8. Решение оптимизационных задач в пакете MathCAD

Оптимизационные задачи можно разделить на два класса:

задачи безусловной оптимизации (или *оптимизация без ограничений*).

задачи условной оптимизации (*оптимизация с ограничениями*).

Вторая задача отличается от первой тем, что решение ищется только ***среди допустимых значений*** или, иначе, на ***допустимом множестве*** значений переменных задачи, которые удовлетворяют ***заданным ограничениям.***

Решение оптимизационных задач без ограничений

Для этого используются две функции MathCAD:

- ***Maximize*(*f*,<список параметров>)** – вычисление точки максимума;
- ***Minimize*(*f*,<список параметров>)** – вычисление точки минимума,

где *f* – имя минимизируемого функционала, определенного до обращения к функции; <список параметров> – содержит перечисление (через запятую) имен параметров, относительно которых решается оптимизационная задача.

<u>Внимание!</u> Перед обращением к функциям *Maximize, Minimize* (имена которых начинаются прописными буквами) следует обязательно задать начальное значение параметров оптимизации.

Пример. Дан функционал:

$$g(x,y,z)=10\sqrt{x^2-2x+36+y^2+4y+3z^2-18z}.$$

Определить значения *x, y, z,* при которых *g(x, y, z)* достигает минимального значения.

$$g(x,y,z) := 10\cdot\sqrt{x^2-2\cdot x+36+y^2+4\cdot y+3\cdot z^2-18\cdot z}$$

$x := 1$ $y := 1$ $z := 1$ ***Задание точки "старта"***

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} := \mathbf{Minimize}(g,x,y,z) \qquad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} \qquad g(x,y,z) = 20$$

Пример. Дан функционал:

$$\boxed{f(u,v)=\frac{1}{4\pi}e\cdot\frac{-41-32u-16u^2-4v^2+20v}{32}}.$$

Определить значения *u, v,* при которых *f(u,v)* достигает максимального значения.

$$d(u,v) := \frac{1}{4\cdot\pi}\cdot e^{\frac{-41-32\cdot u-16\cdot u^2-4\cdot v^2+20\cdot v}{32}}$$

$u := 0 \quad v := 0$ ***Задание точки "старта"***

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \mathbf{Maximize}(d, u, v) \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2.5 \end{pmatrix} \quad d(u,v) = 0.0795775$$

$$d(u + 0.01\cdot u, v + 0.01\cdot v) = 0.0795673$$

$$d(u - 0.001\cdot u, v - 0.001\cdot v) = 0.0795774$$

Задание. Дан функционал:

$$\varphi(x, y, z) = (\cos(x\cdot y) + \cos(y\cdot z))\sin(x\cdot y\cdot z).$$

Определить точки минимума и максимума этого функционала.

Решение оптимизационных задач с ограничениями

Используются те же функции *Maximize, Minimize*, но они входят уже в блок решения *Given* и перед ними размещаются ограничения в виде равенств или неравенств, определяющие допустимую область значений параметров оптимизации.

Пример. Дан функционал $F(a,b) = 100(a-b)^2 - 50\frac{a}{b}$ и ограничения в виде $a + 2b \le 5;\ \ b \ge 1;\ \ a \ge 0.$

Определить значения *a, b,* доставляющие максимальное значение функционала и удовлетворяющие неравенствам.

$$F(a,b) := 100\cdot(a-b)^2 - 50\cdot\frac{a}{b}$$

$$a := 1 \qquad b := 1$$

Given

$$a + 2\cdot b \le 5 \qquad b \ge 1 \qquad a \ge 0$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := Maximize(F, a, b) \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.5 \end{pmatrix} \quad F(a,b) = 625$$

$$a + 2\cdot b = 5$$

Проверка ограничений

$$b = 2.5$$

Замечание. В оптимизационных задачах с ограничениями решение целесообразно определять ***из необходимых условий экстремума***. Эти условия порождают систему уравнений (чаще всего нелинейных), которые располагаются в блоке ***Given***, вместе с ограничениями, определяющими допустимую область. Само решение ищется с помощью функций ***Find, Minerr***.

Пример. В качестве тестового функционала при поиске точки минимума часто используется функционал Розенброка:

$$\boxed{f(x,y) = 100\,(y - x^2) + (1 - x)^2}.$$

«Поверхность» этого функционала напоминает глубокий овраг, что сильно осложняет работу многих алгоритмов минимизации. Требуется вычислить точку минимума функционала при ограничениях:

$$\boxed{x \ge 0; \quad y \ge 0; \quad y \le 9 - x}.$$

$$f(x,y) := 100\cdot\left(y - x^2\right)^2 + (1 - x)^2$$

$$x := 2 \qquad y := 3$$

Given

$$\frac{d}{dx} f(x,y) = 0 \qquad \frac{d}{dy} f(x,y) = 0 \qquad \textit{Условия минимума}$$

$$x \ge 0 \qquad y \ge 0 \qquad y \le 9 - x \qquad \textit{Ограничения}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := Minerr(x, y) \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = 3.538 \times 10^{-8}$$

Пример (***задача линейного программирования***). Цех малого предприятия должен изготовить 100 изделий трех типов $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ и не менее 20 штук изделий каждого типа. На изделия уходит 4, 3.4 и 2 кг металла соответственно, при его общем запасе 340 кг, а также расходуются по 4.75, 11 и 2 кг пластмассы, при ее общем запасе 400 кг. Прибыль, полученная от каждого изделия равна 4, 3 и 2 рублей.

Определить сколько изделий каждого типа необходимо выпустить, для получения максимальной прибыли в рамках установленных запасов металла и пластмассы.

$$f(x_1, x_2, x_3) := 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3$$

$$x_1 := 1 \quad x_2 := 1 \quad x_3 := 1$$

Given

$$x_1 \geq 20 \quad x_2 \geq 20 \quad x_3 \geq 20$$

$$4 \cdot x_1 + 3.4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \leq 340$$

Ограничения

$$4.75 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \leq 700$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := Maximize\left(f, x_1, x_2, x_3\right) \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 \\ 20 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$4 \cdot x_1 + 3.4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 340$$

$$4.75 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 534$$

Проверка Ограничений

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

Пример 9.2.4 ***(задача нелинейного программирования)***. Пусть вектор v состоит из трех проекций и дан функционал:

$$\boxed{N(\boldsymbol{v}) = \left\|\boldsymbol{v}\right\|^2 + 2\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3.}$$

Вычислить точку минимума этого функционала при ограничениях:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{3} v_i = 1,\ v_i \geq 0.2,\ i = \overline{1,3}.}$$

$$N(v) := (|v|)^2 + v \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$v_2 := 1$

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ ***Точка старта***

Given

$$\sum v = 1 \qquad v > \frac{1}{5}$$

$$v := \mathbf{Minimize}(N, v) \qquad v = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.6 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$ ***Решение***

$$N(v) = 0.64 \qquad \sum v = 1$$ ***Проверка решения***

Задание 9.2.1 (**з**адача линейного программирования). Дан функционал:

$$\boxed{F(x) = 2x_0 + 9x_1 + 15x_2}.$$

Определить точку максимума этого функционала при ограничениях:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_0 \ge 0; \quad x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0; \\ 7x_0 + 3x_1 + x_2 \le 47; \\ 0.5x_0 - 3x_1 + 8x_2 \le 25; \\ 9x_0 + 2x_1 - 10x_2 \le 29. \end{array}}$$

Вычислить значения функционала в этой точке.

<u>Ответ:</u>

максимум функционала достигается в точке (0, 13, 8).

Задание (задача квадратичного программирования). Дан функционал:

$$\boxed{Q(u, v, \omega) = u(15 - u) + 5v(20 - v) + 2\omega(12 - \omega).}$$

Определить точку максимума этого функционала при ограничениях:

$$\boxed{\begin{array}{l} u \ge 0; \quad v \ge 0; \quad \omega \ge 0; \\ 3u + 2v + 4\omega \le 100; \\ u + 7v + \omega \le 90. \end{array}}$$

<u>Ответ:</u>

максимум функционала достигается в точке (7.5, 10, 6).●