3. Интервальные статистические оценки

При выборке малого объема точечные статистические оценки приводят к грубым ошибкам, поэтому используют интервальные оценки.

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами - концами интервала.

Точностью оценки называют величину δ, удовлетворяющую неравенству $\left|\theta-\theta^*\right|<\delta$.

Надежностью оценки называют вероятность γ, с которой осуществляется неравенство $\left|\theta-\theta^*\right|<\delta$.

Доверительным называют интервал $(\theta^*-\delta, \theta^*+\delta)$ который покрывает неизвестный параметр θ с заданной надежностью γ.

3.2.1 Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормальной случайной величины

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально, причем среднее квадратическое отклонение σ является известным. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a по выборочной средней $\bar{x}_B$.

Доверительный интервал, покрывающий параметр a с надежностью γ, если известно среднее квадратичное отклонение σ, имеет вид

$$\bar{x}_B-\frac{u_\gamma\sigma}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}_B+\frac{u_\gamma\sigma}{\sqrt{n}},$$

где n - объем выборки.

Параметр u_γ можно определить по таблице значений функции $\Phi(x)$ (приложение 1), используя надежность оценки γ: $\Phi(u)=\frac{\gamma}{2}$.

Задание 1.

Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с неизвестным математическим ожиданием a и известной дисперсией $\sigma^2=144$. По выборке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ объема $n=110$ вычислено выборочное среднее $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=a^*=120$. Определить доверительный интервал для неизвестного параметра распределения a, отвечающий заданной доверительной вероятности $\gamma=0{,}95$.

Решение

Доверительный интервал, покрывающий параметр a с надежностью γ=0,95, если известно среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 12$, имеет вид

$$\bar{x}_B - \frac{u_\gamma \sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \frac{u_\gamma \sigma}{\sqrt{n}},$$

где объем выборки n=110, выборочное среднее $a^* = 120$. Параметр u_γ определим по таблице значений функции $\Phi(x)$ (приложение 1), используя надежность оценки γ =0,95: $\Phi(u)=\frac{\gamma}{2}$=0,475, $u_\gamma = 1{,}96$.

Имеем $120 - \frac{1{,}96 \cdot 12}{\sqrt{110}} < a < 120 + \frac{1{,}96 \cdot 12}{\sqrt{110}}$, $117{,}757 < a < 122{,}243$. Таким образом, с надежностью γ=0,95 можно утверждать, что доверительный интервал (117,757; 122,243) покрывает неизвестный параметр a.

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально, причем среднее квадратическое отклонение σ является неизвестным, однако известно исправленное среднее квадратическое отклонение S. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a по выборочной средней $\bar{x}_B$.

Доверительный интервал, покрывающий параметр a с надежностью γ, если неизвестно среднее квадратичное отклонение, имеет вид

$$\bar{x}_B - \frac{tS}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \frac{tS}{\sqrt{n}}.$$

Параметр t_γ можно определить по таблице значений функции $t_\gamma = t(\gamma, n-1)$ (приложение 2), используя надежность оценки γ и число степеней свободы $n-1$.

Задание 6

Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с неизвестным математическим ожиданием a и дисперсией σ^2. По выборке (x_1, x_2, ... ,x_n) объема n=26 вычислены оценки

$$a^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 1{,}7, \left(\sigma^2\right)^* = \frac{1}{n-1}\sum_{n=1}^{n}\left(x_i - a^*\right)^2 = 0{,}8$$

неизвестных параметров. Найти доверительный интервал для математического ожидания a, отвечающий доверительной вероятности γ=0,9.

Решение

Доверительный интервал, покрывающий математическое ожидание a с надежностью γ=0,9, если неизвестно среднее квадратичное отклонение, имеет вид

$$\bar{x}_B - \frac{tS}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \frac{tS}{\sqrt{n}},$$

где объем выборки n=26, выборочное среднее $a^* = 1{,}7$, исправленное среднее квадратическое отклонение S=$\sigma^* = \sqrt{\left(\sigma^2\right)^*} = \sqrt{0{,}8}$. Параметр t определим по специальной таблице значений t_γ (приложение 2), используя объем выборки n=26 и надежность оценки γ=0,9: $t_\gamma = t(\gamma, n-1) = t(0{,}9;25) = 1{,}708$. Имеем

$$1{,}7 - \frac{1{,}708 \cdot \sqrt{0{,}8}}{\sqrt{26}} < a < 1{,}7 + \frac{1{,}708 \cdot \sqrt{0{,}8}}{\sqrt{26}},\ 1{,}4 < a < 2.$$

Таким образом, с надежностью γ=0,9 можно утверждать, что доверительный интервал (1,4; 2) покрывает неизвестный параметр a.

3.2.2 Доверительный интервал для оценки дисперсии нормальной случайной величины

Доверительный интервал для дисперсии σ^2 нормальной случайной величины имеет вид

$$\frac{(n-1)\sigma^{*2}}{\chi^2_{(2)}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\sigma^{*2}}{\chi^2_{(1)}},$$

где n - объем выборки, σ^* - исправленное среднее квадратическое отклонение, $\chi^2_{(1)}, \chi^2_{(2)}$ определяются по специальным таблицам (приложение 3), используя число степеней свободы и доверительную вероятность:

$$\chi^2_{(1)} = \chi^2(\nu,\alpha) = \chi^2(n-1,\frac{1+\gamma}{2}),\ \chi^2_{(2)} = \chi^2(\nu,\alpha) = \chi^2(n-1,\frac{1-\gamma}{2})$$

Задание 7

В результате 16 опытов получена несмещенная оценка $\left(\sigma^2\right)^* = 64$ для дисперсии нормальной случайной величины. Найти доверительный интервал для дисперсии при доверительной вероятности γ =0,98.

Решение

Доверительный интервал для дисперсии σ^2 нормальной случайной величины имеет вид

$$\frac{(n-1)\sigma^{*2}}{\chi^2_{(2)}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\sigma^{*2}}{\chi^2_{(1)}},$$

где объем выборки n =16, исправленное среднее квадратическое отклонение $\left(\sigma^2\right)^* = 64$. По таблице критических точек распределения χ^2 (приложение 3) находим

$$\chi^2_{(1)} = \chi^2(n-1,\frac{1+\gamma}{2}) = \chi^2(16-1,\frac{1+0{,}98}{2}) = \chi^2(15;0{,}99) = 5{,}23,$$

$$\chi^2_{(2)} = \chi^2(n-1,\frac{1-\gamma}{2}) = \chi^2(16-1,\frac{1-0{,}98}{2}) = \chi^2(15;0{,}01) = 30{,}6.$$

Получаем $\frac{(16-1)64}{30{,}6} < \sigma^2 < \frac{(16-1)64}{5{,}23}$, $31{,}373 < \sigma^2 < 183{,}556$.

3.2.3 Доверительный интервал для оценки вероятности биномиального распределения

Доверительный интервал для оценки вероятности биномиального распределения по относительной частоте имеет вид $p_1 < p < p_2$,

$$p_1 = \frac{n}{u_\gamma^2 + n}\left(\omega + \frac{u_\gamma^2}{2n} - u_\gamma\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n} + (\frac{u_\gamma}{2n})^2}\right),$$

$$p_2 = \frac{n}{u_\gamma^2 + n}\left(\omega + \frac{u_\gamma^2}{2n} + u_\gamma\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n} + (\frac{u_\gamma}{2n})^2}\right),$$

где n - число независимых испытаний, m - число испытаний, в которых наблюдалось событие, $\omega = \frac{m}{n}$ - относительная частота появления события. Параметр u_γ можно определить по таблице значений функции $\Phi(x)$ (приложение 1), используя надежность оценки γ: $\Phi(u) = \frac{\gamma}{2}$.

Задание 8

В серии из 41 выстрела по мишени наблюдалось 24 попадания. Найти доверительный интервал для вероятности p попадания в мишень при доверительной вероятности γ=0,95.

Решение

Доверительный интервал для оценки вероятности биномиального распределения по относительной частоте имеет вид

$$\left(\frac{n}{u_\gamma^2+n}\left(\omega+\frac{u_\gamma^2}{2n}-u_\gamma\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}+\left(\frac{u_\gamma}{2n}\right)^2}\right);\ \frac{n}{u_\gamma^2+n}\left(\omega+\frac{u_\gamma^2}{2n}+u_\gamma\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}+\left(\frac{u_\gamma}{2n}\right)^2}\right)\right)$$

где число независимых испытаний n =41, число испытаний, в которых наблюдалось событие m =24, относительная частота появления события $\omega = \frac{m}{n} = \frac{24}{41}$.

Параметр u_γ определим по таблице значений функции $\Phi(x)$ (приложение 1), используя надежность оценки γ=0,95: $\Phi(u) = \frac{\gamma}{2}$=0,475, $u_\gamma = 1{,}96$. Имеем

$$\frac{n}{u_\gamma^2+n}\left(\omega+\frac{u_\gamma^2}{2n}-u_\gamma\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}+\left(\frac{u_\gamma}{2n}\right)^2}\right) = \frac{41}{1{,}96^2+41}\times$$

$$\times\left(\frac{24}{41}+\frac{1{,}96^2}{2\cdot 41}-1{,}96\sqrt{\frac{\frac{24}{41}\left(1-\frac{24}{41}\right)}{41}+\left(\frac{1{,}96}{2\cdot 41}\right)^2}\right) = 0{,}434$$

$$\frac{n}{u_\gamma^2+n}\left(\omega+\frac{u_\gamma^2}{2n}+u_\gamma\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}+(\frac{u_\gamma}{2n})^2}\right)=\frac{41}{1{,}96^2+41}\times$$

$$\times\left(\frac{24}{41}+\frac{1{,}96^2}{2\cdot 41}+1{,}96\sqrt{\frac{\frac{24}{41}\left(1-\frac{24}{41}\right)}{41}+(\frac{1{,}96}{2\cdot 41})^2}\right)=0{,}722$$

Таким образом, с надежностью γ=0,95 можно утверждать, что доверительный интервал (0,434; 0,722) покрывает неизвестный параметр p.

Если при проведении испытании событие ни разу не появилось, то нижняя доверительная граница равна нулю, а верхняя определяется по формуле $1-\sqrt[n]{1-\gamma}$.

Условия задач.

1. По данным выборки объѐма n из генеральной совокупности нормально распределѐнного признака X найдено исправленное среднее квадратическое отклонение S. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение δ с надѐжностью γ.

1. n=20 S=0,5 γ=0,999
2. n=10 S=1,5 γ=0,99
3. n=6 S=4,5 γ=0,95
4. n=30 S=0,8 γ=0,999
5. n=9 S=2,4 γ=0,99

2. Заданы среднее квадратическое отклонение s нормально распределенной случайной величины, выборочное среднее $\bar{x}_в$ и объем выборки N. Найти доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью g.

S = 4; = 24; N = 36; g = 0,87.

3. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью P=0,95 неизвестного математического ожидания A нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если даны генеральное среднее квадратическое отклонение S=5, выборочная средняя $\bar{x}_B = 14$, а объем выборки N=25.