Последовательный Критерий отношения правдоподобия

1. Построение оптимальных критериев

Критерий отношения правдоподобия. Выборка $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ состоит из независимых и одинаково распределённых величин, про распределение которых возможны только две гипотезы:

$$H_1 = \{X_i \in \mathcal{F}_1\} \quad \text{и} \quad H_2 = \{X_i \in \mathcal{F}_2\}.$$

Пусть $f_1(y)$ и $f_2(y)$ — плотности распределений $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ соответственно. Термин «плотность» здесь понимается в смысле равенства (6) . Построим функции правдоподобия для этих распределений:

$$f_1(\vec{X}) = \prod_{i=1}^{n} f_1(X_i) \quad \text{и} \quad f_2(\vec{X}) = \prod_{i=1}^{n} f_2(X_i).$$

Пусть выполнено предположение (I).

(I) Распределения $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ либо оба дискретны, либо оба абсолютно непрерывны.

Замечание 16. Если одно из распределений дискретно, а другое абсолютно непрерывно, то всегда существует критерий с нулевыми вероятностями ошибок. Смешанные распределения мы рассматривать не будем. Математики вместо (I) могут предполагать, что оба распределения абсолютно непрерывны относительно одной и той же σ-конечной меры и имеют относительно неё плотности $f_1(y)$ и $f_2(y)$.

Мы будем выбирать гипотезу в зависимости от отношения функций правдоподобия. Обратимся к примеру 37. Естественным кажется принимать вторую гипотезу, если X_1 лежит правее точки пересечения плотностей $b = 1/2$: *там, где вторая плотность больше, принимать вторую гипотезу, там, где первая — первую*. Такой критерий сравнивает отношение $f_2(x_1, \ldots, x_n)/f_1(x_1, \ldots, x_n)$ с единицей, относя к критической области ту часть $\mathbb{R}^n$, где это отношение больше единицы. Заметим, что при этом мы получим ровно один, не обязательно оптимальный, критерий с некоторым фиксированным размером и мощностью.

Если нужно получить критерий с заранее заданным размером $\alpha_1 = \varepsilon$, либо иметь возможность варьировать и размер, и мощность критерия, то следует рассмотреть класс похожим образом устроенных критериев, введя свободный параметр: *там, где вторая плотность в c раз превосходит первую, выбирать вторую гипотезу, иначе — первую*: сравнивать отношение плотностей $f_2(x_1, \ldots, x_n)/f_1(x_1, \ldots, x_n)$ не с единицей, а с некоторой постоянной c.

Назовём *отношением правдоподобия* частное

$$T(\vec{x}) = T(x_1, \ldots, x_n) = \frac{f_2(x_1, \ldots, x_n)}{f_1(x_1, \ldots, x_n)}\,, \tag{21}$$

рассматривая его лишь при таких значениях $\vec{x}$, когда хотя бы одна из плотностей отлична от нуля. Имеется в виду, что $0/a = 0$, $a/0 = +\infty$.

Конструкция критерия, который мы описали выше, сильно усложнится в случае, когда распределение случайной величины $T(\vec{X})$ не является непрерывным, т. е. существует такое число c, вероятность попасть в которое $\Delta_c = \mathsf{P}_{H_1}\bigl(f_2(\vec{X})/f_1(\vec{X}) = c\bigr)$ отлична от нуля. Это означает, что на некотором «большом» множестве значений выборки обе гипотезы «равноправны»: отношение правдоподобия постоянно. Относя это множество целиком к критическому множеству или целиком исключая из него, мы меняем вероятность ошибки первого рода (размер) критерия сразу на положительную величину Δ_c:

$$\mathsf{P}_{H_1}(T(\vec{X}) \geqslant c) = \mathsf{P}_{H_1}(T(\vec{X}) > c) + \mathsf{P}_{H_1}(T(\vec{X}) = c) = \mathsf{P}_{H_1}(T(\vec{X}) > c) + \Delta_c.$$

И если вдруг мы захотим приравнять размер критерия заранее выбранному числу ε, может случиться так, что у критерия с критическим множеством $S = \{T(\vec{x}) \geqslant c\}$ размер превысит ε, а у критерия с критическим множеством $S = \{T(\vec{x}) > c\}$ размер будет меньше, чем ε.

Чтобы избежать этой искусственной проблемы, предположим (II).

(II) Функция $R(c) = \mathsf{P}_{H_1}(T(\vec{X}) \geqslant c)$ непрерывна по c при $c > 0$.

Здесь $R(c)$ есть просто хвост функции распределения случайной величины $T(\vec{X})$, вычисленной при верной первой гипотезе:

$$R(c) = 1 - \mathsf{P}_{H_1}(T(\vec{X}) < c).$$

Её непрерывность означает, что величина $\Delta_c = \mathsf{P}_{H_1}(T(\vec{X}) = c)$ равна нулю для любого $c > 0$.

Определение 28. В условиях предположений (I), (II) критерий

$$\delta_c(\vec{X}) = \begin{cases} H_1, & \text{если } T(\vec{X}) < c, \\ H_2, & \text{если } T(\vec{X}) \geqslant c \end{cases} = \begin{cases} H_1, & \text{если } \dfrac{f_2(X_1, \ldots, X_n)}{f_1(X_1, \ldots, X_n)} < c, \\ H_2, & \text{если } \dfrac{f_2(X_1, \ldots, X_n)}{f_1(X_1, \ldots, X_n)} \geqslant c \end{cases}$$

назовём *критерием отношения правдоподобия* (КОП). Размер и вероятность ошибки второго рода этого критерия равны соответственно

$$\alpha_1(\delta_c) = \mathsf{P}_{H_1}(T(\vec{X}) \geqslant c) = R(c), \qquad \alpha_2(\delta_c) = \mathsf{P}_{H_2}(T(\vec{X}) < c).$$

Явный вид оптимальных критериев. Следующая теорема утверждает, что все оптимальные критерии суть критерии отношения правдоподобия. Третье утверждение теоремы называют *леммой Неймана — Пирсона*.

Т е о р е м а 21. *Пусть выполнены предположения* (I) *и* (II). *Тогда критерий отношения правдоподобия является*

1) *минимаксным критерием при c таком, что* $\alpha_1(\delta_c) = \alpha_2(\delta_c)$;

2) *байесовским критерием при заданных априорных вероятностях r и s, если $c = r/s$*;

3) *НМК размера* ε, *где* $0 < \varepsilon \leqslant \mathsf{P}_{H_1}(f_2(\vec{X}) > 0)$, *если c выбрано так, что* $\alpha_1(\delta_c) = \varepsilon$.

У п р а ж н е н и е. Прочитать доказательство теоремы 21 в [1, § 2, гл. 3].

П р и м е р 38. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из нормального распределения со средним a и единичной дисперсией. Построим минимаксный, байесовский при $r = 1/3$, $s = 2/3$ и наиболее мощный критерии для проверки гипотезы $H_1 = \{a = a_1\}$ против альтернативы $H_2 = \{a = a_2\}$, где $a_1 < a_2$.

Отношение правдоподобия имеет абсолютно непрерывное распределение при любой из гипотез, поэтому условие (II) выполнено. Построим критерий отношения правдоподобия. Достаточно описать его критическую область $S = \{\delta(\vec{X}) = H_2\}$. Она определяется неравенством

$$T(\vec{X}) = \frac{f_2(\vec{X})}{f_1(\vec{X})} = \exp\left\{ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a_1)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a_2)^2 \right\} \geqslant c. \qquad (22)$$

Критерий будет байесовским при $c = r/s = 1/2$. Упростим неравенство (22). Получим

$$\delta(\vec{X}) = H_2 \quad \text{при} \quad \overline{X} \geqslant \frac{a_1 + a_2}{2} - \frac{\ln 2}{n(a_2 - a_1)}.$$

Чтобы построить минимаксный и наиболее мощный критерии, запишем неравенство (22) в эквивалентном виде $\overline{X} \geqslant c_1$, и искать будем c_1, а не c. Размер и вероятность ошибки второго рода равны соответственно

$$\begin{aligned}
\alpha_1(\delta) &= \mathsf{P}_{H_1}\left(\overline{X} \geqslant c_1\right) = \mathsf{P}_{H_1}\left(\sqrt{n}\,(\overline{X} - a_1) \geqslant \sqrt{n}\,(c_1 - a_1)\right) = \\
&= 1 - \Phi_{0,1}\left(\sqrt{n}\,(c_1 - a_1)\right), \\
\alpha_2(\delta) &= \mathsf{P}_{H_2}\left(\overline{X} < c_1\right) = \mathsf{P}_{H_2}\left(\sqrt{n}\,(\overline{X} - a_2) < \sqrt{n}\,(c_1 - a_2)\right) = \\
&= \Phi_{0,1}\left(\sqrt{n}\,(c_1 - a_2)\right).
\end{aligned}$$

Равенство $\alpha_1(\delta) = \varepsilon$ означает, что $\sqrt{n}(c_1 - a_1) = \tau_{1-\varepsilon}$, где $\tau_{1-\varepsilon}$ — квантиль уровня $1-\varepsilon$ стандартного нормального распределения. Тогда выразим $c_1 = a_1 + \tau_{1-\varepsilon}/\sqrt{n}$. Получим НМК размера ε

$$\delta(\vec{X}) = H_2 \quad \text{при} \quad \overline{X} \geqslant a_1 + \frac{\tau_{1-\varepsilon}}{\sqrt{n}}.$$

При $\alpha_1(\delta) = \alpha_2(\delta)$ получим минимаксный критерий. Пользуясь свойствами функции распределения стандартного нормального закона, запишем

$$1 - \Phi_{0,1}\left(\sqrt{n}\,(c_1 - a_1)\right) = \Phi_{0,1}\left(\sqrt{n}\,(c_1 - a_2)\right) = 1 - \Phi_{0,1}\left(\sqrt{n}\,(a_2 - c_1)\right),$$

откуда $c_1 - a_1 = a_2 - c_1$ и $c_1 = (a_1 + a_2)/2$. Минимаксный критерий имеет вид

$$\delta(\vec{X}) = H_2 \quad \text{при} \quad \overline{X} \geqslant \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

П р и м е р 39. Имеется выборка $X_1, \ldots, X_n$ из нормального распределения со средним $a = 0$ и дисперсией σ^2, $\sigma > 0$. Построим наиболее мощный критерий размера ε для проверки гипотезы $H_1 = \{\sigma = \sigma_1\}$ против альтернативы $H_2 = \{\sigma = \sigma_2\}$, где $\sigma_1 < \sigma_2$.

Отношение правдоподобия снова имеет абсолютно непрерывное распределение при любой из гипотез, поэтому условие (II) выполнено. Критическая область критерия отношения правдоподобия $S = \{\delta(\vec{X}) = H_2\}$ определяется неравенством

$$T(\vec{X}) = \frac{\sigma_1^n}{\sigma_2^n} \exp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}\right)\sum_{i=1}^n X_i^2\right\} \geqslant c,$$

что равносильно неравенству $\overline{X^2} \geqslant c_1$. Найдём c_1, при котором размер критерия равен ε:

$$\alpha_1(\delta) = \mathsf{P}_{H_1}\left(\overline{X^2} \geqslant c_1\right) = \mathsf{P}_{H_1}\left(\frac{n\overline{X^2}}{\sigma_1^2} \geqslant \frac{nc_1}{\sigma_1^2}\right) = 1 - H_n\left(\frac{nc_1}{\sigma_1^2}\right) = \varepsilon.$$

Отсюда $nc_1/\sigma_1^2 = h_{1-\varepsilon}$, где $h_{1-\varepsilon}$ — квантиль χ^2-распределения с n степенями свободы. Тогда $c_1 = h_{1-\varepsilon}\sigma_1^2/n$ и НМК размера ε имеет вид

$$\delta(\vec{X}) = H_2 \quad \text{при} \quad \overline{X^2} \geqslant \frac{h_{1-\varepsilon}\sigma_1^2}{n}.$$

Следующее определение касается асимптотических свойств последовательности критериев, построенных по выборке растущего объёма n в задаче проверки двух простых гипотез.

О п р е д е л е н и е 29. Критерий $\delta_n = \delta_n(X_1, \ldots, X_n)$ называется критерием *асимптотического размера* ε, если $\alpha_1(\delta_n) \to \varepsilon$ при $n \to \infty$. Критерий $\delta_n = \delta_n(X_1, \ldots, X_n)$ называется *состоятельным*, если $\alpha_2(\delta_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

З а м е ч а н и е 17. Отметим снова, что для сложной гипотезы H_i вероятность ошибки i-го рода $\alpha_i(\delta_n) = \alpha_i(\delta_n, \mathcal{F})$ зависит от конкретного распределения $\mathcal{F}$, удовлетворяющего этой гипотезе, по которому и вычисляется вероятность ошибки. Тогда сходимость в определении 29 должна иметь место для каждого такого распределения $\mathcal{F}$.

П р и м е р 40. Является ли состоятельными НМК, построенные нами в двух предыдущих примерах? Проверим состоятельность критерия из примера 38:

$$\delta_n(\vec{X}) = H_2 \quad \text{при} \quad \overline{X} \geqslant a_1 + \frac{\tau_{1-\varepsilon}}{\sqrt{n}}.$$

Вероятность ошибки второго рода этого критерия равна

$$\alpha_2(\delta_n) = \mathsf{P}_{H_2}\Big(\overline{X} < a_1 + \frac{\tau_{1-\varepsilon}}{\sqrt{n}}\Big) = \mathsf{P}_{H_2}\Big(\overline{X} - \frac{\tau_{1-\varepsilon}}{\sqrt{n}} < a_1\Big).$$

При верной гипотезе H_2 по ЗБЧ

$$\xi_n = \overline{X} - \frac{\tau_{1-\varepsilon}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{p}} a_2 > a_1.$$

Из сходимости по вероятности следует слабая сходимость, т. е. сходимость функций распределения $F_{\xi_n}(x)$ во всех точках непрерывности предельной функции распределения $F_{a_2}(x)$. Функция $F_{a_2}(x) = \mathsf{P}(a_2 < x)$ непрерывна в точке a_1 (*а где разрывна*?) и равна в этой точке нулю. Поэтому

$$\alpha_2(\delta_n) = \mathsf{P}_{H_2}\Big(\overline{X} - \frac{\tau_{1-\varepsilon}}{\sqrt{n}} < a_1\Big) = F_{\xi_n}(a_1) \to F_{a_2}(a_1) = 0.$$

Проверим состоятельность критерия из примера 39:

$$\delta_n(\vec{X}) = H_2 \quad \text{при} \quad \overline{X^2} \geqslant \frac{h_{1-\varepsilon}\,\sigma_1^2}{n}.$$

Вероятность ошибки второго рода этого критерия равна

$$\alpha_2(\delta_n) = \mathsf{P}_{H_2}\Big(\overline{X^2} < \frac{h_{1-\varepsilon}\,\sigma_1^2}{n}\Big).$$

В замечании 14 (с. 78) мы выяснили, что квантили распределения χ^2 с n степенями свободы с ростом n ведут себя следующим образом:

$$h_{1-\varepsilon} = n + \tau_{1-\varepsilon}\sqrt{2n} + o(\sqrt{n}).$$

Тогда
$$\alpha_2(\delta_n) = \mathsf{P}_{H_2}\Bigl(\overline{X^2} < \sigma_1^2 + \sigma_1^2\tau_{1-\varepsilon}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} + o\Bigl(\frac{1}{\sqrt{n}}\Bigr)\Bigr).$$
Осталось перенести в левую часть неравенства всё, что зависит от n, и применить ЗБЧ вместе с определением слабой сходимости: при верной гипотезе H_2
$$\overline{X^2} - \sigma_1^2\tau_{1-\varepsilon}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} + o\Bigl(\frac{1}{\sqrt{n}}\Bigr) \xrightarrow{\text{p}} \sigma_2^2 > \sigma_1^2.$$
В силу непрерывности предельной функции распределения $F_{\sigma_2^2}(x)$ в точке σ_1^2 имеем
$$\alpha_2(\delta_n) = \mathsf{P}_{H_2}\Bigl(\overline{X^2} - \sigma_1^2\tau_{1-\varepsilon}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} + o\Bigl(\frac{1}{\sqrt{n}}\Bigr) < \sigma_1^2\Bigr) \to F_{\sigma_2^2}(\sigma_1^2) = 0.$$

Вопросы и задания

1. Есть две гипотезы: основная состоит в том, что элементы выборки имеют нормальное распределение, а альтернатива — в том, что элементы выборки имеют распределение Пуассона. Построить критерий, обладающий нулевыми вероятностями ошибок первого и второго рода.

2. Говорят, что распределения $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ *взаимно сингулярны*, если существует борелевское множество B такое, что $\mathcal{F}(B) = 0$, $\mathcal{G}(B) = 1$. Есть две гипотезы: основная состоит в том, что элементы выборки имеют распределение $\mathcal{F}$, а альтернатива — в том, что элементы выборки имеют распределение $\mathcal{G}$, причём эти распределения взаимно сингулярны. Построить критерий, обладающий нулевыми вероятностями ошибок и первого, и второго рода.

3. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из биномиального распределения с параметрами m и p, где p может принимать лишь значения $1/3$ и $2/3$ с априорными вероятностями $1/5$ и $4/5$ соответственно, а параметр m известен и фиксирован. Построить байесовский критерий.

4. По выборке из показательного распределения с параметром α построить наиболее мощный критерий асимптотического размера ε, различающий гипотезу $\alpha = \alpha_1$ и альтернативу $\alpha = \alpha_2$, если $\alpha_1 < \alpha_2$. Вычислить предел мощности построенного критерия при $n \to \infty$.