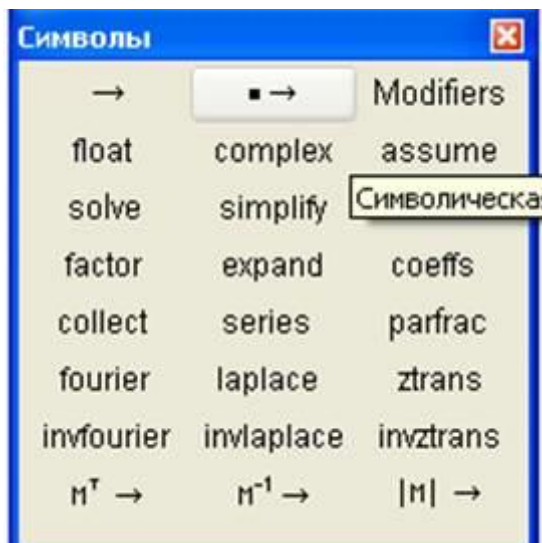


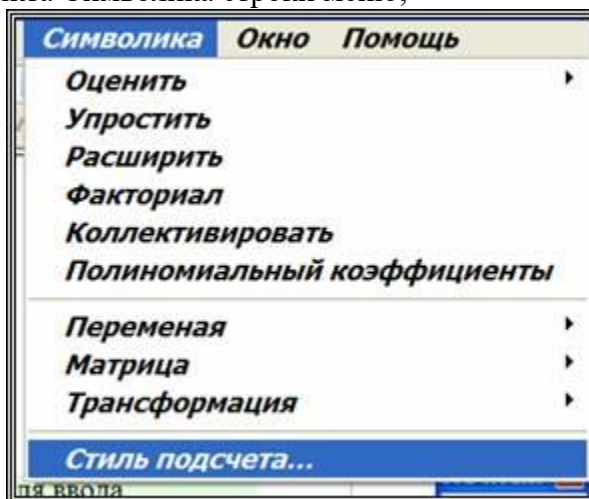
## 5. Символьные вычисления в документе Mathcad



Команды, относящиеся к работе символьного процессора системы Mathcad, содержатся в меню “Символы” (“Symbolics” - символьные вычисления).

Символьные вычисления можно осуществлять двумя способами:

- с помощью команд пункта Символика строки меню;



□ с помощью **оператора символьного вывода** « $\rightarrow$ » и команд символьного процессора, которые вводятся с палитры инструментов “Символы”. По умолчанию символ « $\rightarrow$ » выполняет функцию упрощения (simplify), т.е. берет выражение с левой стороны и помещает его упрощенную версию с правой.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \rightarrow -\infty$$

*Оператор символьного вывода* « $\rightarrow$ » вводится в документ после вычисляемого выражения кнопкой с палитры инструментов Символы.

Для задания типа символьного вычисления (или символьного преобразования) используются специальные команды, кнопки которых также находятся на палитре.

Команды вводятся после вычисляемого выражения.

The diagram shows a large rectangular box containing the expression  $(xx + 2 \cdot yy) \cdot z - z^2 \cdot (x + 5 \cdot y) + z$  followed by the text "coeffs , z". To the right of this expression is a smaller box containing the result:  $0$  at the top,  $xx + 2 \cdot yy + 1$  in the middle, and  $-x - 5 \cdot y$  at the bottom. A yellow callout bubble labeled "Команда" points to the "coeffs" part of the expression. Another yellow callout bubble labeled "Переменная" points to the "z" part of the expression.

**Символьное вычисление сумм, произведений, производных и интегралов.**

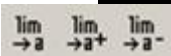
Используя рассмотренные выше операторы суммы, произведения, дифференцирования и интегрирования, можно получать результат в символьном виде.

На рисунке приведены примеры таких вычислений.

The diagram shows several mathematical operations and their results:
 

- $\sum_{i=1}^n i^2 \rightarrow \frac{1}{3} \cdot (n+1)^3 - \frac{1}{2} \cdot (n+1)^2 + \frac{1}{6} \cdot n + \frac{1}{6}$
- $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} \rightarrow 0$
- $\frac{d}{dx} \sin(x) \rightarrow \cos(x)$
- $\int \ln(x) dx \rightarrow x \cdot \ln(x) - x$
- $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^3} dx \rightarrow \frac{1}{2 \cdot a^2}$
- $\int_a^b \frac{1}{x^3} dx \rightarrow \frac{-1}{2 \cdot b^2} + \frac{1}{2 \cdot a^2}$

**Символьное вычисление пределов.** Для этого используются три кнопки



палитры инструментов Исчисления. Назначение этих кнопок понятно из их обозначения. Примеры вычисления пределов приведены на рисунке.

The diagram shows three limit calculations:
 

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 + 3 \cdot x)}{x} \rightarrow 3$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \rightarrow \infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 7}{2 - 4x - 5x^2} \rightarrow \frac{-3}{5}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+2} \right)^n \rightarrow \exp(-2) = 0.135$$

**Символьные алгебраические вычисления.** Символьный процессор Mathcad может выполнять основные алгебраические преобразования, такие как упрощение выражения - simplify, разложение их на множители - series, вычисление коэффициентов полинома - coeffs и т.д. В качестве примеров рассмотрим некоторые из этих преобразований.

Внимание! Если перед вычисляемым алгебраическим выражением задать численные значения переменным, входящим в алгебраическое выражение, то символьный процессор будет «обрабатывать» уже соответствующие числовые.

**Упрощение выражений (команда Simplify).** Для этого необходимо ввести алгебраическое выражение, а затем выполнить команду Simplify палитры инструментов Символика.

Примеры:

$$(3x + 2) - (5x - 3) \rightarrow -2 \cdot x + 5$$

$$\frac{x-3}{4 \cdot x^2 + 24 \cdot x + 36} \cdot \left( \frac{x}{3 \cdot x - 9} - \frac{3}{x^2 + 3 \cdot x} + \frac{x^2 + 9}{27 - 3x^2} \right)^{-1} \text{ simplify } \rightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{(x+3)}$$

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 \text{ simplify } \rightarrow 1$$

$$\frac{x^3 - x}{x^4 - 1} \text{ simplify } \rightarrow \frac{x}{(x^2 + 1)}$$

$$\frac{3 \cdot x^2 - 2 \cdot x}{6 - 7 \cdot x - 3 \cdot x^2} \text{ simplify } \rightarrow \frac{-x}{(x+3)}$$

$$\frac{a - \frac{4 \cdot a - 4}{a}}{\frac{2}{a} - 1} \text{ simplify } \rightarrow 2 - a$$

**Вычисление коэффициентов полинома (команда Coeffs).** Осуществляется преобразование выражения (являющегося полиномом относительно некоторой переменной) к виду  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ .

**Внимание!!!** В команде Coeffs обязательно указывается имя переменной, относительно которой строится полином.

Например, определим коэффициенты полинома относительно z:

$$(xx + 2 \cdot yy) \cdot z - z^2 \cdot (x + 5 \cdot y) + z \text{ coeffs } , z \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ xx + 2 \cdot yy + 1 \\ -x - 5 \cdot y \end{pmatrix}$$

**Решение уравнений**

$$3 \cdot \frac{x}{2 \cdot x + 5} - \frac{28 - 53 \cdot x}{4 \cdot x^2 - 25} - \frac{4 \cdot x}{2x - 5} = 0 \text{ solve, } x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \text{ solve, } \lambda \rightarrow \frac{-\ln\left(\frac{N}{N_0}\right)}{t}$$

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \text{ solve, } N_0 \rightarrow \frac{N}{\exp(-\lambda \cdot t)}$$



$$\begin{pmatrix} x + 13 \cdot y = 2 \\ 2 \cdot x - y = 1 \end{pmatrix} \text{ solve, } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Значения переменных, составляющих решение выводятся **в строку!**

**Проверка** решения заключается в подстановке компонент строки решения вместо соответствующих переменных в уравнения системы. Если уравнение превращается в верное равенство, то его логическое значение есть "истина", а в MathCAD - это 1.

Подстановка значений в уравнения осуществляется вводом **ключевого слова *substitute*** с конкретной формулой подстановки. Ключевое слово и формула разделяются запятой, в формуле используется логический знак равенства. Ключевое слово с шаблоном для формулы удобно вводить соответствующей кнопкой панели [Symbolic](#).

$$\begin{pmatrix} x + 13 \cdot y = 2 \\ 2 \cdot x - y = 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \text{substitute, } x = \frac{5}{9} \\ \text{substitute, } y = \frac{1}{9} \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Логические значения всех уравнений равны единице, следовательно, решение правильное.

### Решение неравенств

$$\frac{4x^2 + x + 1}{3 - 2x - x^2} \leq 1 \text{ solve, } x \rightarrow \left[ \begin{array}{c} x < -3 \\ (-1 \leq x) \cdot \left(x \leq \frac{2}{5}\right) \\ 1 < x \end{array} \right]$$

Можно интерпретировать выведенный вектор-решение следующим образом:  
 первая строка описывает часть решений - это интервал  $(-\infty; -3)$ ;  
 вторая строка представляет вторую часть множества решений как пересечение двух интервалов  $(-\infty; 0.4]$  и  $[-1; +\infty]$ , что дает в итоге интервал  $[-1; 0.4]$ ; третья строка представляет решения интервала  $(1; +\infty)$ . Множество решений  $L$  есть объединение своих частей, поэтому

$$L = (-\infty; -3) \cup [-1; 0.4] \cup (1; +\infty).$$

### Символьное дифференцирование при помощи символьного оператора вывода

$$\frac{d}{dt} (\cos(\omega \cdot t)^2) \rightarrow -2 \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \omega$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{e^{2x}}{x} \right) \rightarrow 4 \cdot \frac{\exp(2 \cdot x)}{x} - 4 \cdot \frac{\exp(2 \cdot x)}{x^2} + 2 \cdot \frac{\exp(2 \cdot x)}{x^3}$$

### Символьное интегрирование при помощи символьного оператора вывода

$$\int x \cdot e^{-2x} dx \rightarrow \frac{-1}{2} \cdot x \cdot \exp(-2 \cdot x) - \frac{1}{4} \cdot \exp(-2 \cdot x)$$

Проверка:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{-1}{2} \cdot x \cdot \exp(-2 \cdot x) - \frac{1}{4} \cdot \exp(-2 \cdot x) \right) \rightarrow x \cdot \exp(-2 \cdot x)$$

$$\int \frac{1 - \cos(x)}{(x - \sin(x))^2} dx \rightarrow \frac{-1}{(x - \sin(x))}$$

Проверка:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{-1}{x - \sin(x)} \right) \rightarrow \frac{1}{(x - \sin(x))^2} \cdot (1 - \cos(x))$$

$$\int_0^{\infty} \exp(-p \cdot t) dt \text{ assume, } p > 0 \rightarrow \frac{1}{p}$$

$$\int_0^{\infty} \exp(-p \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t) dt \text{ assume, } p > 0 \rightarrow \frac{p}{(p^2 + \omega^2)}$$

Вы можете использовать ключевое слово **assume**, например, чтобы задать ограничения типа  $p > 0$  для вычислений.

Кроме символьных алгебраических вычислений символьный процессор Mathcad может выполнять: символьные матричные вычисления (транспонирование и обращение матрицы, вычисление определителя), разложение в ряды, решение уравнений, интегральные преобразования (преобразование Фурье, Лапласа, Z-преобразование).

$$\int_a^b x^2 dx \rightarrow \frac{1}{3} \cdot b^3 - \frac{1}{3} \cdot a^3 \quad \int_a^b x^2 dx \text{ simplify} \rightarrow \frac{1}{3} \cdot b^3 - \frac{1}{3} \cdot a^3$$
$$(x + y)^3 \text{ expand, x} \rightarrow x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot x \cdot y^2 + y^3$$

Дополнительные сведения о символьных вычислениях доступны в этом документе:  
[symbolics.zip](#) (сжатый в архив ZIP документ MathCAD, 235 Кб)