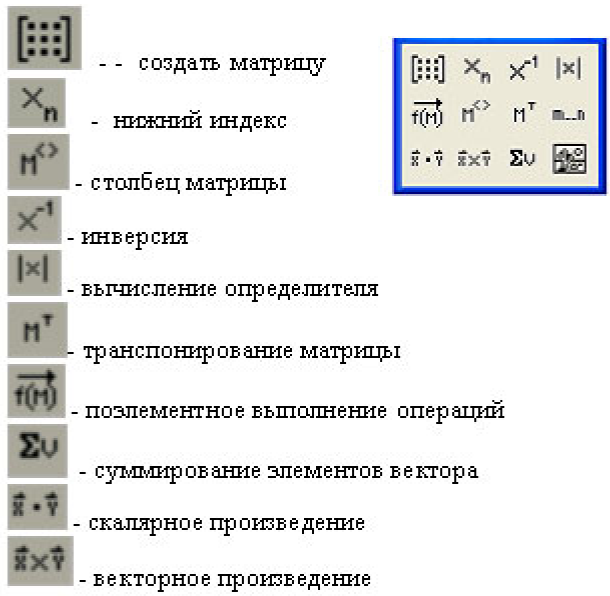
3. Массивы в Mathcad

Столбец чисел называется вектором, а прямоугольная таблица чисел - матрицей. Общий термин для вектора или матрицы - массив. При работе с матрицами используется панель инструментов “Матрицы”:



Обращение к элементам массива

Обращение к элементу массива осуществляется путем записи имени массива и соответствующих индексных выражений, количество которых определяется размерностью массива.

Для ввода индексных выражений ***обязательно нажать клавишу [[ ] – левую квадратную скобку.*** При этом курсор перемещается вниз, и индексные выражения оказываются смещенными относительно имени массива.

Внимание! После завершение ввода индексных выражений ***обязательно охватить выделяющим уголком имя и индексные выражения массива.***

Внимание! Смещение вниз вызывает также нажатие клавиши [·], но она используется ***только для ввода нижних индексов в имени переменной***, но не индексных выражений.

На рисунке показан фрагмент присваивания значений отдельным элементам массивов: векторов x, y и матриц A, B. Здесь же приведен вывод этих массивов.

Начальное значение индексных выражений определяется системной переменной *ORIGIN* и по умолчанию ее значение равно 0.

$$ORIGIN = 0$$

$$x_2 := 4 \qquad A_{2,2} := 2 \qquad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$ORIGIN := 1$$

$$y_2 := 4 \qquad B_{2,2} := 2 \qquad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Для перехода к привычной нумерации (с начального значения 1) необходимо изменить значение системной переменной $ORIGIN$.

Это можно осуществить двумя способами:

а) задать в документе новое значение с помощью оператора присваивания (область действия нового значения – весь ниже лежащий документ);

б) обратиться к пункту меню **Математика** команда ***Опции*** и в появившемся диалоговом окне изменить значение опции *Исходное множество* на нужное значение (например, 1).

Верхний индекс матрицы

Верхний индекс – позволяет обратиться к отдельному столбцу массива.

Чтобы вставить верхний индекс, введите имя массива, а затем нажать клавиши

[Ctrl + 6]

или нажать на кнопку :

$$ORIGIN = 0$$

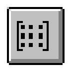
$$v := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad v^{\langle 2 \rangle} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

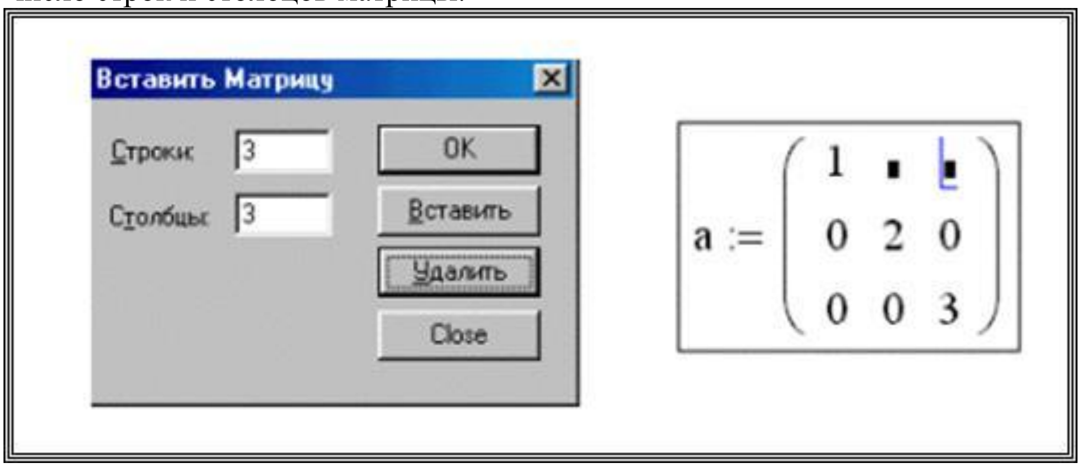
$$ORIGIN := 1$$

$$v := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad v^{\langle 2 \rangle} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Создание вектора и матрицы

Способ 1. Заполнение шаблона.

- введите имя матрицы и знак присваивания (двоеточие)
- щелкните по значку  в панели “Матрицы”. В появившейся диалоговой панели введите число строк и столбцов матрицы.



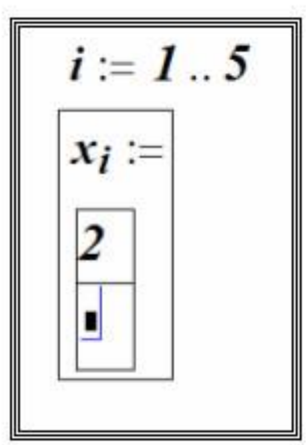
- После нажатия кнопки OK открывается поле для ввода элементов матрицы. Заполните метки - заполнители соответствующими значениями.

Примеры определения векторов и матриц:

$$A1 := \begin{pmatrix} \sqrt[3]{27} \\ 8 \cdot 2 \\ 5^2 \end{pmatrix} \qquad A1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 16 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$A2 := \begin{pmatrix} \cos(0.5) & \tan(7) \\ \pi & \log(8) \\ 6^2 & 2! \end{pmatrix} \qquad A2 = \begin{pmatrix} 0.878 & 0.871 \\ 3.142 & 0.903 \\ 36 & 2 \end{pmatrix}$$

Способ 2. Ввод с клавиатуры в цикле



Способ 3. Формирование элементов по заданному выражению.

Сформировать вектор по правилу $\mathbf{x}_i = \boldsymbol{i}^2, \boldsymbol{i} = 1,\dots,4$ и матрицу D размером $\mathbf{2 \times 3}$ по правилу $D_{i,j} = \dfrac{1}{i+j}, i = \mathbf{1,2};\ j = \mathbf{1,\dots,3}$.

$$ORIGIN := 1$$

$$i := 1..4 \quad x_i := i^2 \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$i := 1..2$$

$$j := 1..3$$

$$D_{i,j} := \frac{1}{i+j} \quad D = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.333 & 0.25 \\ 0.333 & 0.25 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{ORIGIN := 1}$$

$$\mathbf{i := 1..5}$$

$$\mathbf{j := 1..3}$$

$$\mathbf{B_{i,j} := \frac{1}{i + j^2 + 1}} \qquad \mathbf{B = \begin{pmatrix} 0.333 & 0.167 & 0.091 \\ 0.25 & 0.143 & 0.083 \\ 0.2 & 0.125 & 0.077 \\ 0.167 & 0.111 & 0.071 \\ 0.143 & 0.1 & 0.067 \end{pmatrix}}$$

Изменение размера матрицы

Можно изменять размер матрицы, вставляя и удаляя строки и столбцы. Для этого необходимо выполнить следующее:

- Щёлкните на одном из элементов матрицы, чтобы заключить его в выделяющую рамку.
- Щелкните по значку “создать матрицу” в панели “Матрицы. Появляется диалоговое окно.
- Напечатайте число строк и (или) столбцов, которые нужно вставить или удалить. Затем нажмите на “Вставить” или на “Удалить”.

Например, чтобы удалить 1-й столбец, выделите элемент столбца (число 2), вызовите диалоговое окно “создать матрицу”, напечатайте 1 в поле “Столбцов”, 0 в поле “Строк”, и нажмите на “Удалить”.

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 5 & 17 \\ 3.5 & 3.9 & -12.9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 17 \\ 3.9 & -12.9 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим различные ситуации удаления или вставки строк или столбцов:

- Если вставляются строки, Mathcad создает строки пустых полей ниже выбранного элемента. Если вставляются столбцы, Mathcad создает столбцы пустых полей справа от выбранного элемента.
- Чтобы вставить строку выше верхней строки или столбец слева от первого столбца, сначала заключите матрицу целиком в выделяющую рамку, щёлкнув внутри и нажав клавишу пробел несколько раз. Затем щелкните по значку “создать матрицу” и продолжите, как обычно.

- Когда удаляются строки или столбцы, Mathcad удаляет строки вниз от этого элемента, а столбцы — направо от этого элемента.

Внимание!!! При удалении строк или столбцов Mathcad удаляет содержащуюся в них информацию.

Операции над векторами

Название операции	Вид на экране	Клавиши
Скалярное произведение	$x \cdot z$	[*]
Длина вектора	$\|x\|$	[|]
Векторное произведение	$x \times z$	$[Ctrl]+[8]$
Суммирование элементов	$\Sigma\, x$	$[Ctrl]+[4]$
Транспонирование	x^T	$[Ctrl]+[1]$

Операции над матрицами

Название операции	Вид на экране	Клавиши
Транспонирование	A^T	$[Ctrl]+[1]$
Вычисление детерминанта	$\|A\|$	[|]
Выделение k-го столбца матрицы	$A^{\langle k\rangle}$	$[Ctrl]+[6]$
Обращение матрицы	A^{-1}	[^]
Степень матрицы	A^n	[^]
Комплексное сопряжение	$\overline{A}$	["]

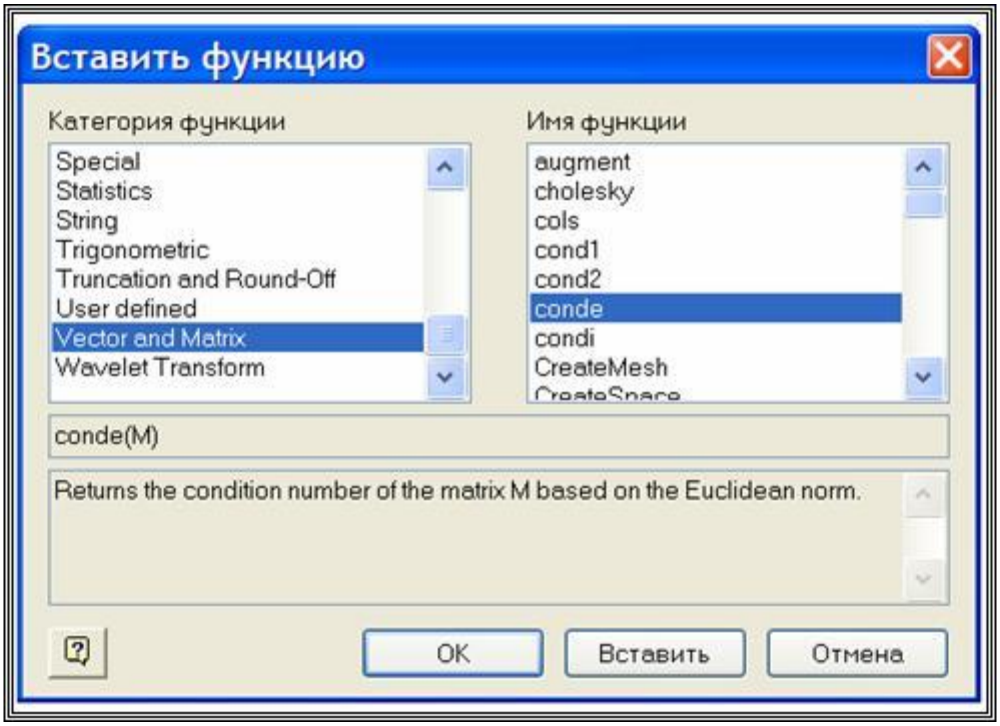
$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} -1.1 & -1.5 & 1.7 \\ 0.6 & 0 & -0.2 \\ -0.1 & 0.5 & -0.3 \end{pmatrix}$$

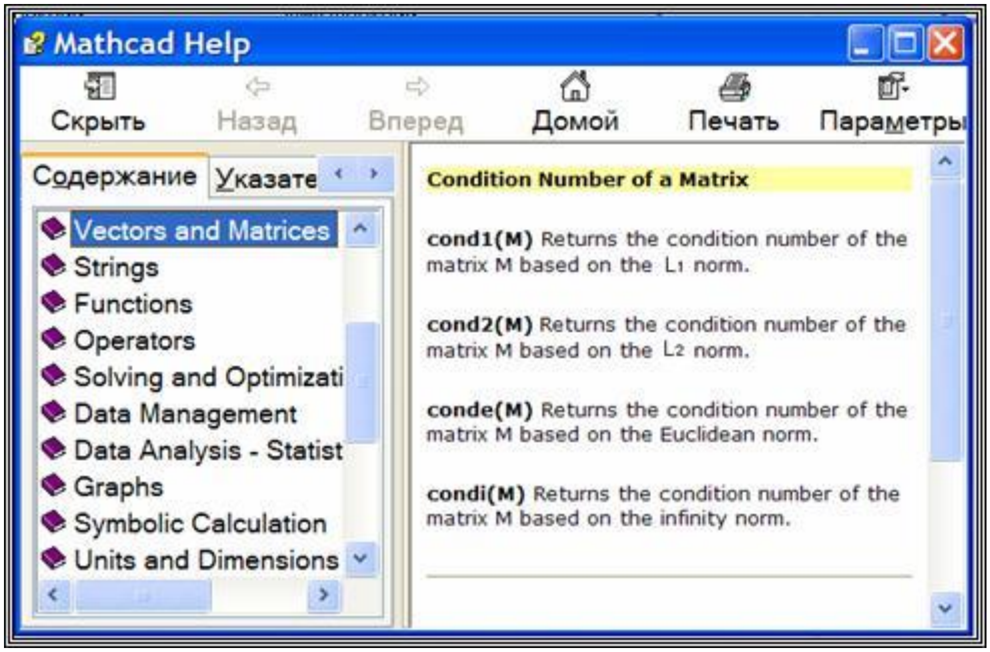
$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}^2 \cdot \mathbf{M}^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 4.938 \times 10^{-15} & -5.107 \times 10^{-15} \\ 1.887 \times 10^{-15} & 1 & -9.548 \times 10^{-15} \\ 2.331 \times 10^{-15} & 1.154 \times 10^{-14} & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{M}| = 10 \qquad |\mathbf{M}^{-2}| = 10 \times 10^{-3}$$

Функции для обработки значений массива можно вводить, используя М**астера функций** (для вызова щелкнуть на значке )





Функции размера и диапазона значений массива

В Mathcad есть несколько функций, которые возвращают информацию относительно размеров массива и диапазона его элементов:

- **rows(A)** – число строк в массиве **A**.
- **cols(A)** – число столбцов в массиве **A**.
- **length(v)** – число элементов в векторе **v**.
- **last(v)** – индекс последнего элемента в векторе **v**.
- **max(A)** – определяет самый большой элемент в массиве **A**; если A имеет комплексные элементы, то возвращает наибольшую вещественную часть плюс i, умноженную на наибольшую мнимую часть.
- **min(A)** – определяет самый маленький элемент в массиве **A**; если **A** имеет комплексные элементы, то возвращает наименьшую вещественную часть плюс **i**, умноженную на наименьшую мнимую часть.

Функции формирование специального типа матриц

- **identity(n)** – формирует n x n единичную матрицу (матрица, все диагональные элементы которой равны 1, а все остальные элементы равны 0).

$$\mathbf{identity}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{<- Единичная матрица}$$

- **geninv(A) –** формирует левую обратную к **A** матрицу **L** такую, что **L·A = I**, где **I** - единичная матрица, имеющая то же самое число столбцов, что и **A**. Матрица **A** - **m x n** вещественная матрица, где **m>=n**.

$$\mathbf{L} := \mathbf{geninv}(\mathbf{M}) \qquad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} -1.1 & -1.5 & 1.7 \\ 0.6 & 0 & -0.2 \\ -0.1 & 0.5 & -0.3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2.442 \times 10^{-15} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Re(A) –** формирует массив, состоящий из элементов, которые являются вещественными частями элементов A.
- **Im(A) –** формирует массив, состоящий из элементов, которые являются мнимыми частями элементов A.
- **diag(v) –** формирует диагональную матрицу, содержащую на диагонали элементы вектора **v.**

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{diag}(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

<- Диагональная матрица, полученная из вектора **b**

- **matrix(m,n,f) –** создает и заполняет матрицу размером **m** x **n**, элемент которой, расположенный в строке **i** и столбце **j**, равен **f(i,j)**.

Почему первый элемент матрицы равен 0 ?

$$f(x,y) := x^2 + (2 \cdot x \cdot y) + y^2$$

$$C := \mathrm{matrix}(3,4,f)$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \end{pmatrix}$$

Функции формирование новых массивов из существующих

- **augment** (**A**, **B**) - формирует массив, расположением **A** и **B** бок о бок, причем массивы **A** и **B** должны иметь одинаковое число строк.
- **stack** (**A, B**) - формирует массив, расположением **A** над **B** , причем массивы **A** и **B** должны иметь одинаковое число столбцов.
- **submatrix (A,** ir, jr, ic, jc**)** - формирует подматрицу, содержащую строки с **ir** по **jr** и столбцы с **ic** по **jc** матрицы **A**.

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} := \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -7 \\ -4 & -9 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 17 \\ 14 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{stack}(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -7 \\ -4 & -9 \\ 11 & 12 \\ 13 & 17 \\ 14 & 19 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{augment}(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 11 & 12 \\ -3 & -7 & 13 & 17 \\ -4 & -9 & 14 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{ORIGIN} := 0$$

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 4 & 4 \\ -5 & -8 & -2 & 3 & 3 \\ -6 & -9 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{submatrix}(\mathbf{M}, 1, 2, 0, 2) = \begin{pmatrix} -5 & -8 & -2 \\ -6 & -9 & -3 \end{pmatrix}$$

Извлекает элементы, расположенные между строками 1 и 2 и между столбцами 0 и 2 (включительно)

Специальные характеристики матрицы

- **tr(M)** – вычисляет сумму диагональных элементов, называемых следом M.
- **rank(A)** – возвращает ранг вещественной матрицы A.
- **norm1(M)** – вычисляет L_1 норму матрицы M.
- **norm2(M)** – вычисляет L_2 норму матрицы M.
- **normi(M)** – вычисляет равномерную норму матрицы M.
- **norme(M)** – вычисляет евклидову норму матрицы M.
- **cond1(M)** – вычисляет число обусловленности матрицы **M,** основанное на L_1 норме.
- **cond2(M)** – вычисляет число обусловленности матрицы M, основанное на L2 норме.
- **conde(M)** – вычисляет число обусловленности матрицы **M,** основанное на евклидовой норме.
- **condi(M)** – вычисляет число обусловленности матрицы **M,** основанное на равномерной норме.

$$\mathbf{norme}(\mathbf{M}) = 16.062 \qquad \mathbf{norme}\left(\mathbf{M}^{-1}\right) = 2.665$$

$$\mathbf{rank}(\mathbf{M}) = 3 \qquad \mathbf{conde}(\mathbf{M}) = 42.8$$

Задание

1. Вычислите матрицу 2*A*B-3*C*D, где:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad D := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Вычислите матрицу F = A*(2B-3*C)-D

3. Найдите определитель и обратную матрицу для матриц:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 11 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 11 & -11 & 3 \\ 2 & -2 & 7 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

4. Вычислите матричные выражения:

$$\left[(A + 2 \cdot B)^T - (3 \cdot A - B)^{-1}\right]^{-1} \qquad (\mathrm{identity}(3) + A)^{-1} + \left(B + 2 \cdot A^{-1}\right)^T$$

5. Получите матрицу C перестановкой 2-го и 3-го столбцов матрицы A
6. Решите систему линейных уравнений A*x=b, где

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 7 \\ -8 & -2 & -9 & -3 \\ 3 & -6 & 5 & -3 \\ 4 & -8 & -3 & -4 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Вектор x вычисляется как $x=A^{-1}*b$.

7. Выясните, являются ли линейно-независимыми векторы p,q,r:

$$p = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -13 \end{pmatrix} \qquad q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad r = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(Напоминаем, что векторы линейно независимы, если смешанное произведение $\overline{(p \times q) \cdot r}$ равно нулю)