0 - T_e) \exp\left(-k_0 \left(\frac{t}{t_0} - 1\right)\right), & t > t_0 \end{cases}, \quad (13)$$

$$\rho v_3 = h_0 \dot{m}, \quad |x_1| \leq \Delta_x, \quad |x_2| \leq \Delta_y.$$

Жоғарыда сипатталған теңдеулер жүйесінде, бастапқы және шекаралық шарттарда келесі белгілеулер қолданылады: $R_1 - R_5, R_{5\alpha}$ - жанғыш орман заттары пиролизінің, ылғалдың булануының, конденсатталған жанғыш заттардың, күлдің пайда болуының

массалық жылдамдықтары; t_0 - жану ошағының пайда болу уақыты, $c_{\rho i}, \rho_i, \varphi_i$ - меншікті жылусыйымдылық, тығыздық және i -ші көлем фазасы (1 - құрғақ органикалық зат, 2 - сұйық күйіндегі су, 3 - пиролиздің конденсатталу нәтижесі, 4 - минералды бөлігі, 5 - газ фазасы); T, T_s - конденсатталған және газ фазасының температурасы; c_α - массалық концентрациялар ($\alpha = 1$ - оттегі, 2 - пиролиздің жанғыш заттары, 3 - күйе, 4 - күл, 5 - ауаның инертті компоненттері); p - қысым; U_R - сәулелену энергиясының тығыздығы; σ - Стефан-Больцман тұрақтысы; k - сәулеленудің азаю коэффициенті, k_g, k_s - газдисперсиялық және конденсатталған фазалар үшін жұту коэффициенттері; α_V - фазалардың алмасу коэффициенті; q_i, E_i, k_i - пиролиз реакциясы, булану, кокс жануының жылу эффектілері; s_σ - орман материалдарының меншікті беті; M_α, M_c, M - газ фазасының жеке компоненттерінің молекулалық салмағы; s, c_d - фитомассаның меншікті беті мен орман жамылғысының өртке қарсы тұру коэффициенті; c - жарық жылдамдығы; $v_i - x_i$ осьтеріне жылдамдық проекциялары; g - еркін түсу үдеуі. «0» және «e» индекстері өрттің бастапқы нүктесі мен өрт аумағынан ауқымды арақашықтықты білдіреді. «'» - жоғары бөліктегі индексі сәйкес шаманың пульсациялық шамасы. Термодинамикалық, теплофизикалық және құрылымдық сипаттамалары [9] еңбекте келтіріледі.

Жоғарыда келтірілген формулалар арқылы бағдарламалық құрылғыларда алгоритм жазуға болады. Орман өртінің келесі моделі Basic тілінде жазылған (2-сур.):



```
dim f(N+2,M+2) # 1 tree, 0 empty, 2 fire
dim fn(N+2,M+2)
graphsize N,M
fastgraphics

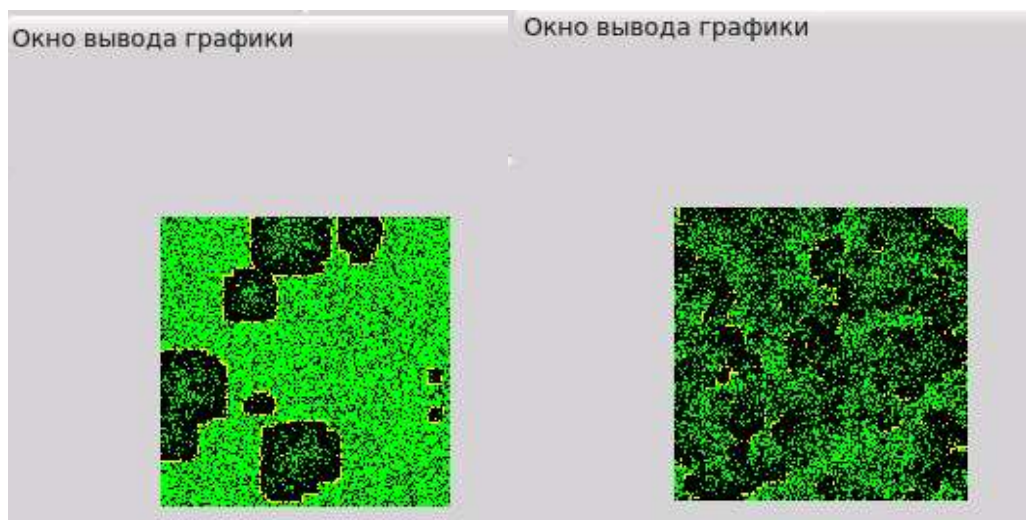
for x = 1 to N
  for y = 1 to M
    if rand<0.5 then f[x,y] = 1
  next y
next x

while True
  for x = 1 to N
    for y = 1 to M
      if not f[x,y] and rand<P
        then fn[x,y]=1
        if f[x,y]=2 then fn[x,y]=0
        if f[x,y]=1 then
          fn[x,y] = 1
          if f[x-1,y-1]=2
```

2-сурет – Бағдарлама кодынан үзінді

Белгілі параметрлер енгізе отырып, орман өртінің контурын болжауға болады. Жұмыс нәтижелері көрсетілген (3-сур.). 3-суреттің сол жағындағы бөлігінде қоюқара түсті

оқшауланған аумақтар өрт көзі басталған жерлер, ал оның айналасындағы - орман жамылғысы. Оң жақтағы сурет өрттің таралу аймағын көрсетеді.



3-сурет – Бағдарламаның графиктік түрде жүзеге асуы

Сипатталған модельдің сандық шешімінің негізінде орман жамылғысының жоғары жағынан басталатын өрттің температурасының өзгеруі және компоненттер концентрациясының аумағы, өрттің таралу жылдамдығы суреттелген. Берілген жұмыста пайдаланылған математикалық модель орман өртінің әртүрлі таралу жағдайларын сипаттауға мүмкіндік береді, ал бұл - модельді болжау мақсатында пайдалануға мүмкіндік береді.

Список литературы

1. Конев Э.В. Физические основы горения растительных материалов. - Новосибирск: Наука, 1977. - 239 с.
2. Van Wagner C.E. // Can. J. Forest Re. - 1977. - Vol. 7. - P. 23-34.
3. Albin F.A. // Int. J. Wildland Fire. - 1995. - Vol. 5. - N 2. - P. 81-91.
4. Alexander V.E. Crown fire thresholds in exotic pine plantations of Australasia. Ph.D. Thesis. Department of Forestry; Australian National University. - 1998.
5. Cruz M.G. // Proc. Of IV Internat. Conf. on Forest Fire Research. Luso-Coimbra. Portugal. - 2002.
6. Rothermel R.C. // Proc. of the 11th Int. Conf. on Fire and Forest Meteorology. Missoula. USA. - 1991.
7. Scott J.H. // USDA Forest Service. Rocky Mountain Forest and Range Experiment Station. Fort Collins: RMRS-RP-29.Colorado.USA. - 2001.
8. Xanthopoulos G. Development of a wild land crown fire initiation model. Ph.D. Thesis University of Montana. - 1990.
9. Гришин А.М. Математические модели лесных пожаров, новые способы борьбы с ними. - Новосибирск: Наука, 1992. - 408 с.
10. Grishin A.M., Perminov V.A. // Combust. Explo. Shock. - 1998. - N34. - P.378-386.

Получено 22.02.2016

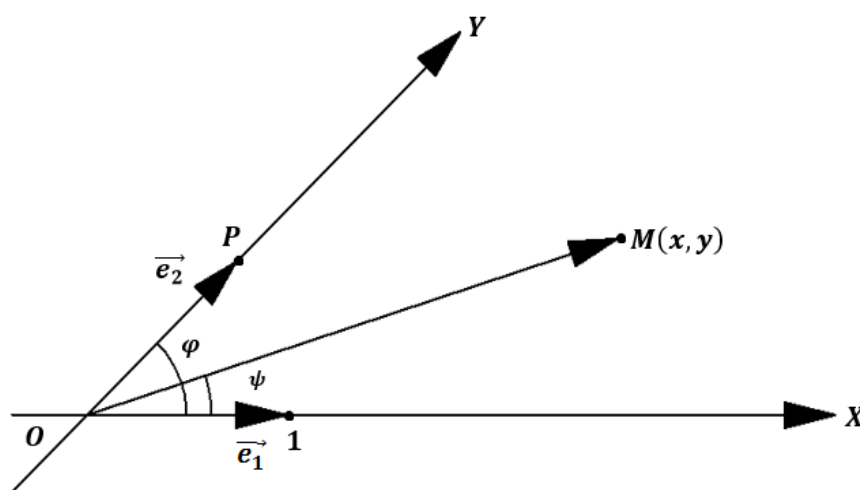
ӘОЖ 512.1 + 514.142

Б.Ж. Сағындықов

Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық зерттеу техникалық университеті, Алматы қ.

**ЖАЛПЫ КОМПЛЕКС САНЫНЫҢ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ИНТЕРПРЕТАЦИЯСЫ
ЖӘНЕ ҚАЙСЫБІР ҚОЛДАНЫСЫ**

Жазықтықта қайсыбір аффиндік (қиғаш бұрышты) координаталар жүйесіне қатысты қарастырылатын $M(x, y)$ нүктесінің орнын алгебралық түрде берілген $z = x + py$ жалпы комплекс саны арқылы анықтайық (1-сурет). Мұнда $p^2 = -\theta_0 + p\theta_1$; ал θ_0, θ_1 басқарушы параметрлерін оң бүтін сандар деп қабылдайық. Жалпы комплекс сан тіркестерін әрі қарай үнемі қайталай бермес үшін, оны комплекс сан деп айталық.



1- сурет

Кейде есептер шығарғанда комплекс санды полярлық координаталар арқылы көрсету өте ұғымды болады. Сонда OX осінің оң бағыты мен полярлық осьтің арасындағы полярлық бұрышты ψ арқылы белгілесек, онда

$$x = |z|T(\psi), y = |z|S(\psi).$$

Мұнда $|z| = \sqrt{x^2 + \theta_1 xy + \theta_0 y^2}$ полюстен ағымдық $M(x, y)$ нүктесіне дейінгі арақашықтық.

$$T(\psi) = \cos \sqrt{-D} \psi - \frac{\theta_1}{2\sqrt{-D}} \sin \sqrt{-D} \psi,$$

$$S(\psi) = \frac{1}{\sqrt{-D}} \sin \sqrt{-D} \psi, \quad D = \frac{\theta_1^2}{4} - \theta_0 < 0.$$

Бұл жерде полярлық ψ бұрышын z комплекс санының аргументі деп атаймыз және $Argz$ арқылы белгілейміз.

Сонымен, аффиндік координаталар жүйесіне қатысты қарастырылатын нүктенің, яғни комплекс санның модулі бірімәнді анықталады, ал оның аргументі 2π -ге еселі қосыл-

ғышқа дейінгі дәлдікпен анықталады. Полюстен нақты осьтің бағытымен тілік жүргіземіз. Сонда $Argz$ -тің $[0, 2\pi)$ аралығындағы мәнін оның бас мәні деп айтамыз және $argz$ арқылы белгілейміз.

$$argz = \begin{cases} \arctan \frac{\sqrt{-D}y}{x + \frac{\theta_1}{2}y}, & \text{егер } x > 0, y > 0; \\ \pi - \arctan \frac{\sqrt{-D}y}{x + \frac{\theta_1}{2}y}, & \text{егер } x < 0, y > 0; \\ \pi + \arctan \frac{\sqrt{-D}y}{x + \frac{\theta_1}{2}y}, & \text{егер } x < 0, y < 0; \\ 2\pi - \arctan \frac{\sqrt{-D}y}{x + \frac{\theta_1}{2}y}, & \text{егер } x > 0, y < 0. \end{cases}$$

Қысқаша қорытынды. Жазықтықта $R(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ аффиндік координаталар жүйесі θ_0, θ_1 басқарушы параметрлері арқылы анықталады. Сонда \vec{e}_1 және \vec{e}_2 базистік векторлары арасындағы бұрыш $\tan \varphi = \frac{2\sqrt{-D}}{\theta_1}$ теңдігінен анықталады. Базистік 1 және p элементтерінің модульдері сәйкес 1 және $\sqrt{\theta_0}$ болады. Полярлық бұрыш ағымдық $M(x, y)$ нүктесінің координаталары арқылы

$$\tan \psi = \frac{\sqrt{-D}y}{x + \frac{\theta_1}{2}y}$$

түрінде өрнектеледі. Сонда жазықтықта берілген нүктенің полярлық бұрышы бекітілген аффиндік жүйеге қатысты

$$\tan \psi = \frac{\frac{\theta_1}{2}y \tan \varphi}{x + \frac{\theta_1}{2}y}$$

теңдігі арқылы анықталады.

1-мысал. Аффиндік жүйе $\theta_0 = \theta_1 = 2$ параметрлері бойынша анықталсын дейік. Сонда $D = \frac{\theta_1^2}{4} - \theta_0 = -1$, $\sqrt{-D} = 1$, $\tan \varphi = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $p = \sqrt{\theta_0} = \sqrt{2}$. Осы жүйеге қатысты $M_1(1, 0)$ нүктесін қарастырсақ, онда $\tan \psi = 0$. Яғни $M_1(1, 0)$ нүктесі нақты осьтің бойында жатыр. Содан кейін $M_1(1, 0)$ нүктесін бекітіп, аффиндік координаталар жүйесінде ұзындығы 1-ге тең \vec{OM}_1 векторын сағат тіліне қарама-қарсы бағытта толықтай бұратын болсақ, онда бұл вектордың ұшы декарттық координаталар жүйесіне қатысты $x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$

теңдеуімен анықталатын эллипсті сызып шығады.

Бұл мысалдан θ_0, θ_1 басқарушы параметрлерінің көмегімен сан алуан аффиндік координаталар жүйесін алуға болатынын көреміз.

Мысалдың геометриялық интерпретациясын қарастырайық. Аффиндік координаталар жүйесінде берілген $M(x, y)$ нүктесінің декарттық координаталары (x', y') болсын дейік (2-сурет). Сонда

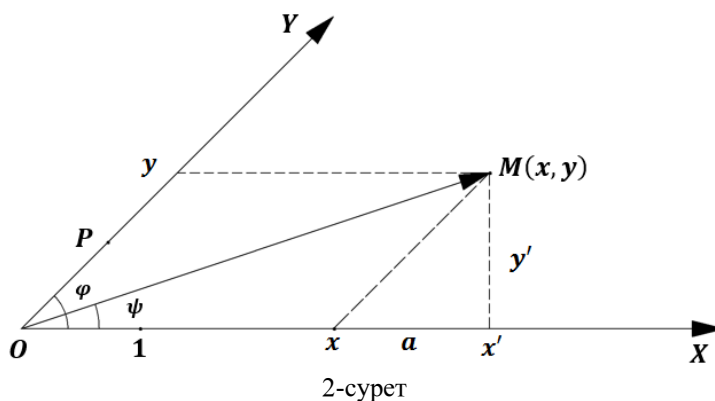
$$y = \frac{y'}{\sin \varphi} = \frac{|z| \sin \psi}{\sin \varphi},$$

$$x = x' - a = |z| \cos \psi - |z| \frac{\sin \psi}{\sin \varphi} \cos \varphi.$$

Сонымен
$$\begin{cases} x = |z| \left(\cos \psi - \sin \psi \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \right) = |z| \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin \varphi}. \\ y = |z| \frac{\sin \psi}{\sin \varphi}. \end{cases} \quad \text{Мұнда}$$

$$\tan \varphi = \frac{2\sqrt{-D}}{\theta_1}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \varphi}} = \frac{\theta_1}{2\sqrt{\theta_0}}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{-D}}{\sqrt{\theta_0}}, \quad \tan \psi = \frac{\sqrt{-D}y}{x + \frac{\theta_1}{2}y},$$

$$\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \psi}} \quad \text{және} \quad \sin \psi = \frac{\tan \psi}{\sqrt{1+\tan^2 \psi}}.$$



Комплекс сандар алгебрасы

Теорема. Екі комплекс санды бір-біріне көбейткенде олардың модульдері көбейтіледі де, аргументтері қосылады, ал бөлгенде - модульдері бөлінеді де, аргументтері алынады.

Дәлелдеуі. $z_1 = |z_1|(T(\psi_1) + pS(\psi_1))$ және $z_2 = |z_2|(T(\psi_2) + pS(\psi_2))$ комплекс сандары берілсін дейік. Тригонометриялық түрде берілген бұл комплекс сандарды көрсеткіштік түрде жазайық

$$z_1 = |z_1|e^{(-\frac{\theta_1}{2}+p)\psi_1} \quad \text{және} \quad z_2 = |z_2|e^{(-\frac{\theta_2}{2}+p)\psi_2} \quad \text{дейік. Сонда}$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|e^{(-\frac{\theta_1}{2}+p)(\psi_1+\psi_2)}, \quad \text{ал} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{(-\frac{\theta_1}{2}+p)(\psi_1-\psi_2)}.$$

Бұдан комплекс санды оң бүтін дәрежеге шығару ережесі шығады.

$$z^n = (x + py)^n = \left(|z|(T(\psi) + pS(\psi)) \right)^n = |z|^n(T(n\psi) + pS(n\psi)).$$

Мұндағы $(T(\psi) + pS(\psi))^n = T(n\psi) + pS(n\psi)$ теңдігі Муавр формуласы деп аталады.

Жоғарыда комплекс санның модулі $|z| = \sqrt{x^2 + \theta_1 xy + \theta_0 y^2}$ теңдігі арқылы анықталатыны айтылған. Мұнда $x = |z|T(\psi)$, $y = |z|S(\psi)$. Демек,

$$T^2(\psi) + \theta_1 T(\psi)S(\psi) + \theta_0 S^2(\psi) = 1.$$

Бұл теңдік аффиндік жүйедегі негізгі тригонометриялық тепе-теңдік деп аталады.

Тригонометриялық түрде берілген комплекс сандарды бір-біріне көбейту арқылы қосу формулаларын алуға болады

$$\begin{aligned} T(\psi_1 + \psi_2) &= T(\psi_1)T(\psi_2) - \theta_0 S(\psi_1)S(\psi_2), \\ S(\psi_1 + \psi_2) &= T(\psi_1)S(\psi_2) + S(\psi_1)T(\psi_2) + \theta_1 S(\psi_1)S(\psi_2). \end{aligned}$$

Бұдан қос аргументті функциялар үшін

$$\begin{aligned} T(2\psi) &= T^2(\psi) - \theta_0 S^2(\psi), \\ S(2\psi) &= 2T(\psi)S(\psi) + \theta_1 S^2(\psi) \end{aligned}$$

формулалары алынады.

Комплекс саннан бүтін оң дәрежелі түбір табуды бүтін оң дәрежеге шығару амалына кері амал ретінде қарастыруға болады.

Шынында да, егер $w^n = z$ болса, онда w санын z санынан табылатын n -ші дәрежелі түбірі деп атайды. Белгілеуі: $w = \sqrt[n]{z}$ ($n \geq 2$).

z және w сандарын көрсеткіштік $z = r e^{(-\frac{\theta_1}{2} + p)\psi}$ және $w = \rho e^{(-\frac{\theta_1}{2} + p)\varphi}$ түрлерінде жазайық. Сонда анықтама бойынша $\rho^n e^{(-\frac{\theta_1}{2} + p)n\varphi} = r e^{(-\frac{\theta_1}{2} + p)\psi}$. Бұл теңдіктен $\rho^n = r$ және $n\varphi = \psi + 2k\pi$ теңдіктері шығады. Сонда ізделініп отырған ρ , φ_k мәндері үшін $\rho = \sqrt[n]{r} = \sqrt[n]{x^2 + \theta_1 xy + \theta_0 y^2}$, $\varphi_k = \frac{\psi + 2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ формулаларын аламыз.

z комплекс саны $z = |z|(T(\psi) + pS(\psi))$ тригонометриялық түрде берілсін дейік. Сонда оның түйіндесі $\bar{z} = |\bar{z}|(T(\psi) + \theta_1 S(\psi) - pS(\psi))$ формуласымен анықталады. Мұнда $|z| = |\bar{z}|$.

Егер z комплекс саны $z = |z|e^{(-\frac{\theta_1}{2} + p)\psi}$ көрсеткіштік түрде берілсе, онда оның түйіндесі $\bar{z} = |\bar{z}|e^{(\frac{\theta_1}{2} - p)\psi}$ формуласы арқылы анықталады. Бұдан

$$|z \cdot \bar{z}| = |z| \cdot |\bar{z}| = |z|^2 = x^2 + \theta_1 xy + \theta_0 y^2$$

теңдігі шығады.

Екінші жағынан $e^{(-\frac{\theta_1}{2} + p)\psi} = T(\psi) + pS(\psi)$. $\psi := -\psi$ алмастыруынан кейін бұл теңдік

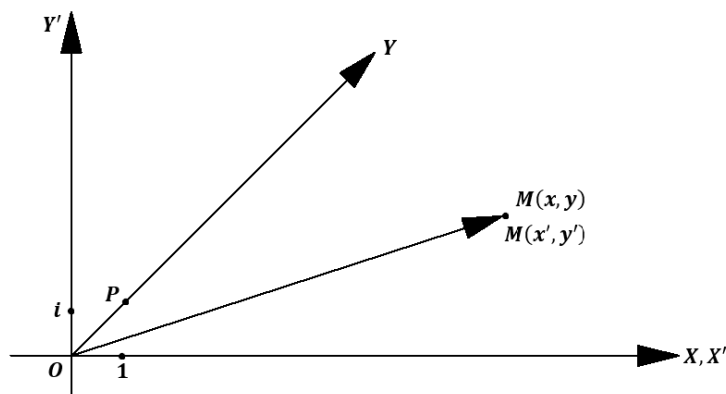
$$T(-\psi) + pS(-\psi) = e^{(\frac{\theta_1}{2} - p)\psi} = T(\psi) + \theta_1 S(\psi) - pS(\psi)$$

түріне келеді. Соңғы теңдікті p жорамал параметріне қатысты ажырататын болсақ, онда

$$\begin{aligned} T(\psi) + \theta_1 S(\psi) &= T(-\psi), \\ S(\psi) &= -S(-\psi) \end{aligned}$$

арақатынастарын аламыз.

Аффиндік түрлендіру. Жазықтықта бас нүктелері полюсте түйістірілген декарттық $(X'OY')$ және аффиндік (XOY) координаталар жүйесін қарастырайық (3-сурет).



3 – сурет

Декарттық координаталар жүйесінде координаталары (x, y) болатын нүктеге аффиндік жүйеде де координаталары (x, y) болатын нүктені сәйкес қоятын болсақ, онда біз $z'_{\text{дек.}} = z_{\text{афф.}}$ аффиндік түрлендіруін қарастырамыз. Мұнда $z'_{\text{дек.}} = x' + iy'$, ал $z_{\text{афф.}} = x + py$. Демек, $z'_{\text{дек.}} = z_{\text{афф.}}$ теңдігі жазықтықта берілген M нүктесінің декарттық және аффиндік координаталарының арасындағы байланысты береді

$$\begin{cases} x' = x + \frac{\theta_1}{2}y, \\ y' = \sqrt{-D}y, \end{cases} \text{ және кері түрлендіру } \begin{cases} x = x' - \frac{\theta_1}{2\sqrt{-D}}y', \\ y = \frac{1}{\sqrt{-D}}y'. \end{cases}$$

Сонымен, жазықтықта берілген кез келген нүктенің декарттық және аффиндік координаталарының арасындағы байланысты

$$x^2 + \theta_1 xy + \theta_0 y^2 \equiv x'^2 + y'^2$$

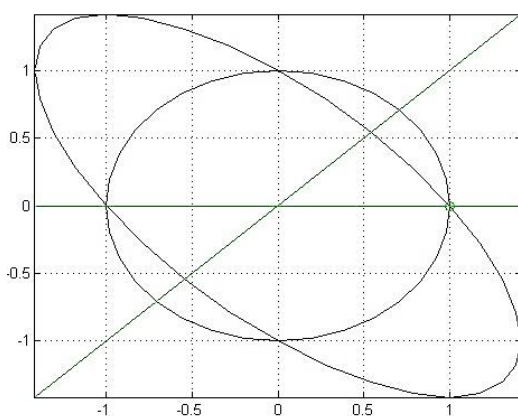
тепе-теңдігі арқылы өрнектеуге болады.

Қысқаша қорытынды. Егер ағымдық $M'(x', y')$ нүктесі декарттық координаталар жүйесінде $x'^2 + y'^2 = R^2$ шеңберінің бойымен қозғалатын болса, онда оның аффиндік координаталар жүйесіндегі бейнесі декарттық координаталар жүйесіне қатысты $x^2 + \theta_1 xy + \theta_0 y^2 = R^2$ теңдеуімен анықталатын екінші ретті қисықтың бойымен қозғалады.

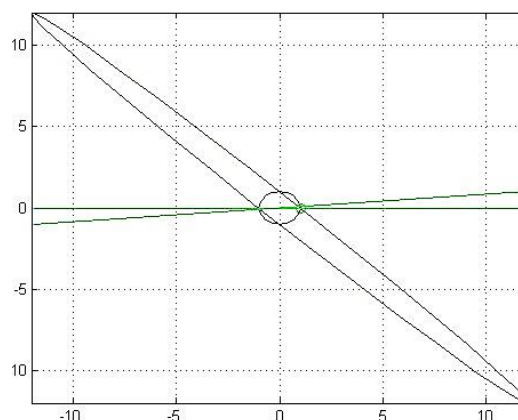
2-мысал. Декарттық координаталар жүйесі мен $\theta_0 = \theta_1 = 2$ басқарушы параметрлері арқылы анықталған $R(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ аффиндік координаталар жүйесін қарастырайық. Бұл жүйелердің арасында $z'_{\text{дек.}} = z_{\text{афф.}}$ аффиндік түрлендіруі іске ассын делік.

Декарттық координаталар жүйесінде центрі бас нүктеде жататын радиусы 1-ге тең шеңберді қарастырайық. Сонда осы шеңбердің бойында жататын $(1, 0)$ нүктесінің бейнесі болатын $(2, 1)$ нүктесі $x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$ теңдеуімен анықталған эллипстің бойында жататынын көреміз (4,а-сурет).

4,б-сурет $\theta_1 = 2, \theta_0 = 1001$ параметрлері бойынша анықталған аффиндік жүйе үшін қарастырылған.



а



б

4-сурет

Аффиндік координаталар жүйесін бұру

θ_0, θ_1 басқарушы параметрлері арқылы анықталатын $R(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ аффиндік жүйесі берілсін дейік.

Анықтама. Егер $D = \frac{\theta_1^2}{4} - \theta_0 < 0$ болса, онда $z = x + py$ санын эллиптиктік сан деп атайды.

Сонда аффиндік жазықтықтағы эллиптиктік нүктелер үшін Эйлер формуласы келесі түрде жазылады:

$$e^{p\varphi} = I(\theta_0, \theta_1, \varphi) + pK(\theta_0, \theta_1, \varphi) = e^{\frac{\theta_1}{2}\varphi} (T(\theta_0, \theta_1, \varphi) + pS(\theta_0, \theta_1, \varphi)).$$

Бұдан
$$e^{(-\frac{\theta_1}{2}+p)\varphi} = T(\theta_0, \theta_1, \varphi) + pS(\theta_0, \theta_1, \varphi).$$

Енді берілген $R(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ аффиндік жүйесін сағат тілінің бағытына қарама-қарсы φ бұрышына бұрайық, яғни $z'_{\text{афф.}} = e^{(-\frac{\theta_1}{2}+p)\varphi} z_{\text{афф.}}$ түрлендіруін қарастырайық

$$\begin{aligned} x' + py' &= (T(\varphi) + pS(\varphi))(x + py) = \\ &= T(\varphi)x - \theta_0 S(\varphi)y + p(S(\varphi)x + (T(\varphi) + \theta_1 S(\varphi))y). \end{aligned}$$

Соңғы теңдікте p параметріне қатысты нақты және жорамал бөліктерін ажыратып, келесі жүйеге көшейік

$$\begin{cases} x' = T(\varphi)x - \theta_0 S(\varphi)y, \\ y' = S(\varphi)x + (T(\varphi) + \theta_1 S(\varphi))y. \end{cases} \quad (1)$$

Мұндай түрлендіру аффиндік жазықтықта қозғалысты көрсетеді. Дәлелдеу үшін $x'^2 + \theta_1 x'y' + \theta_0 y'^2$ өрнегін ескі координаталар арқылы түрлендірейік:

$$\begin{aligned} x'^2 + \theta_1 x'y' + \theta_0 y'^2 &= T^2 x^2 - 2\theta_0 T S x y + \theta_0 S^2 y^2 + \theta_1 T S x^2 - \\ &- \theta_0 \theta_1 S^2 x y + \theta_1 T^2 x y + \theta_1^2 T S x y - \theta_0 \theta_1 T S y^2 - \theta_0 \theta_1^2 S^2 y^2 + \theta_0 S^2 x^2 + \\ &+ \theta_0 T^2 y^2 + 2\theta_0 \theta_1 T S y^2 + \theta_0 \theta_1 S^2 y^2 + 2\theta_0 T S x y + 2\theta_0 \theta_1 S^2 x y = \\ &= (T^2 + \theta_1 T S + \theta_0 K^2)(x^2 + \theta_1 x y + \theta_0 y^2) = x^2 + \theta_1 x y + \theta_0 y^2, \end{aligned}$$

өйткені $T^2 + \theta_1 T S + \theta_0 K^2 = 1$. Сонымен,

$$x'^2 + \theta_1 x'y' + \theta_0 y'^2 = x^2 + \theta_1 x y + \theta_0 y^2.$$

Демек, бұл түрлендіру кезінде аффиндік жазықтықтың кез келген екі нүктесінің арасындағы арақашықтық сақталады.

(1) формуладан, яғни аффиндік координаталар жүйесін бұрғанда, нүктенің ескі координаталарын оның жаңа координаталары арқылы өрнектеуге болады

$$\begin{cases} x = (T(\varphi) + \theta_1 S(\varphi))x' - \theta_0 S(\varphi)y', \\ y = -S(\varphi)x' + T(\varphi)y'. \end{cases}$$

3-мысал. $\theta_0 = \theta_1 = 2$ және $\varphi = \frac{\pi}{4}$ делік. Сонда $T\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, $S\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Демек, $R(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ аффиндік жүйесін $\varphi = \frac{\pi}{4}$ бұрышына бұру

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}(x' - y'), \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x' \end{cases}$$

формулары бойынша анықталады.

Әдебиеттер тізімі

1. Sagindykov Bimurat. The internal structure of a complex number // Вестник КазНТУ им. К. Сатпаева. - 2014. - №4 (104). - С. 402-409.
2. Sagindykov Bimurat. The generalized complex exponent and its application for finding sums // International Journal of Advanced Research. - 2013. - Volume 1. Issue 10. - С. 546-550.
3. Sagindykov Bimurat. Analytical functions of generalized complex variables and some applications// International Journal of Research in Education Technology. - 2014. - Volume 5. - No. 1. - С. 569-575.

Получено 29.01.2016
