4. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

В этой главе рассмотрен второй класс задач математической статистики (см. **1.2**), связанных с проверкой *статистических гипотез*.

Выше (см. **2**, **3**) были рассмотрены задачи оценивания неизвестного параметра θ по *реализации случайной выборки* из *генеральной совокупности* случайной величины X, закон распределения которой зависит от θ. При этом мы не располагали никакой *априорной информацией* относительно параметра θ.

При проверке статистической гипотезы о параметре θ исследователь заранее на основании той или иной априорной информации выдвигает предположение (гипотезу) о величине θ, например $\theta = \theta_0$, где θ_0 — некоторое заданное значение параметра. После этого он проводит эксперимент, в результате которого получает реализацию $\vec{x}_n$ случайной выборки $\vec{X}_n$ из генеральной совокупности X, распределение которой зависит от параметра θ. По этим данным ему нужно дать ответ на вопрос: согласуется гипотеза $\theta = \theta_0$ с результатами эксперимента или нет? Другими словами, исследователю нужно решить, можно ли принять выдвинутую гипотезу или ее нужно отклонить как противоречащую результатам эксперимента и принять некоторую альтернативную гипотезу (например, $\theta \neq \theta_0$).

4.1. Основные понятия

Пусть имеется *выборка* $\vec{x}_n$, являющаяся *реализацией случайной выборки* $\vec{X}_n$ из *генеральной совокупности* X, плотность распределения которой $p(t;\theta)$ зависит от неизвестного параметра θ.

Статистические гипотезы относительно неизвестного истинного значения параметра θ называют ***параметрическими гипотезами.*** При этом если θ — скаляр, то речь идет об ***однопараметрических гипотезах***, а если вектор, — то о ***многопараметрических гипотезах.***

Статистическую гипотезу H называют ***простой***, если она имеет вид

$$H\colon\ \vec{\theta}=\vec{\theta}_0,$$

где $\vec{\theta}_0$ — некоторое заданное значение параметра.

Статистическую гипотезу называют ***сложной***, если она имеет вид

$$H\colon\ \vec{\theta}\in D,$$

где D — некоторое множество значений параметра θ, состоящее более чем из одного элемента.

Пример 4.1. Предположим, проводится серия из n независимых испытаний по схеме Бернулли с неизвестным параметром p, где p — вероятность „успеха" в одном испытании. Тогда гипотеза $H\colon p=1/2$ является простой. Примерами сложных гипотез являются следующие: $H_1\colon\ p\geqslant 1/2$; $H_2\colon\ p\leqslant 1/2$; $H_3\colon 1/4\leqslant p\leqslant 3/4$ и т.д.

Пример 4.2. Пусть $\vec{X}_n$ — *случайная выборка объема* n из генеральной совокупности X, распределенной по нормальному закону с неизвестным математическим ожиданием μ и известной дисперсией σ^2. Тогда гипотеза $H\colon\ \mu=\mu_0$, где μ_0 — некоторое заданное значение параметра μ, является простой.

Гипотезы $H_1\colon\ \mu\geqslant\mu_0$; $H_2\colon\ \mu\leqslant\mu_0$; $H\colon\ \mu_0\leqslant\mu\leqslant\mu_1$ являются сложными.

Пример 4.3. Пусть в примере 4.2 оба параметра μ и σ неизвестны. В этом случае гипотеза $H\colon \mu=\mu_0$ становится сложной, так как ей соответствует множество значений двумерного вектора $\vec{\theta}=(\mu,\ \sigma)$, для которых $\mu=\mu_0$, $0<\sigma<\infty$.

4.2. Проверка двух простых гипотез

Рассмотрим сначала случай, когда проверяются две *простые статистические гипотезы* вида

$$H_0:\ \theta = \theta_0, \qquad H_1:\ \theta = \theta_1,$$

где θ_0, θ_1 — два заданных (различных) значения параметра. Первую ***гипотезу*** H_0 обычно называют ***основной***, а вторую H_1 — ***альтернативной***, или ***конкурирующей***, ***гипотезой***, хотя эта терминология является достаточно условной. Так, например, одна и та же гипотеза может в одних задачах выступать в качестве основной, а в других — в качестве альтернативной. По данным *выборки* $\vec{x}_n$ необходимо принять решение о справедливости одной из указанных гипотез.

Критерием, или ***статистическим критерием***, проверки гипотез называют правило, по которому по данным выборки $\vec{x}_n$ принимается решение о справедливости либо первой, либо второй гипотезы.

Критерий задают с помощью ***критического множества*** W, являющегося подмножеством *выборочного пространства* $\mathcal{X}_n$ *случайной выборки* $\vec{X}_n$. Решение принимают следующим образом:

1) если выборка $\vec{x}_n$ принадлежит критическому множеству W, то отвергают основную гипотезу H_0 и принимают альтернативную гипотезу H_1;

2) если выборка $\vec{x}_n$ не принадлежит критическому множеству W (т.е. принадлежит дополнению $\overline{W}$ множества W до выборочного пространства $\mathcal{X}_n$), то отвергают альтернативную гипотезу H_1 и принимают основную гипотезу H_0.

При использовании любого критерия возможны ошибки следующих видов:

1) принять гипотезу H_1, когда верна H_0 — ***ошибка первого рода***;

2) принять гипотезу H_0, когда верна H_1 — ***ошибка второго рода.***

Вероятности совершения ошибок первого и второго рода обозначают α и β:

$$\alpha = \mathbf{P}\left\{\vec{X}_n \in W \mid H_0\right\}, \qquad \beta = \mathbf{P}\left\{\vec{X}_n \in \overline{W} \mid H_1\right\},$$

где $\mathbf{P}\left\{A \mid H_j\right\}$ — вероятность события A при условии, что справедлива гипотеза H_j, $j = 0, 1$. Указанные вероятности вычисляют с использованием функции плотности распределения случайной выборки $\vec{X}_n$:

$$\alpha = \int\limits_{W}\!\!\ldots\!\!\int \prod_{k=1}^{n} p\left(t_k;\theta_0\right) dt_1 \ldots dt_n,$$

$$\beta = \int\limits_{\overline{W}}\!\!\ldots\!\!\int \prod_{k=1}^{n} p\left(t_k;\theta_1\right) dt_1 \ldots dt_n.$$

Вероятность совершения ошибки первого рода α называют также ***уровнем значимости критерия.***

Величину $1-\beta$, равную вероятности отвергнуть основную гипотезу H_0, когда она неверна, называют ***мощностью критерия.***