7. Решение нелинейных уравнений и систем уравнений в пакете MathCAD

Решение нелинейных уравнений

Вычисление корней численными методами включает два основных этапа:

- *отделение корней;*
- *уточнение корней до заданной точности.*

Рассмотрим эти два этапа подробно.

Отделение корней нелинейного уравнения

Учитывая легкость построения графиков функций в MathCAD, в дальнейшем будет использоваться графический метод отделения корней.

Пример. Дано алгебраическое уравнение

$$x^3 + 3x^2 - 3 = 0.$$

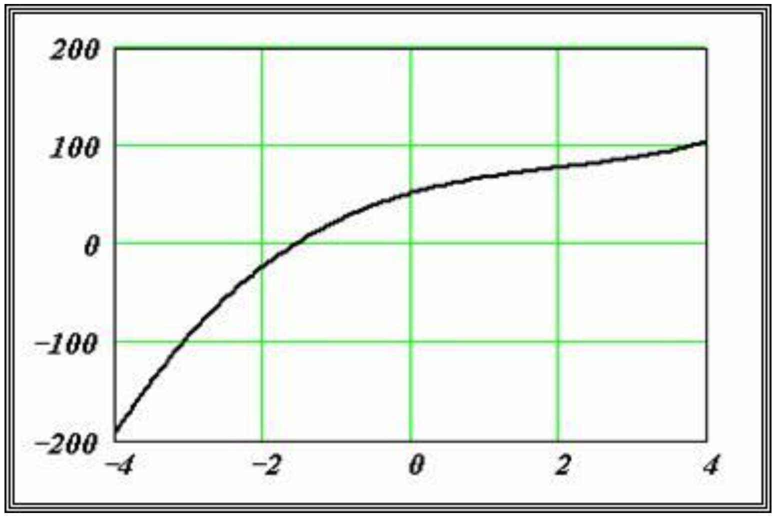
Определить интервалы локализации корней этого уравнения.

Пример. Дано алгебраическое уравнение

$$x^3 - 6x^2 + 21x + 52 = 0.$$

Определить интервалы локализации корней этого уравнения.

На рисунке приведен график функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 21x + 52$, построенный в MathCAD. Видно, что в качестве интервала изоляции можно принять интервал $[-2, 0]$. Однако уравнение имеет три корня. Следовательно, можно сделать вывод о наличии еще двух комплексных корней.



Уточнение корней нелинейного уравнения

Для уточнения корня используются специальные вычислительные методы такие, как метод деления отрезка пополам, метод хорд, метод касательных (метод Ньютона) и многие другие.

Функция *root*. В MathCAD для уточнения *корней любого нелинейного уравнения* (не обязательно только алгебраического) введена функция *root*, которая может иметь два или четыре аргумента, т.е. $\boxed{root(f(x), x)}$ или $\boxed{root(f(x), x, a, b)}$, где $f(x)$ – имя функции или арифметическое выражение, соответствующее решаемому нелинейному уравнению, x – скалярная переменная, относительно которой решается уравнение, a, b – границы интервала локализации корня.

Пример. Используя функцию $root(f(x), x)$, найти все три корня уравнения $x^3 - 6x^2 + 21x + 52 = 0$, включая и два комплексных.

$$a_3 := 1 \quad a_2 := -6 \quad a_1 := 21 \quad a_0 := 52$$

$$f(x) := a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

Вычисление первого корня

$x := -2$ Задание "стартового" значения для первого корня

$$x_1 := root(f(x), x) \quad x_1 = -1.578 \quad \left|f(x_1)\right| = 9.404 \times 10^{-7}$$

Вычисление второго корня

$i := \sqrt{-1}$ $x := 1 + i$ Задание "стартового" значения для второго корня

$$x_2 := root\left(\frac{f(x)}{x - x_1}, x\right) \quad x_2 = 3.789 + 4.313i$$

$$\left|f(x_2)\right| = 8.191 \times 10^{-6}$$

Вычисление третьего корня

$i := \sqrt{-1}$ $x := 1 - i$ Задание "стартового" значения для третьего корня

$$x_3 := root\left[\frac{f(x)}{(x - x_1) \cdot (x - x_2)}, x\right] \quad x_3 = 3.789 - 4.313i$$

$$\left|f(x_3)\right| = 2.047 \times 10^{-6}$$

Заметим, что для вычисления *всех трех корней* использовался прием понижения порядка алгебраического уравнения, рассмотренный в п. 8.1.1. □

Функция root с двумя аргументами требует задания (до обращения к функции) переменной x *начального значения корня из интервала локализации.*

Пример 8.1.5. Используя функцию *root,* вычислить изменения корня нелинейного уравнения $\boxed{e^x - ax^2 = 0}$ при изменении коэффициента *a* от 1 до 10 с шагом 1.

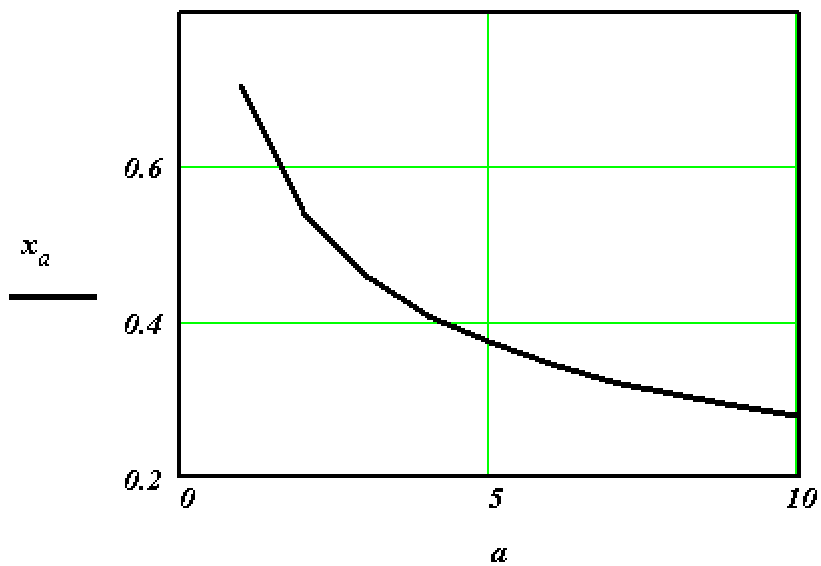
$$solve\_root(a,x) := root\left(e^{-x} - a\cdot x^2, x\right)$$

$$a := 1..10 \qquad x_0 := 0$$

$$x_a := solve\_root\left(a, x_{a-1}\right)$$

$$x_a =$$

0.704
0.54
0.459
0.408
0.371
0.344
0.322
0.304
0.289
0.276



Функция *polyroots*. Для вычисления всех корней алгебраического уравнения порядка n (не выше 5) рекомендуется использовать функцию *polyroots.* Обращение к этой функции имеет вид ***polyroots(v)***, где *v* – вектор, состоящий из n +1 проекций, равных коэффициентам алгебраического уравнения, т.е. $v_0 = a_0,\ v_1 = a_1, \ldots,\ v_n = a_n$. Эта функция не требует проведения процедуры локализации корней.

Пример. Используя функцию *polyroots*, найти все три корня уравнения $x^3 - 6x^2 + 21x + 52 = 0$, включая и два комплексных

$$a_3 := 1 \quad a_2 := -6 \quad a_1 := 21 \quad a_0 := 52$$

$$\boldsymbol{v} := \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{polyroots}(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} -1.578 \\ 3.789 - 4.313i \\ 3.789 + 4.313i \end{pmatrix}$$

Блок Given. При уточнении корня нелинейного уравнения можно использовать специальный вычислительный блок *Given*, имеющий следующую структуру:

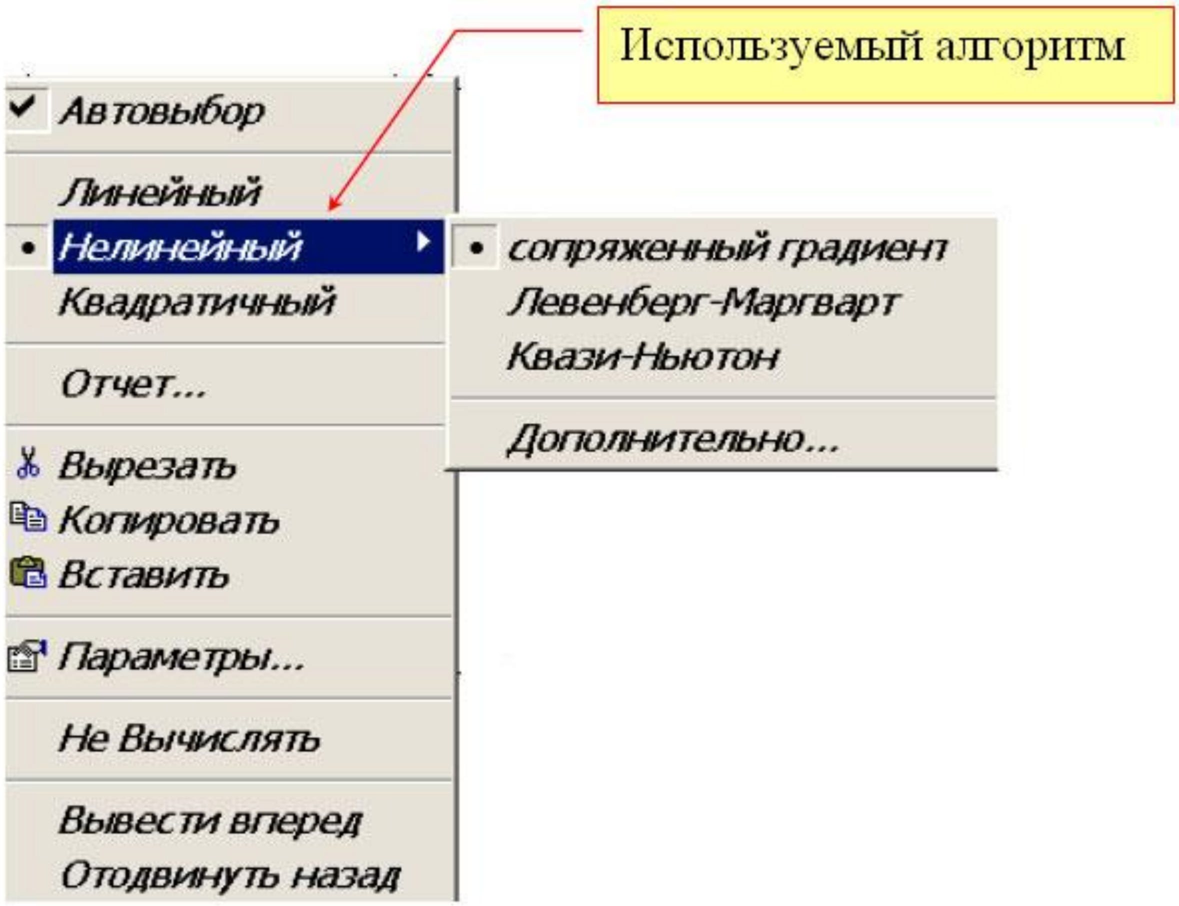
$\langle$ *Начальные условия* $\rangle$
Given
$\langle$ *Равенство* $\rangle$
$\langle$ *Ограничения* $\rangle$
$\langle$ *Вызов функции Find или Minerr* $\rangle$

Решаемое уравнение задается в виде равенства, в котором используется «жирный» знак равно, вводимый с палитры ЛОГИЧЕСКИЙ.

Ограничения содержат равенства или неравенства, которым должен удовлетворять искомый корень.

Функция ***Find*** уточняет корень уравнения, вызов этой функции имеет вид ***Find(x)***, где *x* – переменная, по которой уточняется корень. Если корня уравнения на заданном интервале не существует, то следует вызвать функцию *Minerr(x),* которая возвращает *приближенное значение корня.*

Для выбора алгоритма уточнения корня необходимо щелкнуть правой кнопкой мыши на имени функции *Find(x)* и в появившемся контекстном меню (см. рисунок) выбрать подходящий алгоритм.



Аналогично можно задать алгоритм решения и для функции ***Minerr(x).***

Использование численных методов в функциях *Find(x), Minerr(x)* требует перед блоком *Given* задать начальные значения переменным, по которым осуществляется поиск корней уравнения.

Пример. Используя блок *Given,* вычислите корень уравнения $x^3 - 6x^2 + 21x + 52 = 0$ в интервале отделения $[-5, -1]$.

$a_3 := 1 \quad a_2 := -6 \quad a_1 := 21 \quad a_0 := 52$

$f(x) := a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

$x := -2$ Задание начального значения

Given

$f(x) = 0$ Задание нелинейного уравнения

$-4 \le x \le -1$ Задание интервала отделения

$Find(x) = -1.578$ Вычисленное значение корн

Решение систем уравнений

В зависимости от того, какие функции входят в систему уравнений, можно выделить два класса систем:

- алгебраические системы уравнений;
- трансцендентные системы уравнений.

Среди алгебраических систем уравнений особое место занимают системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Системы линейных алгебраических уравнений

Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) называется система вида:

$$\begin{gathered} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,m}x_m = b_1; \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,m}x_m = b_2; \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,m}x_m = b_n, \end{gathered}$$

В матричном виде систему можно записать как

$$Ax = b,$$

где A – матрица размерности $n \times m$, b – вектор с m проекциями.

Для вычисления решения СЛАУ следует использовать функцию *lsolve,* обращение к которой имеет вид: *lsolve(A,b), где A* – матрица системы, b – вектор правой части.

Решение систем нелинейных уравнений

MathCAD дает возможность находить решение системы уравнений численными методами, при этом максимальное число уравнений в MathCAD2001i доведено до 200.

Для решения системы уравнений необходимо выполнить следующие этапы.

Задание начального приближения для всех неизвестных, входящих в систему уравнений. При небольшом числе неизвестных этот этап можно выполнить графически, как показано в примере.

Пример. Дана система уравнений:

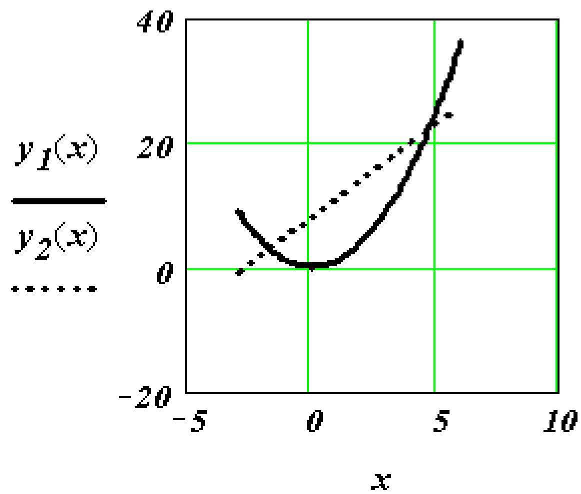
$$y = x^2;$$

$$y = 8 + 3x.$$

Определить начальные приближения для решений этой системы.

$$y_1(x) := x^2 \qquad x := -3, -2.95 .. 6$$

$$y_2(x) := 8 + 3 \cdot x$$



Видно, что система имеет два решения: для первого решения в качестве начального приближения может быть принята точка (-2, 2), а для второго решения – точка (5, 20). □

Вычисление решения системы уравнений с заданной точностью. Для этого используется уже известный вычислительный блок *Given.*

Функция *Find* вычисляет решение системы уравнений с заданной точностью, и вызов этой функции имеет вид *Find(x),* где *x* – список переменных, по которым ищется решение.

Начальные значения этим переменным задаются в блоке < Начальные условия >. Число аргументов функции должно быть равно числу неизвестных.

Следующие выражения недопустимы внутри блока решения:

- ограничения со знаком ;
- дискретная переменная или выражения, содержащие дискретную переменную в любой форме;
- блоки решения уравнений не могут быть вложены друг в друга, каждый блок может иметь только одно ключевое слово *Given* и имя функции *Find* (или *Minerr*).

Пример. Используя блок *Given,* вычислить все решения системы предыдущего примера. Выполнить проверку найденных решений.

$x := -2 \quad y := 2$ **Начальное приближение для первого решения**

Given

$$y = 8 + 3 \cdot x$$

$$y = x^2$$

$$s_A := \mathbf{Find}(x, y)$$

$$s_A = \begin{pmatrix} -1.702 \\ 2.895 \end{pmatrix}$$ **Проекции первого решения**

$x := 5 \quad y := 20$ **Начальное приближение для второго решения**

Given

$$y = 8 + 3 \cdot x$$

$$y = x^2$$

$$x > 0$$ **Ограничение на положительность проекции x второго решения**

$$s_B := \mathbf{Find}(x, y)$$

$$s_B = \begin{pmatrix} 4.702 \\ 22.105 \end{pmatrix}$$ **Проекции второго решения**

Пример. Используя функцию *Minerr*, вычислите решение системы уравнений

$$x + y = 0.95;$$
$$(x^2 + 1)^2 + (y^2 + 1)^2 = 5.5.$$

$x := 0 \quad y := 1$

Жирный знак =

Given

$$\left(x^2 + 1\right)^2 + \left(y^2 + 1\right)^2 = 5.5$$

$$x + y = 0.95$$

Жирный знак =

$$z := Minerr(x, y)$$

$$z = \begin{pmatrix} -0.106 \\ 1.056 \end{pmatrix}$$

Найденное решение

Проверка найденного решения

$$z_0 + z_1 = 0.95$$

$$\left\lfloor (z_0)^2 + 1 \right\rfloor^2 + \left\lfloor (z_1)^2 + 1 \right\rfloor^2 = 5.5$$