МЕХАНИКА. НЕГІЗГІ ЗАҢДАР

И. Е. Иродов

МЕХАНИКА

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ

10-Е ИЗДАНИЕ

Москва

БИНОМ. Лаборатория знаний

2010

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

И. Е. Иродов

МЕХАНИКА

НЕГІЗГІ ЗАҢДАР

Оқулық

Алматы, 2012

ӘОЖ 531(075.8)
ББК 22.2.Я73
И 81

Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің «Оқулық» республикалық ғылыми-практикалық орталығы бекіткен

Қазақ тіліне аударғандар

Маженов Н. А., Смирнов Ю. М., Кенжин Б. М.

Иродов И. Е.

И 81 **Механика. Негізгі заңдар:** Оқулық / Ауд. Н. А. Маженов, Ю. М. Смирнов, Б. М. Кенжин. – Алматы, 2012. – 275 бет.

ISBN 978-601-80311-4-4

Кітапта релятивистік емес (ньютондық) және релятивистік механиканың негізгі заңдары – қозғалыс заңы, импульсті, энергияны, энергия мен импульс моментін сақтау заңдары қарастырылады. Көптеген мысалдар мен есептер келтіру негізінде әртүрлі нақты сұрақтарды шешу барысында бұл заңдарды қалай қолдану керектігі көрсетілген.

Жоғары оқу орындарының физикалық мамандықтарында оқитын студенттеріне арналған.

ӘОЖ 531(075.8)
ББК 22.2.Я73

ISBN 978-601-80311-4-4

Мазмұны

Алғы сөз

Кітаптың негізгі мақсаттарының біріне механиканың іргелі заңдарының, яғни қозғалыс заңдарының, импульстің, энергияның және импульс моменттерінің сақталу заңдарының теориясын меңгеріп, берілген есептерді жақсы шығара алу жатады. Сонымен кітапта теориялық мәселелермен қатар, оларды түсіндіруге арналған бірталай мысалдар мен стандартты есептердің толық шешімдері берілген. Кітаптағы суреттерге әрбір тараудың өзіне лайықталған нөмірлері берілген, осындай жағдайлар формулалар үшін де орындалған.

Кітап сегіз тараудан тұрады. 1-6 тараулары Ньютон механикасына, ал 7-8 тараулары релятивистік механикаға арналған. Кітаптың бірінші тарауында механика заңдары Ньютонның жуықтамалы әдісімен, яғни қозғалыстың жылдамдықтары жарық жылдамдығымен салыстырғанда әлдеқайда аз шамаларында келтірілген. Ал екінші тарауында денелердің қозғалысы жарық жылдамдығымен парапар жағдайларды қарастырады.

Әрбір тараудың басында ең бірінші теориялық принциптер түсіндіріліп, содан кейін сол теорияны меңгеру үшін қажетті қызықты физикалық мысалдар мен есептер келтіріледі. Келтірілген есептер (90-нан астам) берілген мәтіндегі материалмен тығыз байланысты, тіпті негізгі материалды толықтырып та отырады.

Ең қажетті терминдер мен жағдайлар курсивпен бекітіліп келтірілген. Мысалдар мен есептер петитпен келтірілген.

Кітаптың мазмұны механика пәнінің қазіргі кездегі толық бағдарламасына сәйкестендірілген.

Кітап теориялық материалдарды тым математикаландырмай физикалық ұғымдарға басымырақ назар аударып, көптеген мысалдармен толықтырылған.

Механика жоғарғы оқу орындарының оқытушыларына, студенттері мен магистранттарына арналып, дайындалған оқулық.

И. Иродов

Белгілеу жүйесі

Вектор – қалың, тіке шрифтпен белгіленген (мысалы, **F, r)** әріптер, бірақ ашық шрифтпен белгіленген болса, онда олар векторлардың модулін көрсетеді.

Орттар – бірлік жеке векторлар;

$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$- $x, y, z -$ декарт координаттарының орттары;

$\mathbf{e}_{\rho}, \mathbf{e}_{\varphi}, \mathbf{e}_{z}$ – ρ, φ, z- цилиндрлік координаттың орттары;

n,$\boldsymbol{\tau}$ – траекторияға нормаль және жанама орттар.

Орташа шамалар бұрыштық жақшаларға енгізілген <>, мысалы<**v**>, <N>.

Символдар -Δ, d, δшамалар алдына қойылады және келесі мағыналарды білдіреді:

Δ- шамалардың өсімшесі, яғни оның соңғы және алғашқы мәндерінің айырымы, мысалы: $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\Delta U = U_2 - U_1$;

$-\Delta$- шаманың кемуі, яғни алғашқы және соңғы мәндерінің айырымы, мысалы: $-\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$,$-\Delta U = U_1 - U_2$;

d– дифференциал, мысалы –d**r**, dU.

δ– шаманың элементар қарапайым мәні мысалы, δA- элементар жұмыс;

∽ – пропорционалдық белгі, мысалы ;

$\sim$ – реттің шамасы., мысалы: $l{\sim}10^{-4}$.

Уақыт бойынша кез келген функциядан алынған туындының белгісі – d*f*/d*t* немесе функцияның төбесіне нүкте түрінде қойылады: $\dot{f}$.

Санақ жүйесі – курсивті әріптермен белгіленген *K, K′, Ц.*

Ц-жүйе – масса центрімен байланысқан санақ жүйесі, инерциалды жүйелерге қатысты ілгерілмелі қозғалатын санақ жүйесі. Оны басқаша *инерция центрінің жүйесі* деп атайды. Ц-жүйедегі барлық шамалар тильда деп аталатын белгілер арқылы танылады. *Тильда* дегеніміз - әріптің үстіндегі толқын тәрізді белгі. Мысалы, $\tilde{p}$, $\tilde{E}$.

Кіріспе

Механика – денелердің кеңістіктегі уақыт бойынша өтетін қозғалысын зерттейтін физика ғылымының бөлімі.

Денелердің немесе олардың бөлшектерінің уақыттың өтуіне байланысты кеңістіктегі орындарының өзгеруі механикалық қозғалыс деп аталады.

Дененің кеңістіктегі орнын басқа бір денелерге қатысты ғана анықтауға болады. Қарастырғалы отырған дененің орнын анықтауға мүмкіндік беретін денені (немесе бір-біріне қатысты тыныштықтағы денелер жүйесін) ***санақ денесі*** деп атайды.

Іс жүзінде дененің қозғалысын сипаттау үшін санақ денесімен қайсы-бір координат жүйесін, мысалы, декарт координат жүйесін байланыстыруға болады. Кеңістіктегі дененің орнын оның координаталары арқылы анықтайды. Дененің қозғалысы тек қана кеңістікке ғана тәуелді емес, ол сонымен қатар уақытқа да тәуелді. Осы себептен қозғалысты толық сипаттау үшін уақытқа да санақ жүргізу керек. Мұны сағаттың көмегімен іске асырады.

Санақ денелерінің жиынтығы және олармен қосақталған координаталар жүйесі, өзара синхрондалған сағаттар ***санақ жүйесін*** түзеді. Физикада санақ жүйесі туралы түсінік іргелі сұрақтардың бірі болып, ерекше орын алады. Қашықтықтар мен уақыт аралықтарының көмегі арқылы дененің кеңістіктік-уақыттық қозғалысын сипаттау үшін тек белгілі санақ жүйесі таңдалынып алынғанда ғана мүмкіншілік туады.

Сонымен, ***кеңістік және уақыттық*** − механикалық козғалыс дененің кеңістіктегі орнының уақыт өтуіне байланысты өзгеруін көрсетеді. Бұл екі ұғымның физикадағы маңызы өте зор.

Оқиғаның бәрі әйтеуір бір жерде және қандай да бір мезгілде, баскаша айтқанда, кеңістік пен уақыт ішінде өтеді. Кеңістіктен орын алмай және кеңістіктен тыс өмір сүретін бірде-бір объекті болмайды, болуы да мүмкін емес, яғни кеңістік материямен тығыз байланысты және олар да басқа объектілер тәрізді физикалық объектілер болып табылады.

Өтіп жаткан сан алуан оқиғаларды қарастыра отырып, біздің санамызда кең және тар, жуан және жіңішке, ұзын және қысқа, алыс және жақын деген кеңістіктің салыстырмалы түрдегі сипатын көрсететін ұғымдар қалыптасады. Кеңістіктің негізгі қасиеттеріне оның шынайы бар болуы, материямен біртұтастығы, шексіздігі, үш өлшемділігі (барлық физикалық объектілердің ұзындығы, ені және биіктігі болады) жатады.

Кеңістіктің бір кесіндісін, яғни арақашықтықты өлшеу үшін сызғыштан бастап, әртүрлі ұзындық өлшеуіш құралдар қолданылады. Ұзындықтың негізгі өлшем бірлігі *метр* болып табылады. Ғылым мен техникада *метрдің* еселік және үлестік өлшемдері де пайдаланылады. Дене қозғалғанда өзінің орнын тек кеңістікте ғана өзгертіп қоймай, уақыт бойынша да өзгертеді. Уақыт материямен, қозғалыспен және кеңістікпен тығыз байланысты.

Кез келген өзгерістің немесе оқиғаның бастамасы және соңы болады (түзу кесінді сиякты). Кейбір өзгерістер көз алдымызда басталып, көз алдымызда аяқталады (судың қайнауы); екінші біреуі көзді ашып-жұмғанша, лезде өтеді; ал үшіншілері бірден байқалмайды (мысалы, ағаштың өсуі).

Алуан түрлі өзгерістерді салыстыра отырып, біздің уақыт жайлы көзқарасымыз қалыптасады. Уақытқа қатысты тез және ұзақ, болған және болады, қазіргі шақ және болашақ, бұрын және жуық арада және т.с.с. ұғымдар пайда болады.

Уақыттың негізгі қасиеттеріне шынайы бар болуы, үздіксіздігі, тәуелсіздігі, бірқалыптылығы, бір бағыттылығы (уакыт тек алға карай, өткеннен болашаққа қарай өзгереді) жатады.

Уақыт – арнаулы құрал, сағаттың көмегімен өлшенеді. Құрылысы жағынан сағат алуан түрлі. Уакыттың негізгі өлшем бірлігіне секунд алынады.

Кеңістік шексіз, уақыт үздіксіз болғандықтан, физикада кеңістіктің бір кесіндісі қайсыбір уақыт аралығында өлшенеді.

Ньютон кеңістікті денелерден тәуелсіз және олардан бұрын өмір сүретін нәрсе деп қарады. Кеңістік үздіксіз нәрсе, сонымен қатар кейбір қасиеттерге ие: кеңістік үш өлшемді, тең өлшемді және барлық бағыттарда шексіз көсіліп жатады, мәңгі және табиғаты бойынша өзгермейтін нәрсе. Кеңістіктің барлық бөліктері қозғалмайды және бір ғана қасиеттерге ие. Ньютонның пайымдауынша, шегі бар нәрсе кеңістіктің қайсыбір бөлігінде болмай тұра алмайды;

Бір санақ жүйесінен екінші санақ жүйесіне өткенде денелердің жылдамдықтары жарықтың жылдамдығымен салыстырғанда әлдеқайда аз болса, онда тәжірибелер бойынша сызықтық мөлшерлер мен уақыт аралықтары өзгеріссіз қалады, яғни олар үшін санақ жүйесін таңдап алудың қажеті жоқ. Мұндай тұжырым Ньютонның кеңістік пен уақыттың абсолюттілігі туралы концепциясының негізінде жатыр.

Классикалық механика (**Галилей-Ньютонның механикасы**) жылдамдықтары жарықтың вакуумдегі таралу жылдамдығымен салыстырғанда аз болатын макроскопиялық денелердің қозғалыс заңдарын зерттейді.

Жылдамдықтары **с**–жарық жылдамдығымен шамалас болып қозғалатын макроскопиялық денелердің қозғалыс заңдарын **арнайы салыстырмалылық теориясына** негізделген **релятивистік механика** зерттейді. Микроскопиялық денелердің (жеке атомдар және элементар бөлшектер) қозғалысын сипаттауға классикалық механика заңдары жарамайды – олар **кванттық механика** заңдарымен алмастырылады.

Жарық жылдамдығына жуық жылдамдықтарға өткен кезде денелердің қозғалысында елеулі өзгерістер байқалады. Осы кезде сызықтық мөлшерлер мен уақыт аралықтары санақ жүйесін таңдауға тәуелді болып, олар түрлі санақ жүйесінде әртүрлі мәндер қабылдайды. Сонымен релятивистік механика жалпылама механикаға жататыны, ал баяу жылдамдықтар кезінде ол классикалық механикаға өтетіні айқындалды.

Іс жүзіндегі денелердің қозғаласы соншалықты күрделі болады, сондықтан оларды қарастырғанда кейбір жағдайларды ескерудің қажеті болмайды. Мысалы егер барлық жағдайларды ескерген кездің өзінде де ең қарапайым деген қозғалыстың өзі-ақ соншалықты күрделіленіп, оны шешу қолдан келмес мәселеге айналар еді. Осы себептермен абстракция, идеалды немесе шынайы (реалды) деген ұғымдарды кейбір мәселелерді шешкен кезде мақсатқа байланысты пайдалануға болады. Ол үшін бұл қарастырылып отырған мәселе оның нақты сипатына, нәтиженің дәлдігіне тағы да басқа жағдайларға тәуелді болады. Сондықтан механикада денелердің қозғалысын сипаттау үшін нақты мәселелер (есептер) шарттарына тәуелді түрде **физикалық моделдерді** пайдаланады (*материалдық нүкте және абсолютті қатты дене*).

Материалдық нүкте (немесе жәй ғана бөлшек) – қарастырылып отырған есеп жағдайында мөлшерлерін ескермеуге болатын массасы бар дене.

Абсолютті қатты дене – ешбір жағдайларда да деформацияланбайтын дене және барлық жағдайларда да бұл дененің екі нүктесінің (немесе екі бөлшегінің) ара қашықтығы өзгеріссіз қалады. Шынайы денені абсолютті қатты дене деп санау үшін оның қозғалыс кезіндегі деформациясы ескерілмейтіндей аз болуы керек.

Механиканың алдында негізгі екі мәселе қойылады:

1. Түрлі қозғалыстарды зерттеу және алынған нәтижелерді қозғалыс заңдары (әрбір нақты жағдайларда қозғалыстың сипатын алдын ала айтып бере алатындай түріндегі заңдар) түрінде тұжырымдау.
2. Кез келген жүйеге тән болатын жалпы механикалық қасиеттерді табу, яғни жүйені түзетін денелерің арасындағы өзара әрекеттесудің нақты түріне тәуелсіз бола алатын жалпы теориялар мен принциптерді іздестіру.

Бірінші мәселені шешудің арқасында Ньютон мен Эйнштейн динамикалық заңдарды ашты, екінші мәселені шешу – энергия, импульс және импульс моменттері тәрізді іргелі шамаларды ашуға мүмкіндік берді.

Динамикада энергияның, импульстің және импульс моментінің сақталу заңдары механиканың негізгі іргелі заңдары болып табылады.

1-тарау
Кинематика негіздері

Кинематика – денелердің қозғалысын зерттейтін, бірақ қозғалыстың туу себебін қарастырмайтын механиканың бөлімі. Бұл тарауда негізгі үш сұрақ қарастырылған: нүкте кинематикасы, қатты дене кинематикасы, бір санақ жүйесінен екінші санақ жүйесіне өткен кезде жылдамдық пен үдеудің түрлендірілуі.

§ 1.1. Нүкте кинематикасы

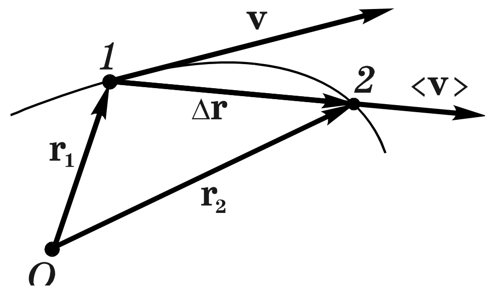
Өлшемдерін берілген жағдайда ескермеуге болатын денені материалдық нүкте деп атайды.

Әрбір дене белгілі бір өлшемдерге ие. Дененің әртүрлі бөліктері кеңістіктің әртүрлі жерлерінде орналасады. Алайда, механиканың көпшілік есептерінде дененің әртүрлі бөліктерінің орнын көрсетудің қажеті жоқ. Егер дененің өлшемдері басқа денелерге дейінгі арақашықтығынан аз болса, онда бұл денені оның материалдық нүктесі деп санауға болады. Мәселен, оған ғаламшарлардың Күн айналасындағы қозғалысы жатады.

Материалдық нүкте қозғалысын берудің үш түрлі тәсілі бар: векторлық, координаталық және табиғи. Оларға жеке-жеке тоқталып өтейік.

Векторлық тәсіл

Бізге қажетті A нүктесінің орны $\mathbf{r}$ радиус-векторымен беріледі. Радиус-вектор уақыттың бастапқы кезіндегі нүктенің орны. Ал $\mathbf{r}$ радиус векторының өзі таңдалынып алынған санақ жүйесінде орналасқан қозғалмайтын O нүктеден A нүктесіне жүргізілген. A нүктесінің қозғалысы кезінде жалпы алғанда оның радиус-векторы модулі бойынша да, бағыты бойынша да өзгереді, яғни $\mathbf{r}$ радиус-векторы t уақытқа тәуелді болғаны. A нүктесінің *траекториясы деп* $\mathbf{r}$ радиус-векторінің ұшындағы геометриялық орынды айтамыз. Қозғалып бара жатқан нүктенің кеңістікте қалдыратын *ізі траектория* деп аталады. Траектория түзуден тұратын болса, түзу сызықты қозғалыс, қисық сызықтан тұратын болса, қисық сызықты қозғалыс деп аталынады.



1.1-сурет

Нүкте *жылдамдығы* деген түсінікті енгізейік. A нүктесі Δt уақыты ішінде ***1*** нүктеден ***2*** нүктеге орын ауыстырсын делік (1.1-сурет). Суретте көрсеткендей, A нүктенің алғашқы орнынан оның ақырғы орнына жүргізілген $\Delta\mathbf{r}$ *орын ауыстыру векторы* дегеніміз $\mathbf{r}$ радиус-вектордың Δt уақыттағы өсімшесі болып табылады. $\mathbf{r} = \boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}$, $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ қатынасы Δt уақыт аралығындағы жылдамдықтың *орташа векторы* <**v**> деп аталады. <**r**> векторының бағыты $\Delta\mathbf{r}$ векторының бағытымен бірдей болады.

Нүктенің берілген уақыттағы **v** жылдамдық векторы $\Delta t\to 0$ кездегі $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ қатынасының шегі ретінде анықталады, яғни

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1.1}$$

Бұл **v** жылдамдық векторы берілген уақыттағы **r** радиус-вектордың уақыт бойынша туындысына тең және осы нүктедегі траекторияға жанаманың бойымен *A* дененің қозғалыс бағытында дегенді білдіреді (d**r** вектордың бағытында). Вектордың модулі **v** келесі өрнекпен сипатталады*

$$\upsilon = |\mathbf{v}| = |\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t|,$$

Нүкте қозғалысы, сонымен қатар үдеумен де сипатталады. **a** *үдеу* векторы нүктенің *жылдамдық* векторының уақыт бойынша өзгерісі:

$$\mathbf{a} = \mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t, \tag{1.2}$$

яғни, ол жылдамдық векторының уақыт бойынша туындысына немесе **r** радиус-вектордың уақыт бойынша екінші туындысына тең. **a** вектордың бағыты d**v** вектордың (d**v** − **v** вектордың d*t* уақыт аралығындағы өсімшесі) бағытымен бірдей түседі. **v** вектордың модулі **a** вектордың модулі тәрізді анықталады.

Мысал. Нүктенің радиус-векторы *t уақытқа* келесі заңдылықпен бағынады:

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}t + \mathbf{B}t^2/2,$$

мұндағы **A** және **B** — тұрақты векторлар. Нүктенің **v** мен **a** үдеуін табайық:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A} + \mathbf{B}t,\ \mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{B} = \mathrm{const}.$$

Жылдамдық векторының модулі:

$$\upsilon = \sqrt{\mathbf{v}^2} = \sqrt{\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB}t + \mathbf{B}t}.$$

Сонымен, **r**(*t*) тәуелділігі белгілі болса, әрбір уақыт мезгілі үшін нүктенің **v** жылдамдығы мен **a** үдеуін табуға болады.

Керісінше, үдеудің уақытқа тәуелділігін біле отырып, **v**(*t*) мен **r**(*t*) шамаларын табуға бола ма екен?

---

* Жалпы жағдай үшін $|\mathrm{d}\mathbf{r}| \neq \mathrm{d}r$, мұндағы $r - \mathbf{r}$ радиус-векторының модулі, $\upsilon \neq dr/dt$. Мысалы, егер **r** тек белгілі бір бағыт бойынша өзгерсе нүкте шеңбер бойымен айналғанда $\mathbf{r} = \boldsymbol{const}$, $dr = 0$, бірақ $|\mathrm{d}\mathbf{r}| \neq 0$ емес.

Бұл мәселенің бірмәнді шешуін табу үшін тек қана $\mathbf{v}(t)$ тәуелділігін алу жеткіліксіз. Сонымен қатар тағы да қалыпты шарттарды да, дәлірек айтсақ нүктенің бастапқы $t = 0$ уақытындағы $\mathbf{v}_0$ мен $\mathbf{r}_0$ радиус-векторын білу қажет. Ол үшін қозғалыс кезінде үдеу a=const болып қалатын қарапайым жағдайды қарастырайық.

Әуелі нүктенің $\mathbf{v}(t)$ жылдамдығын анықтайық. Сондықтан (1.2) өрнегі бойынша жылдамдықтың d*t уақыт аралығындағы өсімшесі тең болады:*

$d\mathbf{v} = \mathbf{a}\cdot dt$. Осы өрнекті уақыт бойынша $t = 0$ ден *t-ға* дейін интегралдап, жылдамдық векторының осы уақыт аралығындағы өсімшесін табамыз:

$$\Delta\mathbf{v} = \int_0^t \mathbf{a}\mathrm{d}t = \mathbf{a}t.$$

Бірақ $\Delta\mathbf{v}$ – дегеніміз іздеп отырған **v** жылдамдық емес. **v** жылдамдығын табу үшін бастапқы уақыттағы $\mathbf{v}_0$ жылдамдықты білу қажет. Сонда $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v}$ немесе

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t.$$

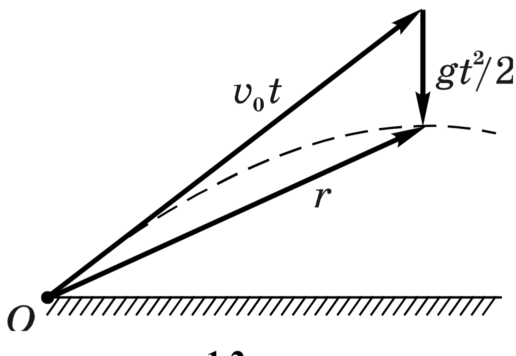
r (t) радиус-вектор мәселесі де тура осылай шешіледі. (1.1) өрнегі бойынша радиус-вектордың dt уақыт аралығындағы қарапайым өсімшесі $d\mathbf{r} = \mathbf{v}\cdot dt$ болады. Осы өрнекті табылған **v***(t) тәуелділіктің көмегімен интегралдап,* $t = 0$ ден t-ға дейінгі уақыт аралығындағы радиус-вектордың өсімшесін табамыз :

$$\Delta\mathbf{r} = \int_0^t \mathbf{v}(t)\mathrm{d}t = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{a}t^2/2.$$

r(t) радиус-вектордың өзін табу үшін тағы да бастапқы уақыттағы нүктенің $\mathbf{r}_0$ орнын білуіміз керек. Сонда $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}$, немесе

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t + \mathbf{a}t^2/2.$$

Мысал ретінде бастапқы жылдамдығы $\mathbf{v}_0$–ге тең белгілі бір бұрыш арқылы горизонтқа лақтырылған тастың қозғалысын қарастырайық. Егер де тасты **a=g** тұрақты үдеумен қозғалады деп алатын болсақ, онда оның лақтыру нүктесіне қатынасты ($\mathbf{r}_0 = 0$) орны келесі радиус-векторы өрнегімен анықталады:



1.2-сурет

$$\mathbf{r} = \mathbf{v_0}\boldsymbol{t} + \mathbf{g}\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}/\mathbf{2},$$

яғни, бұл жағдай үшін **r** дегеніміз 1.2-суретте көрсеткендей екі вектордың қосындысы болып табылады.

Олай болса нүктенің қозғалысы жайлы мәселені толық шешу үшін, яғни оның **v** жылдамдығын және **r** қалпын уақытқа тәуелді етіп анықтау үшін, **a(***t)* шамасын білу жеткіліксіз, сонымен қатар нүктенің бастапқы уақытындағы $\mathbf{v}_0$ жылдамдығы мен $\mathbf{r}_0$ орнын, яғни материалдық нүктенің бастапқы қозғалыс шарттарын білу қажет.

СИ жүйесінде ұзындық, жылдамдық пен үдеудің өлшем бірліктері *метр* (м), *метрдің секундқа* (м/с) және *метрдің секунд квадратының қатынасымен* (м/с^2) беріледі.

Координаттық тәсіл

Сызба геометриядан және математикадан белгілі болған нәрсе, ол қозғалып келе жатқан *A* нүктенің кез келген уақыттағы алатын орнын (көлбеулік, немесе сызықтық) *x, y, z* – декарт координаттары арқылы анықтау мүмкіндігі.

Координат жүйесін таңдау кезінде мәселені жеңіл шешу мүмкіндіктеріне назар аударылады, яғни есептің сипаты мен симметрияларын таңдап алу жолдары құрастырылады. Координат жүйесі ретінде декарт координаттары алынады.

Қарастырылып отырған материалдық нүктенің t уақытында координаттар басына *O* қатысты орнын сипаттайтын **r** (*t*) радиус-вектордың *X, У, Z өстеріндегі проекцияларын жазайық:*

$$x = x(t); y = y(t); z = z(t).$$

Бұл теңдеулер ***нүктенің қозғалыс заңын*** анықтайды.

Шынында да (1.1) мен (1.2) өрнектерді *X* өсіне проекциялап, жылдамдық пен үдеу векторларының осы өстегі проекцияларының формулаларын аламыз:

$$\upsilon_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t, \quad (1.3)$$

мұндағы d*x* – d**r** орын ауыстыру векторының *X-өсіне проекциясы;*

$$a_x = \frac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}, \quad (1.4)$$

мұндағы, $d\boldsymbol{\upsilon}_x$ жылдамдықтың d**v** өсімшесі векторының *X өсіне проекциясы. Сәйкес векторлардың у және х өстеріндегі проекциялары үшін де тура осындай қатынастар табылады. Формуладан жылдамдық пен үдеу векторларының проекциялары координаттардың уақыт бойынша алынған бірінші және екінші туындыларына сәйкес тең болатыны көрініп тұр.*

Сөйтіп, нүкте қозғалғанда *x(t), y(t), z(t)* координаттар уақыт өтуімен өзгереді, яғни олар уақыттың бір мәнді функциясы болып анықталады. Бізге осы өрнектер белгілі болса, онда нүктенің кеңістіктегі алған орнын, оның жылдамдығы мен үдеуін кез келген уақытта анықтау мүмкіндігі туады. Олай болса кез келген уақыт үшін **v** мен **a** векторларының модульдері мен бағыттарын да табуға болады.

Мысалы, жылдамдық векторының модулі келесі өрнекпен анықталады:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2},$$

ал **v** жылдамдық векторының бағытын бағыттауыш косинустар арқылы анықтауға болады:

$$\cos\alpha = \upsilon_x/\upsilon, \cos\beta = \upsilon_y/\upsilon, \cos\gamma = \upsilon_z/\upsilon,$$

мұндағы α, β, γ — **v** векторымен сәйкес түрде *X, Y, Z* өстерінің арасындағы бұрыштар. Осындай формулалар арқылы үдеу векторының модулі мен бағыты да анықталады.

Сонымен қатар басқа да маңызды мәселелерді: нүктенің траекториясын, оның жүріп өткен жолының уақытқа тәуелділігін, жылдамдықтың нүкте орнына тәуелділігін шешуге болады.

Векторлық тәсіл сияқты интегралдау жолымен керісінше сұрақтарды да шешуге болады, яғни берілген үдеу бойынша нүктенің қозғалыс заңы мен оның жылдамдығы есептеледі. Біздің жағдайымызда уақыт бойынша үдеулердің проекциялары табылды. Сонымен қатар үдеуден басқа алғашқы шарттар берілсе, яғни бастапқы уақыттағы нүктелердің координаттары мен жылдамдықтарының проекциялары, онда мұндай есептер бірмәнді шығарылады.

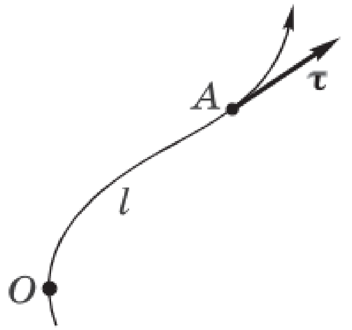
«Табиғи» тәсіл

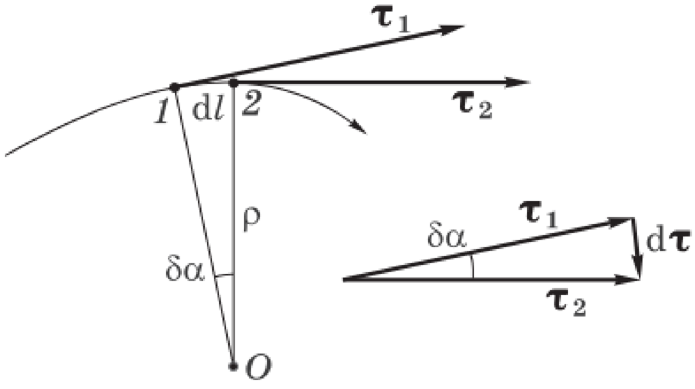
Нүктенің қозғалыс траекториясы алдын ала белгілі болса ғана бұл тәсіл қолданылады. *A нүктенің орны O* санақ басынан таңдап алынған траектория бойымен алынған қашықтықпен, яғни *доғалық координатпен* анықталады (1.3-сурет). $\boldsymbol{l}$ координаттың санақ бағытын өз қалауымызша таңдап аламыз (суретте сілтемемен көрсеткендей).

Егер нүктенің траекториясы, санақ басы, доғалық $\boldsymbol{l}$ координаттың оң санақ бағыты және нүктенің қозғалыс заңы, $\boldsymbol{l}(\mathrm{t})$ тәуелділігі белгілі болса, онда нүкте қозғалысы толық анықталғаны.

Сонымен, *A* нүктенің қозғалысын табиғи тәсілмен анықтау үшін 1) траектория; 2) траекториядағы санақ центрі; 3) қозғалыс бағыты; 4) траектория бойымен қозғалыс заңы берілуі керек.

Нүкте жылдамдығы. Қозғалыстағы A *нүктемен бірге траектория бойымен доғалық* $\boldsymbol{l}$ *координаттың өсу бағытына бағытталған* $\boldsymbol{\tau}$ *бірлік векторын енгізейік* (1.3-сурет).





1.3-сурет **1.4-сурет**

Сонда $\boldsymbol{\tau}$ айнымалы вектор $\boldsymbol{l}$ шамасына тәуелді. *А нүктенің* **v** жылдамдығы траекторияға жанама бойымен бағытталған, сондықтан оны былайша өрнектеуге болады:

$$\boxed{\mathbf{v} = \upsilon_\tau \boldsymbol{\tau}} \tag{1.5}$$

мұндағы, $\upsilon_\tau = \mathrm{d}l/\mathrm{d}t$- $\boldsymbol{\tau}$ вектор бағытының **v** векторға проекциясы, υ_τ — алгебралық шама.

Сонымен қатар,

$$|\boldsymbol{\upsilon_\tau}| = |\mathbf{v}| = \boldsymbol{\upsilon}.$$

Нүкте үдеуі. (1.5) өрнегін уақыт бойынша дифференциалдаймыз:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\upsilon_\tau}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\upsilon_\tau}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}, \tag{1.6}$$

Осы өрнектің соңғы мүшесін түрлендіреміз:

$$\upsilon_\tau \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t} = \upsilon_\tau \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \upsilon_\tau^2 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}l} = \upsilon^2 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}l}. \tag{1.7}$$

Енді **$\boldsymbol{\tau}$ вектордың** $\mathrm{d}l$ бөлігіндегі өсімшесін анықтаймыз (1.4-сурет). Ал ***2*** нүкте ***1*** *нүктеге ұмтылған кезде* олардың арасындағы траектория бөлігінің центрі қайсыбір ***O*** нүктесінде болатын шеңбердің доғасына ұмтылады. Траекторияның ***O*** нүктесін оның осы нүктедегі қисықтық центрі, ал сәйкес шеңбердің $\boldsymbol{\rho}$ радиусы траекторияның тура осы нүктедегі *қисықтық радиусы* деп атайды.

1.4-суретте көрсеткендей бұрыш $\delta\alpha = |\mathrm{d}l|/\rho = |\mathrm{d}\tau|/l$осыдан:

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}/\mathrm{d}l| = 1/\rho,$$

болып, одан әрі $dl \to 0$ ұмтылғанда $d\tau \perp \tau$ шығады. Траекторияның ***1*** нүктесінен қисықтық центріне қарай бағытталған және оған перпендикуляр болатын **n** бірлік векторды енгізіп, соңғы теңдікті векторлық түрде жазамыз.

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}/\mathrm{d}l| = \mathbf{n}/\rho. \tag{1.8}$$

Енді (1.8) -ді (1.7)-ге қойып, осы алынған өрнекті (1.6)-ға қоямыз. Сонда

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\upsilon_\tau}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + \frac{\upsilon^2}{\rho}\mathbf{n}. \tag{1.9}$$

мұндағы, бірінші мүше *тангенциалдық үдеу деп, ал екінші мүше нормал (центрге тартқыш) үдеу деп аталады. Сонымен нүктенің толық **a** үдеуін тангенциалдық және нормал үдеулердің қосындысы түрінде жазуға болады.*

1.9-суретте көрсетілгендей **a** векторының $\boldsymbol{\tau}$ мен $\boldsymbol{n}$ орттарына проекциялары тең болады:

$$a_{\boldsymbol{\tau}} = \mathrm{d}\upsilon_\tau/\mathrm{d}t, \qquad a_{\boldsymbol{n}} = \upsilon^2/\rho, \tag{1.10}$$

нүктенің толық үдеуінің модулі:

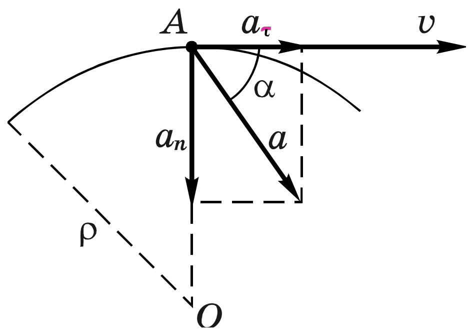
$$a = \sqrt{a_\tau{}^2 + a_n^2} = \sqrt{\dot{\upsilon}^2 + (\upsilon^2/\rho)^2}\ .$$

мұндағы, $\dot{\upsilon}$ – уақыт бойынша алынған жылдамдық модулінің туындысы.

Мысал. *A* нүктесі радиусы ρ болатын доғаның бойымен қозғалады (1.5-сурет). Оның жылдамдығы доғалық $\boldsymbol{l}$ *координат* $\upsilon = k\sqrt{\boldsymbol{l}}$ заңына тәуелді, мұндағы *k* – тұрақты шама. Нүктенің толық үдеуі мен жылдамдық векторы арасындағы α бұрышты $\boldsymbol{l}$ координаталық функция түрінде табу керек.

Шығару жолы. Суреттен көріп отырғандай α бұрышты $tg\alpha = a_n/a_\tau$ формуласы арқылы табуға болады. Енді a_n және a_τ шамаларын табайық. Нормал үдеуін келесі формуламен табамы:

$$a_n = \upsilon^2/\rho = k^2 l/\rho\ ,$$



1.5-сурет

Біздің жағдайымыз үшін $\upsilon_\tau = \upsilon,$ сондықтан тангенциалды үдеу тең:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dl}\frac{dl}{dt} = \frac{d\upsilon}{dl}\upsilon,$$

$\boldsymbol{\upsilon}$-ның l-дан тәуелділігін ескере отырып, келесі өрнекті аламыз:

$$a_\tau = \frac{k}{2\sqrt{\boldsymbol{l}}}k\sqrt{\boldsymbol{l}} = \frac{k^2}{2}.$$

Осыдан $tg\alpha = 2\boldsymbol{l}/\rho$.

§ 1.2. Қатты дененің кинематикасы

Механикалық қозғалыс – салыстырмалы. Бір дененің басқа денелерге қатысты қозғалысы әртүрлі болады. Дененің қозғалысын сипаттау үшін, қозғалыс қай денеге қатысты қарастырылатынын белгілеу қажет. Бұл денені *санақ денесі* деп атайды. *Санақ денесі* уақыт – санақ жүйесін құрап, ол қозғалған дененің кез келген уақыттағы орнын анықтауға мүмкіндік береді.

Қатты денемен әртүрлі қозғалыстарды кеңістік – уақыттық тұрпатта сипаттайтын санақ жүйелері тығыз байланысты. Сондықтан, қатты денелердің қозғалысын сипаттау үшін оларға сәйкес әртүрлі санақ жүйелерінің қозғалыстарын да зерттеу маңызды мәселе болып табылады.

Жалпы алғанда қатты дене қозғалысының бес түрін ажыратуға болады: 1) ілгерілемелі, 2) тұрақты өсті айналу, 3) жазық параллель қозғалыс, 4) жылжымайтын нүктені айнала қозғалу және 5) еркін қозғалыс. Қозғалыстың алғашқы екі түрі (ілгерілемелі және тұрақты өсті айналу) қатты дененің негізгі қозғалыстарының бірі болып табылады. Қатты дененің қалған қозғалыстарын негізгі қозғалыстардың біріне немесе олардың жиынғына келтіруге болады. Қатты денелерге сай қозғалыстардың алғашқы үш түрін қарастырамыз.

Ілгерілемелі қозғалыс

Қатты дененің мұндай қозғалысы кезінде денемен байланысты кез келген түзу өзінің бастапқы қалпына параллель болып қалады. Мысалы, жолдың түзу бөлігі бойымен қозғалатын кез келген транспорт түрі және т.с.с.

Ілгерілемелі қозғалыс кезінде қатты дененің барлық нүктелері бірдей уақыт аралығында бірдей орын ауыстырады. Сондықтан дененің барлық нүктелерінің жылдамдықтары мен үдеулері берілген уақыт аралығында бірдей. Бұл жағдай қатты дененің ілгерілемелі қозғалысын, дененің жеке нүктесінің қозғалысын зерттеуге, яғни нүктенің кинематикасын зерттеуге мүмкіндік береді.

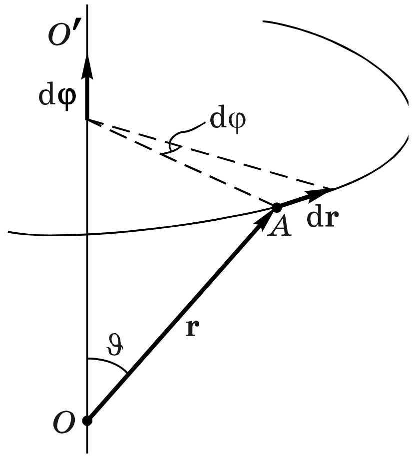
Сонымен егер қатты дененің кез келген нүктесінің $\mathbf{r}(t)$ радиус-векторының уақытқа тәуелділігі мен нүктенің бастапқы сәттегі орны белгілі болса, онда қатты дененің ілгерілемелі қозғалысын толық сипаттауға болады.

Тұрақты өсті айналу

Қатты дене берілген санақ жүйесінде тұрақты OO' өсін айнала $\mathrm{d}t$ уақыты ішінде шексіз аз бұрыш жасасын. Осыған сәйкес бұрылыс бұрышын $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$векторымен сипаттаймыз, оның модулі бұрылу бұрышына тең, ал бағыты

OO' өсімен бірдей түседі, әр бұрылу бағыты d**φ** векторға қатысты ***оң бұранда ережесіне*** сәйкес келеді (1.6-сурет).

Енді қатты дененің кез келген *A* нүктесінің осындай бұрылыс кезіндегі қарапайым орын ауыстыруын анықтайық. *A* нүктенің орнын айналыс өсіндегі *O* нүктеден жүргізілген **r** радиус-векторымен береміз. Сонда **r** радиус-вектор ұшының сызықтық орын ауыстыруы d**φ** бұрылу бұрышына



1.6-сурет

$$|\mathrm{d}\mathbf{r}| = r\sin\vartheta\,\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}\,,$$

немесе векторлық түрде (1.11) қатынасына байланысты болады (1.6-сурет).

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = [\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{r}]\,. \qquad (1.11)$$

Бұл теңдік шексіз аз d**φ** бұрылыстар үшін ғана орындалады. Басқаша айтқанда, тек шексіз кішкентай бұрылыстарды ғана вектор* деп қарастыруға болады.

Сонымен қатар, біздің енгізген d**φ** векторымыз векторлардың ең негізгі заңына – векторлардың қосылу заңына – бағынып, оны қанағаттандыра алады. Шынында да егер қатты дене жылжымайтын *O* нүктесі арқылы өтетін әртүрлі өс арқылы екі элементар $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_1$ және $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_2$ бұрылысын жасасын делік. Онда дененің кез келген *A* нүктесінің d**r** **қорытынды** орын ауыстыруын келесі формула арқылы табуға болады. (*O* нүктесіне салыстырғандағы радиус-векторы **r** − тең болады).

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{dr}_1 + \mathrm{dr}_2 = [\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_1, \mathbf{r}] + [\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_2, \mathbf{r}] = d\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{r}\,,$$

мұндағы

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} = \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_1 + \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_2\,. \qquad (1.12)$$

Осы екі бұрылыстар ($\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_1$ мен $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_2$) *O* нүктесі арқылы өтетін, $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$ векторымен дәл келетін және $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} = \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_1 + \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_2$ бұрышпен осы өсті айналатын бір бұрылысқа эквивалентті.

Егер **r** радиус-вектор, **v** жылдамдық, **a** үдеу тәрізді шамаларды қарастырған кезде олардың бағыттары бірден белгілі болса, бұл тәрізді

* 1.6-суретте көрсеткендей $\Delta\varphi$ бұрышқа түпкі бұрылыс жасау үшін А нүктесінің сызықтық орын ауыстыруы келесі өрнекпен анықталады:

$$|\Delta\mathbf{r}| = r\sin\vartheta \cdot 2\sin(\Delta\varphi/2)$$

Осы өрнектен Δ**r**-ді$\Delta\varphi$ мен **r**-векторларының көбейтіндісі түрінде қарастырудың мүмкіндігі жоқ екені көрініп тұр. Мұндай тұжырым тек өте шексіз аз $\Delta\boldsymbol{\varphi}$ бұрылысына сай және **r**- радиус-векторды осы шектерде өзгермейді деп санауға болады.

векторлар айналыс бағытына тәуелді емес. Бірінші түрдегі векторлар – ***полярлық*** деп, ал екінші түрдегі векторларды d$\boldsymbol{\varphi}$ ***аксиалдық*** деп аталады.

r радиус-вектор, **v** жылдамдық, **a** үдеу сияқтыайналыс бағытына тәуелді шамаларды қарастырғанда олар үшін белгілі бір бағыттарды таңдау мәселесі ешқандай қиыншылық жасамайды. Оның себебі бұл сұрақтар осы шамалар үшін өзінен өзі шешілген. Осындай векторлар ***полярлы*** векторлар деп аталады. Оларға қарағанда d$\boldsymbol{\varphi}$ векторлардың бағыттары тәуелді түрде айналу бағыттарымен байланысқан, мұндай векторларды ***аксиалды*** векторлар деп атайды.

Енді бұрыштық жылдамдық және бұрыштық үдеу векторларын енгізейік.

ω ***бұрыштық жылдамдық*** векторы келесі өрнекпен анықталады:

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}/\mathrm{d}t}, \quad (1.13)$$

мұндағы, dt дененің d$\boldsymbol{\varphi}$ бұрышқа бұрылуға жіберетін уақыты. Ал **ω** векторы бағыты жағынан d$\boldsymbol{\varphi}$ векторымен бірдей түседі және аксиал вектор болып табылады. **ω** вектордың уақыт бойынша өзгерісі ***β*** бұрыштық үдеумен сипатталады:

$$\boxed{\boldsymbol{\beta}=\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t}. \quad (1.14)$$

Ал d$\boldsymbol{\omega}$ вектордың бағыты $\boldsymbol{\beta}$ вектор тәрізді **ω** вектор да аксиал вектор болып табылады.

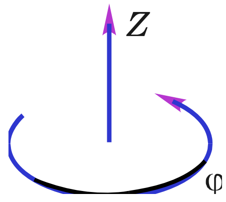
СИ жүйесінде бұрыштық жылдамдықтың өлшем бірлігі ретінде радиан секунды, ал бұрыштық үдеу үшін радиан секундының квадраты алынады. Әсіресе қатты денелердің күрделі қозғалысын зерттеген кезде бұрыштық жылдамдық пен бұрыштық үдеулерді векторлар түрінде ұсыну өте тиімді. Мұның өзі күрделі қозғалыстарды ықшамдап анализдеу үшін және оған сәйкес тиісті есептерді шығаруға жақсы мүмкіншілік береді.

Бұрыштық жылдамдық пен бұрыштық үдеу өрнектерін ***Z*** айналыс өсіне проекциялар түрінде жазамыз, өстің оң бағытын φ координаттың - бұрылу бұрышының оң санақ бағытымен, оң бұранда ережесімен байланыстырамыз (1.7-сурет). Сонда ω_z және β_z векторлардың ***Z*** өсіне ω және β, проекциялары келесі формулалармен анықталады:

$$\omega_z = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t. \quad (1.15)$$

$$\beta_z = \mathrm{d}\omega_z/\mathrm{d}t \quad (1.16)$$

мұндағы ω_z және β_z – алгебралық шамалар. Олардың таңбалары сәйкес вектордың бағытын сипаттайды. Мысалы, $\omega_z > 0$ болса, онда **ω** вектордың бағыты ***Z*** өсінің оң бағытымен бірдей түседі, егер $\omega_z < 0$ болса, онда **ω** вектордың бағыты қарама-қарсы. Бұрыштық үдеу үшін де осындай заңдылықтар орын алады.



1.7-сурет

Сонымен, $\varphi(t)$ тәуелділігін - дененің айналу заңын біле отырып, (1.15) және (1.16) формулалар бойынша әрбір уақыт аралығы үшін бұрыштық жылдамдық пен бұрыштық үдеуді табуға болады. Керісінше, бұрыштық үдеудің уақытқа тәуелділігін және бастапқы шарттарын, яғни бастапқы сәттегі ω_0 бұрыштық жылдамдық пен φ_0 бұрышты біле отырып, $\omega(t)$ және $\varphi(t)$ шамаларын табуға болады**.**

Мысал. Қатты дене қозғалмайтын өстен $\varphi = at - bt^2/2$ заңы бойынша айналады, мұндағы, a және b – қайсыбір оң тұрақтылар. Осы дененің қозғалыс сипатын табу керек.

Шығару жолы: (1.15) және (1.16) бойынша

$$\omega_z = a - bt; \qquad \beta_z = -b = \text{const}.$$

Осыдан дене бірқалыпты баяу айнала отырып ($\beta_z < 0$), $t_0 = a/b$ уақытта тоқтайды, сонан кейін айналыс бағыты (ω_z таңбасы) қарама-қарсы жаққа қарай өзгереді.

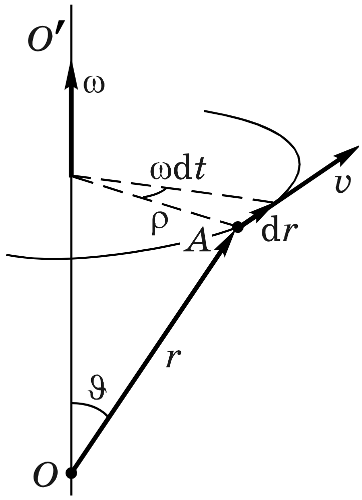
Қозғалысты қатты дененің тұрақты өсті айналуына байланысты қарастырған кезде нүктенің түзу сызықты қозғалысына қатысты формулаларды пайдалануға болады, ол үшін тек x, υ_x, a_x – сызықтық шамаларды оларға сәйкес $\varphi, \omega_z, \beta_z$ - бұрыштық шамаларға ауыстырса болғаны, сонда біз айналмалы дене үшін барлық заңдылықтармен қатынастарды таба аламыз.

Сызықтық және бұрыштық шамалардың арасындағы байланыс

Қозғалмайтын *OO*' өстен **ω** бұрыштық жылдамдықпен айналатын қатты дененің кез келген *A* нүктесінің **v** жылдамдығын табамыз. *A* нүктенің айналыс өсінің қайсыбір *O* нүктесіне қатысты орны **r** радиус-вектормен сипатталатын болсын (1.8-сурет). (1.11) формуланы пайдаланып, оны сәйкес dt уақыт аралығына бөлеміз. $\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t = \mathbf{v}$ және $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{\omega}$ болатындықтан келесі өрнек шығады:

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}], \tag{1.17}$$

яғни, қайсыбір өске қатысты **ω** бұрыштық жылдамдықпен айналып тұрған қатты дененің кез келген нүктесінің **v** жылдамдығы **ω** бұрыштық жылдамдықпен *A* нүктенің айналыс өсінің кез келген *O* нүктесіне қатысты алынған **r** радиус-векторымен векторлық көбейтіндісіне тең болады (1.8-сурет).



1.8-сурет

(1.17) вектордың модулі $\upsilon = \omega r \sin\vartheta$ немесе

$$\upsilon = \omega\rho$$

мұндағы, ρ-*A* нүктесі қозғалатын шеңбердің радиусы (1.17) өрнекті уақыт бойынша дифференциалдап, *A* нүктенің **a** үдеуін табамыз:

$\mathbf{a} = [\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t, \mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega}, \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t]$, немесе

$$\mathbf{a} = [\boldsymbol{\beta}\mathbf{r}] = \big[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]\big]. \tag{1.18}$$

Бұл жерде (айналыс өсі тыныштықта) $\boldsymbol{\beta}||\boldsymbol{\omega}$, сондықтан $[\boldsymbol{\beta}\mathbf{r}]$ дегеніміз $\mathbf{a}_\tau$ тангенциалдық үдеу болып табылады. Ал$\big[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]\big]$ вектор, ол $\mathbf{a}_n$ нормал үдеу болып анықталады. **a** үдеу векторының $\boldsymbol{\tau}$ және **n** орттарына жасалған проекциялары тең:

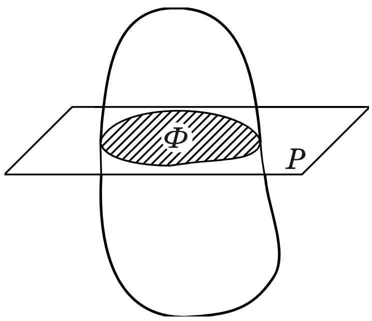
$$a_\tau = \beta_z\rho, \qquad a_n = \omega^2\rho.$$

Осыдан толық үдеудің модулі:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \rho\sqrt{\beta^2 + \omega^4}.$$

Қатты дененің жазық параллель қозғалысы

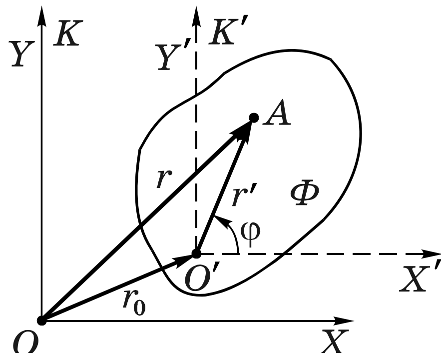
Бұл – қатты дененің әрбір нүктесінің қозғалысы қандай да бір қозғалмайтын (берілген санақ жүйесінде) жазықтыққа параллель өтетін қозғалысы болып табылады.



1.9-сурет

Осы кезде дененің қозғалмайтын *P* жазықтықпен қиылысуынан пайда болған *Φ* жазық фигура (1.9-сурет), қозғалыс кезінде үнемі осы жазықтықта жатады, мысалы, жазықтықта сырғанаусыз домалап бара жатқан цилиндр (конус болса, ол әлдеқайда күрделірек қозғалыста болады).

Қатты дененің жазық параллель қозғалысы кезіндегі оның қалпын бір мәнділікпен қозғалмайтын *Р* жазықтықтағы *Ф* жазық фигураның қалпымен анықталатындығына көз жеткізуге болады.



1.10-сурет

Ф жазық фигура өзінің *К* – санақ жүйесінде тыныштықта, ал *Р* жазықтығында қозғалыста болсын (1.10-сурет). *Ф* фигураның жазықтықтағы орнын фигураның кез келген *О*′ нүктесінің $\boldsymbol{r_0}$ радиус-векторымен және фигурамен берік байланысқан **r**' радиус-векторымен *К* санақ жүйесіндегі таңдалған бағыттың арасындағы φ бұрышы арқылы анықтауға болады. Сонда қатты дененің жазық параллель қозғалысы екі теңдеумен сипатталады:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t), \qquad \varphi = \varphi(t).$$

Егер d*t* уақыт аралығында *А* нүктесінің **r**' радиус-векторы d**φ** бұрышқа бұрылса, онда фигурамен байланысты кез келген кесіндінің де сондай бұрышқа бұрылатындығы анық (1.10-сурет). Басқаша айтқанда, фигураның d**φ** бұрышқа бұрылуы *О*' бас нүктені таңдап алуға тәуелсіз дегенді білдіреді, сондықтан **ω -**бұрыштық жылдамдықты біз қатты дененің бұрыштық жылдамдығы деп те атаймыз.

Енді дененің кез келген *А* нүктесінің жазық параллель қозғалысы кезіндегі **v** жылдамдығын табамыз. Көмекші *К*' санақ жүйесін енгіземіз, ол дененің *О*' нүктесімен берік байланысқан және *К* жүйеге қатысты ілгерілемелі орын ауыстырады (1.10-сурет). Сонда *А* нүктенің *К* жүйедегі d**r** қарапайым орын ауыстыруын келесі түрде келтіруге болады:

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}\mathbf{r}_0 + \mathrm{d}\mathbf{r}'.$$

мұндағы d$\boldsymbol{r_0}$*К*' жүйенің орын ауыстыруы (*О*' нүктенің), ал d**r**' – *А* нүктенің *К*' жүйеге қатысты тұрақты өсті айналуынан туады. *О*' бойынша (1.11) $\mathrm{d}\mathbf{r}' = [\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{r}']$ осы өрнекті алдыңғы өрнекке қойып, алынған теңдіктің екі жағын да d*t* уақытқа бөліп табамыз:

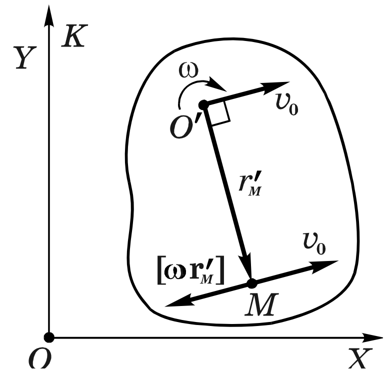
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']. \tag{1.19}$$

яғни, қатты дененің кез келген *А* нүктесінің жазық қозғалыс* кезіндегі жылдамдығы оның кез келген *О*' нүктесінің $\mathbf{v}_0$ жылдамдығымен дененің *О*

---

* (1.19) формула кез келген қатты дененнің күрделі қозғалыс үшін қолданылады.

нүктесі арқылы өтетін өстен айналуынан туатын $\mathbf{v}' = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']$ жылдамдықтың қосындысына тең болады.



1.11-сурет

Сонымен, дененің жазық қозғалысын негізгі екі қозғалыстың – ілгерілемелі (дененің кез келген *O*' нүктесімен бірге) және айналмалы (*O*' нүктесі арқылы өтетін өстен айнала) қозғалыстарының жиынтығы түрінде өрнектеуге болады. Тағы да бір рет ескере кету керек O' нүктесімен берік байланысқан *K*'-санақ жүйесінің ілгерілемелі қозғалысымен салыстырғандағы **v**' – *A* нүктесінің жылдамдығы.

Басқаша айтқанда, қатты дененің жазық параллель қозғалысын екі негізгі қозғалыстардың жиынтығы түрінде қарастыруға болады – ілгерілемелі дененің кез келген O' нүктесі мен бірге және айналмалы O' нүктесі *арқылы өтетін өсті айналу.*

Енді жазық параллель қозғалысты таза айналмалы қозғалысқа қалай келтіруге болатындығын қарастырайық. Жазық параллель қозғалысы кезінде дененің кез келген *O*' нүктесінің $\mathbf{v_0}$ жылдамдығы **ω** векторға перпендикуляр болады. Демек, денемен берік байланысқан, берілген уақытта жылдамдығы **v=0** болатын *M*[*] нүктені әрқашанда табуға болады. $0 = \mathbf{v}_0 = [\boldsymbol{\omega r}'_M]$ шартынан *M* нүктенің орнын, яғни оның нүктесіне қатысты r'_M радиус-векторын табуға болады (1.11-сурет). Бұл вектор **ω** және $\mathbf{v_0}$ векторларға перпендикуляр және оның бағыты $\mathbf{v}_0 = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'_M]$ векторлық көбейтіндіге сәйкес келеді, ал модулі $r'_M = v_0/\omega$.

M нүктесі сәйкес өстің де қалпын анықтайды (оның бағыты **ω** вектормен бірдей түседі). Қатты дененің берілген уақыттағы қозғалысы осы өске қатысты таза айналыс болып табылады. Мұндай өсті ***лездік айналу өсі*** деп атайды.

Жалпы алғанда, ***лездік айналу өсінің*** қалпы уақыт бойынша өзгеріп отырады. Мысалы, жазықтықта домалап келе жатқан цилиндр жағдайында лездік өс әрбір уақыт сәтінде цилиндр мен жазықтықтың жанасу сызығына сәйкес келеді.

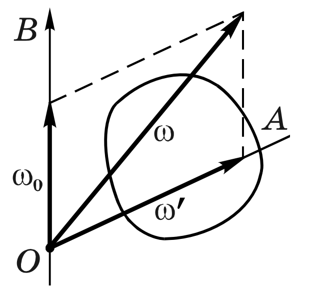
Бұрыштық жылдамдықтарды қосу

Қатты дененің екі өсті айнала өтіп, бір мезгілде қиылысқан қозғалысын қарастырайық. Қайсыбір дене *OA* өсті **ω**' бұрыштық жылдамдықпен (1.12-сурет) айнала қозғалсын. Содан кейін қозғалмайтын *K*-санақ жүйесінде осы

---

[*] M – нүктесі денеден тыс жерде де болуы мүмкін.

өсті $\boldsymbol{\omega_0}$ бұрыштық жылдамдықпен *OB* өсті айналдыра қозғалысқа келтірейік. Енді дененің *K*-жүйедегі қорытынды қозғалысын табайық.



1.12-сурет

OA және *OB* өстерімен берік байланысқан көмекші *K′*-жүйені алайық. Бұл жүйенің $\boldsymbol{\omega_0}$ бұрыштық жылдамдықпен айналатындығы анық және дене $\boldsymbol{\omega}'$ бұрыштық жылдамдықпен осы жүйені айналады.

d*t* уақыт аралығында дене *K*'-жүйеде *OA* өсін айнала d$\boldsymbol{\varphi}$' бұрышқа бұрылады және онымен бір мезгілде *K*'-жүйемен бірге *OB* өстен d$\boldsymbol{\varphi_0}$ бұрышқа бұрылады. Қосынды бұрылыс $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} = \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_0 + \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}'$ болады. Осы теңдіктің екі жағын да d*t* уақытқа бөліп, келесі өрнекті аламыз:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega_0} + \boldsymbol{\omega}' \tag{1.20}$$

Сонымен, қатты дененің *K*-жүйедегі қорытынды қозғалысы әрбір сәтте $\boldsymbol{\omega}$ вектормен бірдей түсетін және *O* нүктесі арқылы өтетін өстен $\boldsymbol{\omega}$ бұрыштық жылдамдықпен қозғалатын таза айналыс болып табылады (1.12-сурет). Бұл өс *K*-жүйеге қатысты орын ауыстырады – ол *OA* өспен бірге $\boldsymbol{\omega}_0$ бұрыштық жылдамдықпен *OB* өстен айналады.

Егер $\boldsymbol{\omega_0}$ мен $\boldsymbol{\omega}'$ бұрыштық жылдамдықтары модуль бойынша өзгермесе, дене *K*-жүйе (1.14) теңдеуіне сәйкес 1.12-суретте көрсетілгендей, жазықтықтың сыртына бағытталған $\boldsymbol{\beta}$ бұрыштық үдеумен сипатталады.

$\boldsymbol{\omega}$ бұрыштық жылдамдығы векторлардың негізгі қасиетін қанағаттандыратындықтан, $\boldsymbol{\omega}$ векторын нақтылы бағыттағы векторлық сома сияқты көрсетуге болады. Яғни, $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \cdots$, мұнда барлық векторлар бір санақ жүйесінде жатады. Осы ыңғайлы және пайдалы тәсілді қатты денелердің күрделі қозғалысын зерттегенде жиі пайдаланады.

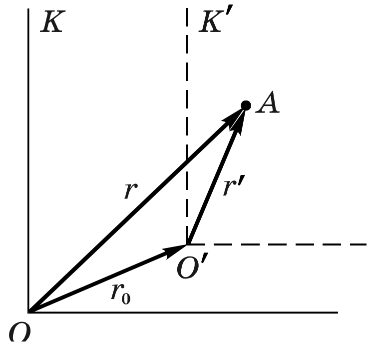
§ 1.3. Бір санақ жүйесінен екінші санақ жүйесіне өткен кездегі жылдамдықпен үдеудің түрлендірілуі

Классикалық механикада ұзындық (масштаб) және уақыт абсолютті болып есептеледі.

Кез келген масштаб түрлі санақ жүйелерінде бірдей болады, яғни қозғалысқа тәуелсіз. Бұл уақыттың өсуіне қатысты да орындалады, ол барлық санақ жүйелерінде бірдей болады. Төртінші өлшем ретінде кеңістік сияқты материяның атрибутына тәуелсіз абсолютті шама – уақыт алынады.

Бір-біріне қатысты белгілі заңдылықпен қозғалатын K және K' − кез келген екі санақ жүйесі берілген. Қайсыбір A нүктенің K-жүйесіндегі $\mathbf{v}$ жылдамдығы және $\mathbf{a}$ үдеу белгілі. Осы нүктенің K' жүйесіндегі сәйкес түрдегі $\mathbf{v}'$ және $\mathbf{a}'$ мәндері қандай болады? Бір санақ жүйесінің екінші санақ жүйесіне қатысты қозғалысының маңызды үш жағдайын қарастырайық.

1. *K′* жүйе *K*-жүйеге қатысты ілгерілемелі қозғалады. K' санақ жүйесінде K-санақ жүйесінің санақ басы $\boldsymbol{r_0}$ радиус вектормен, ал оның жылдамдығы мен үдеуі $\mathbf{v_0}$ және $\boldsymbol{a_0}$ векторларымен сипатталатын болсын. Егер A нүктенің *К-жүйе*дегі қалпы $\mathbf{r}$ радиус-вектормен сипатталатын болса, онда $\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{r}'$ болатындығы анық (1.13-сурет). Одан әрі dt уақыт аралығында A нүкте K жүйеде d$\mathbf{r}$ қарапайым орын



1.13-сурет

ауыстырады. Бұл орын ауыстыру K жүйеге қатысты $\mathrm{d}\boldsymbol{r_0}$ орын ауыстырудан тұрады, яғни $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}\mathbf{r}_0 + \mathrm{d}\mathbf{r}'$ осы өрнекті $\mathrm{d}t$ уақыт аралығына бөліп, жылдамдықты түрлендіру формуласын табамыз:

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'.} \tag{1.21}$$

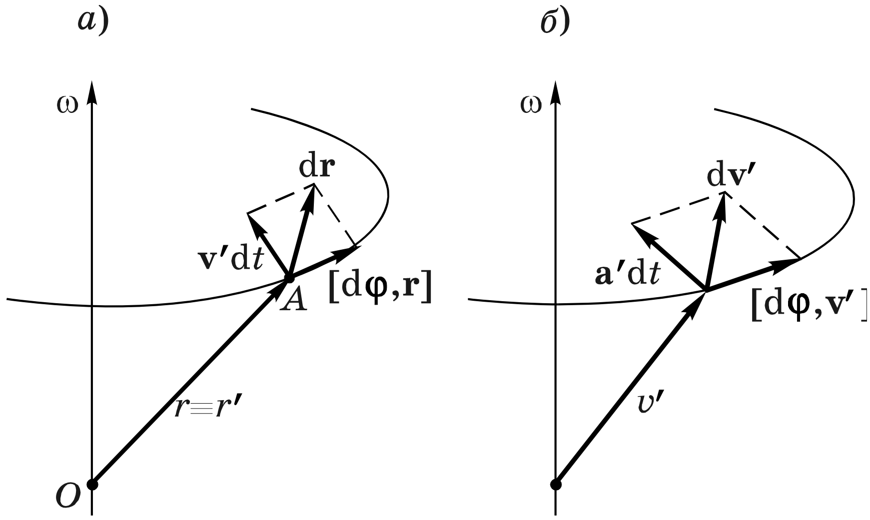
(1.21) теңдеуді уақыт бойынша дифференциалдап, бірден үдеуді түрлендіру формуласын аламыз:

$$\boxed{\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}'.} \tag{1.22}$$

Осыдан $\mathbf{a_0} = 0$ кезінде а = а' екендігі шығады, яғни K'-жүйе K-жүйеге қатысты үдеусіз қозғалғанда A нүктенің үдеуі екі санақ жүйесінде де бірдей болады.

2. *K′*-жүйе *K*-жүйеге қатысты тұрақты өсті тұрақты $\boldsymbol{\omega}$ бұрыштық жылдамдықпен айналады. K және K'-жүйелердің санақ басын айналу өсініңқайсыбір O нүктесінде аламыз (1.14,а-сурет) сонда A нүктенің радиус-векторы екі жүйеде де бірдей болады: $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$.

Егер A нүкте K'-жүйеде қозғалмайтын болса, онда бұл оның K-жүйедегі dt уақыт аралығындағы $\mathbf{r}$ орын ауыстыруы радиус-вектордың $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$ бұрышқа бұрылуы есебінен ғана болады (K' жүйемен бірге) және (1.11) бойынша $[\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{r}]$ векторлық көбейтіндіге тең.



1.14-сурет

Егерде *A* нүкте *K*'-жүйеге қатысты **v**' жылдамдықпен қозғалатын болса, онда ол d*t* уақыт аралығында қосымша **v**'d*t* орын ауыстыру жасайды (1.14,а−сурет), сонда

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{v}'\mathrm{d}t + [\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi},\ \mathbf{r}\,.] \tag{1.23}$$

Осы өрнекті d*t*-ға бөліп, жылдамдықты түрлендірудің формуласын аламыз:

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}' + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}],} \tag{1.24}$$

мұндағы, **v**' және **v** – *A* нүктенің сәйкес түрде *K* және *K*'-жүйелеріндегі жылдамдықтары.

Енді үдеулерге көшейік. (1.24) теңдеуі бойынша **v** вектордың d*t* уақыт аралығындағы d**v** өсімшесі *K-жүйе*де **v**' және $[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$ векторларының өсімшелерінің қосындысынан тұруы тиіс, яғни

$$\mathrm{d}\mathbf{v} = \mathrm{d}\mathbf{v}' + [\boldsymbol{\omega}, \mathrm{d}\mathbf{r}]. \tag{1.25}$$

d**v**' өсімшені табайық. Егер *A* нүкте *K′* жүйеде **v**'=const жылдамдықпен қозғалатын болса, онда бұл вектордың *K-жүйе*сіндегі өсімшесі оның тек d**φ** бұрышқа бұрылуынан ғана туады (*K′-жүйе*мен бірге) және **r** жағдайындағыдай $[\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v}']$ векторлық көбейтіндіге тең. Бұған **v**' вектордың басын айналыс өсімін біріктіру арқылы көз жеткізуге болады. (1.14,б-сурет). Егер *A* нүктенің *K′-жүйе*де **a**' үдеуі болса, онда d*t* уақыт аралығында **v**' вектор қосымша **a**'d*t* өсімше алады сонда:

$$\mathrm{d}\mathbf{v}' = \mathbf{a}'\mathrm{d}t + [\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v}']. \tag{1.26}$$

Енді (1.26) және (1.23) өрнектерді (1.25) теңдікке қойып, алынған нәтижені dt-ге бөлеміз. Нәтижесінде үдеуді түрлендірудің келесі формуласын аламыз:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + 2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'] + \big[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]\big], \tag{1.27}$$

мұндағы, **a** және **a**' – *A* нүктенің *K* және *K* санақ жүйелеріндегі үдеулері. Бұл формуланың оң жағындағы екінші қосылғыш Кориолис (немесе бұрылыс) үдеуі $\mathbf{a}_{\text{кор}}$, ал үшінші қосылғыш – $\mathbf{a}_{\text{с}}$-*өске тартқыш үдеу*[*] деп аталады:

$$\mathbf{a}_{\text{кор}} = \mathbf{2}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'], \qquad \mathbf{a}_{\text{с}} = \big[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]\big]\,. \tag{1.28}$$

Сонымен, нүктенің *A* жүйеге қатысты **a** үдеуі үш үдеудің қосындысына тең: *K*′-жүйеге қатысты **a**' үдеу, $\mathbf{a}_{\text{кор}}$ Кориолис үдеуі және өске тартқыш $\mathbf{a}_{\text{с}}$ үдеу.

Өске тартқыш үдеуді $\mathbf{a}_{\text{с}} = -\boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{\rho}$ деп жазуға болады, мұндағы $\boldsymbol{\rho}$-айналыс өсіне перпендикуляр және *A* нүктенің осы өске қатысты орнын анықтайтын радиус-векторы. Сонда (1.27) формуланы төмендегідей жазуға болады:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{2}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'] - \boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{\rho}\,. \tag{1.29}$$

3. ***K*' және *K-жүйе*ге қатысты ілгерілемелі $\mathbf{v_0}$ жылдамдықпен және $\mathbf{a_0}$ үдеумен қозғалып бара жатқан өс тұрақты ω бұрыштық жылдамдықпен айналады.** Бұл жағдай алғашқы екі жағдайды біріктіреді. *K*'*-жүйе*нің айналыс өсімен берік байланысқан және *K-жүйе*ге қатысты ілгерілемелі қозғалатын көмекші *S*-жүйені енгіземіз. **v** және $\mathbf{v}_s$-*A* нүктенің *K* және *S-жүйе*лердегі жылдамдықтары болсын, сонда (1.21) теңдеуге сай $\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \mathbf{v_s}$ болады, $\mathbf{v_s}$ жылдамдықты (1.24) бойынша $\mathbf{v_s} = \mathbf{v}' + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$ өрнекпен алмастырамыз, мұндағы, **r** – *A* нүктенің *K-жүйе*нің айналыс өсіндегі кез келген нүктеге қатысты радиус-векторы, сөйтіп, жылдамдықты түрлендіру үшін мына формуланы аламыз:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v_0} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]\,. \tag{1.30}$$

(1.22) және (1.29) формулаларды пайдалана отырып, үдеуді түрлендіру формуласын табамыз:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a_0} + \mathbf{2}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'] - \boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{\rho}\,. \tag{1.31}$$

Соңғы екі формуладағы **v**, **v**' және **a**, **a**' – *A* нүктенің сәйкес түрде *K* және *K*′*-жүйе*леріне қатысты жылдамдықтары мен үдеулері, $\mathbf{v_0}$ және $\mathbf{a_0}$ *K*-

[*] Өскетартқыш үдеуді нормаль үдеумен ауыстырамыз.

*жүйе*дегі *К'-жүйе*сінің айналыс өсінің жылдамдығы мен үдеуі. **r**-*A* нүктенің *К-жүйе*сінің айналыс өсінің кез келген нүктесіне қатысты радиус-векторы, $\boldsymbol{\rho}$ – айналыс өсіне перпендикуляр және *A* нүктенің осы өске қатысты орнын анықтайтын радиус-вектор.

Мысал. Диск столға бекітілген өсті тұрақты **ω** бұрыштық жылдамдықпен айналады. Дискінің бойымен столға қатысты **v** жылдамдықпен *A* нүктесі қозғалады. *A* нүктенің айналыс өсіне қатысты орнын сипаттайтын радиус-векторы $\boldsymbol{\rho}$ болатын уақыт үшін *A* нүктенің дискіге қатысты **v**' жылдамдығы мен $\mathbf{a}'$ үдеуін табу керек. А нүктенің **v**' жылдамдығы (1.24) бойынша

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\rho}].$$

$\mathbf{a}'$ үдеуді (1.29) формуласы бойынша табамыз, тек бұл жерде $\mathbf{v} = const$ екендігін ескерсек, онда $\mathbf{a} = 0$ болады. Сонда:

$$\mathbf{a}' = -\mathbf{2}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'] + \boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{\rho}.$$

Осы формулаға **v**' мәнін қойған соң келесі өрнек шығады:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{2}[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}] - \boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{\rho}.$$

Есептер

1.1. Қозғалмайтын *O* нүктеге қатысты *A* бөлшектің орнын сипаттайтын радиус-вектор уақыт бойынша өзгереді:

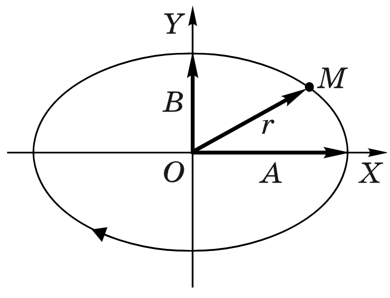
$$\mathbf{r} = \mathbf{A}\sin\omega t + \mathbf{B}\cos\omega t,$$

мұндағы **A** және **B** – тұрақты векторлар, әрі **A**⊥**B**; **ω** – оң тұрақты шама. *X* және *Y* өс бағыттары бойынша **A** және **B** векторлармен бірдей түсетіндей және басы *O* нүктесінде болатындай етіп алып, бөлшектің **a** үдеуін және оның траекторияларының *y(x)* теңдеуін табу керек.

Шығару жолы. **r** радиус-векторды уақыт бойынша екі рет дифференциалдап табамыз.

$$\mathbf{a} = -\omega^2(\mathbf{A}\sin\omega t + \mathbf{B}\cos\omega t) = -\omega^2\mathbf{r}$$

яғни, **a** вектор барлық уақытта да *O* нүктеге қарай бағытталған, ал оның модулі бөлшектің осы нүктеге дейінгі қашықтығына пропорционал. Енді траекторияның теңдеуін табамыз. **r** векторды *X* және *Y* өстеріне проекциялаймыз:



1.15-сурет

$$x = \mathbf{A}\sin\omega t, \quad y = \mathbf{B}\cos\omega t$$

Осы екі теңдеулерден ω*t* шамасын шығарып тастап, келесі өрнекті табамыз:

$$x^2/A^2 + y^2/B^2 = 1$$

Бұл эллипстің теңдеуі, A және B – оның жарты өстері (1.15-суретте тілшікпен M бөлшегінің қозғалыс бағыты көрсетілген).

1.2. **Орын ауыстыру және жол**. Бөлшекке $t = 0$ сәтте $\mathbf{v_0}$ жылдамдық беріледі, осыдан кейін оның жылдамдығы t-уақыт бойынша өзгере бастайды:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v_0}(1 - t/\tau)$$

мұндағы,τ- оң тұрақты шама. Алғашқы t- секунд ішіндегі қозғалыс үшін:

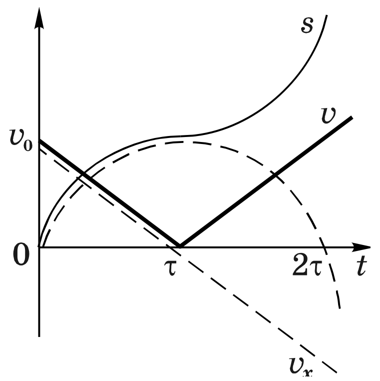
1) бөлшектердің $\Delta\mathbf{r}$ орын ауыстыру векторын; 2) оның жүріп өткен s жолын табу керек.

Шығару жолы. **1.** (1.1) бойынша $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{v}\mathrm{d}t = \mathbf{v_0}(1 - t/\tau)\mathrm{d}t$ осы теңдеуді 0-ден t-ға дейін интегралдап, келесі өрнекті табамыз:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{v_0}t(1 - t/2\tau)$$

2. Бөлшектің t уақыт ішінде жүріп өткен жолы s

$$s = \int_0^t v\,\mathrm{d}t$$



1.16-сурет

мұндағы, $\boldsymbol{v}$ – $\mathbf{v}$ вектордың *модулі*. Бұл жерде

$$v = v_0|1 - t/\tau| = \begin{cases} v_0(1 - t/\tau), \text{егер } t \le \tau \\ v_0(t/\tau - 1), \text{егер } t \ge \tau \end{cases}$$

Осыдан, $t > \tau$ кезінде жолды есептеуге қажет интегралды екіге бөлу қажеттілігі шығады: 0-ден τ-ға және τ-дан t-ға дейін.

Екі жағдай үшін де интегралдауды жүргізіп, алатынымыз:

$$s = \begin{cases} v_0 t(1 - t/2\tau), \text{егер } t \le \tau \\ \frac{1}{2}v_0\tau[1 + (1 - t/\tau)^2], \text{егер } t \ge \tau \end{cases}$$

1.16-суретте $v(t)$ мен $s(t)$ тәуелділіктерінің графиктері келтірілген. Осы суретте штрихталған сызықтармен $\boldsymbol{v_x}$ пен Δx–тің t-дан тәуелділіктері көрсетілген. Мұнда $\mathbf{v}$ мен $\Delta\mathbf{r}$ векторлардың X өсіне құраушылары.

$\mathbf{v_0}$ векторы бойымен бағытталған X өсіне түсірілген $\mathbf{v}$ мен $\Delta\mathbf{r}$ векторларының проекциялары $\boldsymbol{v_x}$ және Δx болып табылады.

1.3. Трамвай A аялдамадан B аялдамаға дейін $a = a_0 - bs$ заңы бойынша түзусызықты өзгеретін үдеумен қозғалады, мұндағы a_0 және b – оң тұрақтылар, s – оның A аялдамадан қашықтығы. Осы аялдамалардың арақашықтығын және трамвайдың максималды жылдамдығын табу керек.

Шығару жолы. Әуелі жылдамдықтың s-ке тәуелділігін анықтаймыз. dt − уақыт аралығындағы жылдамдықтың өсімшесі $dv = adt$. Бұл өрнекті $\mathrm{d}t = \mathrm{d}s/v$ екендігін пайдаланып, интегралдауға ыңғайлы түрге келтіреміз, сонда

$$v\mathrm{d}v = (a_0 - bs)\mathrm{d}s.$$

Осы теңдеуді интегралдап (сол жағын 0-ден v-ға дейін, оң жағын 0-ден s-ке дейін) табамыз:

$$\frac{v^2}{2} = a_0 s - bs^2/2, v = \sqrt{(2a_0 - bs)s}.$$

Осыдан аялдамалар арасы, яғни s_0 болатын кездегі $\upsilon = 0$ мәні $s_0 = 2a_0/b$. Максималды жылдамдықты $\mathrm{d}v/\mathrm{d}s = 0$ шартынан, немесе түбір астындағы өрнектің максимумынан табамыз. Осыған сәйкес келетін s_0 мәні v_{max} және $s_m = a_0/b$ $v_{max} = a_0/\sqrt{b}$.

1.4. *X, Y* жазықтығында координаталары $x = y = 0$ тең нүктеден бөлшек $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + bx\mathbf{j}$ жылдамдықпен қозғалады, a және b – қайсыбір тұрақтылар, **i** және **j** – *X* және *Y* өстерінің орттары. Бөлшек траекториясының *y(x)* теңдеуін табу керек.
Шығару жолы. Бөлшектің *x* және *y* координаттарының d*t* уақыт ішіндегі өсімшесін табамыз:

$$\mathrm{d}y = v_y \mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}x = v_x \mathrm{d}t.$$

мұндағы, $v_y = bx,\quad v_x = a$. Олардың қатынасынан

$$\mathrm{d}y = (b/a)x\mathrm{d}x.$$

осы өрнекті интегралдаймыз

$$y = \int_0^x (b/a)x\mathrm{d}x = (b/2a)x^2.$$

Яғни, бөлшектің траекториясы парабола болғаны.

1.5. Горизонталь жолмен (*x* өсі) бірқалыпты домалап келе жатқан доңғалақ табанындағы *A* нүктесінің қозғалыс заңын келесі түрде көрсетуге болады:

$$x = b(\omega t - \sin\omega t) \qquad\qquad y = b(1 - \cos\omega t).$$

Мұндағы, *b* және ω – оң тұрақты шамалар. *A* нүктенің $\boldsymbol{v}$ жылдамдығын, доңғалақтың табанымен жолды қатарлас екі рет басып өткендегі жүріп өткен s жолын, сонымен қатар *A* нүкте үдеуінің модулін табу керек.
Шығару жолы. A нүктенің v жылдамдығы және оның жүріп өткен s жолы мына формулалармен анықталады:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = b\omega\sqrt{2(1 - \cos\omega t)} = 2b\omega|\sin(\omega t/2),|,$$

$$s = \int_0^{t_1} v dt = 4b[1 - \cos(\omega t_1/2)].$$

мұндағы, *t* - *A* нүктенің жолды қатарласа екі рет басып өту уақыт аралығы. $y = y(t)$ теңдеуінен $\omega t_1 = 2\pi$ кезінде $y(t_1) = 0$ болатындығын табамыз.
Сондықтан, $s = 8b$.

А нүктенің үдеу модулі:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 = b\omega^2}.$$

Модулі бойынша тұрақты болып қалатын **a** вектор үнемі доңғалақтың центріне –C нүктесіне қарай бағытталатындығын көрсетейік. Шынында да $C-$нүктесімен байланысқан және жолдың бетіне қатысты ілгерілемелі, бірқалыпты қозғалатын K'-*жүйе*сінде, A нүкте $C-$нүктені айнала бірқалыпты қозғалады. Сондықтан оның К-жүйесіндегі үдеуі доңғалақтың центріне қарай бағытталған. Ал K'-жүйе бірқалыпты қозғалғандықтан, **a** векторы да жол бетіне қатыстытура солайбағытталған.

1.6. Нүкте шеңбер бойымен әр сәтте тангенциал үдеумен нормаль үдеуінің модульдері бір-біріне тең болып қалатындай түрде баяу қозғалады. Бастапқы сәтте нүктеге $\mathbf{v_0}$ бастапқы жылдамдық беріледі. Нүктенің v жылдамдығын және толық үдеуінің a модулін жүріп өтілген s жолға тәуелді түрде табу керек.
Шығару жолы. Есептің шарты бойынша $\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}t = -v^2/r$. $\mathrm{d}s/v$ орнына $\mathrm{d}t$ қойып, бастапқы теңдеуді келесі түрге келтіреміз:

$$\mathrm{d}v/v = -\mathrm{d}s/r.$$

Бастапқы жылдамдықты ескере отырып, осы теңдеуді интегралдасақ, онда

$$v = v_0 \mathrm{e}^{-s/r}.$$

Бұл жерде $|a_\tau| \equiv a_n$, сондықтан толық үдеудің модулі келесі өрнекпен сипатталады:
$a = \sqrt{2}a_n = \frac{\sqrt{2}v^2}{r}$, немесе

$$a = \sqrt{2}(v_0^2/r)\mathrm{e}^{-2\mathrm{s/r}}.$$

1.7. Нүкте жазық траекториямен тангенциалдық үдеуі $a_\tau = a_0$, ал нормал үдеуі $a_n = bt^4$ болатындай түрде қозғалады, мұндағы, a_0 және b – оң тұрақтылар, t уақыт. Нүкте $t = 0$ сәтте қозғала бастайды. Нүктенің траекториясының ρ қисықтық радиусын және оның толық үдеуін жүріп өткен s жолға тәуелді түрде анықтау керек.
Шығару жолы. Жылдамдықтың қарапайым өсімшесі $dv = a_\tau \mathrm{d}t$. Осы теңдеуді интегралдап, $v = a_0 t$ табамыз. Жүріп өткен жол $s = a_0 t^2/2$.
Траекторияның қисықтық радиусын (1.10) теңдеуі бойынша келесі түрде келтіруге болады: $\rho = v^2/a_n = a_0^2/bt^2$, немесе $\rho = a_0^3/2bs$.
Толық үдеумодулі:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = a_0\sqrt{1 + (4bs^2/a_0^3)^2}.$$

1.8. Бөлшек v жылдамдықпен параболалық $y = kx^2$ траектория бойымен бірқалыпты қозғалады, мұндағы k – оң тұрақты. Бөлшектің нүктедегі $x = 0$ үдеуін табу керек.
Шығару жолы. Траекторияның теңдеуін уақыт бойынша екі рет дифференциалдаймыз:

$$\dot{y} = 2kx\dot{x}, \qquad \ddot{y} = 2k(\dot{x}^2 + x\ddot{x}).$$

Бөлшек бірқалыпты қозғалғандықтан, оның үдеуі траекторияның барлық нүктелерінде таза нормал болады және $x = 0$ нүктеде ол осы нүктедегі $\ddot{y}$ туындымен бірдей түседі. Осыны ескеріп, $x = 0$ нүктеде $|\dot{x}| = v$ болатындықтан келесі өрнекті табамыз:

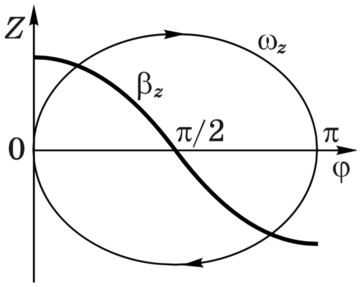
$$a = (\ddot{y})_{x=0} = 2kv^2.$$

Нормаль үдеулерді анықтау үшін $x = 0$ нүктедегі траекторияның қисықтық радиусын есептеу әдістерін бұл жолы келтірген жоқпыз.

$$x = 0(a_n) = v^2/\rho.$$

1.9. Қатты дененің айналуы. Қатты дене қозғалмайтын өстен $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_0 \cos\varphi$ бұрыштық үдеумен айналады, мұндағы $\boldsymbol{\beta}_0$ – тұрақты вектор, φ – бастапқы қалыптан айналу бұрышы. Дененің ω_z бұрыштық жылдамдығын φ бұрышқа тәуелді түрде табу керек.$\varphi = 0$

Шығару жолы. z өсінің оң бағытын $\boldsymbol{\beta}_0$ векторының бойымен бағыттаймыз. (1.16) теңдеу бойынша $\mathrm{d}\omega_z = \beta_z \mathrm{d}t$. $\mathrm{d}t$-ны (1.15) формуласы арқылы $d\varphi/\omega_z$ алып, алдыңғы теңдеуді келесі түрге келтіреміз:



1.17-сурет

$$\omega_z \mathrm{d}\omega_z = \beta_0 \cos\varphi \mathrm{d}\varphi.$$

Осы өрнекті бастапқы шарттарды ескере отырып, интегралдаймыз: $(\varphi = 0)$ болғанда $(\omega_z = 0\,)\omega_z^2/2 = \beta_0 \sin\varphi$ осыдан:

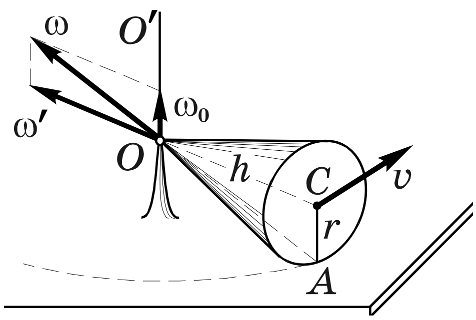
$$\omega_z = \pm\sqrt{2\beta_0 \sin\varphi}\,.$$

$\omega_z(\varphi)$ тәуелділігінің кестесі 1.17-суретте көрсетілген. Суреттен φ бұрышы артқан кезде ω векторы әуелі артады, осы кезде оның бағыты $\boldsymbol{\beta}_0(\omega_z > 0)$ вектормен бірдей түседі. $\varphi = \pi/2$ кезінде максимумға жетеді, содан кейін азая отырып, $\varphi = \pi$ кезінде нөлге айналады. Осыдан кейін дене осы тәрізді қарсы бағытта айнала бастайды $(\omega_z < 0)$. Осының а нәтижесінде дене $\varphi = \pi/2$ қалпының төңірегінде $\pi/2$ амплитудамен тербеліс жасайды.

1.10. Табанының радиусы h биіктігі r дөңгелек конус стол бетімен сырғанамай 1.18-суретте көрсетілгендей, домалайды. Конустың төбесіндегі O нүкте негізгі конустың табанының ортасындағы C нүктесімен шарнирлы бекітілген. C нүкте тұрақты $\boldsymbol{v}$ жылдамдықпен қозғалады. Столға қатысты келесі шамаларды табу керек:

1) конустың $\boldsymbol{\omega}$ бұрыштық жылдамдығын;

2) конустың $\boldsymbol{\beta}$ бұрыштық үдеуін.



1.18-сурет

Шығару жолы. **1**. (1.20) бойынша $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega_0} + \boldsymbol{\omega}'$,$\boldsymbol{\omega_0}$ – мұндағы, және $\boldsymbol{\omega}'$-сәйкес түрде OO' және OC өстерден айналу бұрыштық жылдамдықтары. $\boldsymbol{\omega_0}$ және $\boldsymbol{\omega}'$–векторларының модульдерін 1.18-суреттің көмегімен табуға болады:

$$\omega_0 = v/h, \qquad \omega' = \frac{v}{r}.$$

Олардың қатынасы $\omega_0/\omega' = r/h$. Осыдан ω вектордың әр уақытында A жанасу нүктесі арқылы өтетін конустың жасаушысымен бірдей түсетіндігі шығады.
$\boldsymbol{\omega}$ – вектордың модулі:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega'^2} = (v/r)\sqrt{1 + (r/h)^2}\,.$$

2. Конустың $\boldsymbol{\beta}$ бұрыштық үдеуі, (1.14)-ға сай, $\boldsymbol{\omega}$ вектордың уақыт бойынша туындысы болып табылады. $\omega_0 = const$, болатындықтан:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}'}{\mathrm{dt}}\,.$$

$\boldsymbol{\omega}'$ вектор модулі бойынша тұрақты болып қала отырып, OO' өстен ω_0 бұрыштық жылдамдықпен айналады. Оның dt уақыт аралығындағы өсімше модулі $|d\boldsymbol{\omega}'| = \boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\omega_0}dt$ немесе векторлық түрде $\mathrm{d}\omega' = [\omega_0\omega']dt$: сонымен:

$$\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\omega_0}\boldsymbol{\omega}']\,.$$

Бұл вектордың модулі $\beta = v^2/rh$.

1.11. Жылдамдықты және үдеуді түрлендіру. Столға вертикаль бекітілген және шыбықтың бір ұшы өс арқылы өтетін шыбықты $\boldsymbol{\omega}$ – тұрақты бұрыштық жылдамдықпен осы өсті айналады. Шыбықтың бойымен кішігірім муфта қозғалып жүр. Оның шыбыққа қатысты жылдамдығы $\mathbf{v}' = b\boldsymbol{r}$ заңы бойынша өзгереді, мұндағы b – тұрақты, $\mathbf{r}$ – муфтаның айналу өсінен қашықтығын сипаттайтын радиус-вектор. Сонымен табу керек: 1) Муфтаның столға қатысты $\mathbf{v}$ жылдамдығы мен $\mathbf{a}$ үдеуін $\mathbf{r}$–ға тәуелді түрде; 2) Қозғалыс процесі кезіндегі $\mathbf{v}$ және $\mathbf{a}$ вектордың арасындағы бұрышты.

Шығару жолы. **1.** (1.24) бойынша

$$\mathbf{v} = b\boldsymbol{r} + [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}]\,.$$

Бұл вектордың модулі $v = \boldsymbol{r}\sqrt{b^2 + \omega^2}$.
$\mathbf{a}$ үдеуді (1.29) формула бойынша тауып, жазамыз:

$$\mathrm{a}' = \frac{d\mathrm{v}\prime}{dt} = b^2\mathbf{r}.$$

Сонда

$$\mathbf{a} = (b^2 - \omega^2)\mathbf{r} + 2b[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}].$$

Бұл вектордың модулі $a = (b^2 + \omega^2)\mathbf{r}$.

2. $\mathbf{v}$ және $\mathbf{a}$ векторлардың арасындағы α бұрышты табу үшін олардың скалярлық көбейтіндісін пайдаланамыз, одан $\cos\alpha = \mathbf{v}\boldsymbol{a}/va$ екендігі шығады. Қажетті түрлендірулерден кейін келесі теңдеу алынады:

$$\cos\alpha = 1/\sqrt{1 + (\omega/b)^2}.$$

Осындай қозғалыс кезінде α – бұрышы тұрақты болып қалады.

2-тарау

Динамиканың негізгі теңдеуі

§ 2.1. Инерциялық санақ жүйелері

Инерция заңы

Кинематикада қозғалысты тек жалпы сипаттап қана қоймай, оны тудырған себептерге тоқталған жөн. Сондықтан кинематикалық шамаларды қарастырған кезде санақ жүйелері туралы сөз болған жоқ: кинематикалық сипаттамалар үшін санақ жүйелерінің бір-бірінен ешқандай айырмашылығы болмайды. Ал динамикада – қозғалысты зерттеуге көшкен кезде жағдай күрт өзгереді. Динамикада түрліше санақ жүйелерінің өзара айырмашылығы, қозғалыс заңдарын зерттеу кезінде бір санақ жүйелерінің екінші санақ жүйелерімен салыстырғандағы артықшылықтары бірден көзге түседі.

Сырт қарағанда сансыз көп санақ жүйелерінің кез келгенін пайдалана беруге болатын сияқты. Бірақ механиканың заңдары түрліше санақ жүйелерінде ең қарапайым деген құбылыстың өзінде соншалықты күрделеніп кетуі мүмкін. Сондықтан да механика заңдары мүмкіндігінше қарапайымырақ түр қабылдайтын санақ жүйесін таңдап ала білу керек. Осындай санақ жүйесінде механикалық құбылыстарды сипаттаудың өте ыңғайлы болатындығы анық.

Механикада еркін материалдық нүктенің қозғалысы ретінде бірқалыпты және түзу сызықты түрде өтетін санақ жүйесі таңдалынады. Материалдық нүктенің мұндай қозғалысын инерция жүйелері бойынша ***қозғалыс*** деп атайды, ал санақ жүйелерін ***инерциялық санақ жүйелері*** деп аталады.

Инерциалық санақ жүйелері болады деген тоқтам ***классикалық механиканың бірінші заңының*** – *Галилей-Ньютонның инерция заңының* мазмұны болып табылады.

Егер сыртқы күш әсер етпесе немесе түсірілген күштердің әсері теңесетін болса, онда кез келген дене өзінің тыныштық күйін немесе бірқалыпты түзу сызықты қозғалысын сақтайды (инерция бойынша қозғалысын сақтайды).

Міне, осындай санақ денелерімен байланысқан санақ жүйелері ***инерциялық санақ жүйелері*** деп аталады. *Дененің тыныштық күйін немесе бірқалыпты және түзу сызықты қозғалысын сақтап қалуға тырысуын* *дененің* ***инерттілігі*** деп атайды. Міне, сондықтан Ньютонның бірінші заңы көбіне ***инерция заңы*** деп аталады.

Инерциялық санақ жүйелерінің болатындығын тәжірибе дәлелдейді. Басында Жер инерциялық* жүйе болады деп саналды. Бірақ кейінірек дәлірек қойылған тәжірибелер Жердің аздап болса да үдеуінің бар екендігін көрсетті. Ал планеталардың үдеулеріне жүргізілген бақылаушылар Күннің центрімен байланысты *гелиоцентрлік санақ жүйесінің* толық инерциалдылығын дәлелдеді.

Гелиоцентрлік санақ жүйесіне қатысты бірқалыпты және түзусызықты қозғалатын кез келген санақ жүйелері инерциялық болып табылады. Инерциялық санақ жүйелеріне қатысты үдемелі қозғалыста болатын санақ жүйелері *инерциялық емес* санақ жүйелері деп аталады.

Кеңістік пен уақыттың симметриялық қасиеттері. Инерциалдық санақ жүйелерінің аса маңызды қасиеттерінің бірі – оларға қатысты кеңістік пен уақыттың белгілі *симметриялық қасиеттері* болады: тәжірибелер көрсеткендей бұл санақ жүйелерінде уақыт *біртекті*, ал кеңістік *біртекті* және *изотропты* болады.

Уақыттың біртектілігі дегеніміз (бірдей жағдайларда алынғанда) - түрлі уақыт аралығында бақыланған физикалық құбылыстардың бірдей өтуі болып табылады. Басқаша айтқанда, олар әртүрлі уақытта өздерінің физикалық қасиеттері бойынша бір-біріне эквивалентті болады.

Кеңістіктің *біртектілігі мен изотроптылығы* деп кеңістік қасиеттерінің түрлі нүктелерде бірдей (біртектілік), ал барлық бағыттар бойынша әрбір нүктеде бірдей (изотроптық) болатындығы айтады.

Инерциялық емес санақ жүйелерінде кеңістік біртектілік және изотроптық қасиеттерінен айырылады.

Инерциялық емес санақ жүйелерінде кеңістіктің біртекті және изотропты емес екендігін байқаймыз. Егер қандай да болсын бір дене басқа денелермен ешқандай да өзара әрекеттеспесе оның кеңістіктегі әртүрлі жағдайлары мен бағыттары механикалық тұрғыдан қарастырғанда бір-бірімен эквивалентті емес болғаны. Осындай тұжырымды уақыт үшін де келтіруге болады. Уақыт та инерциалды емес санақ жүйелерінде біркелкі емес, яғни оның әртүрлі сәттері бір-бірімен эквивалентті емес. Олай болса механикалық құбылыстарды зерттеген кезде кеңістік пен уақыттың осындай біртекті емес қасиеттері қолайсыз жағдайларды тудырады. Мысалы егер бір денеге басқа бір дене тіпті әсер етпесе де ол тыныштық қалпынан шығып, қозғалар еді. Егер оның жылдамдығы белгілі бір уақытта нөлге тең болса да, ол келесі бір сәтте өзінен өзі белгілі бір бағытта қозғала бастар еді, ал мұндай

* Жермен байланысқан санақ жүйесін іс жүзінде инерциалды деп санауға болады.

құбылыстар физиканың іргелі заңдарына қарама-қайшы екені бәрімізге мәлім.

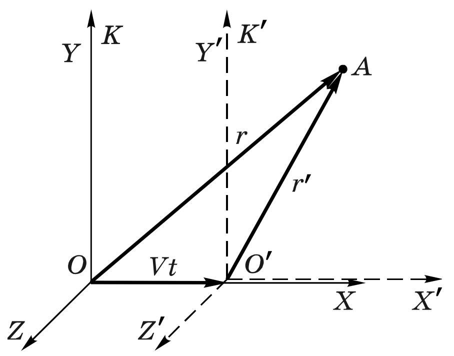
Галилейдің салыстырмалылық принципі

Инерциялық санақ жүйелері үшін салыстырмалылық принцип орындалады: өздерінің механикалық қасиеттері бойынша *барлық инерциялық санақ жүйелері өзара эквивалентті* болады. Яғни, инерциялық санақ жүйесінің ішінде тұрып, ешқандай механикалық тәжірибелердің көмегімен бұл жүйенің тыныштықта немесе бірқалыпты түзусызықты қозғалыста екендігін тағайындау мүмкін емес. Кеңістік пен уақыттың қасиеттері барлық инерциялық санақ жүйелерінде бірдей, сонымен қатар олар үшін механиканың барлық заңдары да бірдей болады.

Осы айтылған тоқтам классикалық механиканың аса маңызды принциптерінің мазмұны болып табылады – *Галилейдің салыстырмалы принципі.* Бұл принцип жарық жылдамдығынан көп кіші болатын жылдамдықтармен өтетін барлық механикалық құбылыстар үшін орындалады. Осы келтірілген тұжырымдар бойынша инерциялық санақ жүйелерінің механикалық құбылыстарды зерттегендегі маңызы зор.

Галилейдің түрлендірулері

Енді бір инерциялық санақ жүйеден екінші жүйеге өткенде координаттардың түрлену өрнектерін табайық. *K′*− инерциялық санақ жүйесі екінші *K*−инерциялық санақ жүйесіне қатысты **V** жылдамдықпен қозғалатын болсын. *K′*−санақ жүйесінің *X′, Y′, Z′* өстері *K-жүйе*сінің *X, Y, Z* өстеріне параллель, әрі *X* және *X′* өстері бір-бірімен бірдей түсетін және **V** векторының бағытында болатындай етіп алынған (2.1-сурет). Уақыттың санақ басы етіп *O* және *O′* координат бастарының бірдей түсетін уақыт сәтін алып, бір ғана *A* нүктенің *K* және *K′-жүйе*леріндей **r** және **r′** радиус-векторларының арасындағы қатынасты жазайық:



2.1-сурет

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t. \tag{2.1}$$

осымен қатар,

$$t' = t \ . \tag{2.2}$$

Бұл жерде кесінділердің ұзындығы және уақыттың жүрісі қозғалыс күйінде тәуелсіз, демек екі санақ жүйесінде де бірдей деп есептелінеді. Кеңістік пен уақыттың абсолюттігі жайында болжам классикалық механикалық көзқарастардың негізінде нақ дәлелденген.

(2.1) және (2.2) қатынастары ***Галилейдің түрлендірулері*** деп аталады. Бұл түрлендірулерді координаттар арқылы жазсақ:

$$x' = x - Vt, \qquad y' = y,\ t' = t. \tag{2.3}$$

(2.1) теңдікті уақыт бойынша дифференциалдап, бір инерциялық санақ жүйесінен екіншісіне өткен кездегі жылдамдықтарды түрлендірудің классикалық заңын табамыз:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}\,. \tag{2.4}$$

Осы өрнекті уақыт бойынша дифференциалдап және $\mathbf{V} = const$ екендігін ескере отырып, $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$ өрнегіне келеміз: нүктенің үдеуі барлық инерциялық санақ жүйелерінде бірдей.

§ 2.2. Динамиканың негізгі заңдары

Түрлі инерциялық санақ жүйелерінде қозғалыстарды зерттеу кезінде дененің *кез келген* үдеуінің оған қайсыбір басқа денелердің әсер етуінен болғанын байқаймыз. Біздің қарастырғалы отырған *A* дененің қозғалыс күйіне қоршаған денелердің қайсысының қаншалықты әсер ететіндігін тек тәжірибе арқылы ғана анықтауға болады.

Қарастырылып отырған *A* денеде үдеу тудыратын басқа дененің (денелердің) әсері ***күш*** деп аталады. Сонымен, денеге әсер ететін күш үдеудің себебі болып табылады. Егер басқа сыртқы денелер болмаса, онда денеге күш әсер етпейді дейміз. Ал егер денеге күш әсер етсе, онда ол күштің көзін қайсыбір нақты дене немесе басқа денелер түрінде іздеу дұрыс.

Механикада істес болатын күштер: денелер тікелей жанасқан кезде (үйкеліс күші, қысым күштері) және денелердің өзара әрекеттесуінен туатын өрістердің арқасында пайда болатын күштер (гравитациялық, электромагниттік) деп бөлінеді. Бірақ мұндай бөлінулердің барлығы шартты түрде, шындап келгенде күштердің табиғаты жайлы мәселе механика мәселелерінен тыс қалады.

Масса. Кез келген дене жылдамдығын бағыты жағынан да, модулі жағынан да өзгертуге қарсылық білдіреді. Дененің жылдамдығын өзгертуге қарсылығын, өзінің осыған дейінгі күйін сақтауға тырысуын дененің *инерттілігі* деп атайды. Барлық денелерде бұл қасиет әртүрлі байқалады.

Инерттіліктің өлшемін *масса* деп атайды. Массасы үлкенірек денелердің инерттілігі де үлкенірек болады және керісінше.

Екі дененің әртүрлі массаларының қатынасын оларға түсірілген бірдей күштің беретін үдеулерінің кері қатынасы түрінде анықтап, масса түсінігін енгізейік:

$$m_1/m_2 = a_2/a_1. \qquad (2.5)$$

Мұндай анықтама күштердің өздерін алдын ала өлшеуді қажет етпейді, тек күштердің теңдігі дегенді білсек болғаны. Мысалы, тегіс горизонталь бетте әртүрлі екі денеге бір-бірлеп горизонталь бағытталған серіппемен әсер етіп, серіппені екі жағдайда да бірдей ұзындыққа созатын болсақ, онда екі жағдайда да серіппенің әрбір денеге түсірілген күштері бірдей болады.

Сонымен, бірдей күш әсер ететін екі дененің массаларын салыстыру олардың үдеулерін салыстыруға келіп тіреледі. Қайсыбір дененің масса эталоны ретінде алып, кез келген массаны осы эталонмен салыстыру мүмкіншілігіне келеміз.

СИ жүйесінде массаның бірлігі ретінде *киллограмм* (кг) алынады.

Тәжірибе көрсеткендей, ньютондық механика аумағында осылайша анықталған массаның аса маңызды екі қасиеті бар.

1) масса – *аддитивтік* шама, яғни құрама дененің массасы оның бөліктерінің массаларының қосындысына тең болады;

2) дененің массасы *тұрақты шама* болып табылады, ол – оның түрліше қозғалыстары кезінде өзгеріссіз қалады.

Күш. *Бірдей* созылған серіппенің әсерінен түрліше екі дененің алған үдеулерін салыстыру тәжірибесіне қайта оралайық. Екі жағдайда да серіппенің бірдей созылуынан келіп, серіппенің тарапынан бірдей күштер жайлы сөз етуге болады.

Екінші жағынан, күш дегеніміз дененің үдеу алуының себебі болып табылады. Түрлі денелердің бірдей созылған серіппенің арқасында алатын үдеулері әртүрлі болады. Біздің мақсатымыз қарастырылған тәжірибеде денелердің алған үдеулері әртүрлі болғанымен әсер етуші күш бірдей болып қалатындай етіп күшті анықтауға болады.

Бұл үшін ең әуелі қарастырылған тәжірибелерде *бірдей* болатын шамаларды анықтау керек. Жауап бірмәнді: $m\mathbf{a}$ көбейтіндісі. Міне, $m\mathbf{a}$ - шаманы күштің анықтамасы ретінде алу керек. Үдеудің вектор екендігін ескере отырып, күшті де $\mathbf{a}$ үдеу векторымен бағыттас болатын вектор деуге болады.

Сонымен, ньютон механикасында массасы m денеге әсер ететін күш $m\mathbf{a}$ көбейтіндісі түрінде *анықталады*.

Ньютонның екінші заңы

Ньютондық механикада массасы m денеге әсер ететін күш көбейтіндісі ретінде анықталады. Материалдық нүктелердің қоршаған денелермен өзара әрекеттесулерін зерттей отырып, $m\mathbf{a}$ көбейтіндісінің осы материалдық нүктенің күйін, қоршаған денелерді сипаттайтын шамаларға да тәуелді болатындығын байқауға болады. *Бұл – ньютондық механиканың негізгі заңы Ньютонның екінші заңының негізінде жатыр: материалдық нүктенің массасының оның үдеуіне көбейтіндісі осы нүктенің қоршаған денелерге қатысты қалпының функциясы болып табылады, ал кейде жылдамдығының да функциясы болып табылады.* Осы функцияны $\mathbf{F}$ деп белгілеп, оны күш деп атайды.

Міне, осы айтылғандарды **Ньютонның екінші заңының** тұжырымдамасы деп айтуға болады: оны қысқа да және айқынырақ түрде былайша тұжырымдайды: *материалдық нүктенің массасының оның үдеуіне көбейтіндісі оған әсер ететін күшке тең*, яғни

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \tag{2.6}$$

Бұл теңдеу материалдық нүктенің *қозғалыс теңдеуі* деп аталады.

Ньютонның екінші заңы да, (2.6) теңдеуі де нақты мағынаға тек $\mathbf{F}$ функцияның түрі тағайындалғаннан кейін ғана ие болады. Әрбір нақты жағдайда күш заңын тағайындау физикалық механиканың негізгі мәселелерінің бірі болып табылады.

(2,6) күш теңдеудің негізінде жатқан $m\mathbf{a}$ болып анықталуының үлкен артықшылығы оның түрінің соншалықты қарапайым болуында. Бірақ релятивистік жылдамдықтармен өтетін қозғалыстарды зерттеулер көрсеткендей, күш заңын материалдық нүктенің жылдамдығына күрделі тәуелді болатындай етіп, өзгертуді қажет етеді. Мұндай теорияның аса күрделі де, шымшытырақ болып кететіні анық. Ал мұндай қиыншылықтан шығудың жеңіл жолы ол күшке басқа анықтама беру болып табылады: күш дегеніміз материалдық нүктенің $\mathbf{p}$ импульсінің уақыт бойынша туындысы, яғни $\mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t$, сонда (2.6-теңдеу) $\mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t = \mathbf{F}$ түрінде жазылады.

Ньютондық механикада күштің бұл анықтамасы $m\mathbf{a}$ анықтамасымен бірдей, себебі $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, $m = const$ және $\mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t = m\mathbf{a}$. Релятивистік механикада импульс материалдық нүктенің жылдамдығына күрделірек түрде тәуелді. Күшті осылай анықтаған кезде (яғни, $\mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t$ деп) күш заңдары релятивистік жағдайда да сол қалпында қалады.

СИ жүйесінде күштің өлшем бірлігі ретінде *ньютон* алынады (Н). Ньютон – бұл күш массасы бір киллограмм денеге 1 м/с^2 үдеуді беретін күш.

Күштерді қосу. Әрбір нақты жағдайда материалдық нүктеге модулі және бағыты осы нүктенің қоршаған денелерге қатысты орналасуымен ғана емес, сонымен қатар кейде оның жылдамдығымен де анықталады. Нақтылы жағдайларда материалдық нүктеге жалғыз ғана $\mathbf{F}$ күші әсер етеді. Бірақ кейбір жағдайларда осы күшті жеке денелер әсерлерінің қосындысы $\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \cdots$, немесе күштердің қорытындысы деп алған ыңғайлы болады. Тәжірибе көрсеткендей, егер күш көздері болып табылатын денелер бір-біріне әсер етпей басқа денелердің әсер етуінен өзінің күйін өзгертпейтін болса, онда күш:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \cdots,$$

мұндағы, $\mathbf{F}_i$ - *басқа денелер жоқ кездегі i*-ші дененің берілген материалдық нүктеге әсер ететін күші.

Мұнда $\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \ldots$ күштері суперпозиция (үстемелену) принципіне бағынады. Бұл тоқтамды тәжірибе нәтижелерінің қорытындысы деп қарау керек.

Ньютонның үшінші заңы

Тек *A* және *B* екі дене ғана араласатын және *A* дене *B* денеге үдеу беретін барлық тәжірибелерде *B* дененің де *A* денеге үдеу беретіндігі байқалды. *Осыдан денелердің бір-біріне әсер ететін күштері әрқашан да модульдері жағынан бір-біріне тең және осы нүктелерді жалғастырып тұрған түзудің бойымен қарама-қарсы бағытталған, яғни*

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}. \tag{2.7}$$

Бұл өзара әрекеттесу күштерінің қос-қостан пайда болатындығын көрсетеді. Бұл күштер *әртүрлі* денелерге түсірілген және тектері *бірдей* күштер болып табылады.

(2.7) заңды материалдық нүктелердің кез келген санынан тұратын жүйеге де таратуға болады. Бұл жағдайда да материалдық нүктелердің арасындағы өзара әрекеттесулер қосарланған нүктелер арасындағы күштерге ғана байланысты деп алынады.

Ньютонның үшінші заңында екі күш те *нүктелердің қозғалысына тәуелсіз* түрде *кез келген уақытта* модульдері бойынша өзара тең. Бұл тоқтам өзара әрекеттесулердің лезде таралуына – классикалық механиканың *алыстан әрекеттесу принципіне* сай келеді. Бұл принцип бойынша денелер арасындағы өзара әрекеттесу кеңістікте шексіз үлкен жылдамдықпен таралады. Басқаша айтқанда, егерде бір дененің қалпын (күйін) өзгертсе, онымен өзара әрекеттесетін денелер де, олар қаншалықта алыста орналасса да, қандай әлсіз болса да, өзгерісті байқауға болады.

Бұл тұжырымның дұрыс емес екендігін біз қазір білеміз, - өзара әрекеттесудің *шектелген максимал жылдамдығы* бар, ол жарықтың вакуумдегі таралу жылдамдығы. Сондықтан үшінші заңның (екінші заңның да) белгілі қолданылу шегі бар. Барлық денелердің классикалық механика істес болатын жарық жылдамдығынан әлдеқайда аз жылдамдықтары кезінде екі заң да аса үлкен дәлдікпен орындалады. Бұған дәлел ретінде астрономиялық дәлдікпен жүргізілетін планеталар мен жасанды серіктер траекторияларының элементтерін есептегенде осы Ньютон заңдарына сүйенетінімізді айтсақ та жеткілікті.

Ньютон заңдары классикалық механиканың негізгі заңдары болып табылады. Олардың көмегімен кез келген механика мәселелерін шешуге болады. Сонымен қатар, олардан классикалық механикадан қалған барлық заңдары шығады.

Галилейдің салыстырмалылық принципі бойынша механика заңдары барлық инерциялық санақ жүйелерінде бірдей. Яғни, (2.6) өрнек барлық инерциялық санақ жүйелерінде бірдей жазылады. Шындығында да, материалдық нүктенің m массасы жылдамдыққа тәуелсіз, яғни барлық санақ жүйелерінде нүктенің үдеуі де бірдей. Сонымен, барлық инерциялық санақ жүйелерінде материалдық **а** үдеуі де бірдей, **F** күш те санақ жүйесін таңдауға тәуелсіз, ол тек материалдық нүктенің басқа денелерге қатысты анықталған орнымен және салыстырмалы жылдамдығымен ғана анықталады, ал бұл шамалар релятивистік емес кинематикада барлық инерциялық санақ жүйелері үшін бірдей.

Сонымен, бір инерциялық санақ жүйесінен екіншісіне өткен кезде (2.6) теңдеуге кіретін барлық үш m, $\boldsymbol{a}$ және **F** шамалар және (2.6) теңдеудің өзі де өзгеріссіз қалады. Басқаша айтқанда, $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ теңдеуі Галилей түрлендіруіне қатысты *инвариантты* болады.

§ 2.3. Күштер

Бөлшектің қозғалыс заңын табуды таза математикалық мәселеге айналдыру үшін ең әуелі (2.6) теңдеуіне сай бөлшекке түсірілген күштерді және олардың қандай шамаларға тәуелділігін анықтау қажет. Әрбір мұндай заң тәжірибе нәтижелерін өңдеу нәтижесінде алынған және шын мәнінде күш анықтамасы ретінде (2.6) теңдеуге сүйенеді.

Барлық механикалық құбылыстардың негізінде жатқан іргелі күштер – гравитациялық және электрлік күштер болып табылады. Осы күштердің заңдарын өзара әрекеттесетін массаларға (зарядтарға) тыныштықта немесе аз (релятивистік емес) жылдамдықпен қозғалатын ең қарапайым жағдай үшін келтіреміз.

Гравитациялық тартылыс күші. Бұл күш екі материалдық нүктелер арасында әсер етеді. *Бүкіл әлемдік тартылыс заңына* сай бұл күш нүктелерінің m_1 және m_2 массаларының көбейтіндісіне тура пропорционал, олардың r ара қашықтығының квадратына кері пропорционал және осы нүктелерді қосып тұрған түзу бойымен бағытталған:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}\ . \qquad (2.8)$$

мұндағы, γ - гравитациялық тұрақты.

Бұл заңға кіретін массаларды Ньютонның екінші заңына кіретін *инерттік* массадан ажырату үшін *гравитациялық* массалар деп атайды. Бірақ, тәжірибе көрсеткендей, кез келген дененің инерттік және гравитациялық массалары бір-біріне пропорционал. Сондықтан оларды өзара тең деп те алуға болады (яғни, екі массаны да өлшеу үшін бір ғана эталонды таңдауға болады) және дененің инерттілігінің немесе гравитациялық әсердің мөлшері ретіндегі масса деп қарастыруға болады.

Кулон күші. Бұл күш екі нүктелік q_1 және q_2 зарядтардың арасында әсер етеді:

$$F = k \frac{|q_1 q_2|}{r^2}\ . \qquad (2.9)$$

мұндағы, r – зарядтардың арақашықтығы, k – пропорционалдық коэффициент, оның мәні өлшем бірліктерін таңдап алуға тәуелді болады. Кулон күші гравитациялық күштей емес, тартылыстық сипатта да, тербелістік сипатта да бола алады.

Егер зарядтар қозғалыста болса, онда (2.9) Кулон заңы дәл орындалмайды. Қозғалыстағы зарядтардың өзара электрлік әрекеттесуі олардың қозғалысына күрделі түрде тәуелді. Осы өзара әрекеттесудің қозғалыстан туатын бөлігін *магниттік күш* деп атайды (міне осыдан келіп бұл өзара әрекеттесуді электромагниттік деп те атайды). Аз (релятивистік емес) жылдамдықтар кезінде электрлік өзара әрекеттесудің магниттік күші ескерусіз аз мөлшерде болады да, оны сипаттау үшін аса жеткілікті дәлдікпен (2.9) заңды пайдаланады.

Механикалық құбылыстардың негізінде жатқан гравитациялық және электрлік күштердің шексіз санды білулерін талдап жату аса күрделі мәселе, сондықтан осы іргелі күштерден шығаруға болатын жуықталған басқа заңдарды пайдаланған тиімдірек. Осының арқасында күрделі математикалық мәселелерді ықшамдап (физика мағынасын жоғалтпай), оның теңдеулерін шешеміз:

Осы мақсатта, мысалы, мынадай күштерді енгізуге болады.

Біртекті ауырлық күші:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}. \tag{2.10}$$

мұндағы, m – дененің массасы, $\mathbf{g}$ – еркін түсу үдеуі*.

Серпімділік күші - бұл материалдық нүктенің тепе-теңдік қалыптан ығысуына пропорционал және тепе-теңдік қалпына бағытталған күш:

$$\mathbf{F} = -\varkappa\mathbf{r}. \tag{2.11}$$

мұндағы, $\mathbf{r}$ – бөлшектің тепе-теңдік қалыптан ығысуын сипаттайтын радиус-вектор; $\varkappa$ – нақты күштің серпімділік қасиетіне тәуелді болатын оң мәнді пропорционалдық коэффициент. Мұндай күшке мысал ретінде серіппені немесе таяқшаны созу (сығу) кезіндегі серпімді деформация күші жатады; *Гук заңына* сай бұл күш $F = \varkappa\Delta l$ болып анықталады, мұндағы, Δl – серпімді деформация мөлшері.

Сырғанақ үйкеліс күші, ол берілген дененің басқа бір дененің бетімен сырғанауы кезінде пайда болады:

$$F = kR_n. \tag{2.12}$$

мұндағы, k – сырғанау үйкеліс коэффициенті, ол жанасатын беттердің тегі мен күйіне (мысалы олардың беттерінің кедір-бұдырлығына) тәуелді болады; - R_n – сүйкеніш беттерді бір-біріне сығымдайтын нормал қысым күші. **F** күш берілген дененің екінші денеге қатысты қозғалысына қарсы бағытталады.

Кедергі күші – дененің газдағы немесе сұйықтағы ілгерілемелі қозғалысы кезінде пайда болады. Бұл күш дененің ортаға қатысты **v** жылдамдығына тәуелді болады, әрі **v** векторға қарсы бағытталған:

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{v}. \tag{2.13}$$

мұндағы, k – берілген дене мен ортаға тән оң коэффициент. Бұл коэффициент, жалпы айтқанда, $\boldsymbol{v}$ жылдамдыққа тәуелді болады, бірақ аз жылдамдықтар кезінде оны тұрақты деп алуға болады.

* Ауырлық күшімен салыстырғанда P – салмақ дегеніміз денемен қатысты қозғалмайтын тұрақты тірекке немесе аспаға осы дененің әсері. Мысалы, егер тіректі дене (аспамен) Жерге қатысты қозғалмайтын болса, онда салмақ ауырлық күшімен дәл келеді. Ал керісінше, жағдайда салмағы $P = m(g - a)$, мұндағы, a – Жерге қатысты дененің тірекпен алынған үдеуі.

§ 2.4. Динамиканың негізгі теңдеуі

Материалдық нүктенің динамикасының негізгі теңдеуі дегеніміз Ньютонның екінші математикалық өрнегі болы табылады:

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \tag{2.14}$$

(2.14) материалдық нүкте қозғалысының дифференциалдық теңдеуі. Осы теңдеудің шешімі материалдық нүкте динамикасының ең негізгі мәселесі болып табылады. Оны шешу барысында екі түрлі қарама-қарсы мәселелер туады:

1. Егер нүктенің массасы m және оның $\mathbf{r}(t)$ радиус-векторының уақытқа тәуелділігі белгілі болса, онда нүктеге әсер ететін **F** күшті табу керек;

2. Егер нүктенің m массасы, оған түсірілген **F** күш (немесе $\mathbf{F}_i$ күштер) және бастапқы шарттар – нүктенің бастапқы уақытында $\mathbf{v}_0$ жылдамдығы мен оның $\mathbf{r}_0$ қалпы белгілі болса,онда нүктенің қозғалыс заңын, яғни оның $\mathbf{r}(t)$ радиус-векторының уақытқа тәуелділігін табу керек.

Бірінші жағдайда есеп $\mathbf{r}(t)$ радиус-векторды уақыт бойынша дифференциалдауға, екінші жағдайда теңдеуді интегралдауға әкеліп тіреледі. Мұндай мәселенің математикалық жағы нүктенің кинематикасында толық қарастырылған.

Берілген есептің қойылу шарты мен сипатына байланысты (2.14) теңдеуінің шешуін векторлық түрде немесе траекторияға берілген нүктеде жанама мен нормалға проекциялары түрінде жүргізеді. Енді осы (2.14) теңдеудің соңғы екі жағдайын қарастырайық.

Декарт координаты өстеріндегі проекциялар

Декарт координат өстеріндегі проекциялары бойынша (2.14) теңдеудің екі жағын да X, Y, Z өстеріне проекциялап, үш дифференциалдық теңдеулерді аламыз.

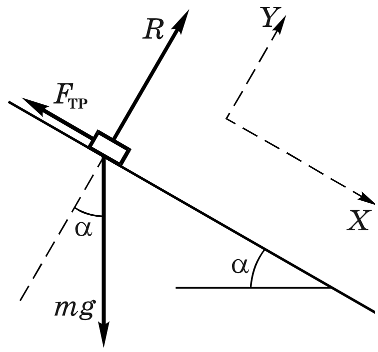
$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}t} = F_x, m\frac{\mathrm{d}\upsilon_y}{\mathrm{d}t} = F_y, m\frac{\mathrm{d}\upsilon_z}{\mathrm{d}t} = F_z} \tag{2.15}$$

мұндағы, $\mathbf{F}_X, \mathbf{F}_Y, \boldsymbol{F}_Z$ - **F** вектордың X, Y, Z өстеріндегі проекциялары.

Бұл проекциялардың бәрі алгебралық шамалар екенін естен шығармау керек. **F** вектордың бағытына байланысты олар не оң не теріс шамалар болуы мүмін. **F** қорытынды күштің проекциясы үдеу векторының проекциясының да таңбасын анықтайды.

Енді осы (2.15) теңдеуді есеп шығарғанда қалай пайдалануға болатындығына мысалдар келтірейік.

Мысал. Массасы m болатын кішкентай кесек дене горизонтпен α кішкентай бұрыш жасайтын көлбеу жазықтықтың бетімен төмен қарай сырғанайды. Үйкеліс коэффициенті k. Дененің көлбеу жазықтыққа қатысты үдеуін табу керек (бұл санақ жүйесі инерциялық болып саналады).



2.2-сурет

Шығару жолы. Әуелі денеге түсірілген барлық күштерді өрнектеу керек. Бұлар ауырлық күші $m\mathbf{g}$, жазықтық тарапынан болатын нормал реакция күші **R,** дененің қозғалысына қарсы бағытталған үйкеліс күші $\mathbf{F}_{үйк}$ (2.2-сурет). Осыдан кейін «көлбеу жазықтық» санақ жүйесін X, Y, Z координат жүйесімен байланыстырамыз. Координат өстерін таңдауымызша бағыттауға болады, бірақ оны таңдағанда көбіне берілген есептің шешуін жеңілдетуді қарастырады. Біздің жағдайымызда дененің қозғалыс бағыты белгілі, сондықтан да координаттарды координат өстерінің біреуі қозғалыс бағытында болатын етіп орналастырған жөн. Сонда бізге тек (2.15) теңдеулерінің біреуін ғана шешуге тура келеді. Сонымен, X өсін 2.2-суретте көрсетілгендей етіп аламыз, әрі өстің оң бағытын міндетті түрдебелгілеу керек.

Енді (2.15) теңдеулерді құрастыруға кірісейік, сол жақта − дененің m массасының оның үдеуінің a_x проекциясына көбейтіндісі және оң жақта − барлық күштердің X өсіне проекциялары енеді.

Сонда:

$$ma_x = m\mathrm{g}_x + R_x + F_{\text{үйк}x}.$$

Біздің жағдайымызда $\mathrm{g}_x = \mathrm{g}\sin\alpha$, $R_x = 0$ және $F_{үйк.x} = F_{үйк}$ сондықтан

$$ma_x = m\mathrm{g}\sin\alpha - F_{\text{үйк}}.$$

Дене X өсі бойымен қозғалатын болғандықтан, осы бағытқа перпендикуляр бағыттардың барлығында да барлық күштердің проекцияларының қосындысы нөлге тең болады. Осындай бағыт ретінде Y өсін алып (2.2-сурет), келесі өрнекті табамыз:

$$R = m\mathrm{g}\cos\alpha\,, F_{\text{үйк}} = kR = km\mathrm{g}\cos\alpha.$$

Ақыры

$$ma_x = m\mathrm{g}\sin\alpha - km\mathrm{g}\cos\alpha.$$

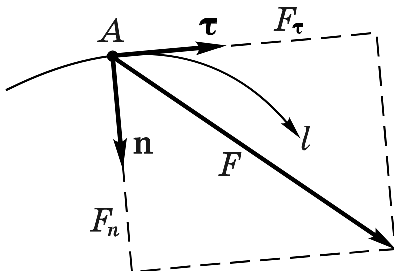
Егер осы теңдеудің оң жағы оң мәнді болса, онда $a_x > 0$, ал олай болса **a** вектор көлбеу жазықтық бойымен төмен қарай бағытталғанды білдіреді және керісінше.

Күш траекториясының берілген нүктесіндегі жанама және нормал проекциялар

(2.14) теңдеудің екі жағын да жылжымалы $\boldsymbol{\tau}$ және **n** орттарына проекциялап (2.3-сурет), сосын бұдан бұрын тангенциал және нормал үдеулер үшін алынған (1.10) теңдіктерді пайдаланып жазамыз:

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}v_\tau}{\mathrm{d}t} = F_\tau,\ m\frac{v^2}{\rho} = F_n} \tag{2.16}$$

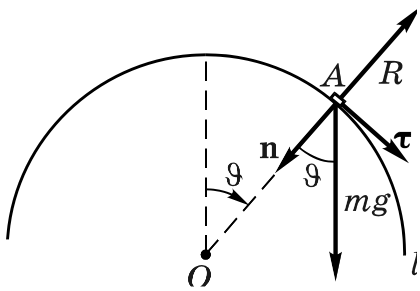
мұндағы, F_τ және F_n – векторының $\boldsymbol{\tau}$ және **n** орттарындағы проекциялары. 2.3-сурет бойынша проекциялар оң шама болып келеді. F_τ және F_n - векторларын күштің *тангенциал* және *нормал құраушылары* деп атайды. $\boldsymbol{\tau}$ орттың бағытының $\boldsymbol{l}$ доғалық координаттың өсу бағытында, ал **n** орттың бағытының траекториясының берілген нүктесінің қисықтық центріне қарай бағытталғандығын еске сала кетейік. (2.16) теңдеулерін материалдық нүктенің траекториясы алдын ала белгілі болған кезде пайдаланған ыңғайлы.



2.3-сурет

Мысал. Кішігірім А дене радиусы ***r*** болатын тегістелген сфераның төбесінен төмен қарай сырғанайды. Егер дененің бастапқы жылдамдығы ескерусіз аз болса, сфераның бетінен дененің жұлынып кету жылдамдығын табу керек.

Шығару жолы. А денеге түсірілген күштерді салып (бұл күштер ауырлық күші $m\mathbf{g}$ мен реакцияның нормал күші **R**) және (2.16) теңдеулерді $\boldsymbol{\tau}$ және **n** орттарға проекциялап жазайық (2.4-сурет)



2.4-сурет

$$m\frac{dv}{dt} = m\mathrm{g}\sin\vartheta.$$

$$m\frac{v^2}{r} = m\mathrm{g}\cos\vartheta - R.$$

Бұл жерде $\boldsymbol{\tau}$ индекстің онша қажеті жоқ.

Бірінші теңдеуді интегралдауға ыңғайлы түрге келтірейік. $\mathrm{d}t = \mathrm{d}l/v = \boldsymbol{r}d\vartheta$ екендігін пайдаланып, мұндағы, $\mathrm{d}l$ – А дененің $\mathrm{d}t$ уақытта жүріп өткен элементар жолы, бірінші теңдеуді төмендегі түрде жазамыз:

$$v\mathrm{d}v = \mathrm{g}r\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta.$$

Бұл өрнектің сол жағын 0-ден $\boldsymbol{v}$-ға дейін, ал оң жағын 0-ден ϑ-ға дейін интегралдаймыз:

$$v^2 = 2gr(1-\cos\vartheta).$$

Дене сфераның бетінен жұлынып шыққанда $R = 0$ болады, сондықтан екінші теңдеуімізді келесі түрде келтіруге болады:

$$v^2 = \mathrm{g}r\cos\vartheta.$$

мұндағы, ϑ және $\boldsymbol{v}$ шамалары жұлыну нүктесіне сәйкес келеді. Соңғы екі теңдіктерден ϑ шамасын шығарып тастап, келесі өрнекті табамыз:

$$v = \sqrt{2\mathrm{g}r/3}.$$

§ 2.5. Инерциялық емес санақ жүйелері Инерция күштері

Инерциялық емес санақ жүйесіндегі динамиканың негізгі теңдеуі

Өткенде динамиканың негізгі теңдеуін тек инерциялық санақ жүйелерінде ғана орындалады деп келдік. Бірақ кейбір жағдайларда есептің шешуін *инерциялық емес* санақ жүйелерінде жүргізген тиімдірек болады (мысалы, үдемелі қозғалыстағы вагондағы математикалық маятниктің қозғалысы, спутниктің (Жер серігінің) Жердің бетіне қатысты қозғалысы және т.б.). сондықтан мынадай сұрақ туады: инерциялық емес санақ жүйесі орындалуы үшін динамиканың негізгі теңдеуін қалай өзгерту керек?

Бұл мақсатты іске асыру үшін екі санақ жүйесін аламыз: инерциялық *К*-жүйені және *инерциялық емес К'*–жүйені. Бөлшектің m-массасы, қоршаған денелер тарапынан оған әсер ететін **F-** күш, *К'*–жүйенің *К-жүйе*ге қатысты қозғалыс сипаты белгілі болсын.

*К-жүйе К'-жүйе*ге қатысты $\mathbf{a}_0$ үдеумен ілгерілемелі орын ауыстыратын өстен тұрақты $\boldsymbol{\omega}$ бұрыштық жылдамдықпен айналатын жеткілікті жалпылама жағдайды қарастырайық. Үдеулерді түрлендірудің (1.31) формуласын пайдаланамыз, одан бөлшектің *К'*–жүйедегі үдеуінің өрнегін шығарамыз:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a_0} + \omega^2\boldsymbol{\rho} + 2[\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}]. \tag{2.17}$$

мұндағы, **v**' – бөлшектің *К'* –жүйеге қатысты жылдамдығы, $\boldsymbol{\rho}$ – айналыс өсіне перпендикуляр болатын және бөлшектің осы өске қатысты орнын сипаттайтын радиус-вектор.

(2.17)-нің екі жағын да бөлшектің m массасына көбейтіп, инерциялық санақ жүйесінде $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ болатындығын ескереміз:

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_0 + m\omega^2\boldsymbol{\rho} + 2m[\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}]. \quad (2.18)$$

Осы теңдеу $\mathbf{a}_0$ үдеумен ілгерілемелі қозғалып бара жатқан өстер ω бұрыштық жылдамдықпен айналатын инерциялық емес санақ жүйесіндегі динамиканың негізгі теңдеуі болып табылады. Содан $\mathbf{F} = 0$ болатын кездің өзінде бөлшек бұл жүйеде жалпы алғанда нөлден ерекше үдеумен қозғалады, әрі оған бұл (2.18) теңдеудің соңғы үш мүшесіне сәйкес келетін күштер де әсер етеді. Бұл күштерді *инерция күштері* деп атайды.

2.18 теңдеу инерция күштерін енгізудің динамиканың негізгі теңдеуінің түрін инерциялық емес санақ жүйесінде де сақтауға мүмкіндігін көрсетеді: сол жақта – бөлшектің массасының оның үдеуіне көбейтіндісі – енді тек инерциялық емес санақ жүйесіне қатысты, оң жақта – күштер. Бірақ қоршаған денелердің әсерінен өзара әрекеттесу күштері пайда болатын **F** күшпен қатар инерция күштерінде 2.18 теңдеудің оң жағындағы қалған мүшелерді де ескеру керек.

Инерция күштері

2.18-ші теңдеуді келесі түрде көшіріп жазамыз.

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{іик}} + \mathbf{F}_{\text{цик}} + \mathbf{F}_{\text{кор}}\,. \quad (2.19)$$

мұндағы

$$\boxed{\mathbf{F}_{\text{іик}} = -m\mathbf{a}_0} \quad (2.20)$$

инерциялық емес санақ жүйесінің ілгерілемелі қозғалысынан туған инерция (ілгерілемелі инерциялық күш - цик)

$$\boxed{\boldsymbol{F}_{\text{цик}} = m\omega^2\boldsymbol{\rho}} \quad (2.21)$$

центрден тепкіш инерция күші - цик

$$\boxed{\boldsymbol{F}_{\text{кор}} = 2m[\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}]} \quad (2.22)$$

Кориолис күші немесе кориолистік инерция күші – кор. деп белгіленеді. Соңғы екі күш санақ жүйесінің айнымалы қозғалысынан туады.

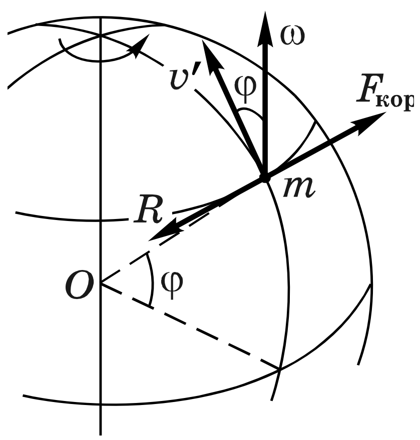
Сонымен инерция күштері инерциялық емес санақ жүйесінің қасиеттеріне $(\mathbf{a}_0, \boldsymbol{\omega}_0)$, сонымен қатар бөлшектердің осы санақ жүйесіндегі $\boldsymbol{\rho}$ қашықтығы мен $\mathbf{v}'$ жылдамдығына тәуелді болады.

Егер, мысалы, инерциалды емес санақ жүйесі ілгерілемелі қозғалатын болса инерциялық санақ жүйесіне қатысты, онда бұл жүйеде еркін бөлшекке тек (2.20) күші ғана әсер етеді, оның бағыты осы санақ жүйесінің $\mathbf{a}_0$ үдеуіне қарама-қарсы болады. Күнделікті өмірде транспортта осы жағдаймен жиі ұшырасамыз.

Екінші жағдай санақ жүйесі қозғалмайтын өстен ω бұрыштық жылдамдықпен айналады және *A* дене осы санақ жүйесінде тыныштықта (аттракционның шыр айналып тұрған дөңгелегінде отырсыз). А денеге қоршаған денелермен өзара әрекеттесу күштерімен қатар, айналу өсінен $\boldsymbol{\rho}$ радиус-вектор бойымен бағытталған (2.21) центрден тепкіш инерция күші де әсер етеді. А дене дөңгелекке қатысты тыныштықта болатын кезде үдеу нөлге тең. Бұл күш өзара әрекеттесу күшін теңестіреді. Бірақ дене қозғалысқа келген бойдан бастап, яғни $(\mathbf{v}' = 0)$ жылдамдық пайда болған бойдан бастап, (2.22) кориолис күші әсер ете бастайды, оның бағыты $[\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}]$ векторлық көбейтіндісімен анықталады. Кориолис күшінің дене тыныштықта ма әлде айналатын санақ жүйесінде қозғала ма, оған тәуелсіз түрде пайда болатындығына назар аудар.

Жоғарыда келтіргендей, жер бетіне байланысты санақ жүйесін көптеген жағдайларда инерцилдық деп санауға болады. Бірақ бірқатар құбылыстарды қарастырғанда санақ жүйесінің инерциалды еместігін ескермеуге болмайды.

Денелердің жер бетіне қатысты еркін түсу үдеуінің полюстерде ең үлкен мәнге ие болатындығы белгілі. Осы үдеудің экваторға жақындаған сайын кемуі жердің сфералық еместігімен ғана емес, сонымен қатар центрге тепкіш инерция күштерінің әсерінің артып отыруымен де түсіндіріледі немесе еркін түсетін денелердің шығысқа қарай ауытқуы солтүстік жарты шарда өзендердің оң жақ жағасын, ал оң-түстік жарты шарда сол жақ жағасын шайып кетуі, Фуко магнитінің тербеліс жазықтығының бұрылуы және т.б. жатады Мұндай құбылыстар жер бетіне қатысты қозғалысымен байланысты және кориолис күшінің әсерімен ғана түсіндіріледі.



2.5-сурет

Мысал. Массасы M пойыз меридиан бойымен φ ендікте $\mathbf{v}'$ жылдамдықпен қозғалады. Пойыздың рельске түсіретін бүйір қысым күшін табу керек.

Шығару жолы. Жермен байланысты санақ жүйесінде ол $\boldsymbol{\omega}$ бұрыштық жылдамдықпен айналады. Пойыз үдеуінің меридиан жазықтығына перпендикуляр жазықтықтағы құраушысы нөлге тең. Сондықтан пойызға түсірілген күштердің осы бағыттағы проекцияларының қосындысы да нөлге тең. Ал бұл дегеніміз - $\mathbf{F}_{кор}$ кориолис күшінің 2.5-сурет қозғалыс бағытындағы оң жақ рельстің пойызға **R** түсіретін бүйір жақ қысым күшімен көрсетеді, яғни $\mathbf{F}_{\text{кор}} = \mathbf{R}$.

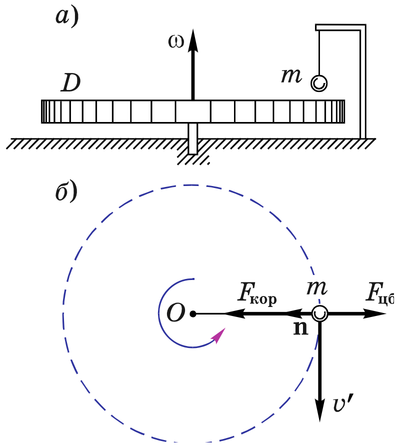
Ньютонның үшінші заңы бойынша пойызда бұл рельске горизонтал бағытта $\mathbf{R}' = -\mathbf{R}$ күшпен әсер етеді. Демек, $\mathbf{R}' = \mathbf{F}_{\text{кор}} = 2m[\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}]$.

$\mathbf{R}'$ вектордың модулі $\mathrm{R}' = 2m\upsilon'\omega\sin\varphi$.

Келесі қарастырылатын жағдайда инерциялық санақ жүйесінен инерциялық емес санақ жүйесіне көшкен кезде инерция күштерінің қалай пайда болатыны көрсетіледі.

Мысал. Стол бетінде вертикаль өстен **ω** тұрақты бұрыштық жылдамдықпен айналатын D диск орналасқан. Дискінің үстінде массасы m шарик 2.6 ***а*** суретте көрсетілгендей ілеулі тұр. Шарик столмен байланысқан К-санақ жүйесінде инерциялық болып саналады және оны айналып тұрған дискімен байланысқан К-санақ жүйесінде қарастыру керек.

Шығару жолы. Инерциялық *К-жүйе*де шарикке екі күш әсер етеді: ауырлық күші және жіп тарапынан жіптің керілу күші. Бұл күштер бір-бірін өтемелейді де, шарик К-жүйеде тыныштықты болады.



2.6-сурет

Инерциялық емес *К'*-жүйеде шарик шеңбер бойымен $\omega^2\rho$ нормал үдеуімен бір қалыпты қозғалады, мұндағы ρ – шариктің айналу өсіне дейінгі қашықтық. Бұл үдеу инерция күштерінің әсерінен пайда болған. Шындығында К-жүйесіндегі бір-бірін өтемелейтін екі күшпен қатар центрден тепкіш инерция күші және кориолис күші әсер етеді. 2.6,***б***-сурет. Осы күштердің траекторияның шарик тұрған нүктесіндегі нормалға проекциясын алып келесі теңдеуді жазуға болады:

$$ma'_n = F_{\text{кор}} - F_{\text{цик}} = 2m\upsilon'\omega - m\omega^2\rho = m\omega^2\rho.$$

Мұнда $\upsilon' = \omega\rho$ екендігі ескерілген. Осыдан: $a' = \omega^2\rho$

Инерция күштерінің ерекшеліктері.

Инерция күштерінің оларды өзара әрекеттесу күштеріне ажырататын маңызды ерекшілектерге тоқталайық.

1. Инерция күштері денелердің өзара әрекеттесуін тудырмайды. Олар инерциялық емес санақ жүйелерінің өз қасиеттерінен пайда болады. Сондықтан инерция күштері Ньютонның үшінші заңына бағынбайды.
2. Бұл күштердің тек инерциялық емес санақ жүйелерінде ғана әсер ететінін – есте ұстау керек. Инерциялық санақ жүйелерінде ешқандай

инерция күштері жоқ. Ньютондық мағынада ондағы күш түсінігі денелердің өзара әрекеттесуінің мөлшері ретінде қолданылады.

3. Барлық инерция күштері тартылыс күштері тәрізді дененің массасына пропорционал. Сондықтан инерция күштерінің біртекті өрісінде тартылыс күштері өрісіндегі тәрізді барлық денелер массаларына тәуелсіз түрде бірдей үдеуімен қозғалады.

Эквиваленттік принципі

Инерция күштерінің тартылыс күштері тәрізді денелердің массаларына тәуелділігі мынадай маңызды қорытындыға әкеледі. Біз жабық лабораторияда тұрмыз делік, біздің сыртқы әлемді бақылауға еш амалымыз жоқ. Біз космос кеңістігіндеміз бе, әлде жер бетіндеміз бе оны білмейміз. Лабораториядағы барлық денелердің массаларына тәуелсіз түрде бірдей үдеуімен түсетіндігіне қарап біз бұл үдеудің неден туғанын айталмаймыз: тартылыс өрісінен бе, әлде лабораторияның өзінің ілгерілемелі үдемелі қозғалысынан ба, осы екеуінен де ме. Мұндай лабораторияда денелердің еркін түсуі бойынша қойылған тәжірибелер біртекті тартылыс өрісін инерция күштерінің біртекті өрісінен ажыратып бере алмайды.

Эйнштейннің болжамы бойынша ешқашан физикалық тәжірибелердің көмегі арқылы жалпы біртекті ауырлық өсін инерция күштерінің біртекті өрісінен ажырату қиын екендігі белгілі. Постулатқа айналдырылған бұл болжам тартылыс күштерінің және инерция күштерінің *эквивалентті принципінің мазмұнына* айналды: *барлық физикалық құбылыстар біртекті тартылыс өрістерінде де сонымен қатар оларға сәйкес инерция күштерінің біртекті өрістерінде де бірдей өтеді.*

Инерция күшімен тартылыс күштері арасындағы терең аналогия Эйнштейнге жалпы салыстырмалылық теориясын немесе гравитацияның релятивистік теориясын жасауда үлкен көмегін тигізді.

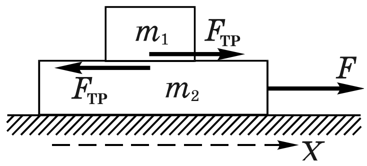
Кез келген механика есебін инерциялық санақ жүйесінде де инерциялық емес санақ жүйесінде де шығаруғы болады. Мәселе тек мақсатқа жету жолының тиімділігінде ғана. Сонымен бірге инерциялық емес санақ жүйесін жиірек қолдану ыңғайлы.

Есептер

2.1. Динамиканың негізгі теңдеулері. Тегіс горизонталь жазықтықтықта массасы m тақтайдың үстінде массасы m кеспек жатыр. Кеспек пен тақтай арасындағы үйкеліс коэффициенті k-тең. Және $F = \alpha t$ заңына бағынатын уақытқа тәуелді горизонтал F күші де осы тақтайға әсер етеді, α – тұрақты шама. Сонымен:

1. тақтай кеспектің астынан қашан жылжып шығады?
2. қозғалыс кезіндегі тақтайдың a_1 және кеспектің a_2 үдеулерін табу керек.

Шығару жолы. **1.** Суретте көрсеткендей X өсінің оң бағытын ала отырып, кеспек пен тақтай үшін динамиканың негізгі теңдеуін жазамыз:



2.7-сурет

$$m_1 a_1 = F_{үйк}, \qquad m_2 a_2 = F - F_{үйк}.$$

F – күшінің шамасы өскен сайын (2.7-сурет) $F_{үйк}$ – күші де өсе бастайды (басында ол тыныштықтағы үйкеліс күшіне тең). Алайда $F_{үйк}$– күшінің шегі болады. $F_{үйк.max} = km_1$g. Осы күштің үйкеліс шегіне жеткенше екі дене бірдей үдеумен қозғалады. Ал үйкеліс күші өзінің шегіне жеткен кезде тақтай кеспектің астынан жылжи бастайды. Яғни,

$$a_2 \geq a_1.$$

$F_{үйк.max} = km_1$g екенін ескере отырып, (1) теңдеуге a_1 мен a_2-нің мәндерін қойып келесі өрнекті табамыз:

$$(\alpha t - km_1 g)/m_2 \geq k\text{g}\ ,$$

Мұндағы теңділік белгісі $t = t_0$ сәтіне сәйкес. Осыдан

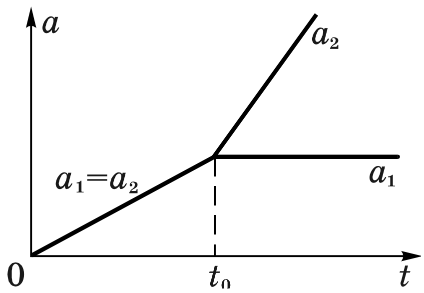
$$t_0 = (m_1 + m_2)k\text{g}/\alpha$$

2. Егер $t \leq t_0$ болса, онда

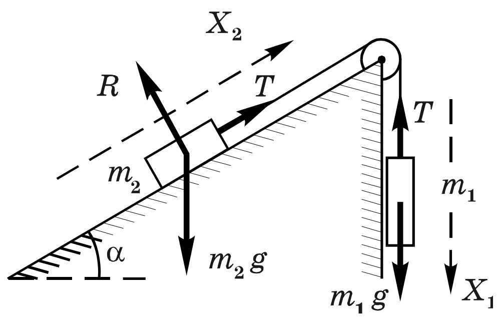
$$a_1 = a_2 = \alpha t/(m_1 + m_2),$$

Егер $t \geq t_0$, онда

$$a_1 = k\text{g} = const, \quad a_2 = (\alpha t - km_1\text{g})/m_2.$$



2.8-сурет



2.9-сурет

2.8-суретте a_1 мен a_2 үдеулерінің *t*-дан тәуелділік графигі келтірілген.

2.2. 2.9-суретте көрсетілгендей, көлбеу жазықтық горизонтпен $\alpha = 30^0$ бұрыш жасайды. Массалар қатынасы тең: $\frac{m_1}{m_2} = \eta = 2/3$. m_2 денесі мен жазықтық арасындағы үйкеліс коэффициенті $k = 0.10$ тең. Блок пен жіптің массалары аз болғандықтан оларды ескермеуге болады. Жүйенің тыныштық күйінен қозғалысқа келгендегі m_1 дене үдеуінің бағыты мен модулін табу керек.

Шығару жолы. Бірден m_2 денесіне әсер ететін үйкеліс күшінің бағыты қандай екен деген сұрақ туады. Бұл сұрақты шешпей m_2 денесі үшін динамиканың негізгі теңдеуін келтіруге болмайды. Мысалы, үйкеліс күшінің әсері болмаған жағдайда дене көлбеу жазықтықпен жоғары қарай жылжыды делік. Ал егер үйкеліс күшінің әсерін ескерсек қозғалыс бағыты өзгермейді. Алайда үдеу азаяр еді. Егер сонымен үйкеліс жоқ кезде $(k = 0) m_2$ дене үдеуінің бағыты белгілі болса, онда осы денеге әсер ететін үйкеліс күшінің бағытын анықтау керек.

2.9-суретте көрсеткендей, X_1 мен X_2 өстерінің оң бағытын таңдай отырып, динамикасының негізгі теңдеулерін проекцияларда жазамыз:

$$m_1 a_x = m_1 \mathrm{g} - T \qquad m_2 a_x = T - m_2 \mathrm{g} \sin\alpha .$$

Мұндағы T жіптің керілу күші. Осы 2 теңдеулердің оң және сол жақтарын мүшелеп қосып, келесі теңдеуді аламыз:

$$a_x = \frac{\eta - \sin\alpha}{\eta + 1} \mathrm{g} .$$

Осы өрнекке $\eta = 2/3$ және $\alpha = 30^0$ мәндерін қойып, $a_x > 0$табамыз, яғни m_2 дене көлбеу жазықтық арқылы жоғары қозғала алады. Олай болса, осы денеге түсірілген үйкеліс күші қарама-қарсы жаққа қарай бағытталады. Осы жағдайларды ескере отырып, динамиканың негізгі қозғалыс теңдеуін қайтадан жазамыз:

$$m_1 a_x' = m_1 \mathrm{g} - T' .$$

$$m_2 a_x' = T' - m_2 \mathrm{g} \sin\alpha - k m_2 \mathrm{g} \cos\alpha .$$

Осыдан

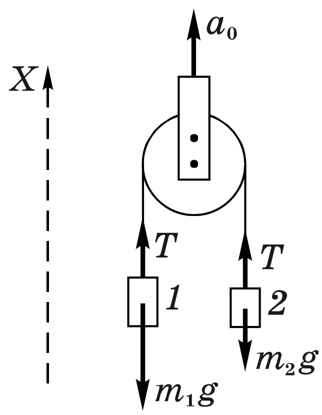
$$a_x' = \frac{\eta - \sin\alpha - k\cos\alpha}{\eta + 1} \mathrm{g} = 0{,}05 \mathrm{g} .$$

2.3. Блок арқылы созылмайтын жіп асылған. Оның ұштарына массалары m_1 және m_2 болатын ***1*** және ***2*** жүктер ілінген, әрі $m_1 > m_2$. Блокты Жердің бетіне қатысты $\boldsymbol{a}_0$ үдеумен жоғары көтерілген. Жіп блокпен үйкеліссіз сырғанайды деп алып, m_1 жүктің Жерге қатысты $\boldsymbol{a}_1$ үдеуін табу керек.

Шығару жолы. X өсінің оң бағытын таңдай отырып, осы екі жүктер үшін де олардың осы өске проекциялары үшін де динамиканың негізгі теңдеуін жазамыз:

$$m_1 a_{1x} = T - m_1 \mathrm{g} . \qquad (1)$$

$$m_2 a_{2x} = T - m_2 \mathrm{g} . \qquad (2)$$



2.10-сурет

Бұл теңдеулерде үш белгісіз бар: a_{1x}, a_{2x},, және T. Үшінші теңдеуді құрастыру үшін үдеулер арасындағы кинематикалық байланысқа назар аудара отырып, пайдаланамыз:

$$\mathbf{a_1} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}' \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{a_0} - \mathbf{a}'.$$

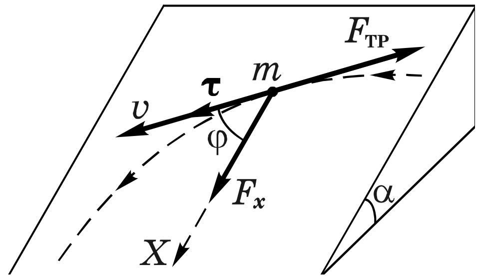
мұндағы: $\mathbf{a}'$ - блокпен салыстырғандағы ***1***-ші жүктің үдеуі. Осы теңдеулердің оң және сол жақтарын мүшелеп қосамыз, келесі өрнекті табамыз: $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = 2\mathbf{a}_0$
Немесе *X* өсіне проекция түрінде:

$$a_{1x} + a_{2x} = 2a_0. \quad (3)$$

(1), (2) және (3) теңдеулерді біріктіре отырып, келесі өрнекті табамыз:

$$a_{1x} = \frac{2m_2a_0+(m_2-m_1)g}{m_1+m_2}.$$

Осыдан егер a_0 берілсе, онда a_{1x} таңбасы m_1 мен m_2 массалардың қатынасына тәуелді болғаны.



2.11-сурет

2.4. Көлбеу жазықтық бойынша шағын шайба жылжиды. Оның үйкеліс коэффициенті тең: $k = tg\alpha$, мұндағы α - горизонт пен жазықтық арасындағы бұрыш. **v** векторымен *X*-өсінің арасындағы φ - бұрышынан шайбаның $\boldsymbol{v}$ жылдамдығының тәуелділігін табу керек, егер бастапқы уақытта $v = v_0$ және $\varphi = \pi/2$ болса.

Шығару жолы. Шайбаның көлбеу бойынша үдеуі осы жазықтыққа әсер еткен $F_x = mg\sin\alpha$ − ауырлық күшінің құраушысы және үйкеліс күшімен − $F_{үйк} = kmg\cos\alpha$ анықталады. Біздің жағдайымызда $k = tg\alpha$, сондықтан

$$F_{үйк} = F_x = mg\sin\alpha.$$

Үдеудің проекциялары мен *X* өсіне бағытталған жасаушысының проекциясын табайық.

$$ma_\tau = F_x\cos\varphi - F_{үйк} = mg\sin\alpha\,(\cos\alpha - 1).$$
$$ma_x = F_x - F_{үйк}\cos\varphi = mg\sin\alpha\,(1 - \cos\varphi).$$

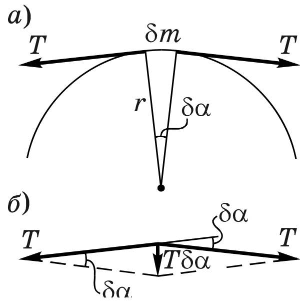
Осыдан $a_\tau = -a_x$ екені көрініп тұр. v жылдамдық пен оның проекциясы v_x-тың арасындағы айырымы С- тұрақтыға тең, яғни $v = v_x + C$, мұндағы $v_x = v\cos\varphi$. C– тұрақтысын бастапқы шарттан табуға болады $v = v_0$. Одан $C = v_0$. Нәтижесінде табамыз:

$$v = v_0/(1 + \cos\varphi).$$

Уақыт өткен сайын $\varphi \to 0$ және $v \to v_0/2$ жағдайлары орын алады.

2.5. Біркелкі серпімді баудың массасы *m,* ұзындығы l және серпімділік коэффициенті $\varkappa$ тең болсын. Баудың ұштарын қосып, нық жабыстырып тастап, горизонталь жазықтыққа орналастырамыз. Центр арқылы өтетін өстен ω бұрыштық жылдамдықпен айнала алатындай етіп бауға шеңбер пішінін береміз. Осы жағдай үшін баудың керілу күшін табу керек.

Шығару жолы. 2.12-суреттің *а* бөлігінде келтірілгендей баудың массасы δm болатындай кішкентай бөлігін алайық. Осы элемент шеңбер ішінде қозғалып келе жатыр, оның күші екі вектордың геометриялық сомасынан тұрады. Ал әрбір вектордың өзі модуль бойынша іздеп отырған керіліс күшіне тең (2.12.б-сурет). Сондықтан динамиканың негізгі теңдеуін келесі түрде жазуға болады:



2.12-сурет

$$\delta m\omega^2 r = T\delta\alpha. \quad (1)$$

Ескере отыру керек, $\delta m = (m/2\pi)$ және $r = l/2\pi$
l - айналып жатқан баудың толық ұзындығы. Сонда (1) теңдеу келесі түрге өзгереді.

$$\frac{m\omega^2 l}{4\pi^2} = T. \quad (2)$$

Басқа жағынан қарастырғанда, яғни Гук заңы бойынша

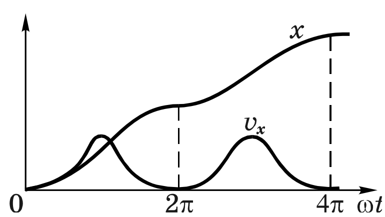
$$T = \varkappa(l - l_0). \quad (3)$$

(2) мен (3) –тен l–ді алып тастаса, келесі теңдеу шығады:

$$T = \frac{\varkappa l_0}{\frac{4\pi^2\varkappa}{m\omega^2} - 1}$$

Аңғара кету керек, бау созылмайды десек $(\varkappa \to \infty) T = m\omega^2 l_0/4\pi^2$.

2.6. Қозғалыс теңдеулерін интегралдау. F-күшінің әсерінен массасы m нүкте қозғалып келеді. $t = 0$ кезінде оның $\mathbf{r}(0)$ радиус-векторы мен $\mathbf{v}(0)$-жылдамдығы берілген. Бастапқы шарттар белгілі. Нүктенің орнын және оның $\mathbf{r}$–радиус-векторын уақытқа тәуелді түрде табу керек, егер:



2.13-сурет

1. $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 \sin\alpha\,\omega t \qquad \mathbf{r}(0) = 0 \qquad \mathbf{v}(0) = 0.$
2. $\mathbf{F} = -k\mathbf{v} \qquad \mathbf{r}(0) = 0 \qquad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0.$

мұндағы $\mathbf{F}_0$- тұрақты вектор, ω және k оң тұрақтылар.
Шығару жолы. **1.** Динамиканың негізгі теңдеулеріне сай үдеу осы жағдай үшін тең:

$$\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t = (\mathbf{F}_0/m)\sin\omega t.$$

Осыдан dt уақытына сай d**v** өсімшесін табамыз. Енді 0 ден t-ға дейінгі уақыт үшін осы вектордың өсімшесі:

$$\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(0) = (\mathbf{F}_0/m)\int_0^t \sin\omega t \mathrm{d}t.$$

$\mathbf{v}(0) = 0$ - ескере отырып, интегралдап болғаннан кейін келесі өрнек шығады:

$$\mathbf{v}(t) = (1 - \cos\omega t)\mathbf{F}_0/m\omega$$

Енді d**r** – элементар өсімшені немесе **r** – радиус-вектордың d*t* уақыттағы өсімшесі табылады.

$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{v}(t)\mathrm{d}t$ ал радиус-вектордың 0-ден бастап *t*-ға дейінгі өсімшесі болса, онда ол интегралмен анықталады.

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0) = (\mathbf{F}_0/m\omega)\int_0^t (1 - \cos\omega t)\mathrm{d}t.$$

Интегралдау нәтижесінде:

$$\mathbf{r}(t) = (\omega t - \sin\omega t)\mathbf{F}_0/m\omega^2.$$

мұндағы, $\mathbf{r}(0) = 0$ деп алынған. 2.13-суретте $\upsilon_x(t)$ мен *x*(*t*) арасындағы тәуелділік график түрінде келтірілген. Мұндағы: $\upsilon_x(t)$ мен *x*(*t*) - **v** мен **r** векторлардың *X*-өсіне проекциялары. *X* өсі бөлшектің қозғалу бағытымен, яғни $\mathbf{F}_0$ векторының бағытымен таңдалып алынады.

1. Бұл жағдай үшін үдеу тең:

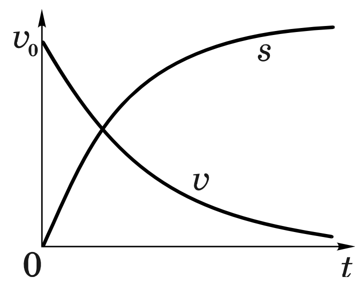
$$\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t = -(k/m)\mathbf{v}\,.$$

Осы теңдеуді интегралдау үшін скалярлық түрге көшу керек, яғни **v** векторының модуліне:

$$\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}t = -(k/m)\upsilon\ .$$

Теңдеуді интегралдау арқылы (алғашқы шарттар орындалады) келесі өрнек шығады: $ln(\upsilon/\upsilon_0) = -(k/m)t$ Оны потенциалдау нәтижесінде қайтадан векторлық түрге көшеміз:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 e^{-kt/m}\ .$$



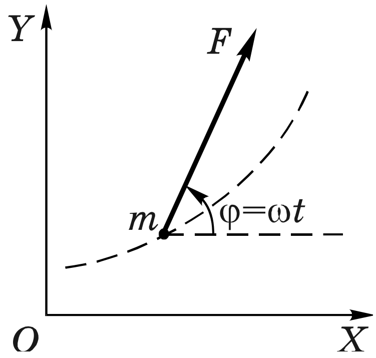
2.14-сурет

Соңғы теңдеуді тағы да интегралдаймыз (алғашқы шарттар орындалады)

$$\mathbf{r}=\int_0^t \mathrm{v}\mathrm{d}t = \left(1 - \mathrm{e}^{-kt/m}\right)m\mathbf{v}_0/k\ .$$

2.14-суретте $\boldsymbol{\upsilon}$ – жылдамдық пен *s* – жолдың уақытқа байланысты тәуелділік графигі келтірілген. Біздің жағдайымызда $s = r$

2.7. Модулі бойынша тұрақты *F* күшінің әсерімен қайсыбір жазықтықта массасы *m* болатын бөлшек қозғалып келеді. Оның бағыты тұрақты ω бұрыштық жылдамдықпен бұрылыс жасайды. $t = 0$ уақытында бөлшектердің жылдамдығы нөлге тең. Осы бөлшектің жылдамдық модулін t-уақытқа тәуелді функция түрінде табу керек. Сонымен қатар екі біртіндеп тоқтаулардың арасындағы бірінен соң бірі кезектеп өтетін жолды табу



2.15-сурет

керек.

Шығару жолы. Осы жазықтықты x және y координаттар жүйесімен байланыстырайық. 2.15-суретте келтірілгендей $t = 0$ уақыттағы вектор күшінің бағытымен x өсінің бағыттары бірдей болып алынады. Сонда динамиканың негізгі теңдеуінің X пен Y өстеріне жүргізілген проекцияларының түрі төмендегідей болады.

$$m\mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t = F\cos\omega t\ .$$
$$m\mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t = F\sin\omega t\ .$$

Алғашқы шартты $\boldsymbol{v}(0)$=0 деп алып, осы теңдеулерді уақыт бойынша интегралдап келесі өрнектерді аламыз:

$$v_x = (F/m\omega)\sin\omega t,\quad v_y = (F/m\omega)(1-\cos\omega t).$$

Бөлшектің жылдамдық векторының модулі тең:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2|\sin(\omega t/2)|F/m\omega.$$

Δt уақыттың өтуімен $\boldsymbol{v}$ жылдамдығы нөлге айналады. Оны келесі шарттан табуға болады. $\omega\Delta t/2 = \pi$ Сондықтан іздеп отырған жолымыз тең:

$$s = \int_0^{\Delta t} v dt = 8F/m\omega^2.$$

Бөлшек траекториясының түрі *циклоид* тәрізді екені суреттен көрініп тұр.

2.8. Горизонталды жолмен тұрақты тангенциалды a_τ үдеумен автомашина жүріп келе жатыр. Оның қозғалысы шеңбер құрайды және оның радиусы – *R-ге* тең. Машинаның дөңгелегі мен жолдың беті арасындағы үйкеліс коэффициенті k. Машинаның алғашқы жылдамдығы нөлге тең болғандағы сырғанаусыз өткен жол– s қандай?

Шығару жолы. Жылдамдық өскен сайын машинаның нормалды және толық үдеулері де өсе бастайды. Қажетті толық үдеу үйкеліс күші әсерімен қамтамасыз етілгенде пайда болған қозғалыс сырғанаусыз өтеді.

Осы күштің ең үлкен максимал шамасы келесі формуламен анықталады:

$$F_{max} = km\mathrm{g}.$$

мұндағы m- машинаның массасы. Сондықтан толық үдеудің максимал мәні динамиканың негізгі теңдеуіне $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ сай.

$$a_{max} = k\mathrm{g}\ .$$

Басқа жағынан

$$a_{max} = \sqrt{a_\tau^2 + (v^2/R)^2}. \qquad (2)$$

мұндағы, $\upsilon-$ машинаның үдеуі максимал болғандағы жылдамдығы.
Осы жылдамдық пен іздеп отырған жолдың арасында келесі байланыс орын алады:

$$\upsilon^2 = 2a_\tau s. \qquad (3)$$

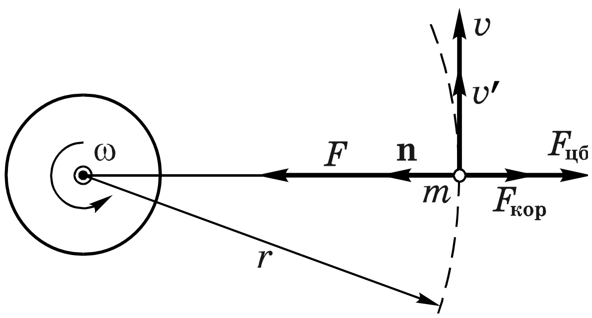
υ-ны (1) мен (2) теңдеулерінен тауып алып, оны (3)-ке қойып келесі өрнекті шығарамыз:

$$s = (R/2)\sqrt{(kg/a_\tau)^2 - 1}\,.$$

Осы теңдеудің шешімі тек $a_\tau < kg$ болғанда ғана шығатынын аңғару қиын емес.

2.9. **Интегралдық емес санақ жүйесі.** Жердің серігі Жерді экватор бойымен батыстан шығысқа қарай *r*-радиус шеңбер орбитасымен айналып келеді. Жерге қатысты санақ жүйесі арқылы осы серіктің a' үдеуін табу керек. Жердің Күнді айналған кездегі пайда болған үдеуі ескерілмейді.

Шығару жолы. Шарт бойынша $K-$ инерциялық санақ жүйесі, осы жүйеде Жердің айналу өсі тыныштықта болсын. Ал $K'-$ инерциялық емес санақ жүйесі. Ол Жермен байланысты және *К-жүйе*сіне қатысты ω бұрыштық жылдамдықпен айналады. Осы К-жүйедегі серіктің a' үдеуін табу керек. Санақ жүйесінде Жер серігіне әсер ететін барлық күштерді ескеру қажет: 2.16-суретте көрсеткендей: $\mathbf{F}$ – ауырлық күші, $\mathbf{F}_{\text{кор}}$ Кориолис күші, $\mathbf{F}_{\text{цик}}$ инерцияның центрге тартқыш күшін келтіруге болады. Суреттегі көрініс Жердің солтүстік полюсі жағынан берілген. Енді (2.18) теңдеуді пайдалана отырып, $a_0 = 0$ тең екенін ескеру керек. K' жүйеде Жер серігі шеңбер бойымен қозғалып келеді. Сондықтан, (2.18) теңдеудің траекторияларға жасаған $\mathbf{n}$ - нормалдарының проекцияларын келесі түрде жазамыз:



2.16-сурет

$$ma' = F - 2m\upsilon'\omega - m\omega^2 r \quad . \qquad (1)$$

мұндағы, $F = \gamma mM/r^2$, m және M - Жер серігі мен Жердің массалары. Енді K' санақ жүйесінде Жер серігінің υ' жылдамдығын табу керек. Ол үшін 1.24 формуланы скалярлық түрде келтіреміз:

$$\upsilon' = \upsilon - \omega r. \qquad (2)$$

мұндағы, υ – K жүйедегі Жер серігінің жылдамдығы. Осы аталған жылдамдықты Жер серігінің К жүйедегі қозғалыс теңдеуі арқылы есептеуге болады.

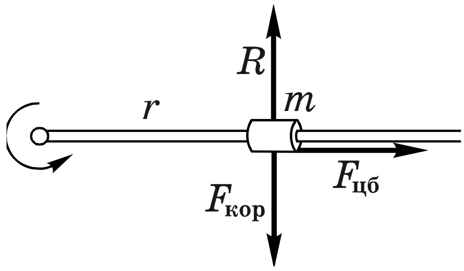
$$m\upsilon^2/r = \gamma mM/r^2. \qquad (3)$$

(1) , (2) және (3) теңдеулерді біріктіре отырып келесі өрнекті шығарамыз:

$$a' = \frac{\gamma M}{r^2}\left(1 - \omega r\sqrt{\frac{r}{\gamma M}}\right)^2.$$

Егер $a' = 0$ тең болса, $r = \sqrt[3]{\gamma M/\omega^2} = 4{,}2 \cdot 10^4$км. Мұндай Жер серігін **стационарлық** деп атайды және ол Жердің бетімен салыстырғанда тыныштық қалпын сақтайды.

2.10. Тегіс көлденең сырық бойымен массасы m шағын муфта еркін жылжиды. Ол вертикаль өсті тұрақты **ω** бұрыштық жылдамдықпен айналады. Вертикаль өс оның бір жақ ұшы арқылы өтеді. Айналу өсінен r қашықтықтағы сырықтың муфтаға әсер етуші күшінің көлденең құраушысын табу керек. Басында муфта өстің қасында орналасады. Және оның жылдамдығы елеусіз аз шама.



2.17-сурет

Шығару жолы. Сырықпен берік байланысқан айналмалы санақ жүйесіндегі муфтаның қозғалысын қарастырайық. Осы санақ жүйесінде муфта түзу сызықты қозғалады. Ал бұл ізделініп отырған **R** күшінің Кориолис күшімен теңесіп отырғанын көрсетеді. Осы шарт 2.17-суретте көрсетілген және көрініс оныңүстіңгі жағынан алынған.

$$\mathbf{R} = -\mathbf{F}_{\text{кор}} = 2m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'] \ .$$

Сонымен (2.19) формулаға сәйкес сырыққа қатысты муфтаның **v**' жылдамдығын табу керек.

$$\mathrm{d}v'/\mathrm{d}t = F_{\text{цик}}/m = \omega^2 r.$$

$\mathrm{d}t = \mathrm{d}r/v'$ деп алып осы теңдеуді өзгертеміз.

Сонда $v'\mathrm{d}v' = \omega^2 r\mathrm{d}r$ өрнегі шығады. Алғы шарттарды $(v' = 0, r = 0)$ ескере отырып, осы өрнекті интегралдап, $v' = \omega r$ табамыз, немесе векторлық түрде шығады.

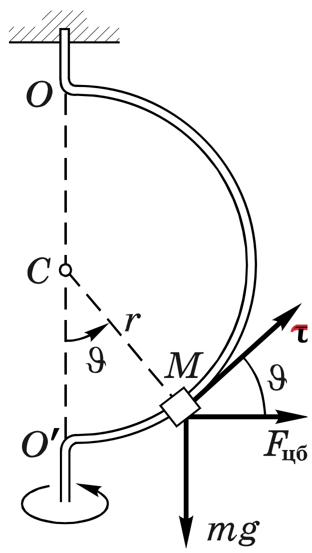
$$\mathbf{v}' = \omega\mathbf{r} \qquad (2)$$

(2)-ні (1)-ге қойып келесі өрнекті аламыз:

$$\mathbf{R} = 2m\omega[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}].$$

2.11. Қозғалыстың тұрақтылығы. Тегіс сыммен M кішкентай муфта үйкеліссіз еркін жылжиды. Сым шеңбер түрінде иілген. Және радиусы -*r*. 2.18-суретте жүйені *вертикалды OO′* өсті тұрақты ω бұрыштық жылдамдықпен айналатындай етіп келтірілген. Муфтаның тұрақты орнына сай келетін ϑ_0 бұрышын табу керек.

Шығару жолы. Айналып қозғалатын сымға қатысты санақ жүйесіндегі муфтаның жағдайын қарастырайық. Сым бойымен қозғалатын муфтаның қозғалысы



2.18-сурет

қорытынды F_τ-күшінің проекциясы арқылы анықталады. Ал бұл проекцияның өзі *M* нүктесінде $\boldsymbol{\tau}$ орта бағытына қарай жасалған қорытынды күш болып табылады. 2.18-суреттен келесі өрнекті шығарамыз:

$$F_\tau = F_{\text{цик}} \cos\vartheta - mg \sin \vartheta$$

Осы теңдеудің оң жағында ауырлық күшпен инерциялық центрге тартқыш күштердің проекциялары келтірілген.

$F_{\text{цик}} = m\omega^2 r \sin\vartheta$ формуласын пайдаланып, алдыңғы теңдеуді келесі түрге келтіреміз:

$$F_\tau, \propto \sin\vartheta\,(\cos\vartheta - \mathrm{g}/\omega^2 r). \qquad (1)$$

$(F_\tau = 0)$- шартынан ϑ_0 бұрышының 2 мәнін табамыз: $\sin\vartheta_0 = 0$ және $\cos\vartheta_0 = g/\omega^2 r$. Осы 2 жағдайдың біріншісі ω-ның кез келген мәнінде жүзеге асады. Ал екінші теңдеу тек $\mathrm{g}/\omega^2 r < 1$ шартында ғана орындалады. Сонымен, ω-ның өте кішкентай шамаларында тепе-теңдіктің $(\vartheta_0 = 0)$ - төменгі нүктеге сай бірақ күші болады. Ал $\omega(\omega > \sqrt{\mathrm{g}/r}$- дің үлкен шамаларында тепе-теңдікте басқа да орны болуы мүмкін және ол екінші шартқа байланысты болады. Тепе-теңдіктің белгілі бір күйдегі тұрақтылығы үшін муфтаны тепе-теңдік күйінен кез келген жаққа щығарғанда F_τ күші керісінше жаққа қарай бағытталады, яғни тепе-теңдік жағына қарай. Басқаша айтқанда $\Delta\vartheta$-тің таңбасы тепе-теңдіктегі ϑ_0 бұрышынан жасалған $\mathrm{d}\vartheta$ ауытқуының таңбасына қарама-қарсы болуы қажет.

ϑ_0 -бұрышынан шамалы ғана δF_τ ауытқуы орын алса, онда пайда болған F_τ күші (1) теңдеудің дифференциалы ретінде табылады:

$$\delta F_\tau \propto [\cos\vartheta_0\,(\cos\vartheta_0 - \mathrm{g}/\omega^2 r) - \sin^2\vartheta_0]\mathrm{d}\vartheta\ . \qquad (1)$$

тепе-теңдіктің төменгі жағдайы үшін $(\vartheta_0 = 0)$ болғанда

$$\delta F_\tau \propto (1 - \mathrm{g}/\omega^2 r)\mathrm{d}\vartheta\ . \qquad (2)$$

Егер жақшаның ішіндегі өрнек теріс таңба болса, яғни $\omega < \sqrt{\mathrm{g}/r}$ болғанда тепе-теңдік тұрақты.

Тепе-теңдіктің басқа жағдайы да орын алады $(\cos\vartheta_0 = \mathrm{g}/\omega^2 r)$

$$\delta F_\tau \propto -\sin^2\vartheta_0\,\mathrm{d}\vartheta.$$

Тепе-теңдіктің осы жағдайының (егер ол іс жүзінде болса) әруақытта тұрақты болатыны теңдеуден көрініп тұр.

Сонымен, әзірше тек тепе-теңдіктің төменгі жағдайы ғана белгілі. Егер $\left(\omega < \sqrt{\mathrm{g}/r}\right)$ болса, ол әрдайым тұрақты. Ал егер тепе-теңдіктің басқа жағдайы туса, яғни $(\omega > \sqrt{\mathrm{g}/r})$ төменгі жағдай (2) теңдеуге сәйкес тұрақсыз болып, муфта төменгі орнынан жоғары жағына қарай өтеді де әрдайым тұрақты болады.

3-тарау

Импульс сақталу заңы

§ 3.1. Сақталу заңдары туралы

Кез келген дене (немесе денелер жиынтығы) дегеніміз шын мәнісінде материалдық нүктелердің немесе бөлшектердің жиынтығы болып табылады. Егер жүйе уақыт бойынша өзгерсе, онда оның күйі де өзгереді. Жүйенің күйі оның барлық бөлшектер орындарының (координаттарының) және жылдамдықтарының берілуімен бір мезгілде сипатталады.

Бөлшектерге әсер ететін күштер жүйесінің заңдарын және жүйенің кейбір бастапқы уақыттағы күйін біле отырып, қозғалыс теңдеулерінің көмегімен оның одан арғы жағдайын, яғни кез келген уақыт сәтіндегі оның күйін алдын ала болжауға болады. Мысалы, Күн жүйесіндегі планеталар қозғалысын зерттеу осындай мәселенің бірі болып табылады.

Бірақ қозғалыс теңдеулерінің көмегімен жүйені толық қарастыру көбіне соншалықты күрделіленіп (мысалы, жүйенің өзінің күрделілігінен), оны ақырына дейін шешу мүмкін болмайды. Ал әсер етуші күштердің заңдылықтары белгісіз кезде, мұндай қағида іс жүзіне мүлдем жүзеге аспайды. Кейбір мәселелерге келсек, атап айтсақ жеке бөлшектердің қозғалыстарын толық қарастырудың ешқандай мағынасы болмайды. Мысалы газ үшін оның жеке алынған молекулаларының қозғалысын сипаттау мағынасыз болады.

Міне, сондықтан осындай күрделі мәселелерді шешу үшін іс жүзінде кездесетін тосқауылдарды айналып өтуге басқаша мүмкіндік беретін және Ньютон заңдарының салдары болып табылатын қандай да болсын жалпы принциптер болмас па екен деген сұрақ туады.

Мұндай принциптер бар екен. Олар – сақталу заңдары деп аталады.

Жүйенің қозғалысы кезінде оның күйі уақыт бойынша өзгеріссіз қала алатын тамаша қасиетке ие болатын шамалар кездеседі. Осындай уақыт бойынша сақталып қалатын аса маңызды шамаларға - энергия, импульс және импульс моменті жатады. Бұл үш шаманың бәріне ортақ маңызды қасиет бар: ол *аддитивтілік* – латынша additivus — қосылатын — бүтін объектіні сипаттайтын шаманың мәні осы объектіні кез келген әдіспен бөлшектеген кездегі жеке бөліктерді сипаттайтын шамалар мәндерінің қосындысына тең болатын қасиетті білдіретін ұғым. Мысалы, бүтін дененің көлемі оны құрайтын жеке бөліктер көлемдерінің қосындысына тең болса, ондай шама аддитивтілік көлем болады. Сондай-ақ мұндай шамаларға сызықтың ұзындығы, беттің ауданы, физиологиялық дененің массасы, т.б. жатады.

Импульс пен импульс моменті үшін аддитивтілік қасиет өзара әрекеттесу бар кезде де орындалады. Міне осы аддитивтілік қасиеттің арқасында бұл үш шаманың атқаратын рөлі зор.

Энергияның, импульстің және импульс моментінің сақталу заңдарының аса терең мағынасы олардың уақыт пен кеңістіктің іргелі қасиеттерімен – біртектілігі және изотроптылығымен байланыстылығында. Дәлірек айтқанда, *энергияның* сақталу заңы *уақыттың* біртектілігімен сипатталады, ал *импульс* және *импульс моментінің* сақталу заңдары *кеңістіктің біртектілігімен* және *изотроптылығымен* сәйкес түрде байланысты. Сонымен, Ньютонның екінші заңынан аталған сақталу заңдарын шығарып алу үшін оған уақыт пен кеңістікке сай симметрия қасиеттерін қосу керек. Уақыт пен кеңістіктің симметриялық қасиеттері теориялық механика курсында толық қарастырылады.

Энергияның, импульстің және импульс моментінің сақталу заңдары физиканың ең іргелі принциптерінің қатарына жатады, олардың маңызын асыра бағалау мүмкін емес. Бұл заңдардың маңызы олардың тек механика ғылымының ғана емес сонымен қатар табиғаттың да универсалды заңдары болып табылатындығында. Осы уақытқа дейін ешбір құбылыста бұл заңдардың орындалмай қалуы байқалған жоқ. Олар ешбір ауытқусыз қарапайым бөлшектер саласында да, ғарыштық объектілерде де, атом мен қатты дене физикасында да және осы заманғы физиканың негізін түзетін ең жалпылама заңдардың қатарына жатады.

Механикалық құбылыстарды қарастырудың аса қуатты құралына айналған сақталу заңдары енді физиктердің қолдан түспейтін қаруына айналды. Сақталу заңдарының маңызды зерттеу құралына айналуының бірнеше себептері бар:

1. Сақталу заңдары бөлшектердің траекторияларына да, әсер ететін күштердің түріне де тәуелсіз. Сондықтан олар қозғалыс теңдеулерін пайдаланбай-ақ түрлі механикалық процестердің қасиеттері жайлы көп мәлімет береді. Егер, мысалы, қандай да бір процесс сақталу заңдарына қайшы келетін болса, онда мұндай процесті қарастырудың қажеті болмайды.

2. Әсер ететін күштердің сипатына *сақталу заңдары* тәуелсіз болғандықтан, күштердің түрі тіптен белгісіз болған кездің өзінде де оларды қолдануға болады. Мұндай кездерде сақталу заңдары зерттеудің бірден-бір орны толмас құралына айналады. Мысалы, осындай жағдайларға қарапайым бөлшектердің физикасы жатады.

3. Әсер етуші күштердің өздері дәл белгілі болған кездің өзінде де бөлшектердің қозғалысы жайлы көптеген мәселелерді шешуде сақталу заңдарына жүгіну үлкен көмек береді. Сонымен, жаңа мәселелерді шешу кезінде зерттеуді келесі ретте орындау қабылданған: ең бірінші – мәселені шешу үшін белгілі сақталу заңдарын бірінен соң бірін қолданады, екінші – оның жеткіліксіздігіне көз жеткізгеннен кейін ғана қозғалыс теңдеулерін қолдануға көшеді.

Сақталу заңдарын қарастыруды біз импульстің сақталу заңынан бастаймыз.

§ 3.2. Импульс жүйесі

Бөлшектің импульсі

Импульс – латынша – impulsus- соққы, түрткі, ниет деген мағынаны білдіреді.

Қозғалыс мөлшері, импульс – механикалық қозғалыс өлшеуіші. Материалдық нүктенің қозғалыс мөлшері оның массасы (m) мен жылдамдығының ($\mathbf{v}$) көбейтіндісіне тең:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

Тәжірибе және оған сәйкес механикалық құбылыстарға жүргізілген талдаулар денелердің механикалық қозғалысын сипаттау үшін тағы бір шаманы – $\mathbf{p}$-импульсті қарастыру қажет екендігін көрсетті. Енді импульсті толығырақ қарастырайық. Ең алдымен ньютондық динамиканың (2.6) негізгі теңдеуін басқа түрде импульс арқылы жазайық:

$$\mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t = \mathbf{F}. \tag{3.1}$$

яғни, *материалдық нүкте импульсінің уақыт бойынша туындысы оған әсер ететін күшке тең болады.* Мысалы, егер $\mathbf{F} \equiv \mathbf{0}$ болса, онда $\mathbf{p} = const$.

Инерциялық емес санақ жүйесін сипаттайтын (3.1) теңдеуіне кіретін **F** күшінің шамасына берілген бөлшектің басқа денелермен өзара әрекеттесу күші ғана емес, сонымен қатар инерция күштері де енеді.

Егер **F** күштің уақытқа тәуелділігі белгілі болса, онда (3.1) теңдеуі арқылы бөлшек импульсінің өсімшесін кез келген уақыт аралығында табуға мүмкіндік туады. Шындығында да (3.1) теңдеуінен бөлшек импульсінің dt уақыт аралығындағы қарапайым өсімшесі $\mathrm{d}\mathbf{p} = \mathbf{F}\mathrm{d}t$ екендігі шығады. Осы өрнекті уақыт бойынша интегралдап, бөлшек импульсінің шектік t уақыт аралығындағы өсімшесін табамыз:

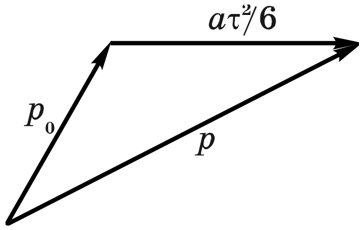
$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \int_0^t \mathbf{F}\mathrm{d}t. \quad (3.2)$$

Егер $\mathbf{F} = \mathrm{const}$ болса, онда $\mathbf{F}$ векторды интеграл астынан шығаруға болады және сонда $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \mathbf{F}t$ болады.

Осы теңдіктің оң жағындағы шаманы *күш импульсі* деп атайды. Сонымен, бөлшек импульсінің кез келген уақыт аралығындағы өсімшесі осы уақыт ішіндегі күш импульсіне тең болады.

Мысал. Бастапқы $t = 0$ сәттегі импульсі $\boldsymbol{p}_0$ болатын бөлшекке τ уақыт аралығында $F = at(1 - t/\tau)$ күш әсер етеді, мұндағы, **a** –тұрақты вектор. Бөлшектің осы күштің әсері аяқталғаннан кейінгі **p** импульсін табу керек (3.1-сурет).

Шығару жолы. (3.2) формуласы бойынша **p** импульсін келесі формуламен табамыз:



3.1-сурет

$$\mathbf{p} = \mathbf{p_0} + \int_0^t \mathbf{F}\mathrm{d}t = \mathbf{p}_0 + a\tau^2/6 \, .$$

Жүйенің импульсі

Бөлшектердің кез келген бір жүйесін қарастырайық. Жалпылама алғанда жүйенің бөлшектері бір-бірімен және басқа жүйелерге жататын денелермен де әрекеттесулері мүмкін. Осы құбылысқа байланысты жүйедегі бөлшектер арасындағы өзара әрекеттесу күштері *ішкі күштер* деп аталады. Ал осы бөлшектерге осы жүйеге жатпайтын басқа денелердің әсерін *сыртқы күштер* деп атайды. Іс жүзінде күштерді мұндай ішкі және сыртқы деп екіге бөлу шартты түрде алынған және мұндай шарт толығымен тек бізге керекті бөлшектер жүйелеріне тәуелді. Сонымен қатар, инерциялық емес жүйелерде сыртқы күштер ретінде инерция күштері алынады.

Жүйенің жеке бөлшектері импульстерінің векторлық қосындысы ретінде жүйенің импульсін енгіземіз:

$$\mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_{\boldsymbol{i}}. \quad (3.3)$$

мұндағы, $\mathbf{p}_{\boldsymbol{i}}$– $\boldsymbol{i}$-ші бөлшектің импульсі. Жүйенің импульсі аддитивтік шама, яғни жүйенің импульсі өзара әрекеттесудің бар-жоғына қарамай, оның жеке бөліктерінің импульстерінің қосындысына тең болады.

Жүйе импульсінің өзгерісін сипаттайтын физикалық шаманы анықтайық. Бұл үшін (3.3) теңдеуін t – уақыты бойынша дифференциалдаймыз:

$$\mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t = \sum \mathrm{d}\mathbf{p}_i/\mathrm{d}t.$$

(3.1) бойынша

$$\mathrm{d}\mathbf{p_i}/\mathrm{d}t = \sum_k \mathbf{F}_{ik} + \boldsymbol{F_i}.$$

мұндағы $\mathbf{F}_{ik}$- ***i***-ші бөлшекке жүйенің басқа бөлшектері тарапынан әсер ететін күштер (ішкі күштер); − дәл осы бөлшекке қарастырылып отырған жүйеге кірмейтін денелер тарапынан болатын күштер (сыртқы күштер) болып табылады. Соңғы өрнекті алдыңғы өрнекке қойып келесі өрнекті табамыз:

$$\mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t = \sum_i \sum_k \mathbf{F}_{ik} + \sum_i \mathbf{F}_i.$$

Оң жақтағы қос қосынды – барлық ішкі күштердің қосындысы. Ньютонның үшінші заңына сай, жүйе бөлшектерінің арасындағы өзара әрекеттесу күштері қос-қос болып модулі жағынан бір-біріне тең және бағыттары қарама-қарсы болады. Сондықтан, әрбір қосақта қорытынды күш нөлге тең, демек барлық ішкі күштердің векторлық қосындысы да нөлге тең болады. Осының нәтижесінде соңғы теңдеу мына түрге келеді:

$$\boxed{\mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t = \mathbf{F}_{\text{сырт}}} \qquad (3.4)$$

мұндағы, $\mathbf{F}_{\text{сырт}}$– барлық сыртқы күштердің қосындысы, $\mathbf{F}_{\text{сырт}} = \sum \mathbf{F}_i$.

(3.4) теңдеуі: *жүйе импульсінің уақыт бойынша туындысы жүйенің бөлшектеріне әсер ететін барлық сыртқы күштердің векторлық қосындысына тең болады* дегенді білдіреді.

Бір бөлшек жағдайындағы тәрізді (3.4) теңдеуінен жүйе импульсінің шектеулі ***t***- уақыт аралығындағы өсімшесі шығады:

$$\boxed{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \int_0^t \mathbf{F}_{\text{сырт}} \mathrm{d}t} \qquad (3.5)$$

яғни, жүйе импульсінің өсімшесі барлық сыртқы күштердің қорытындысына сәйкес уақыт аралығындағы импульсына тең болады. Бұл жердегі $\mathbf{F}_{\text{сырт}}$- барлық *сыртқы күштердің* қорытындысы.

(3.4) және (3.5) теңдеулері инерциялық санақ жүйелерінде де инерциялық емес санақ жүйелерінде де орындалады. Тек инерциялық емес санақ жүйелерінде сыртқы күштер ролін атқаратын инерция күштерінің әсерін ескеру керек, бұл теңдеулерде $\mathbf{F}_{\text{сырт}}$ деп $\mathbf{F}_{\text{р}} + \mathbf{F}_{\text{ин}}$ қосындысын түсіну керек. Мұндағы, $\mathbf{F}_{\text{р}}$ – барлық сыртқы өзара әрекеттесу күштерінің, ал $\mathbf{F}_{\text{ин}}$ – барлық *инерция күштерінің* қорытындысы.

§ 3.3. Импульстің сақталу заңы

Алдымен импульстің сақталу заңын түсіну үшін тұйықталған жүйе деген жаңа термин енгізу керек. Тұйықталған жүйе деп осы жүйеде орналасқан бөлшектерге сырттан ешқандай басқа денелер әсерін тигізбейді деген сөз, немесе олардың әсері елеусіз аз болғаны. Басқаша айтқанда, егер сыртқы күштер болмаса жүйе тұйықталған болып саналады. Тұйықталған жүйе деген түсінік инерциалды санақ жүйелеріне ғана тән деп айтуға болады. Себебі инерциялық емес санақ жүйелерінде сыртқы күштің қызметін атқаратын инерция күштері орын алады. Физикада материалдық нүктелердің қасиетін зерттеуде тұйықталған жүйенің маңызы зор.

(3.4) теңдеуге сай жүйенің импульсі тек сыртқы күштің әсері арқылы ғана өзгере алады. Ішкі күштер жүйенің импульсін өзгерте алмайды. Осы жағдайдан импульстің сақталу заңы шығады: бөлшектердің тұйықталған жүйесінің импульсы әрдайым тұрақты, яғни уақытқа байланысты ол өзгермейді.

$$\boxed{\mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_i(t) = const.} \tag{3.6}$$

Алайда, жеке-жеке оның әрбір бөлшектері немесе тұйықталған жүйенің әрбір бөліктерінің импульстері уақытқа қатысты өзгеруі мүмкін.Осындай қорытынды (3.6) теңдеуден көрініп тұр. Бұл өзгерістер барысында жүйенің қорытынды импульсы өзгеріссіз қалады, ал оның бір бөліктерінің импульсі ұлғайып жатқанда, керісінше қалған бөліктерінің импульсі азайып жатады. Басқаша айтқанда жүйенің жеке-жеке бөлшектері бір-бірімен тек импульстері мен ғана алмаса алады. Егер жүйенің бір бөлігінде импульс ұлғайса, онда осы өсімше қоршаған дененің импульсінің азаюынан туғаны болғаны.

(3.4) және (3.5) теңдеулерді *импульстің сақталу заңының жалпылама түрлері* деп қарастыруға болады.

Тұйықталмаған яғни ашық жүйелердегі импульстің өзгеру себебі ол басқа денелердің немесе күштердің әсерінен екенін осы теңдеулер көрсетеді. Осы айтылған тұжырымдар тек инерциялық санақ жүйесіне ғана тән деп қорытынды жасауға болады.

Егер барлық сырттан әсер ететін күштердің қорытынды сомасы нөлге тең болса, ашық жүйелерде де импульс сақталу заңы орын алуы мүмкін. Мұндай тұжырым (3.4) пен (3.5) теңдеулерінен шығып отыр. Практикада осы жаңдайларды білудің маңызы зор.

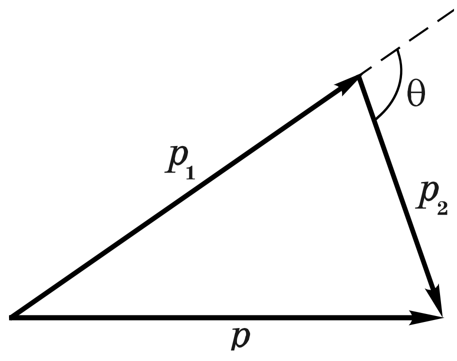
Ашық немесе тұйықталған жүйелерде **p** импульстің өзі емес X бағытына жасалған оның $\mathbf{p}_x$- проекциялары өзгермей сақталады. Сыртқы қорытынды $\mathbf{F}_{\text{сырт}}$ күштің проекциясы X өстің бағытына нөлге тең болса, осындай жағдай туады. Яғни $\mathbf{F}_{\text{сырт}}$ векторы оған перпендикулярболғаны. Шынында да (3.4) теңдеуін осындай жолмен проекциялап келесі теңдеуді аламыз:

$$\mathrm{d}p_x/\mathrm{d}t = \mathbf{F}_{\text{сырт}.x}\ . \tag{3.7}$$

мұндағы, $F_{сырт.x} \equiv 0$, онда $p_x = const$.

Мысалы, егер жүйе қозғалыста болса, онда біртекті ауырлық күш өрісінде кез келген горизонталь бағытқа жасаған оның импульс проекциясы сақталады.

1-мысал. Қозғалып келе жатқан бөлшек импульстері $\mathbf{p}_1$ және $\mathbf{p}_2$ тең екі бөлшекке ыдырайды. Олардың арасындағы бұрыш ϑ тең. Ыдыраған бөлшектердің **p** импульс модульдерін табу керек.



3.2-сурет

Осы тәріздес есептерді 3.2-суретте көрсеткендей үшбұрыштар импульстері арқылы шешуге болады. Бұл үшбұрыш импульстердің сақталу заңын білдіреді: $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$. Косинустар теориясын пайдалана отырып, келесі теңдеуді алуға болады:

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\vartheta}\ .$$

Жүйені тұйықталған деп аламыз. Егер жүйеге басқа күштердің әсері тиетін болса, онда $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}_1$ мен $\mathbf{p}_2$ импульстері ретінде олардың ыдырағанға дейінгі және ыдырағаннан кейінгі шамаларын еске алу қажет болар еді. Және осы процесті өте аз уақыт аралығында өтеді деп қарастырған жөн. Осы соңғы шарт бөлшек ыдыраған уақытта сыртқы күштердің импульстерін елемеуге болатындай етіп алу үшін керек.

2-мысал. Тар салдың массасы m_1, сол салда массасы m_2-ге тең адам тұр. Су бетінде сал тыныштықта тұр. Адам салға қатысты $\Delta\mathbf{r}'$ орын ауыстырады да тоқтайды. Судың кедергісін елемеуге болады, өйткені ол өте аз шама. Судың жағасына қатысты салдың тиісті $\Delta\mathbf{r}_2$ орын ауыстыруын есептейік. Осы жағдай үшін адам–сал жүйеге әсер ететін барлық сыртқы қорытынды күштердің әсері нөлге тең.

Сондықтан қозғалыс кезінде нөлге тең болғандықтан, бұл жүйенің импульсі өзгермейді.

$$m_1\mathbf{v_1} + m_2\mathbf{v}_2 = 0.$$

мұндағы, $\mathbf{v_1}$ мен $\mathbf{v_2}$-жағаға қатысты адам мен салдың жылдамдықтары. Адамның жағаға қатысты жылдамдығын келесі өрнекпен келтіруге болады:

$$\mathbf{v_1} = \mathbf{v_2} + \mathbf{v}'.$$

мұндағы, $\mathbf{v}'$- салмен салыстырғандағы адамның жылдамдығы. Осы теңдеулерден $\mathbf{v_1}$-ді алып тастап, келесі өрнекті табамыз:

$$\mathbf{v_2} = -\frac{\mathrm{m_1}}{\mathrm{m_1+m_2}}\mathbf{v}'.$$

Теңдеудің екі жағын да dt-ға көбейтіп, dr_2-салдың және dr'-адамның салға қатысты элементар орын ауыстыруын табамыз.
Тура осындай байланыс ең соңғы орын ауыстыру үшін де сай келеді:

$$\Delta\mathbf{r_2} = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\Delta\mathbf{r}'.$$

Сонымен теңдеу арқылы салдың $\Delta\mathbf{r_2}$ орын ауыстыруы адамның қозғалысына тәуелсіз екені көрініп тұр, яғни $\mathbf{v}'(t)$ заңына бағынбайды деген сөз.

Тағы да ескере кету керек: импульстердің сақталу заңы тек инерциялық жүйеде ғана орын алады. Алайда кейбір арнайы шарттарда жүйенің импульстері инерциялық емес жүйелерде де сақталады. Ол үшін (3.4) теңдеуіндегі сыртқы күштердің әсерлері $\mathbf{F}_{\text{сырт}}$ нөлге тең болуы қажет. Сонда (3.4) теңдеуі инерциялық емес санақ жүйесін де қанағаттандыра алады. Дегенмен мұндай жағдайлар үшін арнайы шарттар қажет. Мұндай жағдайлар сирек кездеседі және дербес сипат алады.

Ендігі көрсететін жағдайымыз, егер жүйенің импульсі бір K-инерциалды санақ жүйесінде сақталса онда ол басқа да K'-инерциялық санақ жүйелерінде де сақтала алады. K-жүйесі үшін:

$$\sum m_i\mathbf{v_i} = const.$$

Егер K' жүйе K-жүйеге қатысты $\mathbf{V}$ жылдамдықпен қозғалатын болса, онда K-жүйедегі $\boldsymbol{i}$-ші бөлшектің жылдамдығы келесі өрнекпен анықталады:

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{i}} = \mathbf{v}_i' + \mathbf{V}.$$

мұндағы, $\mathbf{v}_{\boldsymbol{i}}'$ - *K'-жүйе*дегі бөлшектің жылдамдығы. Олай болса жүйе импульсі үшін теңдеу келесі түрде өзгереді:

$$\sum m_i\mathbf{v}_i' + \sum m_i\boldsymbol{V} = const.$$

Осы теңдеудегі екінші қосынды уақытқа тәуелді емес. Ал олай болса, бірінші қосынды да, яғни K'–санақ жүйесіндегі жүйе импульсі де уақытқа тәуелді емес екендігі шығады, яғни

$$\sum m_i\mathbf{v}_i' = const.$$

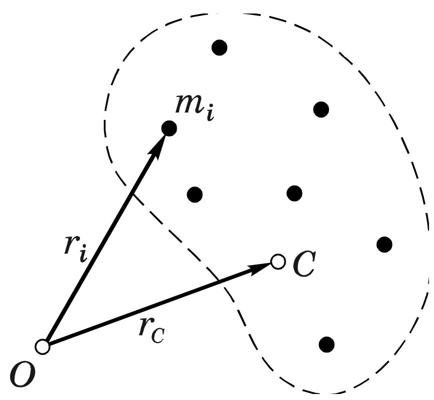
Алынған нәтижелердің бәрі Галилейдің салыстырмалы принципімен толық сәйкеседі, яғни осы принцип бойынша механика заңдары барлық санақ жүйелерінде бірдей болады.

Импульстің сақталу заңына тиісті пікірлер түгелімен Ньютон заңдарының біржола күмәнсіз дұрыстығына әкелді. Жеке алғанда тұйықталған жүйедегі материалдық нүктелер бір-бірімен қосарлап өзара әрекеттеседі деп алынса ғана осы әрекеттесулер Ньютонның үшінші заңына бағынады. Ал егер жүйе Ньютонның үшінші заңына бағынбайтын болса ше? Мысалы, электромагниттік сәулелену жүйелелері сияқты. Мұндай сұрақтарға жауапты тәжірибелер арқылы алынған нәтижелер импульстің сақталу заңының сенімді түрде орындалатынын көрсетті. Яғни, мұндай жүйелер үшін де жалпы баланс бойынша Ньютонның үшінші заңы әділ екендігі көрінеді. Алайда тек бөлшектің импульсі ғана емес сонымен қатар электромагниттік өрістің импульсін де есепке алу керек екендігін электродинамика анықтайды.

Сонымен тәжірибе негізінде импульстің сақталу заңы керекті мөлшерде жалпылама қорытылған табиғаттың іргелі заңына жатады. Бірақ импульстің сақталу заңын мұндай кең түрінде түсінгенде ол енді Ньютон заңдарының салдары түрінде бола алмайды. Сондықтан тәжірибе айғақтарының жалпылауы нәтижесінде импульстің сақталу заңы енді жеке дербес ортақ қағида ретінде қарастырылады.

§ 3.4. Масса центрі. *Ц*-жүйе

Массалар центрі (инерция центрі)

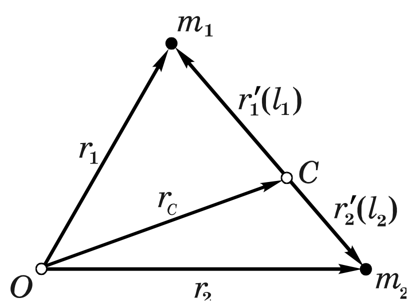


3.3-сурет

Кез келген бөлшектер жүйесінде инерция центрі немесе массалар центрі деп аталатын бір тамаша *C* нүкте болады, оның бірқатар тамаша және маңызды касиеттері бар. Оның берілген санақ жүйесінің *O* басына қатысты орны формуламен анықталатын $\mathbf{r}_C$ радиус-вектормен сипатталады:

$$\boxed{\mathbf{r}_C = \frac{1}{m}\sum m_i\mathbf{r}_i.} \qquad (3.8)$$

мұндағы, $\boldsymbol{i}$-ші бөлшектің массасы m_i мен $\mathbf{r}_i$-радиус-векторы, m – бүтін жүйенің массасы (3.3-сурет).



3.4-сурет

Мысал. Массалары m_1 және m_2 екі бөлшектен тұратын массалар центрінінің жүйесі түзусызықтың бойында жатыр. Екі бөлшектің арасындағы арақашықтықты С нүктесі осы түзу сызықтың бойында келесі қатынаспен $l_1{:}\, l_2 = m_2{:}\, m_1$ бөліп тұрады. $\mathbf{r}_1', r_1, \mathbf{r}_C - 1,$ ***2*** бөлшектермен С нүктесінің радиус-векторлары (3.4-сурет). Осы бөлшектердің орны С нүктесімен салыстырғанда радиус-вектормен сипатталады.

$$\mathbf{r}_1' = \boldsymbol{r}_1 - \mathbf{r}_C.$$

$$\mathbf{r}_2' = \boldsymbol{r}_2 - \mathbf{r}_C$$

(3.8) $\boldsymbol{r}_C = (m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2)/(m_1 + m_2)$ теңдеуді пайдаланып өрнектерді аламыз:

$$\mathbf{r}_1' = \frac{m_2}{m_1+m_2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

$$\mathbf{r}_2' = \frac{m_1}{m_1+m_2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1).$$

Осыдан $\mathbf{r}_1'$ пен $\boldsymbol{r'}_2$векторлары **коллинеарнды ($\mathbf{r}_1' \upharpoonleft\downharpoonright \boldsymbol{r'}_2$)** болып келеді, яғни С нүктесі екі бөлшек арқылы өтетін түзу сызықтың бойында жатыр деген сөз. Сонымен қатар осы векторлардың модульдері, яғни l_1 мен l_2 арақашықтықтары бөлшектердің массаларына кері пропорционал.

Массалар центрінің жүйесі оның ауырлық центрімен үйлеседі. Мұндай тұжырым осы жүйе шегінде өрістің ауырлық күшін біртекті деп алғанда ғана орын алады.

Егер қарастырылып отырған жүйенің аумағында ауырлық өрісін біртекті деп санаса, онда жүйенің инерция центрі оның ауырлық центрімен бірдей түседі.

Енді инерция *центрінің берілген жүйедегі жылдамдығын* $\mathbf{V}_C$ табайық. (3.8) –ді уақыт бойынша дифференциалдаймыз, сонда

$$\mathbf{V}_C = \frac{1}{m}\sum m_i\mathbf{v}_i. \tag{3.9}$$

Егер инерция центрінің жылдамдығы нөлге тең болса, онда жүйе тұтастай тыныштықта болады. Бұл жеке алынған материалдық нүкте үшін тыныштық күйі туралы жалпылама түсінік. Ал $\mathbf{V}_C$ жылдамдығына келетін болсақ, ол жүйенің тұтастай алғандағы жылдамдық мағынасына ие болады.
(3.9) формуладан (3.3) − ескере отырып, келесі өрнекті аламыз:

$$\boxed{\mathbf{p} = m\mathbf{V}_C} \tag{3.10}$$

яғни, жүйенің импульсі жүйе массасының оның инерция центрі жылдамдығына көбейтіндісіне тең болады.

Инерция центрінің қозғалыс теңдеуі

Инерция центрі түсінігін (3.4) теңдеуге қолданған кезде көбірек тиімді болатын басқа түр беруге мүмкіндік туады.

Бұл үшін (3.10) -ды (3.4)–ке қойып, жүйе массасының тұрақты шама екендігін ескерсек болғаны. Сонда:

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}_C}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}_{\text{сырт}}} \tag{3.11}$$

мұндағы, $\mathbf{F}_{\text{сырт}}$ – жүйеге әсер өтетін барлық сыртқы күштердің қорытындысы. Бұл – жүйенің инерция центрінің қозғалыс теңдеуі – механиканың ең маңызды теңдеулерінің бірі болып табылады. Осы теңдеуге сай, *бөлшектердің кез келген жүйесінің козғалысы кезінде оның инерция центрі жүйенің барлық массасы осы нүктеде шоғырланған және жүйеге түсірілген барлық сыртқы күштер осы нүктеге түсірілгендей қозғалады*.

Осы кезде инерция центрінің үдеуі сыртқы күштердің түсу нүктелеріне ешбір тәуелсіз.

Одан әрі (3.11)-ден егер $\mathbf{F}_{\text{сырт}} \equiv 0$ болса, онда $\mathrm{d}\boldsymbol{V}/\mathrm{d}t \equiv 0$, демек $\mathbf{V}_C = const$. Жеке алғанда тұйықталған жүйе осындай жағдайға жатады (инерциялық санақ жүйесінде). Сонымен қатар, егер $\mathbf{V}_C = const$ болса, онда (3.10) бойынша жүйенің импульсі $\mathbf{p} = const$ болады.

Сонымен, *егер жүйенің инерция центрі бірқалыпты және түзусызықты қозғалатын болса, онда оның импульсы қозғалыс кезінде сақталады.* Кері тоқтам да орынды.

(3.11) теңдеу өзінің сырт көрінісімен материалдық нүкте динамикасының негізгі теңдеуіне сәйкес және ол бөлшектер жүйесі үшін табиғи жалпылама болып табылады: жүйенің тұтастай алғандағы үдеуі барлық сыртқы күштердің қорытындысына тура пропорционал және жүйенің қосынды массасына кері пропорционал. Инерциялық емес санақ жүйелерінде барлық сыртқы күштердің қорытындысынақоршаған денелермен өзара әрекеттесу күштерінің де, инерция күштерінің де кіретіндігін еске сала кету керек. Инерция центрінің қозғалысына бірнеше мысалдар келтірейік.

1-мысал. Инерция центрі түсінігін пайдалана отырып, сал үстіндегі адамның қозғалысын қалай шешуге болатынын қарастырайық (73 беттегі 2 мысал).

Судың кедергісін елемеуге болады. Адам - сал жүйесіне әсер ететін барлық күштердің қорытындысы нөлге тең. Бұл адамның (және салдың) қозғалысы кезінде жүйенің инерция центрі өзгермейді дегенді білдіреді, яғни

$$m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = \text{const}.$$

мұндағы, $\mathbf{r}_1$ және $\mathbf{r}_2$ – адам мен салдың инерция центрлерінің жағынан қандай да бір нүктесіне қатысты орындарын сипаттайтын радиус-векторлар. Бұл теңдеуден $\mathbf{r}_1$ және $\mathbf{r}_2$ векторлар өсімшелерінің арасындағы байланысты табамыз:

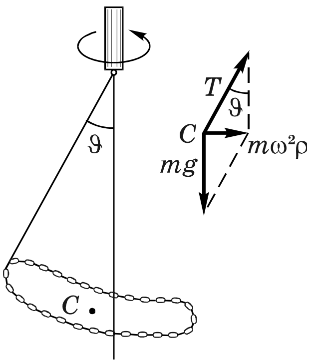
$$m_1 \Delta \mathbf{r}_1 + m_2 \Delta \mathbf{r}_2 = 0.$$

$\Delta\mathbf{r}_1$ және $\Delta\mathbf{r}_2$ өсімшелері дегеніміз адам мен салдың жағаға қатысты орын ауыстырулары, әрі $\Delta\mathbf{r}_1 = \Delta\mathbf{r}_2 + \Delta\mathbf{r}'$ екендігін ескере отырып, салдың орын ауыстыруын табамыз:

$$\Delta\mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\Delta\mathbf{r}'.$$

2-мысал. Адам мұнарадан суға секіреді. Секірушінің қозғалысы жалпы алғанда өте күрделі сипатта болады. Бірақ ауаның кедергісін ескермесек, онда секірушінің инерция центрі $m\mathbf{g}$ тұрақты күш әсер ететін материалдық нүктенің қозғалысы тәрізді парабола бойымен қозғалады, мұндағы m- адамның массасы.

3-мысал. Центрден тепкіш машинаның өсі мен бір шетінен жіппен байланып,тұйықталған шынжыр вертикаль өстен бірқалыпты ω – бұрыштық жылдамдықпен айналады (3.5-сурет). Осы кезде жіп вертикал өспен ϑ бұрыш жасайды. Шынжырдың инерция центрі қалай қозғалады?



3.5-сурет

Шығару жолы.Бірқалыпты айналыс кезінде инерция центрі вертикаль бағытта қозғалмайтындығы белгілі. Яғни бұл жіптің T керілу күші вертикаль құраушысының ауырлық күшін теңгеретіндігін көрсетеді (3.5-сурет оң жақта). Керілу күшінің горизонталь құраушысы модулі бойынша тұрақты және үнемі айналыс өсіне қарай бағытталған. Шынжырдың инерция центрі − C нүктесі − горизонталь шеңбердің бойымен қозғалады, оның радиусын (3.11) формуланың көмегімен табамыз:

$$m\omega^2\rho = mg\, tg\vartheta.$$

мұндағы, m – шынжырдың массасы. C нүкте суретте көрсеткендей, айналыс өсімен жіптің арасында орналасқан.

Ц-жүйе

Практикада жиі кездесетін жүйе ішіндегі тек жүйе бөлшектерінің салыстырмалы қозғалыстары қажет болса, онда жүйенің тұтастай түрдегі қозғалысы қарастырылмайды, мұндай жағдайда ең тиімдісі инерция центрінің тыныштығын камтамасыз ететін санақ жүйесін пайдалану. Құбылыстарды талдағанда және есептеулер жасағанда осындай жол көп жеңілдік береді.

Бөлшектердің берілген жүйесінің инерция центрімен берік байланысқан және инерциялық санақ жүйелеріне қатысты ілгерілемелі қозғалыста болатын санақ жүйесін *инерция центрінің санақ жүйесі* немесе *Ц-жүйе* деп атайды. *Ц*-жүйенің негізгі ерекшелігі − *онда бөлшектер жүйесінің толық импульсы нөлге тең* − бұл тікелей (3.10) формуласынан шығады: $\mathbf{V}_C = 0$. Басқаша айтқанда, бөлшектердің кез келген жүйесі тұтастай алғанда өзінің *Ц*-жүйесінде тыныштықта болады.

Бөлшектердің тұйықталған жүйелері үшін − жүйе инерциялық, ал тұйықталмаған жүйелері үшін, жалпы алғанда инерциялық емес болып саналады.

Физикада *Ц*-жүйенің мәні зор. Көптеген жағдайларды түсіндіру үшін осы *Ц*-жүйенің артықшылықтары сөзсіз пайдалы. Бөлшектердің соқтығысу теориясын және қатты заттардың динамикасын қарастырған кезде осы *Ц*-жүйенің маңызының зор екені көрінеді, сондықтан бұл сұраққа әлі талай қайтып ораламыз.

Екі бөлшектен тұратын жүйе. Бөлшектердің массалары m_1 және m_2. Ал олардың *К* санақ жүйесіндегі жылдамдықтары – $\mathbf{v}_1$ мен $\mathbf{v}_2$. *Ц*-жүйедегі осы бөлшектердің импульстерін анықтайық.

Ц-жүйесіне жататын барлық шамалардың төбесіне тильда (~) белгісін қойамыз. Сонда іздеп отырған импульстерді келесі түрде жазуға болады:

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 = m_1\tilde{\mathbf{v}}_1 = m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{V}_C), \qquad \tilde{\mathbf{p}}_2 = m_2\tilde{\mathbf{v}}_2 = m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{V}_C).$$

мұндағы, $\mathbf{V}_C$ – *К*- санақ жүйеге қатысты *Ц*-жүйесінің жылдамдығы, яғни инерциялық санақ жүйелерінің бір-біріне қатысты салыстырмалы жылдамдығы. Осы формулаларға $\mathbf{V}_C$ **-**нің мәндерін қойғаннан кейін өрнек келесі түрге өзгереді:

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), \qquad \tilde{\mathbf{p}}_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1), \tag{3.12}$$

Ц-жүйеде екі бөлшектің де импульстері өздерінің импульстері бойынша бірдей және бағыттары бойынша қарама-қарсы: $\tilde{\mathbf{p}}_1 = -\tilde{\mathbf{p}}_2$. Осындай қорытындының шыққаны дұрыс, себебі *Ц*-жүйедегі бөлшектер импульстерінің сомасы әр уақытта нөлге тең болатыны анық.

Осылай алынған нәтижелер тұйықталған және тұйықталмаған жүйелерді бірдей қанағаттандыра алады, сонымен қатар бөлшектер арасындағы өзара әрекеттесулерге де тәуелсіз болады.

§ 3.5. Массасы айнымалы дененің қозғалысы

Қозғалыс барысында дене массасының затты немесе қосып, немесе бөліп отыруы нәтижесінде осы массасының үнемі өзгеруі практикада көп кездеседі (ракета, реактивті ұшақ, жүріп келе жатқанда тиелетін платформа және т.б.).

Біздің мақсатымыз − осындай дененің қозғалыс теңдеуін жазу (осы жағдай үшін Ньютонның екінші заңының өрнегін табу).

Бұл мәселені материалдық дене үшін шешіп, оны ықшамдық үшін *дене* деп атайтын боламыз. Қайсыбір t уақытта қозғалыстағы *А* дененің массасы m, ал қозғалыс кезінде оған қосылатын (не одан кететін) массаның осы денеге қатысты жылдамдығы $\mathbf{u}$ болсын.

А дененің жылдамдығы берілген t уақытындағы жылдамдығындай болатын көмекші *К* инерциялық санақ жүйесін алайық. Яғни, t-уақытында дене *К* санақ жүйесіне қатысты тыныштықта болады деген сөз.

Енді А дене t-дан t+dt-ға дейін уақыт аралығында *К* санақ жүйесінде $m d\mathbf{v}$- импульсін алатын болсын. Бұл импульсті *А* дене біріншіден, $\delta m \cdot \mathbf{u}$ импульсті беретін (алып кететін) δm массаны қосып алудың (айырылып калудың) арқасында алады, екіншіден, қоршаған денелер тарапынан немесе күш өрісі тарапынан болатын **F** күштің әсерінің арқасында алады. Сонымен:

$$m\mathrm{d}\mathbf{v} = \mathbf{F}\mathrm{d}t \pm \delta m \cdot \mathbf{u}.$$

мұндағы қосу таңбасы массаның қосылуына, алалу таңбасы массаның бөлінуіне сәйкес келеді. Осы екі жағдайды массаның қосылуы кезінде $\pm\delta m$ болады, ал массаның бөлінуі кезінде dm болады деп алып, жоғары теңдеуді келесі түрде қайта жазуға болады: $dm = +\delta m \ \ dm = -\delta m$

$$m\mathrm{d}\mathbf{v} = \mathbf{F}\mathrm{d}t + \mathrm{d}m \cdot \mathbf{u}.$$

Осы теңдікті $\mathrm{d}t$ шамасына бөлсек, онда келесі теңдеуді аламыз:

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}. \qquad (3.13)$$

мұндағы, $\mathbf{u}$ – қосылатын (бөлінетін) заттың қарастырылатын денеге қатысты жылдамдығы.

Бұл теңдеу *массасы айналмалы материалдық нүкте динамикасының негізгі теңдеуі* болып табылады. Ол – ***Мещерский теңдеуі*** деп аталады.

Осы теңдеу салыстырмалылық принциптеріне сай бір инерциялық санақ жүйесінде алынғаннан кейін ол басқа инерциялық санақ жүйелерін де қанағаттандыра алады. Егер санақ жүйесі инерциалды емес болса, онда **F** күші дегеніміз – барлық күштердің қорытындысы, яғни оған осы денемен оны қоршаған денелердің күштерімен қатар инерция күштері де енеді.

Бұл теңдеу инерциялық санақ жүйесіне қатысты алынғандықтан, ол кез келген басқа инерциялық санақ жүйесінде де орындалады.

(3.13) –теңдеудің ең соңғы мүшесі *реактивті күш* деп аталады: $\mathbf{R} = (\mathrm{d}m/\mathrm{d}t)\mathbf{u}$. Реактивті күш берілген денеге қосылған (бөлінген) массаның әсерінен пайда болады. Егер масса қосылса, онда $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t > 0$ және вектор **Ru** вектордың бағытымен сәйкес; егер масса бөлінсе онда $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t < 0$ және вектор **R** вектор **u** ға қарама-қарсы бағытта болады.

Мещерский теңдеуі m − массасы тұрақты материалдық нүктелердің динамикалық негізгі теңдеуімен сәйкес: сол жағы − дененің массасы мен үдеудің көбейтіндісі; оң жағы − денеге әсер ететін күштермен реактивті күш. Алайда дененің массасы тұрақты болмай айнымалы болса, онда дифференциал астына массаны енгізуге болмайды, сондықтан теңдеудің сол жағын уақыт бойынша импульстің туындысы деп қарастыру мүмкін емес. Себебі $m\mathrm{d}\mathbf{v} \neq \mathrm{d}(m\mathbf{v})/\mathrm{d}t$.

Екі жеке жағдайға көңіл бөлейік.

1. Егер $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, денемен салыстырғанда масса жылдамсыздықпен қосылады немесе бөлінеді, онда $\mathbf{R} = 0$ және (3.13) теңдеудің түрі өзгереді:

$$m(t)\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}.3.14$$

мұндағы, $m(t)$ - t-уақытқа сай дененің массасы; бұл теңдеу, мысалы, құм төгіліп жатқан платформаның қозғалысын есептей алады. (3.7-есеп, п. 1.).

2. Егер $\boldsymbol{u} = -\mathbf{v}$ болса, онда осы таңдап алынған санақ жүйесінде қосылған немесе бөлініп шығып кеткен масса осы жүйеде қозғалмайтын болады, сонда (3.13) теңдеудің түрі келесідей өзгереді: $m(\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t) + (\mathrm{d}m/\mathrm{d}t)\mathbf{v} = F$ немесе $v = F$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}. \qquad (3.15)$$

Басқаша айтқанда, тек қана осы жағдайда **F** күшінің әсері массасы айнымалы дене импульсінің өзгерісін анықтай алады. Бұған мысал ретінде қозғалып бара жатқан платформаға қозғалмайтын бункерден құйылып жатқан массаны айтуға болады (3.7-есеп, п. 2 қара).

Мещерский теңдеулерін шешуге мысалдар қарастырайық.

Мысал. Ракета сыртқы күш әсерінсіз *K*-инерциялық жүйеде қозғалып келеді. Ракетамен салыстырғанда одан **u-**тұрақты жылдамдықпен газ атқылап шығып жатады.

Ракетаның m массасы мен оның $\mathbf{v}$ жылдамдығы арасындағы байланысты табу керек, егер бастапқы стартта оның массасы m_0 болса.
Бұл жағдай үшін $\mathbf{F} = 0$ мен (3.13) теңдеуінен келесі өрнек шығады:

$$\mathrm{d}\mathbf{v} = \mathbf{u}\mathrm{d}m/m.$$

Осы өрнекті бастапқы шарттарға сай интегралдап, келесі теңдеуді аламыз:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{u}\ln(m_0/m). \qquad (1)$$

мұндағы минус таңба $\mathbf{v}$-вектордың (ракета жылдамдығы) $\mathbf{u}$-векторға қарама-қарсы бағытта екенін көрсетеді. Осыдан ($\mathbf{u} = const$) ракета жылдамдығының отынның жану *уақытына* тәуелді емес екені көрініп тұр: $\mathbf{v}$ жылдамдық ракетаның бастапқы m_0 массасының соңғы m массасына қатынасымен анықталады.
Тағы да айта кету керек, егер ракетамен салыстырғанда отынның барлық массасы бірден $\mathbf{u}$ жылдамдықпен атқылап шығып кетсе, онда ракетаның жылдамдығы басқаша болар еді. Шынында да егер таңдалынып алынған инерциялық санақ жүйесінде ракета басында тыныштықта болса, онда барлық газды бірден атқылап шығарып тастағаннан кейін, соңында оның жылдамдығы $-\mathbf{v}$ болып, ракета-отын деген жүйе үшін импульстің сақталу заңы орындалады:

$$0 = m\mathbf{v} + (m_0 - m)(\mathbf{u} + \mathbf{v}).$$

мұндағы, $(\mathbf{u} + \mathbf{v})-$ осы санақ жүйесіне қатысты отынның жылдамдығы. Осыдан:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{u}(1 - m/m_0). \qquad (2)$$

Осы жағдай үшін ракетаның жылдамдығы алдыңғы жағдаймен салыстырғанда аздау болады, ол үшін m_0/m қатынастары бірдей болуы тиісті. Осы екі жағдайлар үшін олардың $\mathbf{v}-$ жылдамдықтары мен массаларының m_0/m қатынастарын салыстыру арқылы белгілі бір қорытындығы келу қиын емес. Бірінші жағдай үшін массалардың қатынасы өскен сайын газ массасы үнемі жоғалып отырады, ракетаның жылдамдығы шексіз ұлғаяды, ал газ бірден атқылап шығып кеткенде екінші жағдай үшін жылдамдық (2) теңдеуге сай өзінің шегіне қарай ұмтылады, яғни ол **u-*ға*** тең.

Есептер

3.1. Импульсі $\mathbf{p}(t)$ болатын бөлшек $\mathbf{F}(t)$ күштің әсерінен қозғалды, $\mathbf{a}$ және $\mathbf{b}$ – тұрақты векторлар болсын, әрі $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.
1) $\mathbf{p}(t) = \mathbf{a} + t(1 - \alpha t)\mathbf{b}$, мұндағы α – оң тұрақты шама, $\mathbf{F}(t)$ векторды $\mathbf{F} \perp \mathbf{p}$ болатын уақытта табу керек;
2) $\mathbf{F}(t) = \mathbf{a} + 2t\mathbf{b}$ және $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$, мұндағы $\mathbf{p}_0$–$\mathbf{a}$ векторға бағыты қарама-қарсы вектор, $\mathbf{p}$ –векторды $\mathbf{p}_0$ векторға қатысты 90°–қа бұрылғандағы t_0 уақытты табу керек.

Шығару жолы. **1.** $\mathbf{F} = \mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t = (1 - 2\alpha t)\mathbf{b}$ яғни $\mathbf{F}$ вектор әрқашан $\mathbf{a}$ векторға перпендикуляр. Демек, $\mathbf{F}$ векторы $\mathbf{p}$ векторға $\mathbf{p}(t)$ өрнегіндегі $\mathbf{b}$ вектордың коэффициенті нөлге айналатын кезде ғана перпендикуляр болады. Осыдан: $t(1 - \alpha t) = 0; t_1 = 0; t_2 = 1/\alpha$; $\mathbf{F}$ – вектордың сәйкес мәндері:

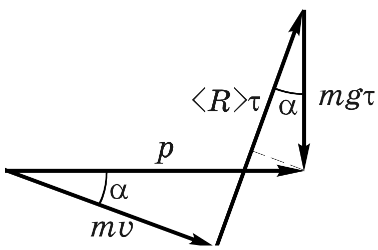
$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{F}_2 = -\mathbf{b}.$$

2. $\mathbf{p}$ – вектордың *dt* уақыт аралығындағы өсімшесі $d\mathbf{p} = \mathbf{F}dt$. Осы теңдеуді бастапқы шарттарды ескере отырып, интегралдаймыз:

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \int_0^t \mathbf{F}dt = \mathbf{a}t + \mathbf{b}t^2.$$

мұндағы есептің шарты бойынша $\mathbf{p}_0$ және $\mathbf{a}$ векторлары өзара қарама-қарсы. Олай болса, $at_0 = p_0$ тең болғанда $\mathbf{p}$ векторы $\mathbf{p}_0$ векторға t_0 сәтінде перпендикуляр болады. Осы кезде $\mathbf{p} = (p_0/a)^2\mathbf{b}$**.**

3.2. Массасы *m* зеңбірек горизонтпен α бұрыш жасайтын көлбеу жазықтықпен сырғанап келеді. Қарудың сырғанау жылдамдығы **v** болған кезде одан снаряд атылады, соның нәтижесінде қару тоқтап, горизонталь бағытта осы ұшып шыққан снаряд **p** импульсіне ие болады. Атылу ұзақтылығы τ болса. Көлбей жазықтық тарапынан болатын осы уақыт аралығында **R** реакция күшінің орташа мәнін табу керек.



3.6-сурет

Шығару жолы. Бұл жерде қару-жарақ жүйесі τ уақыт аралығында $\mathbf{p} - m\mathbf{v}$ болатын импульс өсімшесін алады. Жүйе импульсінің өзгерісі екі сыртқы күштің әсерінен туады: **R** реакция күші (ол көлбеу жазықтыққа перпендикуляр) мен m**g** ауырлық күші арқылы, сондықтан

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \langle\mathbf{R}\rangle\tau + m\mathbf{g}\tau.$$

мұндағы $\langle\mathbf{R}\rangle$–**R**- вектордың τ уақыттағы орташа мәні. Бұл қатынасты график түрінде берген ыңғайлы (3.6-сурет). Сурет арқылы іздеп отырған $\langle\mathbf{R}\rangle$ мәннің формуласын анықтауға болады:

$$\langle\mathbf{R}\rangle = (p\sin\alpha + mg\tau\cos\alpha)/\tau.$$

3.3. Импульс сақталу заңы. Әрбіреуінің массалары *M*-ге тең екі арба бірінен соң бірі инерция бойынша (үйкеліссіз) бірдей жылдамдықпен $\mathbf{v_0}$қозғалып келеді. Артқы арбада массасы *m*-ге тең адам отыр. Бір мезгілде адам өзінің отырған арбасымен салыстырғанда **u**-жылдамдықпен артқы арбадан кенет алдыңғы арбаға секіреді. Осы себепті алдыңғы арбаның жылдамдығы қалай өзгереді?

Шығару жолы. Адам ***1***-ші арбадан ***2***-ші арбаға кенет секіргенде жүйенің барлық импульсі өзгермейді, сондықтан келесі теңдеуді келтіруге болады:

$$(2M + m)\mathbf{v}_0 = M\mathbf{v}_2' + (M + m)\mathbf{v}_1'$$

мұндағы, $\mathbf{v}_1'$- мен $\mathbf{v}_2'$ – арбаның түпкі жылдамдықтары.

Сол сияқты импульс балансын адамы бар артқы арба үшін де жазамыз (адамның секіргенге дейінгі және секіргеннен кейінгі жағдайлары үшін):

$$(M+m)\mathbf{v}_0 = M\mathbf{v}_2' + m(\mathbf{v}_2' + \mathbf{u})$$

мұндағы, $(\mathbf{v}_2' + \mathbf{u})-$ жолдың бетімен салыстырғандағы секірген адамның жылдамдығы.

Осы екі теңдеуден төмендегі өрнек шығады:

$$\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_0 + \frac{mM}{(m+M)^2}\mathbf{u}$$

3.4. Тыныштықта тұрған массасы *M* арбаның шетінде әрбіреуінің массалары m-ге тең екі адам түрегеліп тұр. Егер арбаға қатысты горизонталь жылдамдықпен екі адам да арбадан секіретін болса: 1) бірге секірсе; 2) бірінен соң бірі секірсе, онда осы шартты орындай отырып,үйкелісті ескермей,адамдар секіріп түскеннен кейінгі арбаның жылдамдығын табу керек. Осы екі жағдайдың қайсысында арбаның жылдамдығы артады және артса неше есе?

Шығару жолы. **1**. Импульс сақталу заңы бойынша:

$$M\mathbf{v}' + 2m(\mathbf{v}' + \mathbf{u}) = 0.$$

мұндағы, $\mathbf{v}'$- арбаның жылдамдығы, $(\mathbf{v}' + \mathbf{u})-$ адамның жылдамдығы (екі жылдамдық та жолдың бетіне қатысты). Осыдан:

$$\mathbf{v}' = -\frac{2m}{M+2m}\mathbf{u}$$

2. Бұл шарт үшін екі теңдеуді келтіруге болады. Бір адам секірген кездегі теңдеудің түрі:

$$(M+m)\mathbf{v}' + m(\mathbf{v}' + \mathbf{u}) = 0.$$

мұндағы, $\mathbf{v}'$- екінші адам қалғандағы арбаның жылдамдығы. Енді екінші адам секірген жағдай үшін теңдеудің түрі:

$$(M+m)\mathbf{v}' = M\mathbf{v}'' + m(\mathbf{v}'' + \mathbf{u}).$$

мұндағы, $\mathbf{v}''$- бос арбаның жылдамдығы.

Соңғы екі теңдеуден $\mathbf{v}'$-ны шегеріп тастап келесі өрнекті аламыз:

$$\mathbf{v}'' = \frac{(2M+3m)m}{(M+m)(M+2m)}\mathbf{u}$$

Сонымен екі жағдайлар үшін олардың жылдамдықтарының қатынасы келесі өрнекпен сипатталады:

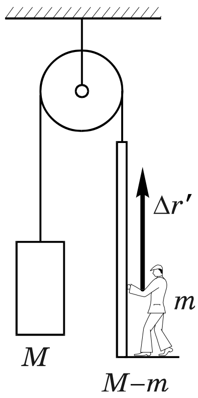
$$\frac{\mathrm{v}''}{\mathrm{v}'} = 1 + \frac{m}{2(M+m)} > 1.$$

3.5 Масса центрі. Блок арқылы жіп асылған. 3.7-суретте көрсетілгендей оның бір ұшында *A* адамы бар баспалдақ, ал екінші ұшын массасы *M-ге* тең жүк теңгеріп тұр. Массасы *m* болатын адам баспалдаққа қатысты $\Delta\mathbf{r}'$ орын ауыстырады да, сосын тоқтайды.

Блоктың және жіптің массасын, блоктың өсіндегі үйкелісті ескермей, осы жүйенің инерция центрінің орын ауыстыруын табу керек.

Шығару жолы. Басында жүйенің барлық денелері тыныштықта болды, сондықтан денелер импульстерінің өсімшесі импульстердің өздеріне тең. Блок өстерімен байланысқан санақ жүйелерінде жүйе массалар центрін радиус-векторлар сипаттайды:

$$\mathbf{r}_C = [M\mathbf{r}_1 + (M - m)\mathbf{r}_2 + m\mathbf{r}_3]/2M.$$



3.7-сурет

мұндағы, $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ – массалар центрін теңестіріп тұратын жүктің, адамның және баспалдақтың радиус-векторлары – бәрі де таңдап алынған санақ жүйесіндегі қайсыбір O нүктесіне қатысты алынады. Осыдан масса центрінің орын ауыстыруы келесі өрнекпен сипатталады:

$$\Delta\mathbf{r}_C = [M\Delta\mathbf{r}_1 + (M - m)\Delta\mathbf{r}_2 + m\Delta\mathbf{r}_3]/2M$$

мұндағы, $\Delta\mathbf{r}_1, \Delta\mathbf{r}_2, \Delta\mathbf{r}_3 -$ жүкті, адамды және баспалдақты теңестірудегі орын ауыстыру. Енді келесі шарттарды орындай отырып, төменгі теңдеулерді аламыз:

$$\Delta\mathbf{r}_1 = -\Delta\mathbf{r}_2, \Delta\mathbf{r}_3 = \Delta\mathbf{r}_2 + \Delta\mathbf{r}'.$$

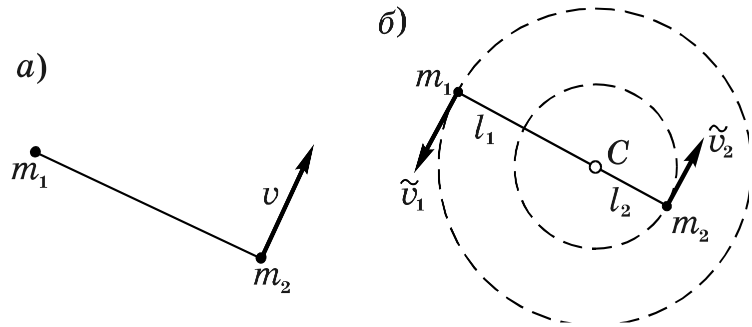
Нәтижесінде келесі өрнек шығады:

$$\Delta\mathbf{r}_C = (m/2M)\Delta\mathbf{r}'.$$

Сонымен барлық жүйенің масса центрінің орын ауыстыруының бағыты баспалдаққа қатысты адамның орын ауыстыруына сәйкес, яғни алынған нәтиже адамның қозғалыс сипатынан тәуелсіз.

Ескерту. Сырттай қарағанда берілген жүйе тұйық тәрізді, яғни барлық сыртқы күштерді теңгеретін қорытынды күш нөлге тең деген сөз. Және жүйенің массалар центрі орнын ауыстырмауы тиісті. Алайда іс жүзінде жағдай басқаша туады. Адам жоғары көтеріле бастағанда төмен қарай бағытталған баспалдаққа қосымша күш әсер етеді. Осыдан жіптің керілу күші сыртқы күш әсерлерін өсіреді, сыртқы күшке аспаға қатысты жүйеге әсер ететін күш жатады. Осы сыртқы күш ауырлық күштің қосындысынан артық болып кетеді. Сондықтан барлық қорытынды сыртқы күш жоғары қарай бағытталады – осы себеппен барлық жүйенің масса центрі жоғары қарай ауысады.

3.6. ***Ц*-жүйе.** Екі кішігірім шайба массалары m_1 және m_2 бір-бірімен ұзындығы l-ге тең жіппен байланысқан және тегіс көлбеу жазықтықпен қозғалады. Белгілі бір сәтте бір шайбаның жылдамдығы нөлге, ал екіншісінің $\boldsymbol{v}$-ға тең және оның бағыты жіпке перпендикуляр болады (3.8, а-сурет). Қозғалыс барысында жіптің керілу күшін табу керек.



3.8-сурет

Шығару жолы. Біріншіден масса центрінің жүйесіне, яғни *Ц-жүйе*ге өту керек. Мұндай санақ жүйеде шайбалар массасы C центрді айнала шеңбер бойымен қозғалады (3.8.б-сурет) сондықтан іздеп отырған күшіміз тең:

$$F = m_1\tilde{v}_1^2/l_1 \,. \tag{1}$$

мұндағы, m_1- массасы; $\tilde{v}_1$- шайбаның жылдамдығы; l_1- шеңбердің шайба айналып қозғалатын радиусы.

Тура осындай шарттарды екінші жағдай үшін де келтіруге болады. Енді l_1, мен $\tilde{v}_1$ мәндерін табайық. Мына керекті қатынастар $l_1/l_2 = m_2/m_1$ алдыңғы мысалдардан белгілі. Сонымен қатар $l_1 + l_2 = l$. Осы екі қатынастардан төменгі өрнек шығады:

$$l_1 = lm_2/(m_1 + m_2). \tag{2}$$

жылдамдық $\tilde{\mathbf{v}}' = \mathbf{v}_1 - \mathbf{V}_C$. Біздің жағдайымыз үшін $\mathbf{v}_1 = 0$ және $\mathbf{V}_C = m_2\mathbf{v}/(m_1 + m_{2)}$. Сондықтан $\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{1}$ векторының модулі:

$$\tilde{v}_1 = m_2 v/(m_1 + m_2). \tag{3}$$

Осы шама шайбаның қозғалысы барысында өзгеріссіз қалады. Енді (1) теңдеуге (2) мен (3)-ші теңдеулерді алмастырудан кейін келесі теңдеуді аламыз:

$$F = \mu v^2/l, \qquad \mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2).$$

3.7. Массасы айнымалы дененің қозғалысы. Платформа $\boldsymbol{t} = 0$ болғанда тұрақты $\mathbf{F}$ тарту күшінің әсерімен қозғала бастайды. Өстердегі үйкелісті ескермей, төменде келтірілген екі шарт үшін платформа жылдамдығының уақытқа тәуелділігін $\mathbf{v}(t)$ табу керек:

1) құммен бірге тиелген платформаның массасы $\mu(\text{кг/с})t = 0$ болғанда m_0-ге тең болады,платформаның түбіндегі тесіктен құм тұрақты жылдамдықпен төгіледі;

2) массасы m_0 болатын платформаға $t = 0$уақытта қозғалмайтын бункерден тиелу жылдамдығы тұрақты және $\mu(\text{кг/с})$– ға тең болатындай түрде құм тиеліп жатады.

Шығару жолы. **1**. Реактивті күш нөлге тең болғанда, Мещерский теңдеуі (3.13) келесі түрде беріледі: $(m_0 - \mu t)\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t = \mathbf{F}$, осыдан:

$$\mathrm{d}\mathbf{v} = \mathbf{F}\mathrm{d}t/(m_0 - \mu t).$$

Бастапқы шарттарға байланысты осы теңдеуді интегралдаймыз:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{F}}{\mu}\ln\frac{m_0}{m_0-\mu t}.$$

2. Реактивтік күштің горизонталь құраушысы $\mathbf{R} = \mu(-\mathbf{v})$, мұндағы $\mathbf{v}$ – платформаның жылдамдығы. Сондықтан Мещерскийдің (3.13) теңдеуі (3.15) түріне келтіріледі немесе:

$$\mathrm{d}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}\mathrm{d}t.$$

Бастапқы шарттарды ескере отырып, осы теңдеуді интегралдаймыз:

$$m\mathbf{v} = \mathbf{F}t.$$

мұндағы, $m = m_0 + \mu t$. Осыдан:

$$\mathbf{v} = \mathbf{F}t/(m_0 + \mu t).$$

Екі шарт үшін де алынған өрнектер іс жүзінде тек платформаның жүгін түсіргенде немесе тиегенде ғана орын алады.

3.8. Ауада тұрақты биіктіктегі ракетадан **u**-жылдамдықпен төмен қарай газ ағыны атқылап тұр. Табу керек:

1) егер отынның бастапқы массасы ракетаның (отынсыз) өз массасының η-бөлігіндей массасына тең болса, онда ракета осы биіктікте қанша уақыт қала алады?

2) егер отынмен бірге зымыранның бастапқы массасы m_0-ге тең болса, онда осы тұрақты биіктікте қалу үшін зымыран газдың қандай μt массасын әр минут сайын лақтырып тастап отыруы керек?

Шығару жолы. **1.** Осы жағдай үшін $\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t = 0$ және (3.13) теңдеуі келесі түрге өзгереді:

$$m\mathbf{g} + (\mathrm{d}m/\mathrm{d}t)\mathbf{u} = 0.$$

Немесе айнымалыларды бөліп тастағаннан кейін:

$$dm/m = -(\mathrm{g}/u)/\mathrm{d}t, \qquad (1)$$

Осы теңдеуді интегралдап:

$$\ln(m/m_0) = -(\mathrm{g}/u)t, \qquad (2)$$

Осыдан

$$t = (u/\mathrm{g})\ln(m_0/m) = (u/\mathrm{g})\ln(1+\eta).$$

Мұнда $\eta = (\mathrm{m}_0 - \mathrm{m})/\mathrm{m}$– болатыны ескерілген.

2. Жоғарыда келтірілген (1) теңдеуден төменгі жағдай туады:

$$\mu = -\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = (\mathrm{g}/u)m.$$

m- ді (2)–ші теңдеуден табуға болады: $m = m_0\mathrm{e}^{-\mathrm{g}t/\mathrm{u}}$. Нәтижесінде

$$\mu = (\mathrm{g}/u)m_0\mathrm{e}^{-\mathrm{g}t/\mathrm{u}}.$$

Берілген уақыт аралығы үшін осы теңдеуге сәйкес уақытқа байланысты μ өзгеріп отырады.

3.9. Ракета біртекті ауырлық өрісінде нөлдік бастапқы жылдамдықпен вертикаль тік көтеріліп келеді. Ракетаның отынмен бірге ең алғашқы массасы-m_0 тең. Атқылап жатқан газ ағынының жылдамдығы ракетамен салыстырғанда u-ға тең. Ауаның кедергісін елеусіз қалдырамыз. Ракетаның жылдамдығын $\boldsymbol{v}$ оның массасы m мен көтерілу уақытына тәуелділігін табу керек.

Шығару жолы. Ракета үшін оның (3.13) қозғалыс теңдеуін жазамыз: – оң бағытпен жоғары қарай вертикаль өске осы теңдеудің проекциясы келесі түрде өрнектеледі:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -m\mathrm{g} - u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,.$$

Теңдеуді қайтадан жазамыз:

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v + \mathrm{g}t) = -u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,,$$

осыдан

$$\mathrm{d}(v + \mathrm{g}t) = -u\mathrm{d}m/\mathrm{d}.$$

Соңғы теңдеуді интегралдағаннан кейін бастапқы шарттарды ескере отырып келесі өрнекті алуға болады:

$$v + \mathrm{g}t = -u\ln(m/m_0).$$

Сонымен ракетаның іздеп отырған жылдамдығы төменгі өрнек арқылы табылады:

$$v = u\ln(m/m_0) - \mathrm{g}t.$$

3.10. Массасы m_0 зымыран сыртқы күш өрісінің әсерінсіз тұрақты $\mathbf{v}_0$-жылдамдықпен ұшады. Қозғалыстың бағытын өзгерту үшін реактивті қозғаушы (двигатель) қосылған. Нәтижесінде зымыранмен салыстырғанда $\mathbf{u}$-ға тең тұрақты жылдамдықпен зымыраннан газ ағыны атқылай бастайды. Және $\mathbf{u}$ векторы зымыранның қозғалыс бағытына үнемі перпендикуляр. Қозғалтқыш өз жұмысын тоқтатқаннан кейін зымыранның массасы m-ге тең болады. Қозғалтқыш қосылғаннан бастап зымыранның қозғалыс бағытының бұрылысы қандай бұрышқа өзгереді?

Шығару жолы. $\mathrm{d}t$ уақыт аралығындағы зымыран жылдамдығы векторының өсімшесін табайық. (3.13) теңдеудің екі жағын да $\mathrm{d}t$-ға көбейтіп, және $\mathbf{F} = 0$ тең екендігін ескере отырып, келесі өрнекті аламыз:

$$\mathrm{d}\mathbf{v} = \mathbf{u}\mathrm{d}m/m,$$

мұндағы, $\mathrm{d}m < 0$. Вектор- $\mathbf{u}$ үнемі зымыран жылдамдығы $\mathbf{v}$- векторға перпендикуляр болғандықтан $\mathbf{v}$ векторының модулі өзгермейді де, үнемі өзінің алғашқы мәніне тең болады: $|\mathbf{v}| = v_0$. Осыдан $\mathbf{v}$ векторының dα- бұрылу бұрышы $\mathrm{d}t$ уақыт аралығында келесі теңдеумен анықталады:

$$\mathrm{d}\alpha = |\mathrm{d}\mathbf{v}|/v_0 = (u/v_0)|\mathrm{d}m/m|,$$

Осы теңдеуді интегралдап, келесі өрнекті табамыз:

$$\alpha = (u/v_0)\ln(m_0/m).$$

4-тарау

Энергия сақталу заңы

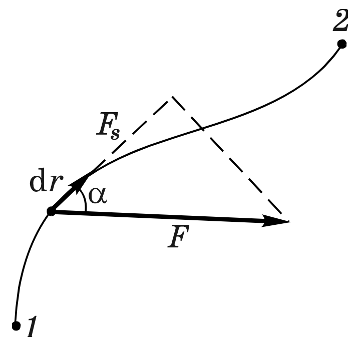
§ 4.1. Жұмыс пен қуат

Жұмыс

F күштің әсерінен қандай да бір бөлшек 1 - 2 траектория бойымен орын ауыстыратын болсын (4.1-сурет). Жалпы алғанда **F** күші бөлшектің қозғалысы кезінде модулі жағынан да, бағыты жағынан да өзгеруі мүмкін. Күшті тұрақты деп есептеп, d**r** қарапайым орын ауыстыруды қарастырайық.

d**r** – орын ауыстырудағы **F** күштің әсерін скаляр көбейтіндіге тең шамамен сипаттап, оны орын ауыстырудағы **F** күштің қарапайым жұмысы деп атайды. Оны басқаша да өрнектеуге болады:

$$\mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{r} = F\cos\alpha\, ds = F_s ds\ .$$



4.1-сурет

Мұндағы, α - **F** және d**r** векторларының арасындағы бұрыш; $ds = $ d**r**–қарапайым жол; F_s дегеніміз **F**-вектордың d**r** векторға проекциясы (4.1-сурет). Сонымен, **F** – күштің d**r** – орын ауыстырудағы қарапайым жұмысы келесі өрнекпен анықталады:

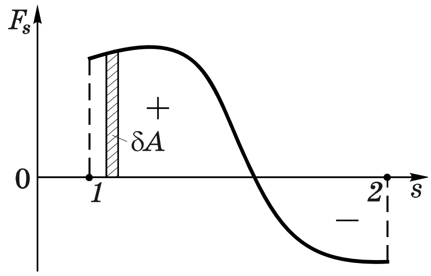
$$\delta A = \mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{r} = F_s ds. \qquad (4.1)$$

δA – алгебралық шама: **F** және d**r** векторлардың арасындағы бұрышқа тәуелді түрде (**F** вектордың d**r** векторға проекциясының F_s таңбасына тәуелді түрде) ол оң да, теріс те, тіпті нөл де бола алады. (**F**d**r** нөл болса, яғни $F_s = 0$).

(4.1) өрнекті жолдың 1 нүктеден 2 нүктеге дейін барлық қарапайым бөліктер бойынша қосындылап (интегралдап), **F** – күштің осы жол бойындағы жұмысын табамыз:

$$A = \int_1^2 \mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_1^2 F_s\, \mathrm{d}s. \qquad (4.2)$$

Осы жерде өте бір маңызды жағдайды айта кету керек: *(4.2) формуланы тек қана бөлшектер үшін ғана емес сонымен қатар кез келген денелер* *немесе денелер жүйелері үшін де пайдалануға қолайлы.* Ал **F** күштің жұмсалуына байланысты ds немесе d$\mathbf{r}$ деп *нүктенің орын ауыстыруын* айтады. Осы жағдайларды елемеу көбінесе қате нәтижелерге әкеп соқтырады. (4.2) өрнекке геометриялық мағына беруге болады. F_s графигін бөлшектің траекториядағы орнының функциясы ретінде қарастырайық. Бұл графиктің түрі 4.2-суретте келтірілген. Осы суреттен δA қарапайым жұмыс, сан мәні жағынан шималанған жолақтың ауданына тең екені, ал 1 нүктедеп 2 нүктеге дейін жол бойындағы жұмыс – A қисықпен, 1 және 2 ординаталармен, ал s- өсімен шектелген фигураның ауданына тең екені көрініп тұр. Осы кезде s өсінен жоғарығы фигураның ауданы оң таңбамен алынады (ол оң жұмысқа сәйкес келеді), s өсінен төменгі фигураның ауданы минус таңбамен алынады (ол теріс жұмысқа сәйкес келеді).



4.2-сурет

Серпімді күштің жұмысы

Серпімді күштің жұмысы келесі формуламен анықталады:

$$\mathbf{F} = -\varkappa\mathbf{r}.$$

мұндағы, **r** – M бөлшектің O нүктесіне қатысты радиус-векторы (4.3a). Осы күш әсер етіп түрған M бөлшегін 1 нүктеден 2 нүктеге кез келген түрде орын ауыстырайық. Әуелі $\Delta\mathbf{r}$ қарапайым орын ауыстыру кезіндегі **F** күштің қарапайым жұмысын анықтайық

$$\delta A = \mathbf{F}d\mathbf{r} = -\varkappa\mathbf{r}d\mathbf{r}.$$

$\mathbf{r}\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{r}(\boldsymbol{dr})_{\boldsymbol{r}}$ – бұл сқалярлық көбейтінді**,**мұндағы d**r** вектордың **r** – векторға түсірілген проекциясы -$(\boldsymbol{dr})_{\boldsymbol{r}}$деп белгіленеді. Бұл проекция **r** вектордың d**r** өсімшесінің модуліне теңболады. Сондықтан $\mathbf{r}\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{r}(\boldsymbol{dr})$және

$$\delta A = -\varkappa\mathbf{r}d\mathbf{r} = -\mathbf{d}(\varkappa r^2/2).$$

Енді берілген күштің түгел жол бойындағы жұмысын есептеп шығарайық, яғни соңғы теңдікті 1 нүктеден 2 нүктеге дейін интегралдаймыз.

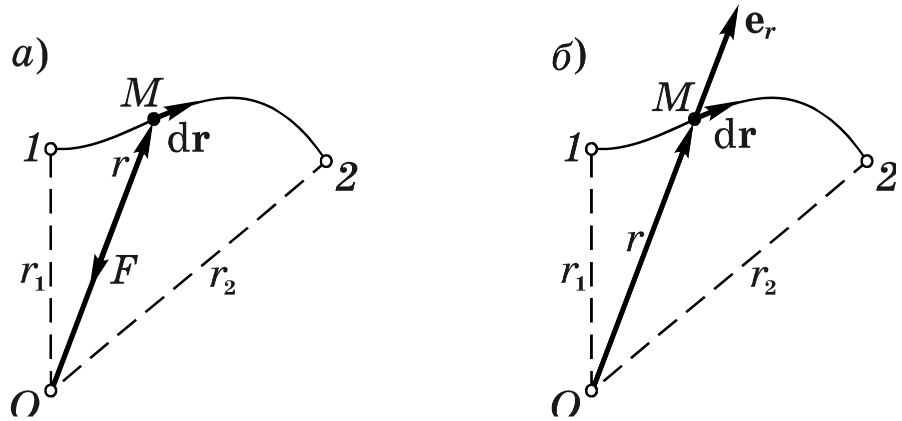
$$A = -\int_1^2 \mathrm{d}\left(\frac{\varkappa r^2}{2}\right) = \frac{\varkappa r_1^2}{2} - \frac{\varkappa r_1^2}{2}. \quad (4.3)$$

Гравитациялық (немесе кулондық) күштің жұмысы

O нүктесінде қозғалмайтын күш центрі орналасқан. Күш центрі дегеніміз – **F** күшімен *M* бөлшекке әсер ететін материалдық нүкте. Осы материалдық нүкте үшін гравитциялық және кулондық күштердің формуласын келесі түрде келтіруге болады: (4.3, б-сурет)

$$\mathbf{F} = (\alpha/r^2)e_r,$$

мұндағы: α – гравитациялық өзара әрекеттесу $(-\gamma m_{1m_2})$ немесе (kq_1q_2); r– *O* нүктесінен *M* бөлшекке дейінгі арақашықтық; e_r – **r** – радиус-векторының орты;



4.3-сурет

Әуелі осы **F** – күштің $d\mathbf{r}$ – орын ауыстыру кездегі қарапайым жұмысын есептептейік.

$$\delta A = \mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{r} = (\alpha/r^2)\mathbf{e}_\mathbf{r}\mathrm{d}\mathbf{r}$$

$\mathbf{e}_r\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}r$ скалярлық көбейтінді, яғни **r**векторы модулінің өсімшесі, сондықтан**:**

$$\delta A = \frac{\alpha dr}{r^2} = -d(\alpha/r)$$

M бөлшекті 1 нүктеден 2 нүктеге кез келген жолмен орын ауыстырған кезде **F** гравитаңиялық (кулондың) күштің атқаратын жұмысын табайық.

$$A = -\int_1^2 d\left(\frac{\alpha}{r}\right) = \frac{\alpha}{r_1} - \frac{\alpha}{r_2}. \quad (4.4)$$

Біртекті ауырлық күшінің жұмыс

Бұл күшті $\mathbf{F} = -m\mathrm{g}\mathbf{k}$ түрінде жазамыз; мұндағы $\mathbf{k}$ вертикаль Z өстің орты, оның оң бағыты жоғары қарай бағытталған (4.4-сурет). Ауырлық күшінің d$\mathbf{r}$ орын ауыстырудағы қарапайым жұмысы:

$$\delta A = \mathbf{F}d\mathbf{r} - m\mathrm{g}\mathbf{k}d\mathbf{r}$$

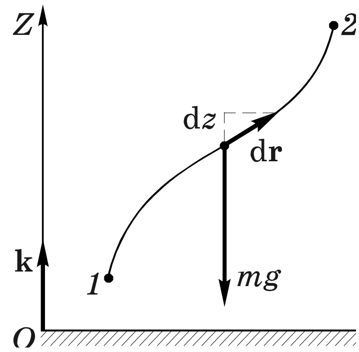
$\mathbf{k}\mathrm{d}\mathbf{r} = (d\mathbf{r})_k$- скалярлық көбейтінді, мұндағы $= (d\mathbf{r})_k$- d$\mathbf{r}$ векторының $\mathbf{k}$ ортқа проекциясы, ол z координаттың dz өсімшесіне тең. Сондыктан $\mathbf{k}\mathrm{d}\mathbf{r} = dz$ және

$$\delta A = -mgdz = -d(mgz).$$

Сонда 1 нүктеден 2 нүктеге дейін жол аралығындағы берілген күштің жұмысы:

$$\boldsymbol{A} = -\int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} \mathrm{d(mgz)} = \mathrm{mg}(\mathrm{z}_1 - \mathrm{z}_2) \qquad (4.5)$$

Осы күштердің жұмыстары 1 және 2 нүктелер арасындағы жолдың түріне тәуелсіз ол тек осы нүктелердің орындарына ғана тәуелді болатындығы 4.4-суретте және (4.3) пен (4.5) формулалары арқылы көрнекті сипатталады.



4.4-сурет

Берілген күштердің бұл қасиеті барлық күштерге тән емес. Мысалы, үйкеліс күшінің мұндай қасиеті жоқ: бұл күштің жұмысы нүктелердің бастапқы және ақырғы орындарына ғана тәуелді емес, сонымен қатар олардың арасындағы жолдың түріне де тәуелді болады.

Осы кезге дейін бір күштің ғана жұмысы жайлы сөз болып келді Ал егер бөлшектің козғалысы кезінде оған бірнеше күш әсер етсе, онда корытынды $\mathbf{F}$ күштің кандай да бір орын ауыстыру кезіндегі атқаратын жұмыстарының әрбір күшінің жеке-жеке осы орын ауыстыру кезіндегі атқаратын жұмыстарының алгебралық қосындысына тең болатындығына жеңіл көз жеткізуге болады. Шындығында, да

$$A = \int (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots)\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int \mathbf{F}_1\,\mathrm{d}\mathbf{r} + \int \mathbf{F}_2\,\mathrm{d}\mathbf{r} + \cdots = A_1 + A_2 + \cdots \qquad (4.6)$$

СИ жүйесінде жұмыстың өлшем бірлігі ретінде джоуль (Дж) алынады.

1Дж – 1 м жолда (нүктенің орын ауыстыруында) 1Н күш жасайтын жұмыс (1Дж=1Н·м).

Қуат

Жұмыспен тығыз байланысты қуат түсінігіне де тоқтала кетейік. Қуат дегеніміз аныктама бойынша күштің бірлік уақытта атқаратын жұмысы. Егер **F** күш dt уақыт аралығында $\mathbf{F}d\mathbf{r}$ жұмыс атқаратын болса, онда бұл күштің осы уақыт мезгілінде шығаратын қуаты $P = \mathbf{F}\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ екендігін ескеретін болсақ, онда

$$\boxed{P = \mathbf{Fv}} \tag{4.7}$$

Сөйтіп, **F** күштің шығаратын қуаты күш векторының осы күштің түсірілу нүктесінің жылдамдық векторына скаляр көбейтіндісіне тең. Көріп отырғанымыздай, жұмыс та, қуат та алгебралық шамалар.

F күштің қуатын біле отырып, осы күштің t уақыт аралығында атқаратын жұмысын да есептеп шығаруға болады. Шынында да, (4.2)-теңдеудегі интеграл астындағы өрнекті $\mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{Fv}\mathrm{d}t = P\mathrm{d}t$ деп алсақ, онда

$$\boldsymbol{A} = \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} P dt$$

Қуаттың өлшем бірлігі ретінде СИ жүйесінде Ватт алынады, ол джоуль секундқа тең (Дж/с).

Қорытындысында, бір маңызды жағдайға көңіл бөлген жөн. Жұмыс немесе қуат туралы сөз қозғағанда әрбір нақты жағдай үшін ең маңыздысы жұмысты жасатып тұрған күш немесе күштердің әсері қандай болғанын шешетін сұрақ жатады және оны нақты, толық қадағалап қарастырған жөн. Егер осы жағдайларды ескермесе көптеген қиыншылықтар тууы мүмкін.

§ 4.2. Консервативті күштер. Потенциалдық энергия

Консервативті күш

Консерватизм – латынша conservo – сақтаймын, қорғаймын деген ұғымды білдіреді.

Кеңістікте орналасқан әрбір нүктеге қандай да болмасын бір күш әсер етсе, онда бөлшектер осы өріс күшінде орналасты деп айтуға болады. Мысалы, бөлшек ауырлық күші, серпімді күш, кедергі күштер (сұйық немесе газ ағынында) және т.б. күштер өрісінде орналасуы мүмкін.

Уақыт бойынша тұрақты болатын өрісті *стационар өріс* деп атайды. Бір санақ жүйесінде тұрақты болып саналатын стационар өріс басқа санақ жүйесінде стационар емес болуы мүмкін. Стационарлық күш өрісінде бөлшекке әсер ететін күш тек оның орнына ғана тәуелді бола алады.

Жалпы алғанда, бөлшекті 1-нүктеден 2-нүктеге алып өткенде өріс күштерінің атқаратын жұмысы жолдың пішініне тәуелді. Сонымен қатар стационар күш өрістерінің ішінде бөлшектердің орын ауыстыруы кезінде атқарылатын жұмыс 1- және 2-нүктелерінің арасындағы жолдың түріне тәуелсіз болатын жағдайлары да кездеседі. Осындай қасиеттермен сипатталатын күштерді *консервативті* деп атайды.

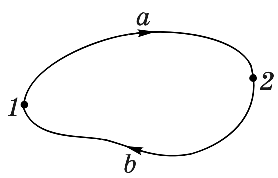
Консервативті күштердің осындай қасиетін басқаша: *егер стационарлық жағдайларда кез келген тұйықталған жол үшін олардың атқаратын жұмысы нөлге тең болса, өріс күштері консервативті деп келтіруге болады.*

Осындай тұжырымға көз жеткізу үшін кез келген тұйықталған контурды екі бөлікке бөлейік: *1a2* және 2*b1* (4.5-сурет). Сонда тұйықталған жол үшін жұмыс тең болады:

$$A = A_{1a2} + A_{2b1}$$

Осы себепті $A_{2b1} = -A_{1b2}$ өрнегін келтіруге болады, сондықтан:

$$A = A_{1a2} - A_{1b2}$$



4.5-сурет

Біздің жағдайымыз үшін жұмыс жолдың түріне тәуелсіз болғандықтан, яғни: $A = A_{1a2} - A_{1b2}$, осының нәтижесінде жұмыс кез келген тұйықталған жолда нөлге тең болғаны:

$$A = 0$$

Консервативті күштерге жатпайтын күштерді *консервативті емес* деп атайды. Осындай *консервативті емес* күштерге кедергі және үйкеліс күштері жатады. Осы күштердің жұмыстары бөлшектердің жүрген жолы мен олардың бастапқы және соңғы орындарына тәуелді. Сонымен өріс күштерінің кез келген тұйықталған жолдағы жұмысының нөлге тең болуы жұмыстың жолдың пішініне тәуелсіз болуының қажетті және жеткілікті шарты болып табылады және оны кез келген потенциалдық өрістің ерекшелік белгісі деп санауға болады.

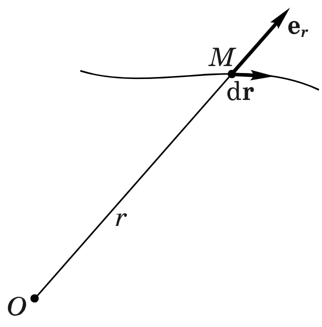
Центрлік күштердің өрісі

Кез келген күш өрісі нақтылы денелердің әсерімен туады. Осындай өрістегі *M* бөлшекке әсер ететін күш осы бөлшектің берілген денелермен өзара әрекеттесуінен туады. Өзара әрекеттесетін бөлшектердің арақашықтықтарына ғана тәуелді болатын және осы бөлшектерді қосып тұрған түзудің бойымен бағытталған күштер *центрлік* күштер деп аталады. Мұндай күштерге мысал ретінде гравитациялық, кулондық және серпімді күштерді алуға болады.

M бөлшекке *O* бөлшек тарапынан әсер ететін центрлік күшті түрінде өрнектеуге болады:

$$\mathbf{F} = f(r)e_r \qquad (4.8)$$

мұндағы, f(r) – бөлшектердің r – арақашықтығына ғана тәуелді болатын функция; e_r - *M* бөлшегінің радиус-векторының *O* бөлшекке қатысты бағытын беретін бірлік вектор (4.6-сурет).



4.6-сурет

Центрлік күштер консервативті күштерге жатады. Бұл тұжырымды дәлелдеу үшін қозғалмайтын *O* бөлшектің әсерінен пайда болатын центрлік күштің жұмысын табайық. d$\mathbf{r}$ орын ауыстырудағы (4.8) күштің элементар жұмысы $\delta A = \mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{r} = f(r)e_r\mathrm{d}\mathbf{r}$. d$\mathbf{r}$–векторДЫҢ e_r–векторға немесе (4.6-сурет) сәйкес $\mathbf{r}$ – радиус-векторға проекциясы $e_r\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{dr}$ болғандықтан, элементар жұмыс үшін келесі өрнек $\delta A = f(r)\mathrm{d}\mathbf{r}$ шығады. 1-нүктеден 2-нүктеге дейінгі кез келген жолдағы осы күштің жұмысы:

$$A_{12} = \int_1^2 f(r)\mathrm{d}r$$

Алынған өрнек тек $f(r)$ функцияның түріне ғана, яғни өзара әрекеттесу сипатымен қатар *M* және *O* бөлшектерінің арасындағы r_1– бастапқы және r_2 – ақырғы арақашықтықтарына ғана тәуелді. Жолдың түріне ол ешбір тәуелсіз. Олай болса, қарастырылып отырған күштік *өріс потенциалды.*

Әрбіреуі центрлік болып табылатын F_1, F_2 ...күштермен *M* бөлшекке әсер ететін алынған нәтижені тыныштықтағы бөлшектер шоғыры тудыратын стационар күш өрісіне жалпылайық. *M* бөлшегі бір орыннан екінші орынға ауысқандағы атқарған қорытқы күштің жұмысы әрбір жеке күштер жұмыстарының алгебралық сомасына тең. Әрбір жеке күштердің жұмыстары жолдың түріне тәуелсіз болғандықтан қорытқы күштің жұмысы да жол пішініне тәуелсіз.

Қорытынды: осындай қасиетпен сипатталғандықтан, центрлік күштер консервативті күштер болып саналады.

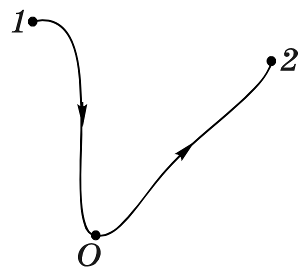
Өрістегі бөлшектің потенциалдық энергиясы

Стационарлық өрісте консервативті күштердің жұмыстары бөлшектердің бастапқы және ақырғы орындарына ғана тәуелді болатындықтан енді потенциалдық энергия деген маңызды түсінікті енгізу мүмкіндігі туады.

Консервативті күштердің стационар өрісінде бөлшек түрлеше P_1 нүктелерден бекітілген O нүктеге тасымалдансын. Өріс күштерінің жұмысы жолдың түріне тәуелсіз болатындықтан, ол енді тек P нүктенің орнына ғана тәуелділігімен сипатталады (О нүкте бекітілген). Бұл дегеніміз, өріс күшінің A-жұмысы P нүктесінің **r**-радиус-векторының қайсыбір функциясы болып табылады. Осы функцияны $U(\mathbf{r})$ деп белгілеп, жазуға болады:

$$A_{po} = \int_P^o \mathbf{F}\,\mathrm{d}\,\mathbf{r} = U(\mathbf{r}) \tag{4.9}$$

$U(\mathbf{r})$**-**функцияны бөлшектің берілген өрістегі *потенциалдық энергиясы* деп атайды. Енді бөлшекті 1-нүктеден 2-нүктеге алып өткенде атқарылатын өріс күштерінің жұмысын есептеп шығарайық (4.7-сурет).



4.7-сурет

Жұмыс жолға тәуелсіз болатындықтан, жолды O нүктесі арқылы өтетіндей етіп алайық. Сонда $1O2$ жолдағы жұмысты:

$$A_{12} = A_{1O} + A_{O2} = A_{1O} - A_{2O},$$

немесе (4.9) ескерсек, онда:

$$\boxed{A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F}\,\mathrm{d}\,\mathbf{r} = U_1 - U_2} \tag{4.10}$$

Оң жақта тұрған өрнек потенциалдық энергияның кемуін көрсетеді: яғни жолдың бастапқы және ақырғы нүктелеріндегі бөлшектің потенциалдық энергиясы мәндерінің айырымын көрсетеді.

Сонымен, *өріс күштерінің 1-2-жолдағы жұмысы бөлшектің берілген өрістегі потенциалдық энергиясының кемуіне тең болады*.

O нүктеде орналасқан бөлшекке алдынала потенциалдық энергияның кез келген мәнін беруге болатындығы анық. Бұл жұмысты есептеу өрістің екі нүктедегі потенциалдық энергияның абсолют шамасын емес тек олардың айырымын ғана анықтауға мүмкіндік береді. Бірақ қандай да бір нүктенің потенциалдық энергиясы нақты анықталған болса, онда өрістің барлық қалған нүктелеріндегі оның мәні (4.10) формула арқылы бірмәнділікпен анықталады.

(4.10) өрнек консервативті күштердің кез келген стационарлық өрісі үшін $U(\mathbf{r})$ шамасын табуға мүмкіндік береді. Бұл үшін екі нүктенің арасындағы кез келген жол бойында өріс күштерінің атқаратын жұмысын есептеп шығарып, оны қайсыбір функцияның кемуі түрінде анықтау керек, міне, осы функция потенциалдық энергия $U(\mathbf{r})$ болып табылады.

Серпімді және гравитациялық кулондық күштер өрістерінде, сонымен қатар біртекті ауырлық өрісінде жұмыс осылай есептелген болатын $[(4.3) - (4.5)$ – өрнектерді қараңыз$]$. Осы өрнектерден берілген күш өрістеріндегі бөлшектердің потенциалдық энергиясының түрі төмендегідей болтындығын байқауға болады:

1) Серпімді күш өрісінде:

$$U(\mathbf{r}) = \varkappa r^2/2\,; \tag{4.11}$$

2) материалдық нүктенің гравитациялық өзара әрекеттесу (кулондық) өрісінде:

$$U(\mathbf{r}) = \alpha/r\,; \tag{4.12}$$

3) біртекті ауырлық күш өрісінде:

$$U(\mathbf{r}) = mgz. \tag{4.13}$$

U – потенциалдық энергия кез келген бір тұрақтыны қосқанға дейінгі дәлдікпен анықталған функция. Себебі барлық U өрнектеріне тек бөлшектің екі күйіндегі мәндерінің айырымы ғана енген және осы жағдайда өрістің барлық нүктелері үшін бірдей болатын тұрақты шама еске алынбайды. Міне, сондықтан жоғарыдағы үш өрнекте осы тұрақты шама ескерілмеген.

Тағы бір маңызды жағдай. Потенциалдық энергия бір бөлшекті сипаттамайды, ол күш өрісін тудыратын өзара әрекеттесетін бөлшектер мен денелерге қатысты жүйелермен анықталады**.**

Потенциалдық энергия және өріс күші

Бөлшектің өзара қоршаған денелермен әрекеттесуін екі түрлі тәсілмен сипаттауға болады: *күшпен* немесе *потенциалдық энергия* көмегі арқылы. Классикалық механикада бұл екі тәсіл де кең қолданылады. Бірінші тәсілдің қолданыс өрісі кеңірек, себебі оны потенциалдық энергия түсінігін пайдалануға болмайтын күш жағдайларында да (мысалы, үйкеліс күштер кезінде) пайдалануға болады, ал екінші тәсіл тек консервативтік күштер үшін ғана қолданыс табады.

Енді потенциалдық энергия мен өріс күшінің арасындағы байланысты тағайындайық, дәлірек айтсақ өрістегі бөлшектің орнының функциясы болып табылатын берілген $U(\mathbf{r})$ потенциалдық энергия бойынша F(r) өріс күшін анықтауға талпынайық.

Потенциалдық өрістің бір нүктесінен екінші нүктесіне бөлшекті алып өткенде өріс күштерінің атқаратын жұмысының бөлшектің потенциалдық энергиясының кемуіне тең болатындығын көрдік, яғни $A_{12} = U_1 - U_2 = -\Delta U$ Элементар dr орын ауыстыру үшін де дәл осылай: $\partial A = -dU$ немесе

$$\mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{r} = -\,\mathrm{dU} \qquad (4.14)$$

$\mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{r} = F_s\,\mathrm{d}s$ екендігін ескере отырып, мұндағы, $\mathrm{d}s = |d\mathbf{r}|$ – элементар жол, F_s – **F** вектордың d**r** орын ауыстыруға проекциясы, (4.14) өрнекті $F_s\,\mathrm{d}s = -dU$, мұндағы, dU – d**r-**дің орын ауыстыру бағытындағы потенциалдық энергияның кемуі. Осыдан:

$$F_s = -\partial U / \partial S \qquad (4.15)$$

яғни, F_s – өріс күшінің **F** – вектордың берілген нүктедегі dr орын ауыстыру бағытына проекциясы, ол *U* потенциалдық энергияның теріс таңбамен осы бағыт бойынша алынған туындысына тең болады. $\partial / \partial S$ дегеніміз – дербес туынды, ол туындының белгілі бағыт бойынша алынатындығын көрсетеді.

d**r** орын ауыстыруды кез келген бағытта, мысалы, *X,Y,Z* өстері бойында да алуға болады. Егер, мысалы, d**r** орын ауыстыруы *X* өсіне параллель болатын болса, онда оны d**r** = **i**d*x* деп жазуға болады, мұндағы **i-** *X* өсінің орты, d*x* – *x* координаттың өсімшесі. Сонда *X* өсіне параллель болатын d**r** орын ауыстыруы кезіндегі **F** күштің жұмысы формуламен анықталады:

$$\mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{Fi}\,\mathrm{d}\,x = F_x dx.$$

мұндағы, $F_x - \mathbf{F}$ вектордың **i** – ортқа проекциясы (F_x жағдайындағы сияқты d**r-**дің орын аустыруына емес). Соңғы өрнекті (4.14) салыстырып, келесі түрде жазамыз:

$$F_x = -\partial U / \partial x,$$

мұндағы, $\partial / \partial S$ – дербес туынды белгісі *U*(*x,y,z*) шамасын дифференциалдаған кезде ол тек жалғыз *x* – аргументінің ғана функциясы екендігін көрсетеді, ал қалған аргументтер дифференциалдау кезінде тұрақты болып саналады F_y және F_z проекциялары үшін де теңдеулердің түрі F_z еңдеуіне ұқсас болатыны анық.

Сонымен U функциясының $\mathrm{x, y, z}$ шамалары бойынша теріс таңбамен алынған дербес туындыларынан **F** вектордың орттардағы F_x, F_y, F_z проекцияларын табамыз. Осыдан вектордың өзін де табуға болады:

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$$

немесе:

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}\right) \tag{4.16}$$

Жақшада тұрған шаманы U *скаляр функцияның градиенті* деп атайды. Оны gradU деп немесе ∇U деп белгілейді. Физикада ∇ («*набла*») белгісін көбірек пайдаланады, оны символдық вектор немесе символдық оператор деп те атайды:

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{4.17}$$

Сондықтан ∇U-ды символдық ∇ вектордың U скалярға көбейтіндісі деп қарастыруға болады.

Сонымен өрістің күші мен потенциалдық энергияның арасындағы байланысты координаттардың функциясы деп қарастырып, ықшамды түрде жазуға болады:

$$F = -\nabla U \tag{4.18}$$

яғни **F** *өріс күші өрістің берілген нүктесіндегі бөлшектің потенциалдық энергиясының минус таңбамен алынған градиентіне тең*. (4.18) өрнек $U(\mathbf{r})$ функцияны біле отырып, $\mathbf{F}(r)$ күш өрісін табуға мүмкіндік береді. Осыған мысал келтірейік.

Мысал. Қайсыбір өрістегі бөлшектің потенциалдық энергиясы төмендегідей болады:

а) $U(x, y) = -\alpha xy$, мұндағы α тұрақты шама;

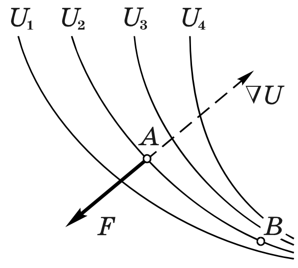
ә) $\boldsymbol{U}(\mathbf{r}) = \mathbf{ar}$ мұндағы, **a** – тұрақты вектор, **r** – өріс нүктесінің радиус-векторы.
Әрбір жағдайға сәйкес келетін күш өрісін табайық:

а) $\mathbf{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j}\right) = \boldsymbol{\alpha}(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$

ә) әуелі U функцияны $U = a_x x + a_y y + a_z \boldsymbol{z}$ деп жазайық, сонда:

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}\right) = -\left(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} = -\boldsymbol{a}\right).$$

Егер *эквипотенциалдық бет* түсінігін барлық нүктелерінде U потенциалдық энергияның мәні бірдей болатын бет түсінігін енгізетін болсақ, онда градиент мәнісі түсінікті бола бастайды. U шамасының әрбір мәніне тиісті өзінің *эквипотенциалдық беті* сәйкес болатыны түсінікті.



4.8- сурет

(4.15) формуладан кез келген бағытқа, берілген нүктедегі *эквипотенциалдық бетке* жанама, **F** вектордың проекциясы нөлге тең болатындығы шығады. Бұл дегеніміз **F** вектордың берілген нүктедегі эквипотенциалдық бетке нормал перпендикуляр болатындығын көрсетеді. Енді, **F** шамасының өшу бағытында ds орын ауыстыруды алайық, сонда $\partial U < 0$ және (4.15) бойынша $F_S > 0$, яғни **F** вектор U шамасының кему бағытында бағытталған. **F** вектор бағыты бойынша ∇U векторға қарама-қарсы, U градиенті эквипотенциал беттің нормалы бойынша U потенциалдық энергияның өсу бағытындағы вектор деген тоқтамға келеміз.

Айтылғандарды екі өлшемдік жағдайды қамтитын 4.8-сурет түсіндіре алады. Онда эквипотенциалдар жиынтығы $(U_1 > U_2 > U_3 > U_4)$, потенциалдық энергияның ∇U градиенті және өрістің A нүктесіне сәйкес күш векторы **F** өрнектелген. Осы екі шаманың векторлары B нүктесінде қандай болар еді? Қортындылай келе тек U функциясының градиенті ғана емес, сонымен қатар координаттардың кез келген скаляр функциясының градиенті жайлы сөз етуге болады. Градиент түсінігі физиканың барлық салаларында кең қарастырылады.

Өріс түсінігі

Тәжірибе арқылы гравитациялық және электростатикалық өзара әрекеттесу кезінде бөлшекке қоршаған денелер тарапынан болатын **F** өзара әрекеттесу күші бөлшектің массасына немесе зарядына пропорционал болатыны анықталды. Басқаша айтқанда, **F** күшті екі шаманың көбейтіндісі түрінде өрнектеуге болады:

$$\boldsymbol{F} = m\mathbf{G} \tag{4.19}$$

мұндағы, **m** – бөлшектің массасы, **G** – қайсыбір вектор, ол бөлшектердің орнына да, қоршаған денелердің қасиеттеріне де тәуелді.

Өзара әрекеттесу туралы түсінікті өріс тарапынан қарастырғанда оның физикалық мәнін басқаша түсінуге әкеледі. Атап айтқанда, қарастырылып отырған бөлшек оны қоршап тұрған денелердің *өрісінде* орналасқан **G(r)** векторымен сипаталатын болады. Кеңістіктің әрбір нүктесінде осы денелердің жан-жағында (өріс көзінде) сондай шарттар орындалады, осы жағдайларда осы нүктеге орналасқан бөлшектер (4.19) күшінің әсерін алады және **G(r)** мен сипатталатын өріс бөлшек бар ма, жоқ па оған тәуелсіз өзі өмір сүре алады (өріс – физикалық шынайы материя). **G** векторды *өрістің кернеулігі* деп, ал электр өрісінің кернеулігін **E** деп атайды, q нүктелік зарядына әсер ететін **F** күшінің (4.19) формуласымен ұқсас, яғни:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

Гравитациялық өріс пен электростатикалық өрістер арасындағы қатынасты белгілеу үшін m және **G** параметрлерін q мен **E-**ге ауыстырып жіберсе болғаны.

Өрістердің бір ерекше қасиеттеріне тоқталайық, яғни егер өріс бірнеше өрістерден құралса, онда оның қорытынды өрісі осы өрісті құраушыларының қосындысынан тұрады. Дәлірек айтсақ кез келген нүктеде қорытынды өрістің **G** кернеулігі тең болады:

$$\mathbf{G} = \sum \mathbf{G}_i \tag{4.20}$$

мұндағы, $\mathbf{G}_i$ – i-ші өрістің кернеулігі осы нүкте үшін. Бұл формула өрістердің *суперпозиция принципін (немесе қосарлану)* сипаттайды.

Енді бөлшектің потенциалдық энергиясына көңіл бөлейік. (4.19) формулаға сай, (4.14) − формуланы келесі $m\mathbf{G}\mathrm{d}\mathbf{r} = -\mathrm{d}U$ түрде жазуға болады. Осы екі теңдеудің екі жағын да m −ге бөліп, U / m қатынасын φ-арқылы белгілеп:

$$\mathbf{G}\mathrm{d}\mathbf{r} = -\mathrm{d}\varphi, \tag{4.21}$$

немесе

$$\int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} \mathbf{G}\mathrm{d}\mathbf{r} = \varphi_1 - \varphi_2 \tag{4.22}$$

формуланы аламыз.

φ(r) функциясы **r** радиус-векторымен сипатталатын *нүктедегі өрістің потенциалы деп аталады.*

(4.22) формула кез келген гравитациялық немесе электростатикалық өрістердің потенциалын табуға көмектеседі. Ол үшін кез келген екі нүктенің арасындағы $\int$ **G**d**r** интегралды есептеп және алынған шаманы қайсыбір функцияның кемуі деп алса болғаны, олай болса, m – нүктелік массасының гравитациялық өрістерінің потенциалы және q – нүктелік зарядының электростатикалық өрісінің потенциалы 4.12-теңдеуге сәйкес келесі формуламен анықталады:

$$\varphi_{\text{гр}} = -\gamma m/r, \quad \varphi_{\text{кул}} = -kq\ /\ r \tag{4.23}$$

φ – потенциалы потенциалдық энергия сияқты белгілі бір тұрақтыға дейінгі дәлділікпен анықтала алынады. Сондықтан бұл болмашы тұрақтыны ескермеуге болады.

Сонымен өрісті векторлық түрде $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ немесе скалярлық түрде $\varphi(\mathbf{r})$ арқылы сипаттауға болады. Екі тәсіл де дұрыс. Алайда, өрісті екінші тәсілмен сипаттау әлдеқайда ыңғайлы, оның бірнеше себебі бар:

1. $\varphi(\mathbf{r})$-ді біле отырып, A өрісінің потенциалдық энергиясы мен жұмысын есептеуге болады:

$$U = m\varphi, \qquad A_{12} = m(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{4.24}$$

2. $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ функциясының үш компонентінің орнына, $\varphi(\mathbf{r})$ скалярлық шаманы анықтау ыңғайлы.

3. Егер өрістің құраушысы көп болса, онда оның потенциалын φ арқылы анықтау **G**-мен салыстырғанда жеңілдеу. Потенциалдар скалярлық болғандықтан оларды қосуға болады. Нүктелердің бағыттарын елемей, шындығында да (4.20) мен (4.21) арқылы :

$$\mathrm{d}r = \sum \mathrm{G_i}\mathrm{d}\mathbf{r} = -\sum \mathrm{d}\varphi_\mathrm{i} = -\mathrm{d}\sum \varphi_\mathrm{i} = -\mathrm{d}\varphi$$

сонымен

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \sum \varphi_i(\mathbf{r}) \tag{4.25}$$

φ_i өрістің белгілі бір нүктедегі i-ші бөлшегінің потенциалы.

4. $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{r})$ функциясын біле отырып, $\mathbf{G}(\mathbf{r})$-ді оңай қалпына келтіріп,

$$\mathbf{G} = -\nabla\varphi. \tag{4.26}$$

формуласымен оңай табуға болады.

Бұл формула тікелей (4.18) формуладан шығады.

§ 4.3. Өрістегі бөлшектердің механикалық энегиясы

Кинетикалық энергия

Массасы - m бөлшек кейбір $\boldsymbol{F}$ күштің әсерінен қозғалыста болсын (жалпы жағдайда $\boldsymbol{F}$ бірнеше күштердің қорытындысы да болуы мүмкін). Осы күштің элементар $\mathrm{d}\mathbf{r}$ орын ауыстыруда атқаратын элементар жұмысын табайық. $\boldsymbol{F} = m\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t$ және $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{v}\mathrm{d}t$ екендігін ескере отырып

$$\delta A = \mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{r} = m\mathbf{v}\mathrm{d}\mathbf{v}$$

өрнегін жазамыз.

Скалярлық көбейтінді $\mathbf{v}d\mathbf{v} = v(d\mathbf{v})_{\mathbf{v}}$ мұндағы, $(d\mathbf{v})_{\mathbf{v}}$ дегеніміз $\mathbf{v}$ −вектордың бағытына $d\mathbf{v}$ вектордың проекциясы. Бұл проекция dv жылдамдық векторының модулінің өсімшесіне тең. Сондықтан $\mathbf{v}d\mathbf{v} = vdv$ және элементар жұмыс түрде анықталады:

$$\delta A = mvdv = d(mv^2/2)$$

Осыдан F қорытынды күштің жұмысы *кинетикалық энергия* деп аталып кеткен кейбір шаманың өсімшесіне тең (жақша ішіндегі) болады:

$$K = mv^2/2. \tag{4.27}$$

Сонымен элементар орын ауыстыру кезіндегі кинетикалық энергияның өсімшесі:

$$dK = \delta A \tag{4.28}$$

ал 1- нүктеден 2- нүктеге дейінгі шектеулі орын ауыстыру кезінде :

$$K_2 - K_1 = A_{12} \tag{4.29}$$

яғни, *бөлшектің кинетикалық энергиясының қайсыбір орын ауыстыруы кезіндегі кинетикалық энергиясының өсімшесі бөлшекке осы орын ауыстыру кезінде әсер еткен барлық күштер жұмыстарының алгебралық қосындысына тең* болады. Егер $A_{12} > 0$ болса, онда $K_2 > K_1$, яғни бөлшектің кинетикалық энергиясы кемиді.

(4.28) және (4.29) теңдеулер инерциялық және инерциялық емес санақ жүйелерінде де орындала алады. Инерциялық емес санақ жүйелерінде қарастырылып отырған бөлшекке кейбір денелер тарапынан әсер ететін күштермен қатар өзара әрекеттесу күштері мен инерция күштерін де ескеру керек. Сондықтан бұл теңдеулерде жұмыс деп өзара әрекеттесу күштері мен инерция күштері жұмыстарының алгебралық қосындысын түсіну керек.

Бөлшектің толық механикалық энергиясы

(4.28) бойынша бөлшектің кинетикалық энергиясының өсімшесі бөлшекке әсер ететін барлық күштердің F қорытынды элементар жұмысына тең болады. Бұл қандай күштер? Егер бөлшек потенциалдық өрісте тұрған болса, онда оған осы потенциалдық өрістің тарапынан консервативтік $F_{кон}$ күш әсер етеді. Сонымен қатар бөлшекке тегі бөлек басқа күштер де әсер етуі мүмкін. Оларды $F_{тос}$ ***тосын күштер*** деп атайды.

Сонымен, бөлшекке әсер ететін барлық F күштердің қорытындысын $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{кон}} + \mathbf{F}_{\text{тос}}$ түрінде жазуға болады. Осы барлық күштердің жұмысы бөлшектің кинетикалық энергиясын өсіруге жұмсалады.

$$\Delta K = A_{\text{k}} + A_{\text{Тос}}$$

мұндағы, A_k өріс күшінің жұмысы, $A_{\text{Тос}}$ – тосын күштердің жұмысы. (4.10) бойынша өріс күштерінің жұмысы бөлшектің потенциалдық энергиясының кемуіне тең, яғни: $A_{\text{Тос}} = -\Delta U$. Осы өрнекті жоғарыдағы формулаға қойып және ΔU мүшені сол жаққа шығарып, өрнекті табамыз:

$$\Delta K + \Delta U = \Delta(K + U) = A_{\text{Тос}}$$

Осыдан $A_{\text{Тос}}$ – тосын күштертің жұмысы $K+U$ шамасын арттыруға кететіні көрініп тұр. Кинетикалық және потенциалдық энергиялардың қосындысынан тұратын осы шаманы өрістегі *бөлшектің толық механикалық энергиясы* деп атайды.

$$E = K + U \tag{4.30}$$

Толық механикалық энергия да потенциалдық энергия сияқты кез келген тұрақты шаманы қосқанға дейінгі дәлділікпен анықталады.

Сонымен бөлшектің **1**-нүктеден **2**-нүктеге элементар орын ауыстырудағы консервативті күштердің стационарлық өрісіндегі толық механикалық энергияның өсімшесін

$$E_2 - E_1 = A_{\text{Тос}} \tag{4.31}$$

түрінде келтіруге болады, яғни *бөлшектің толық механикалық энергиясының қайсыбір жолдағы өсімшесі осы жол бойында бөлшекке әсер ететін барлық тосын күштер жұмыстарының алгебралық қосындысына тең б*олады. Егер $A_{\text{Тос}} > 0$ болса, онда бөлшектің толық механикалық энергиясы артады, ал $A_{\text{Тос}} > 0$ болса толық механикалық энергия азаяды.

Мысал. Көлдің бетінен биіктігі h жардан массасы m дене v_0 жылдамдықпен лақтырылады. Дене су бетіне v жылдамдықпен түскен кездегі ауаның кедергісі тарапынан атқарылған жұмысты табу керек.

Шығару жолы. Егер дененің қозғалысын Жер тарапынан тартылыс өрісінде қарастыратын болсақ, онда ауа кедергісі тарапынан болатын күш тосын күш болады да, (4.31) теңдеуге сай, іздеп отырған жұмысымыз

$$A_{\text{тос}} = E_2 - E_1 = \text{m}v^2/2 - (\text{m}v^2/2 + mgh)$$

немесе

$$A_{\text{тос}} = m(v^2 - v_0^2)/2 - mgh$$

Алынған шама теріс те, оң да болып шығуы мүмкін. Мысалы, бұл дене түсер кездегі желдің соғу сипатына тәуелді болады. Яғни, бұл бөлшектің толық механикалық энергиясының уақыт бойынша туындысы бөлшекке әсер ететін барлық тосын күштердің қуатына тең.

Сөйтіп біз бөлшектің механикалық энергиясының тек тосын күштері әсерінің арқасында ғана өзгере алатындығын тағайындадық. Осыдан тікелей сыртқы өрістегі бөлшектің толық механикалық энергиясының сақталу заңы шығады:

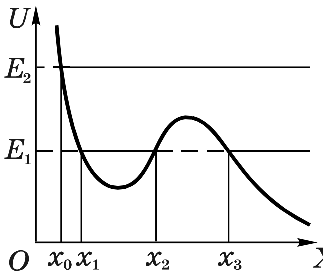
Егер тосын күштер әсер етпесе немесе қарастырылып отырған уақыт ішінде олардың қорытынды әсері нөлге тең болса, осы уақыт аралығында бөлшектің толық механикалық энергиясы тұрақты болып қалады. Басқаша айтқанда,

$$E = K + U = const. \qquad (4.32)$$

(4.32) осындай қарапайым түрде жазылған сақталу заңының өзі-ақ қозғалыс теңдеулеріне жүгінбей-ақ көптеген мәселелерге жауап бере алады. Қозғалыс теңдеулерін пайдаланатын болсақ, ол көптеген есептеулерге жетелейді. Міне, осы жағдай сақталу заңдарының маңызын арттыра түседі. (4.32) түріндегі сақталу заңын төменгі мысалға қолданып көрейік.

Мысал. Бөлшек 4.9-суретте көрсетілгендей бір өлшемдік *U(x)* потенциалдық өрісте қозғалып жүрсін. Егер тосын күштер жоқ болса, онда бөлшектің бұл өрістегі толық механикалық энергиясы, яғни *E*, қозғалыс кезінде өзгермейді, олай болса келесі сұрақтарға жауап табуға болады:

1. Динамиканың негізгі теңдеуіне жүгінбей, бөлшектің жылдамдығын оның координаттарына тәуелді түрінде анықтау керек. Бұл үшін $U(x)$ потенциалдық қисықтың түрін және E толық энергияның мәнін (4.32) теңдеуіне сай білсек болғаны.



4.9-сурет

2. Бөлшектің толық энергиясының берілген E мәні кезінде ие бола алатын x координатаның өзгеріс аумағын тағайындау. Осыдан $U > E$ кезінде бөлшек x_1 және x_2 координаттардың арасындағы аумақта тербеліс жасайды және $E = E_1$ координатының оң жағында ғана бола алатындығы шығады (4.9-сурет). Бірінші аумақтан екінші аумаққа немесе керісінше бөлшек өте алмайды. Бұған екі аумақты бөліп тұрған *потенциалдық тосқауыл* кедергі жасайды. Бөлшек өрістің тек шектелген аумағында ғана қозғала алатын болса, онда бөлшек *потенциалдық шұңқырға* қамалған деп аталады. Біздің жағдайымызда яғни $E = E_1$ болғанда бөлшек x_1және x_2 арасындағы аумақта қозғала алады.

Ал $E = E_2$ кезінде бөлшек өзін басқаша ұстайды (4.9-сурет). Оған x_0-ден оңға қарай бар аумақ тиісті. Егер бөлшек бастапқы уақытта x_0-кординатаға ие болса, онда ол одан әрі оңға қарай қозғала береді. Бөлшектің кинетикалық энергиясының х орнына тәуелді қалай өзгеретінін өз беттеріңізше байқап көріңдер.

§ 4.4. Жүйенің потенциалдық энергиясы

Жүйенің меншікті потенциалдық энергиясы

Жалпы алғанда, жүйенің бөлшектері осы жүйеге кірмейтін денелермен де өзара әрекеттесе алады. Тосын ешқандай денелер әсер етпейтін немесе олардың әсерін ескермеуге болатын жүйені тұйықталған немесе оқшауланған жүйе деп атайды. Тұйықталған жүйе түсінігі оқшауланған материалдық нүкте түсінігінің жалпылануы болып табылады және физикада маңызды рөл атқарады.

Біз осы кезге дейін тек *бір ғана бөлшектің* қозғалысын энергетикалық тұрғыдан қарастырып келдік. Енді бөлшектер жүйесіне өтеміз. Бұл кез келген дене, газ, қандай да бір механизм немесе Күн жүйесі болуы мүмкін.

Өзара әрекеттесу кезінде бөлшектер арасындағы тек центрлік күштер әсерін ғана ескеретін жүйені қарастырайық, яғни берілген бөлшектердің арасындағы тек арақашықтықтарына ғана тәуелді және оларды қосып тұрған түзу бойымен бағытталған күштер әсерін ғана ескеретін жүйені қарастырайық.

Барлық ішкі күштердің атқаратын жұмыстары санақ жүйесіне тәуелсіз бір бөлшектер жүйесінен екінші бөлшектер жүйесіне өткен кезде қайсыбір функцияның кемуімен сипатталуы мүмкін, берілген өзара әрекеттесу сипатында осы функция бөлшектердің салыстырмалы орындарына ғана, яғни жүйенің өзінің *конфигурациясына* ғана тәуелді. Берілген жүйенің басқа денелермен өзара әрекеттесуін сипаттайтын потенциалдық энергиядан ажырату үшін бұл функция *жүйенің меншікті потенциалдық энергиясы* деп атайды.

Әуелі **1** және **2** бөлшектен тұратын жүйені алайық. Осы бөлшектердің өзара әрекеттесу $\mathbf{F}_1$ және $\mathbf{F}_2$ күштері элементар жұмысының алгебралық қосындысын есептеп шағарайық. Кез келген бір *К*-санақ жүйесінде қандай бір d*t* уақыт арасында бөлшектердің орындары $\mathrm{d}r_1$ және $\mathrm{d}r_2$ радиус-вектормен сипатталатын болсын. Сонда $\mathbf{F}_1$ және $\mathbf{F}_2$ өзара әрекеттесу күштерінің атқаратын жұмысы:

$$\delta A_{1,2} = \mathbf{F_1}\mathrm{d}\mathbf{r_1} + \mathbf{F_2}\mathrm{d}\mathbf{r_2}$$

Енді Ньютонның үшінші заңы бойынша $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$ екендігін ескерсек, жоғарыдағы өрнекті жазуға болады:

$$\delta A_{1,2} = \mathbf{F_1}(\mathrm{d}\mathbf{r_1} - \mathrm{d}\mathbf{r_2})$$

Жақшаның ішінде тұрған шама **1**-бөлшектің **2**-бөлшекке қатысты орын ауыстыруын сипаттайды, анығырақ айтсақ, K' санақ жүйесінде **1**-бөлшектің тасымалдануы **2**-бөлшекпен өте тығыз байланысқан, *К*-санақ жүйесіне қатысты екі бөлшек бірге ілгерілемелі қозғалады. Шынында да, *К*-санақ жүйесінде **1**-бөлшектің $\mathrm{d}\mathbf{r}_1$ тасымалдануын K' санақ жүйесіндегі $\mathrm{d}\mathbf{r}_2$ тасымалдануы деп қарастыруға болады. Сондай-ақ K'-санақ жүйесіне қатысты **1**-бөлшектің $\mathrm{d}\mathbf{r}_1'$ тасымалдануын қосуға болады, яғни сонда $\mathrm{d}\mathbf{r}_1 = \mathrm{d}\mathbf{r}_2 + \mathrm{d}\mathbf{r}_1'$. Осыдан $\mathrm{d}\mathbf{r}_1 - \mathrm{d}\mathbf{r}_2 = \mathrm{d}\mathbf{r}_1'$ оны жұмыс өрнегіне қойғаннан кейін:

$$\delta A_{1,2} = \mathbf{F_1}\mathrm{d}\mathbf{r}'_\mathbf{1}$$

Осындай жолмен алынған нәтиже қызғылықты: кез келген *К*-санақ жүйесінде өзара әрекеттесудің қос күштерінің элементар жұмыстарының алгебралық қосындысы басқа бір бөлшек тыныштықта жатқан санақ жүйесінің екінші бөлшегіне әсер ететін күштің элементар жұмысына әрдайым тең. Басқаша айтқанда, δA_{12} –жұмысы бастапқы *К*-санақ жүйесін таңдап алуға тәуелсіз деген сөз.

F_1 – күш центрлік, сондықтан бұл күштің жұмысы осы бөлшектер қосағынан өзара әрекеттесу (4.10) теңдеуіне сай потенциалдық энергиясының кемуіне тең болады, яғни

$$\delta A_{1,2} = -\mathrm{d}U_{12}$$

U_{12} – потенциалдық энергия тек бөлшектер арасындағы қашықтыққа ғана тәуелді болатындықтан, жұмыстың санақ жүйесін таңдауға тәуелсіз екендігі анықталды:

$$\delta A_{1,2} = -\Delta U_{12}$$

Енді үш бөлшектер жүйесін қарастырайық. Мұндағы алынған нәтижені бөлшектердің кез келген санына жалпылауға болады. Барлық бөлшектердің элементар орны ауыстырулары кезінде барлық өзара әрекеттесу күштерінің атқаратын элементар жұмысын өзара әрекеттесудің барлық үш жұбының элементар жұмыстарының қосындысы түрінде өрнектеуге болады, яғни $A = A_{1.2} + A_{1.3} + A_{2.3}$. Бірақ өзара әрекеттесудің әрбір жұбы үшін жоғарыда көрсетілгендей, $A_{ik} = -\Delta U_{ik}$, сондықтан:

$$A = -\Delta(U_{12} + U_{13} + U_{23}) = \Delta U_{\text{мен}}$$

мұндағы, $U_{\text{мен}}$ *меншікті потенциалдық энергия* – функция бөлшектердің берілген жүйесінің меншікті потенциалдық энергиясы:

$$U_{\text{мен}} = U_{12} + U_{13} + U_{23}$$

Бұл қосындының әрбір қосылғышы сәйкес бөлшектердің арақашықтығына тәуелді болатындықтан, бұл жүйенің меншікті потенциалдық энергиясының бөлшектердің алып тұрған салыстырмалы орындарына бірдей уақытта немесе басқаша айтсақ, жүйенің конфигурациясына тәуелді болады.

Мұндай тұжырымдардың кез келген санды бөлшектер жүйесі үшін де орындалатындығы анық. Сондықтан *бөлшектер жүйесінің кез келген конфигурациясына тән меншікті потенциалдық энергиясы болады және барлық центрлік ішкі күштердің осы конфигурация өзгерген кездегі жұмысы жүйенің меншікті потенциалдық энергиясының кемуіне тең*, яғни

$$A_{\text{іш}} = U_{1\text{мен}} - U_{2\text{мен}} = -\Delta U_{\text{мен}} \tag{4.33}$$

мұндағы, $A_{\text{іш}}$ – ішкі жұмыс, $U_{1\text{мен}}$ мен $U_{2\text{мен}}$ жүйенің потенциалдық энергиясының бастапқы және ақырғы күйлердегі мәндері.

Жүйенің $U_{\text{мен}}$ меншікті потенциалдық энергиясы аддитивтік шама емес, яғни ол жалпы алғанда жүйе бөліктерінің өзара әрекеттесулерінің U_3 потенциалдық энергиясының қосындысына тең емес. Сонымен қатар тағы да жүйенің жеке бөліктерінің өзара әрекеттесулерінің U_{es} потенциалдық энергиясын да қосу керек:

$$U_{\text{мен}} = \sum U_{n\,\text{мен}} + U_3 \tag{4.34}$$

$U_{n\,\text{мен}}$ − жүйенің n-ші бөлігінің меншікті потенциалдық энергиясы,

U_3− жүйенің жеке бөліктерінің өзара әрекеттесу потенциалдық энергиясы;

Жүйенің меншікті потенциалдық энергиясы бөлшектердің әрбір жұбының өзара әрекеттесу энергиясы тәрізді кез келген тұрақтыны қосқанға дейінгі дәлділікпен анықталады.

Жүйенің потенциалдық энергиясын есептеуге қажетті пайдалы формулаларды келтірейік. Бұл энергияны келесі түрде көрсетейік :

$$U_{\text{мен}} = 1/2\sum U_i \qquad (4.35)$$

мұндағы, U_i i-ші бөлшектің жүйенің барлық қалған бөлшектерімен өзара әрекеттесу потенциалдық энергиясы. Бұл жердегі қосындыға жүйенің барлық бөлшектері енеді.

Осы формуланың дұрыстығына көз жеткізу үшін әуелі үш бөлшектен тұратын жүйені қарастырайық. Жоғарыда көрсетілгендей берілген жүйенің меншікті потенциалдық энергиясы $U_{\text{мен}} = U_{12} + U_{13} + U_{23}$. Бұл қосындыны келесі түрде келтірейік. U_{ik}-нің әрбір қосылғышын симметриялық түрге келтірейік: $U_{ik} = (U_{ik} + U_{ki})/2$. Себебі $U_{ik} + U_{ki}$. Сонда:

$$U_{\text{мен}} = 1/2(U_{12} + U_{21} + U_{13} + U_{31} + U_{23} + U_{32})$$

Бірінші индекстері бірдей мүшелерді топтайық:

$$U_{\text{мен}} = 1/2[(U_{12} + U_{13}) + (U_{21} + U_{23}) + (U_{31} + U_{32})]$$

Дөңгелек жақшалардағы әрбір қосынды i-бөлшектің қалған екі бөлшекпен өзара әрекеттесуінің U_i-потенциалдық энергиясы болып табылады. Сондықтан соңғы өрнекті:

$$U_{\text{мен}} = 1/2(U_1 + U_2 + U_3) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{3} U_i$$

түрінде жазуға болады.

Ол (4.35) формулаға толық сәйкес келеді. Алынған нәтижені кез келген жүйеге қолдануға болады, себебі мұндай жалпылау жүйені түзетін бөлшектер санына тәуелсіз.

Бөлшектердің арасындағы өзара әрекеттесу гравитациялық немесе кулондық сипатта болатын жүйе үшін (4.35) формуланы потенциал түсінігін пайдалана отырып, басқа түрге келтіруге болады. (4.35) формулада $i-$ бөлшектің потенциалдық энергиясын $U_1 = m_i\varphi_i$ өрнекпен алмастырып, мұндағы m_i- бөлшектің массасы (заряды), ал φ_i –жүйенің барлық қалған бөлшектерінің $i-$ бөлшек тұрған нүктеде тудыратын потенциалы. Сонда:

$$U_{\text{мен}} = 1/2\sum m_i\varphi_i \qquad (4.36)$$

Егер массалар (зарядтар) жүйеде үздіксіз таралған болса, онда қосындыны интегралдауға болады:

$$U_{\text{мен}} = 1/2\int \varphi dm = 1/2\int \varphi p dV, \tag{4.37}$$

мұндағы, p – массаның көлемдік тығыздылығы, dV – көлемнің элементі. Бұл жерде интегралдау массалар (зарядтар) алып тұрған барлық көлем бойынша жүргізіледі.

Жүйенің «сыртқы» потенциалдық энергиясы

Жүйе консервативті күштердің сыртқы стационарлық өрісінде орналасқан. Бұл жағдайда осы өрісте жүйенің әрбір бөлшегі өзінің U_i - потенциалдық энергиясымен сипатталады, ал барлық жүйе:

$$U_{\text{сырт}} = \sum U_i \tag{4.38}$$

шамасымен анықталады.

Міне, осы шаманы жүйенің «*сыртқы» потенциалдық энергиясы* деп атайды. $U_{\text{мен}}$ - жүйенің меншікті потенциалдық энергиясының $U_{\text{сырт}}$ сыртқы потенциалдық энергиядан айырмашылығы ол тек жүйе ішіндегі бөлшектердің өзара әрекеттесуіне ғана тәуелді.

Бұл шама біртекті жүйеде бөлшектердің өзара әрекеттесулеріне ғана тәуелді болады. (4.10)-ға сай сыртқы өрістегі әрбір бөлшектің потенциалдық энергиясының кемуі осы өрістің орын ауыстыру үшін жұмсалатын сыртқы күштердің жұмысына тең, сондықтан жүйенің «сыртқы» потенциалдық энергиясының кемуі жүйенің барлық бөлшектеріне әсер ететін «сыртқы» күштердің жұмысына тең болады:

$$A_{\text{сырт}} = -\Delta U_{\text{сырт}} \tag{4.39}$$

Біртекті өріс күшінде орналасқан жүйенің сыртқы потенциалдық энергиясын есептеу үшін өте пайдалы формуланы табуға болады. Бүкіл әлемдік тартылыс күштің өрісі берілсе, онда жүйенің i-ші бөлшегіне $m_i\text{g}$ күш әсер етсін. Онда (4.13) формулаға сәйкес бөлшектең потенциалдық энергиясы $m_i\text{g}z_i$ болады. z_i-кез келген O деңгеймен салыстырғандағы бөлшектің вертикаль координатасы. Онда сыртқы біртекті өріс ішінде барлық тұтас жүйенің потенциалдық энергиясын (өрістің меншікті потенциалдық энергиясы қажет емес) келесі өрнекпен сипаттауға болады:

$$\Delta U_{\text{сырт}} = \sum m_i \text{g}\, z_i = \left(\sum m_i\, z_i\right)\text{g}$$

Жақша ішіндегі сома (3.8) теңдеуге сәйкес жүйенің барлық m массасының осы жүйенің массалар центрінің вертикаль координатасына z_i көбейтіндісі болып табылады. Яғни, $\sum m_i z_i = mz_C$ болғандықтан, $U_{\text{сырт}}$ үшін келесі теңдеуді қайта жазуға болады:

$$U_{\text{сырт}} = mg\Delta z_C \tag{4.40}$$

Сыртқы біртектегі өрістегі жүйенің потенциалдық энергиясы тұтас жүйенің массасының (m)-ның, g −ның және z_C −ның масса центрінің вертикал координатасының көбейтіндісіне тең.

Жүйенің орын ауыстыру барысында $U_{\text{сырт}}$ шамасының өсімшесі тең:

$$\Delta U_{\text{сырт}} = mg\Delta z_C \tag{4.41}$$

Δz_C − бөлшектер жүйесінің массалар центрінің вертикаль координатасының өсімшесі.

§ 4.5. Жүйенің механикалық энергиясының сақталу заңы

Диссипативті күштер

Бөлшектер жүйесін таңдап алу мақсатына сай күштерді сыртқы және ішкі деп бөлу жеткіліксіз, сонымен қатар оларды табиғатына сай консервативті және консервативті емес деп бөлуге де болады.

Консервативті емес күштерге диссипативті күштер жатады. Оған үйкеліс күштері мен кедергі күштері кіреді. Кез келген диссипативті күшті келесі өрнегімен сипаттауға болады:

$$\mathbf{F} = -k(v)\mathbf{v} \tag{4.42}$$

мұндағы, **v** – өзі басқа денелермен әрекеттесе алатын (немесе ортамен) салыстырғандағы дененің жылдамдығы. *k(v)* – *v* – жылдамдыққа тәуелді оң коэффициент. **F**– күші **v** векторына әруақытта қарама-қарсы бағытталған.

Таңдалып алынған санақ жүйесінің түріне сай осы күштің жұмысы оң да, теріс те болуы мүмкін. Жүйенің барлық ішкі диссипативті күштерінің қорытынды жұмысы – санақ жүйесіне тәуелсіз әруақытта теріс шама.

$$A_{\text{ішк}}^{\text{дис}} < 0 \tag{4.43}$$

Енді осы тұжырымды дәлелдеу барысындағы берілген жүйеде ішкі диссипативті күштер қос-қостап кездеседі. Айта кету қажет, Ньютонның үшінші заңына сай әрбір қос диссипативті күштер модулі бойынша бірдей, ал бағыттары бойынша қарама-қарсы. Жүйе ішіндегі **1** мен **2** дене арасындағы өзара әрекеттесулердің кез келген қос диссипативті күштерінің элементар жұмысын табайық, мұндағы, берілген уақыт ішінде денелердің жылдамдығы

$\mathbf{v}_1$ мен $\mathbf{v}_2$: $$\delta A^{\text{дис}} = \mathbf{F_1}\mathbf{v_1}\mathrm{d}t + \mathbf{F_2}\mathbf{v_2}\mathrm{d}t$$

Келесі жағдайларды еске алу қажет: $\mathbf{F_2} = -\mathbf{F_1}$, $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$– *1* дененің *2*- денемен салыстырғандағы жылдамдығы. Сонымен қатар $\mathbf{F}_1 = -k\mathbf{v}$, сонда жұмыс үшін келесі түрлендірілген өрнекті келтіруге болады:

$$\delta A^{\text{дис}} = \mathbf{F_1}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\mathrm{d}t = -k\mathbf{v}\mathbf{v}\mathrm{d}t = -kv^2dt$$

Өзара әрекеттесудің кез келген қос ішкі диссипативті күштерінің жұмысы әрдайым теріс, ал олай болса, барлық ішкі диссипативті күштердің қосындысы үшін қорытынды жұмыс санақ жүйесіне тәуелсіз әрдайым кері шама.

Жүйенің кинетикалық энергиясы

(4.28) теңдеуі бойынша әрбір жеке бөлшектің кинетикалық энергиясының өсімшесі бөлшекке әсер ететін барлық күштердің жұмысына тең: $\Delta K_i = A_i$. Сондықтан A-жүйенің барлық бөлшектеріне әсер ететін барлық күштердің атқаратын жұмысы, осы жүйенің күйі өзгерген жағдайда келесі формуламен анықталады:

$$A = \sum A_i = \sum \Delta K_i = \Delta \sum K_i\,,$$

немесе

$$A = \Delta K K = \sum K_i \tag{4.44}$$

$K -$ жүйенің қорытынды кинетикалық энергиясы.

Сонымен жүйенің кинетикалық энергиясының өсімшесі жүйенің барлық бөлшектеріне әсер ететін барлық күштердің жұмысына тең:

$$\boxed{\Delta K = A.} \tag{4.45}$$

Жүйенің кинетикалық энергиясы аддитивті шама: жеке бөліктері өзара әрекеттесе ме, жоқ па, оған байланыссыз жүйенің осы жеке бөліктерінің кинетикалық энергиясының қосындысына тең болады:

$$\Delta K = A_{\text{сырт}} + A_{\text{ішк}} = A_{\text{сырт}} + A_{\text{ішк}}^{\text{кон}} + A_{\text{ішк}}^{\text{дис}}.$$

(4.33) теңдеуіне сай ішкі консервативті күштердің жұмысы жүйенің меншікті потенциалдық энергиясының кемуіне тең:

$$A_{\text{ішк}}^{\text{кон}} = -\Delta U_{\text{мен}}.$$

Сонда:

$$\Delta K + \Delta U_{\text{мен}} = \Delta K(K + U_{\text{мен}}) = A_{\text{сырт}} + A_{\text{ішк}}^{\text{дис}}. \quad (4.46)$$

Жүйенің *меншікті механикалық энергиясы* деген түсінікті енгізейік, немесе механикалық энергия (толық механикалық энергия мен меншікті механикалық энергиялардың айырмашылығын көрсету үшін) жүйенің меншікті потенциалдық энергиясымен қатар кинетикалық энергиясының қосындысынан тұрады:

$$E_{\text{мен}} = K + U_{\text{мен}}\,. \quad (4.47)$$

$E_{\text{мен}}$ – *меншікті потенциалдық энергия* жүйе бөлшектерінің жылдамдығына, олардың өзара әрекеттесу сипатына, және жүйенің конфигурациясына тәуелді. Сонымен қатар $E_{\text{мен}}$ – меншікті потенциалды энергияның $U_{\text{мен}}$ – потенциалдық энергия сияқты шамасы елеусіз кез келген тұрақты шаманың әсерімен сипатталатын дәлдікпен анықталады, яғни ол шама аддитивті емес, $E_{\text{мен}} -$ жүйенің энергиясы жалпы алғанда, оның бөліктерінің энергияларының қосындысына тең болмайды. (4.47) формулаға сай

$$E_{\text{мен}} = \sum E_n + U_{\text{р}}, \quad (4.48)$$

мұндағы, $E_n -$ жүйенің *n*- бөлігінің механикалық энергиясы, $U_{\text{р}} -$ оның жеке бөліктерінің өзара әрекеттесу потенциалдық энергиясы.

(4.46) формулаға қайта оралайық. Оны (4.47)–ні ескере отырып,

$$\Delta E_{\text{мен}} = A_{\text{сырт}} + A_{\text{ішк}}^{\text{дис}}. \quad (4.49)$$

түрде қайта жазамыз, яғни *жүйенің меншікті механикалық энергиясының өсімшесі барлық сыртқы күштер және ішкі диссипаивті күштер жұмыстарының алгебралық қосындысына тең болады*.

(4.49)-теңдеу инерциялық та инерциялық емес те санақ жүйелерінде орындалады. Тек инерциялық емес санақ жүйесінде сыртқы күштер рөлін атқаратын инерция күштерінің де жұмысын ескеру керек, яғни $A_{\text{сырт}}$ деп, сыртқы өзара әрекеттесу күштерінің жұмысының және инерция күштері жұмысының алгебралық қосындысын түсіну керек.

Механикалық энергияның сақталу заңы

(4.49)-теңдеуден механикалық энергияның сақталу заңы шығады: қозғалыс процесі кезінде бөлшектердің диссипативті күштері жоқ тұйықталған жүйесінің механикалық энергиясы сақталады:

$$\boxed{E_{\text{мен}} = K + U_{\text{мен}} = const.} \tag{4.50}$$

Мұндай жүйені *консервативті* деп атайды. Тұйықталған консервативтік жүйе қозғалған кезде тек меншікті механикалық энергия ғана өзгермейді, сонымен қатар кинетикалық және потенциалдық энергиялар да өзгереді. Бірақ бұл өзгерістер олардың біреуінің өсімшесіне сай екіншісінің кемуі дәл тең болатындай өзгереді: $\Delta K = -\Delta U_{\text{мен}}$. Мұндай жағдай тек инерциялық санақ жүйесінде ғана орындалады.

Егер тұйықталған жүйе (4.49)-теңдеуге сай консервативтік болмаса, яғни диссипативтік күштер болса, онда мұндай жүйенің механикалық энергиясы (4.50) теңдеуі бойынша кемиді:

$$\Delta E_{\text{мен}} = A_{\text{ішк}}^{\text{дис}} < 0. \tag{4.51}$$

Механикалық энергияның кемуі жүйенің ішіндегі диссипативті күштерге қарсы жұмысқа кетуінде болып тұр. Алайда, мұндай түсініктеме диссипативтік күштердің табиғатын ашпағандықтан, жеткіліксіз болып табылады.

Бұл мәселені тереңірек ойластыру нәтижесінде табиғатта іргелі заңның, атап айтқанда, **универсалды энергияның сақталу заңы** бар екені шықты: *энергия ешқашанда жоқтан пайда болмайды және жоғалмайды, ол тек бір түрден екінші түрге өтеді немесе материяның жеке бөліктерінің арасында алмаса алады*. Енді энергияның жаңа түрлеріне байланысты оның түсінігін кеңейтуге тура келеді. Механикалық энергиядан басқа электромагниттік өріс энергиясы, химиялық энергия, ядролық және т.б. энергиялардың түрлері белгілі.

Универсалды энергияның сақталу заңы Ньютон заңдары қолданылмайтын физикалық құбылыстарға да таратылады. Міне, сондықтан оны осы аталған заңдардан шығарып алуға болмайды, оны өз алдына тәжірибе деректерін тереңірек талдаудан шығарылған заң деп қарастыру керек.

Тұйықталған жүйенің механикалық энергиясы кеміген кезде әрқашанда энергияның басқа түрінің, көрінетін қозғалыспен байланысы жоқ, эквивалентті мөлшері де пайда болады. Осы тұрғыдан (4.49) теңдеуді тұйықталмаған жүйенің механикалық энергиясы өзгеруінің себебі көрсетілген энергияның сақталу заңының жалпылама тұжырымдамасы деп қарастыруға болады. Тұйықталмаған жүйенің энергиясының сақталуы мүмкін, бірақ бұл тек (4.53) сай, ішкі диссипативті күштерге қарсы атқарылған жұмыстың арқасында осы энергияның кемуі сыртқы күштердің атқаратын жұмысы есебінен өтемеленетін жағдайларда ғана орындалады.

Сыртқы өрістегі жүйенің толық механикалық энергиясы

Таңдалып алынған бөлшектер жүйесі консервативті күштердің сыртқы стационар өрісі ішінде орналассын. Осы себептен жүйенің механикалық энергиясын табу үшін (4.47) теңдеуден басқа формуланы қолдану ыңғайлы болады.

Жүйенің бөлшектеріне әсер ететін сыртқы күштерді: сыртқы өріс тарапынан әсер ететін күштер (*өрістің сыртқы күштері*) және осы сыртқы өріске (*сыртқы тосын күштер*) жатпайтын барлық қалған сыртқы күштер деп екіге бөлуге болады. $A_{\text{сырт}}$ сыртқы күштердің жұмысы сыртқы өріс күштерінің жұмысы мен сыртқы тосын күштердің жұмыстарының алгебралық қосындысына тең болады:

$$A_{сырт} = A_{сырт}^{өк} + A_{сырт}^{тос}.$$

Ал сыртқы өріс күшінің жұмысы (4.39) теңдеуіне сай сыртқы потенциалдық энергияның кемуімен анықталады: $A_{\text{сырт}}^{\text{к}} = -\Delta U_{\text{сырт}}$. Сонда:

$$A_{\text{сырт}} = -\Delta U_{\text{сырт}} + A_{\text{сырт}}^{\text{тос}}.$$

Осы өрнекті (4.49) формуласына қойып, теңдеуін аламыз

$$\Delta\left(E_{\text{мен}} + U_{\text{сырт}}\right) = A_{\text{сырт}}^{\text{тос}} + A_{\text{ішк}}^{\text{дис}}. \qquad (4.52)$$

Жақшаның ішінде тұрған шаманы консервативті күштердің сыртқы стационар өрісіндегі жүйенің толық механикалық энергиясы деп атайды:

$$\boxed{E = E_{\text{мен}} + U_{\text{сырт}}} \qquad (4.53)$$

(4.47) теңдеуінде келтірілген меншікті механикалық энергиядан жүйенің толық механикалық энергиясының айырмашылығы бар, өйткені оның құрамына тек қана кинетикалық энергия мен қатар меншікті потенциалдық энергиялардың қосындысынан басқа тағы да сыртқы өрістегі жүйенің потенциалдық энергиясы - $U_{\text{мен}}$ да енеді.

(4.53) теңдеуін ескере отырып, (4.52) теңдеуді қайта жазуға болады:

$$\boxed{\Delta E = A_{\text{сырт}}^{\text{тос}} + A_{\text{ішк}}^{\text{дис}}.} \tag{4.54}$$

(4.54) теңдеуінен консервативті күштердің сыртқы стационар өрісіндегі жүйенің толық механикалық энергиясының сақталу заңы шығады: *егер бөлшектер жүйесіне сыртқы тосын күштер әсер етпесе және ішкі диссипативті күштер болмаса, онда жүйенің толық механикалық энергиясы тұрақты болып қалады*:

$$\boxed{E = E_{\text{мен}} + U_{\text{сырт}} = const.} \tag{4.55}$$

Осындай жүйеге мысал ретінде бірімен-бірі серіппемен байланысқан екі кішігірім денені алуға болады (серпімді гантель).

Егер ауырлық өрісінде ауаның кедергісінсіз (сыртқы тосын күштер жоқ) осы жүйе қозғалса, онда оның $K -$ кинетикалық энергиясы, $U_{\text{мен}} -$ меншікті потенциалдық энергиясы, $U_{\text{сырт}} -$ сыртқы потенциалдық энергиясы өзгереді, алайда, осы үш шаманың алгебралық қосындысы тұрақты шама болып қалады.

Басқа мысал ретінде Күннің ауырлық өрісіндегі Жер-Ай жүйесін алуға болады. Күн жүйесінің қозғалу барысында осы аталған үш шама $K, U_{мен}$ және $U_{сырт}$ $-$ өзгеріске ұшырайды, алайда, олардың алгебралық қосындысы тұрақты болып қалады.

Қорыта келе (4.54) теңдеуі инерциалды және инерциалды емес те санақ жүйелерінде орындала алады. (4.55)-теңдеу, яғни толық механикалық энергияның сақталу заңы тек инерциялық санақ жүйесінде ғана орындалады.

Жаңа түсініктердің маңызы туралы

Механикалық энергияның өзгерістері мен сақталуын дұрыс түсіну үшін тосын күштерге және жүйенің меншікті механикалық энергиясы деген жаңа түсініктерге көңіл бөлген жөн.

1. Көптеген жағдайлар үшін тосын күштер туралы түсінікті енгізбесе бөлшектер мен жүйелердің қасиеттерін энергия түрінде түсіну принципті мүлде мүмкін емес. Әрбір нақты жағдайлар үшін қандай күштер тосын бола алатынын анықтап алу шарты орындалу керек, себебі тосын күштердің жұмысы ғана өрістегі бөлшектердің механикалық энергиясының өсімшесін (4.31) және өрістегі жүйенің толық механикалық энергиясының өсімшесін (4.54), ішкі диссипативті күштердің жұмысымен бірге анықтай алады.

2. Жүйенің механикалық энергиясы туралы сөз қозғағанда әрбір нақты жағдай үшін келесі айырмашылықтарды анық шешу қажет – қандай энергия туралы сөз қозғалады: сыртқы өрістегі $E_{\text{мен}}$ меншікті механикалық энергия ма немесе E - толық механикалық энергия ма? Олардың өсімшелері (4.49) бен (4.54) сәйкес әртүрлі формулалармен анықталады. Бұл энергиялар әртүрлі. Екінші жағдай үшін жүйе сыртқы өрісте болғанда энергияның құрамына таңдалынып алынған өрістің сыртқы потенциалдық энергиясы да енеді (4.53).

Іс жүзінде меншікті энергия мен толық энергияларды ажырату оңай емес. Осындай қателер көптеген жағдайларда орын алады. Тіпті, механикалық энергияның сақталуы мен өзгеруіне анықтама бергеннің өзінде осындай қателер кездеседі.

$\boldsymbol{K}$ − және $\boldsymbol{Ц}$-санақ жүйелеріндегі энергиялар арасындағы байланыс

Ең алдымен, жүйенің кинетикалық энергиясы үшін осы байланысты белгілеп алайық. K −санақ жүйесінде таңдап алынған бөлшектер жүйесінің кинетикалық энергиясы K болсын. i −ші бөлшектің жылдамдығын келесі өрнекпен келтірейік: $\mathbf{v}_i = \tilde{\mathbf{v}}_\text{i} + \boldsymbol{V}_C$, мұндағы $\tilde{\mathbf{v}}_\text{i}$ −$Ц$−санақ жүйесіндегі осы бөлшектің жылдамдығы, $\boldsymbol{V}_C - K$ −санақ жүйесімен салыстырғандағы $Ц$-санақ жүйесінің жылдамдығы. Сонда жүйенің кинетикалық энергиясы тең:

$$K = \sum \frac{m_i \mathbf{v}_i^2}{2} = \sum \frac{m_i(\tilde{\mathbf{v}}_i + \mathbf{V}_C)^2}{2} = \sum \frac{m_i \mathbf{v}_i^2}{2} + \mathbf{V}_C \sum m_i \tilde{\mathbf{v}}_i + \sum \frac{m_i V_C^2}{2} .$$

Масса центрі $Ц$− жүйеде тыныштықта орналасқандықтан (3.9) теңдеуге сай $\sum m_i \tilde{\mathbf{v}}_i = 0$ деп жазуға болады, сонда осының алдындағы өрнек келесі түрге өзгереді:

$$\boxed{K = \widetilde{K} + \frac{1}{2} m V_C^2,} \tag{4.56}$$

мұндағы, $\widetilde{K} = \frac{1}{2} \sum m_i \tilde{v}_i^2 - Ц$ − жүйедегі бөлшектердің кинетикалық энергиясының қосындысы, $m -$ барлық жүйенің массасы.

(4.56) теңдеуі **Кениг теоремасын** сипаттайды: *бөлшектердің кинетикалық энергиясы Ц-жүйедегі $\widetilde{K}$ қорытынды кинетикалық энергиядан* *және бөлшектер жүйесінің біртұтас қозғалысының кинетикалық энергиясынан тұрады.* Бұл өте маңызды тұжырым және ол қатты дененің қозғалысын анықтағанда жиі қолданады.

(4.56) формуладан $Ц$ -жүйе*де бөлшектер жүйенің кинетикалық энергиясы минималды болады.* $Ц-$ жүйесінің ерекшелігі де міне, осында. Шынында да, $Ц$-жүйеде $\mathbf{V}_C = 0$, сондықтан (4.56) теңдеуінде тек $\widetilde{K}$ қана қалады.

Енді жүйенің $E_{\text{мен}} -$ меншікті механикалық энергиясын анықтауға көшейік. $U_{\text{мен}} -$ жүйенің меншікті потенциалдық энергиясы тек қана жүйенің конфигурациясына ғана тәуелді, сондықтан $U_{\text{мен}} -$ барлық санақ жүйелерінде де бірдей. (4.56) теңдеудің оң және сол жақтарына $U_{\text{мен}} -$ні қосып, $K -$ санақ жүйесінен $Ц-$ санақ жүйесіне өткенде $E_{\text{мен}} -$меншікті механикалық энергияның түрленген формуласын аламыз:

$$E_{\text{мен}} = \tilde{E}_{\text{мен}} + \frac{1}{2}\, mV_C^2, \tag{4.57}$$

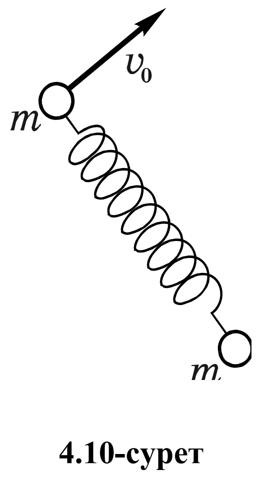
мұндағы $\tilde{E} = \widetilde{K} + U_{\text{мен}}$. Осы энергияны *жүйенің ішкі механикалық энергиясы* деп атайды.

Мысал. Тегіс горизонталь жазықтықта екі кішігірім шайба жатыр, олардың массалары m және олар салмақсыз жіппен бірімен бірі серіппемен қосылған. Шайбаның біреуіне $v_0 -$бастапқы жылдамдық берілген (4.10-сурет, көрініс үстінен). Қозғалыс барысында осы жүйенің $\tilde{E} -$ішкі механикалық энергиясын табу керек.

Шығару жолы. Жазықтық тегіс болғаннан кейін жүйе қозғалыс барысында тұйықталған жүйе рөлін атқарады. Осы себептен оның $E_{\text{мен}} -$ меншікті механикалық энергиясы мен $V_C -$масса центрінің жылдамдығы өзінің алғашқы мәндеріне сай сақталады: $E_{\text{мен}} = mv_0^2/2$ және $V_C = v_0/2$.(4.57) – теңдеуіне осы мәндерді қойып, келесі:

$$\tilde{E} = E_{\text{мен}} - 2mV_C^2/2 = mv_0^2/4$$

өрнегін табамыз.



4.10-сурет

Мұнда, $2m -$жүйенің массасы. $\tilde{E} -$ ішкі механикалық энергия осы жүйенің айналу қозғалысы мен тербелісіне тәуелді және басында $\tilde{E}$ жүйенің тек айналу қозғалысы энергиясына ғана тәуелді болатын.

Егер жүйедегі бөлшектер тұйықталған болса және осы жүйеде механикалық энергиялар өзгеріп жатса, онда (4.57) формуладан: $\Delta E_{\text{мен}} = \Delta\tilde{E}$ қорытынды шығады, яғни кез келген инерциалды жүйеге қатысты меншікті механикалық энергияның өсімшесі ішкі механикалық энергияның өсімшесіне тең. Осы жағдайларда егер бөлшектердің қозғалыс жүйесін біртұтас деп алатын болсақ, онда кинетикалық энергия өзгермейді, себебі тұйықталған жүйе үшін $V_C = const.$

Егер тұйықталған жүйе консервативті болса, онда оның механикалық энергиясы барлық инерциялық санақ жүйесінде сақталады, осы қорытынды Галилейдің салыстырмалы принципімен түгелдей сәйкеседі.

§ 4.6. Екі бөлшектің соқтығысуы

Қажетті мәліметтер

Зерттеу құралы ретінде тек импульстің және энергияның сақталу заңдарын ғана пайдалана отырып, екі бөлшектің соқтығысуларының түрлі жағдайларын қарастырайық. Осы жерде біз бөлшектердің өзара әрекеттесуінің нақты түріне тәуелсіз түрде өтіп жатқан процестік қасиеттер жайлы көп мағлұматтар алуға болатындығын көреміз. Мұнымен қатар *Ц-жүйе*нің де процестерді талдау және есептеуде қаншалықты тиімді болатындығын да аңғарамыз.

Бұл жерде бөлшектердің соқтығысуылары жайлы сөз болып отырса да, одан әрі қарай тұжырымдар мен қорытындыларды кез келген денелердің соқытығысуларына да қолдануға болады. Тек бөлшектің жылдамдығы орнына әрбір дененің инерция центрінің жылдамдығын, ал бөлшектің кинетикалық энергиясының орнына әрбір дененің кинетикалық энергиясының оның тұтастай қозғалысын сипаттайтындай бөлігін алса болғаны.

Бастапқы жүйе инерциялық екі бөлшектен тұратын жүйе – тұйықталған, бөлшектердің соқтығысқанға дейінгі және одан кейінгі импульстері және жылдамдықтары олардың арақашықтықтары жеткілікті үлкен қашықтыққа сәйкес келеді деп есептеледі және осы кезде өзара әрекеттесу потенциалдық энергиясын ескермеуге болады.

Сонымен қатар соқтығысқаннан кейінгі шамаларды оң жақ шекесіне қойылған штрихпен, ал *Ц*-жүйесіне қатысты шамаларды олардың етегіндегі нөл белгісімен белгілейміз.

Енді тікелей мәселенің өзіне көшейік. Бөлшектердің соқтығысуларының үш: абсолют серпімсіз, абсолют серпімді және аралық жағдай – серпімсіз түрін ажыратады.

§ 3.4 соңында әрбір бөлшектің импульсін *Ц*-жүйеде анықтау үшін (3.12) теңдеу келтірілген. Осы өрнекті төмендегідей түрде келтірейік:

$$\widetilde{\mathbf{p}}_1 = \mu(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), \widetilde{\mathbf{p}}_2 = \mu(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1), \tag{4.58}$$

мұндағы, $\mathbf{v}_1$ мен $\mathbf{v}_2 -$ бастапқы санақ жүйесіндегі бөлшектердің жылдамдығы, $\mu -$ *жүйенің* келтірілген массасы,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \tag{4.59}$$

мұндағы, m_1 мен $m_2 -$ бөлшектердің массасы.

(4.58) теңдеуден *Ц*-жүйеде екі бөлшектің де массалары модульдері бойынша бірдей, ал бағыттары бойынша қарама-қарсы. Әрбір бөлшектің импульс модулі тең:

$$\widetilde{\mathbf{p}} = \mu v_{\text{ат}} \tag{4.60}$$

$v_{\text{ат}} = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| -$ бір бөлшектің екінші бөлшекке *қатысты* жылдамдығы.

Енді кинетикалық энергияға көңіл бөлейік. *Ц*-жүйесіндегі қос бөлшек үшін кинетикалық энергияның қосындысы тең:

$$\widetilde{K} = \widetilde{K}_1 + \widetilde{K}_2 = \tilde{p}^2/2m_1 + \tilde{p}^2/2m_2.$$

(4.59) теңдеуіне сәйкес $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{\mu}$ теңдеуі шығады, сонда $\widetilde{K}$ түрі келесі өрнегіне өзгереді:

$$\widetilde{K} = \frac{\tilde{p}^2}{2\mu} = \frac{\mu v_{\text{ат}}^2}{2}. \tag{4.61}$$

Егер бөлшектер бір-бірімен өзара әрекетессе, онда *Ц*-жүйедегі бөлшектің механикалық энергиясы тең:

$$\tilde{E} = \widetilde{K} + U,$$

мұндағы, U – осы бөлшектердің әрекеттесуінің потенциалдық энергиясы.

Осыдан әрі қарай бөлшектер бір-бірімен соқтығысқанда келесі шарттарды еске алу қажет:

1) бастапқы *К*-санақ жүйесі инерциалды;
2) екі бөлшектен құралған жүйе тұйықталған;
3) бөлшектердің импульстері (жылдамдықтары) соқтығысқанға дейін және кейін бөлшектер арасындағы арақашықтықтары айтарлықтай жағдайларға сәйкес; ал өзара әрекеттесудің потенциалдық энергиясын ескермеуге болады.

Сонымен қатар соқтығысқаннан кейінгі жүйенің шамаларын штрихпен, ал $Ц-$ жүйесіндегі шамаларды $\sim$ (тильда) үстінен белгілеген жөн.

Бөлшектердің: абсолютті серпімсіз, абсолютті серпімді және аралық жағдай – серпімсіз сияқты үш түрлі соқтығысулары белгілі.

Абсолют серпімсіз соқтығысу

Соның нәтижесінде екі бөлшек бір-біріне жабысып қалады да, одан әрі біртұтас болып қозғалады. Массалары m_1 және m_2 болатын екі бөлшектің соқтығысқанға дейінгі жылдамдықтары K-жүйеде $\mathbf{v_1}$ және $\mathbf{v_2}$ болсын. Соқтығысудан кейін массасы $m_1 + m_2$ бөлшек пайда болады, бұл тікелей ньютондық механикадағы массаның аддитивтілігінен шығады. Пайда болған бөлшектің $\mathbf{v}'$ жылдамдығын бірден импульстің сақталу заңынан шығарып алуға болады:

$$(m_1 + m_2)\mathbf{v}' = m_1\mathbf{v_1} + m_2\mathbf{v_2}\ .$$

$\mathbf{v}'$ жылдамдық жүйенің инерция центрінің жылдамдығына тең екені анық.

$Ц$-жүйеде бұл процесс тіптен қарапайым болады: соқтығысуға дейін екі бөлшекте бір біріне қарама-қарсы бірдей $\tilde{p}$ импульспен қозғалады, алсоқтығысқаннан кейін пайда болған бөлшек тыныштықта болып шығады. Осы кезде бөлшектердің қосынды $\widetilde{K}$ кинетикалық энергиясы түгелдей пайда болған бөлшектің Q ішкі энергиясына өтеді, яғни $\widetilde{K} = Q$. Осыдан (4.61) формуласын ескере отырып, Q табамыз:

$$Q = \frac{\mu v_{сал}^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)^2\ . \qquad (4.62)$$

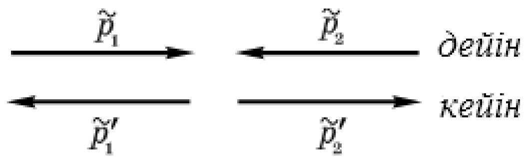
Сонымен, Q шамасы берілген бөлшектер жұбы үшін тек олардың салыстырмалы жылдамдығына ғана тәуелді болады.

Абсолют серпімді соқтығысу

Мұның нәтижесінде бөлшектердің ішкі энергиясы өзгеріссіз қалады, сондықтан жүйенің кинетикалық энергиясы да өзгеріссіз. Екі жағдайды: маңдайлық және маңдайлық емес соқтығысуларды қарастырайық.

1. **Маңдайлық соқтығысу**, бұл жерде екі бөлшек те соқтығысқанда дейін де, соқтығысқаннан кейін де бір түзудің бойымен қозғалады. Соқтығысқанға дейін бөлшектердің K-жүйедегі жылдамдықтары $\mathbf{v}_1$ және $\mathbf{v}_2$ болсын бөлшектер бір-біріне қарсы келеді немесе бір-бірін қуалап келеді. Осы бөлшектердің соқтығысқаннан кейінгі жылдамдықтары қандай болады?

Процесті әуелі *Ц-жүйе*де қарастырайық мұнда бөлшектердің импульстері соқтығысқанға дейін де, одан кейін де модульдері жағынан бірдей және бағыттары қарама-қарсы болады (4.11-сурет).



4.11-сурет

Қосынды кинетикалық энергиясы соқтығысқанға дейін және одан кейін олардың келтірілген массасы тәрізді бірдей болатындықтан (4.61) бойынша әрбір бөлшектің импульсі соқтығысу нәтижесінде тек бағытын қарама-қарсыға өзгертеді, ал модулі бойынша өзгеріссіз қалады, яғни $\tilde{\mathbf{p}}_i' = -\tilde{\mathbf{p}}_i$ мұндағы, $i = 1, 2.$ Соңғы қатынас *Ц-жүйе*ден *К*-жүйеге өткен кездегі әрбір бөлшектердің жылдамдықтарын түрлендіру формулаларына жатады. Сонда:

$$\tilde{\mathbf{v}}_i' = -\tilde{\mathbf{v}}_1$$

Енді *К*-санақ жүйесіндегі соқтығысқаннан кейінгі бөлшектердің жылдамдығын табамыз. ол үшін *Ц-жүйе*ден *К*-жүйеге өткен кездегі әрбір бөлшектердің жылдамдықтарын түрлендіру формулаларына өтіп, келесі өрнегін табамыз:

$$\mathrm{v}_i' = \mathrm{V_c} + \tilde{\mathrm{v}}_i' = \mathrm{V_C} - \tilde{\mathrm{v}}_i = \mathrm{V_C} - (\mathrm{v}_i - \mathrm{V_C}) = 2\mathrm{V_C} - \mathrm{v}_i.$$

мұндағы, $V_C -$ инерция центрінің (*Ц-жүйе*нің) *К*-санақ жүйесіндегі жылдамдығы; бұл жылдамдық (3.9)-формуламен анықталады. Сонымен i −ші бөлшектің соқтығысқаннан кейінгі *К*-жүйедегі жылдамдығы:

$$\mathrm{v}_i' = 2\mathrm{V_C} - \mathrm{v}_i, \tag{4.63}$$

мұндағы, $i = 1,2$. Кез келген бір x осіне проекциялағандағы бұл теңдіктің түрі:

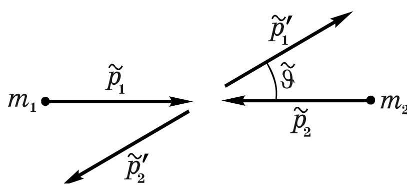
$$\upsilon_{ix}' = 2V_{Cx} - \upsilon_{ix}. \tag{4.64}$$

Ал егер бөлшектердің массалары бірдей болса, онда соқтығысу нәтижесінде бөлшектердің жай ғана жылдамдықтарымен алмастырғандығына жеңіл көз жеткізуге болады, яғни $\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_2$ және $\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_1$.

2. Маңдайлық емес соқтығысу. Бұл жерде екі бөлшек те соқтығысуға дейін тыныштықта болатын жағдайды қарастырамыз. *К*-жүйеде массасы m_1 және импульсі $\mathbf{p}_1$ бөлшек массасы m_2 *тыныштықтағы* бөлшекпен маңдайлық емес серпімді соқтығысу жасасын. Осы бөлшектердің соқтығысудан кейінгі мүмкін импульстері қандай болады?

Бұл процесті де әуелі *Ц-жүйеде* қарастырамыз. Мұнда да өткен жағдайда сияқты екі бөлшек соқтығысқаннан кейін де кез келген уақытта модульдері бойынша бірдей және бағыттары қарама-қарсы импульске ие болады. Сонымен қатар әрбір бөлшектің импульсі соқтығысу нәтижесінде модулі бойынша өзгермейді, яғни:

$$\tilde{p}' = \tilde{p}.$$



4.12-сурет

Бірақ енді бөлшектердің алшақтай ұшып шығу бағыты бөлек болады. Ол енді бастапқы қозғалыс бағытымен қандай да бір $\tilde{\vartheta}-$ бұрыш жасайды (4.12-сурет). $\tilde{\vartheta}$ – бөлшектердің өзара әрекеттесу заңына және олардың соқтығысу кезіндегі өзара орналасуына тәуелді болады.

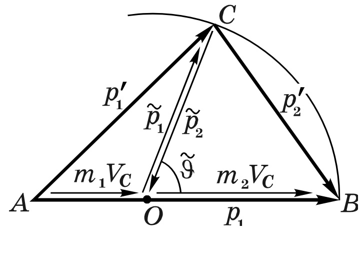
$$\begin{aligned} \mathbf{p}_2' &= m_2\mathbf{v}_2' = m_2(\mathbf{V}_C + \tilde{\mathbf{v}}_2') = m_2\mathbf{V}_C + \tilde{\mathbf{p}}_2' \\ \mathbf{p}_2' &= m_2\mathbf{v}_2' = m_2(\mathbf{V}_C + \tilde{\mathbf{v}}_2') = m_2\mathbf{V}_C + \tilde{\mathbf{p}}_2' \end{aligned} \qquad (4.65)$$

мұндағы, $\mathbf{V}_C$*Ц*− жүйенің *К*-санақ жүйесіне қатысты жылдамдығы.

Импульстің сақталу заңына сай осы теңдіктердің жеке-жеке сол және оң жақтарын қосып және $\tilde{\mathbf{p}}_1' = \tilde{\mathbf{p}}_2'$ екендігін ескеріп, өрнегін аламыз:

$$\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = (m_1 + m_2)\mathbf{V}_C = \mathbf{p}_1$$

Енді *импульстердің векторлық диаграммасын* салайық. Әуелі AB кесіндісімен $\mathbf{p}_1$ векторды (4.13-сурет), сосын $\mathbf{p}_1'$ және $\mathbf{p}_2'$ векторларды саламыз, соңғы векторлардың әрбіреуі (4.65) бойынша екі вектордың қосындысы болып табылады. Мұндай диаграмманың салынымдары $\vartheta-$ бұрышқа тәуелсіз. Осыдан келіп C нүктесі радиусы $\tilde{p}$ және AB кесіндіні $OA : OB = m_1 : m_2$ қатынасында бөлетін, центрі O нүктеде



4.13-сурет

болатын шеңбердің бойында ғана жата алатындығы шығады (4.13-сурет). Сонымен қатар қарастырылып отырған жағдайда (массасы m_2 бөлшек соқтыққанға дейін тыныштықта болады) бұл шеңбер B нүкте арқылы өтеді, себебі кесінді $OB = \tilde{p}$. Мұндағы, B −нүктесі $\mathbf{p}_1$ векторының ұшы болып табылады. Шындығында да,

$$OB = m_2 V_C = m_2 \frac{m_1 \upsilon_1}{m_1 + m_2}$$

мұндағы, υ_1 түсетін бөлшектің жылдамдығы. Ал біздің жағдайымызда $\upsilon_1 = \upsilon_{1cal}$, онда (4.59) және (4.60) бойынша,

$$OB = \mu \upsilon_{\text{ат}} = \tilde{p}.$$

Сонымен екі бөлшектің серпімді соқтығысуына сәйкес келетін импульстердің векторлық диаграммасын салу үшін (олардың біреуі бастапқы кезде тыныштықта) келесі шарттар қажет:

1) Әуелі түсетін бөлшектің p_1 импульсіне тең болатын AB кесіндіні салу керек;

2) Сосын $\mathbf{p}_1$ вектордың ұшы $- B$ нүктесі арқылы радиустың шеңберін сызу керек:

$$\tilde{p} = \mu \upsilon_{\text{ат}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_1 \ . \qquad (4.66)$$

Шеңбердің центрі – O нүктесі –AB кесіндіні $AO : OB = m_1 : m_2$ қатынаспен екіге бөледі.

Сонымен осы шеңбер дегеніміз – ABC импульстер ұшбұрышындағы C төбесінің барлық мүмкін жағдайларының геометриялық орны болып табылады, ал оның AC және AB қабырғалары дегеніміз – бөлшектердің соқтығысқанынан кейінгі мүмкін импульстері (*K*-санақ жүйесінде).

Массалардың қатынасына байланысты $\mathbf{p}_1 -$ вектордың басы A–нүктесі осы шеңбердің ішінде, бойында немесе сыртында жата алады (4.14-сурет).

Барлық үш жағдайларда да $\tilde{\vartheta}$ бұрышы 0-ден π- ге дейінгі барлық мәндерді қабылдай алады. Ал түсетін бөлшектің ϑ бұрышының мәні және бөлшектердің θ шашырау бұрышының мәндері төмендегідей өзгереді:

а) $m_1 < m_2 0 < \vartheta \leq \pi \theta > \pi/2,$

б) $m_1 = m_2 0 < \vartheta \leq \pi/2 \theta = \pi/2,$

в) $m_1 > m_2 0 < \vartheta \leq \vartheta_{1max} \theta < \pi/2,$

мұндағы, $\vartheta_{1max} - шектік\ бұрыш$

$$\sin \vartheta_{1max} = m_2/m_1 \qquad (4.67)$$

формуласымен анықталады.

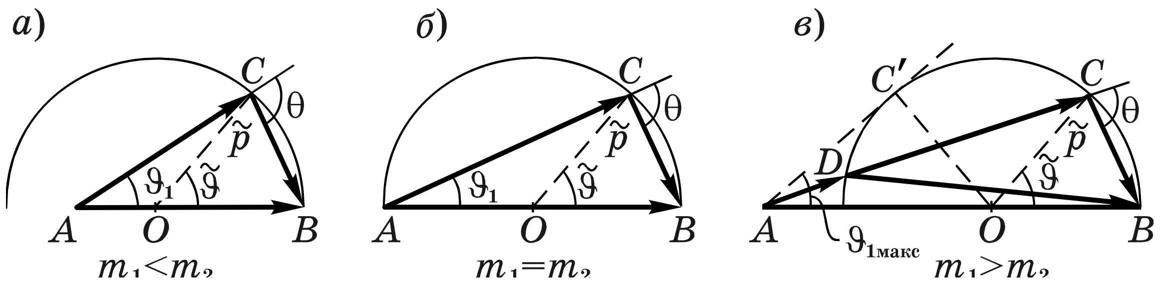
Ол тікелей (4.14, *б*-суреттен)$(m_2 > m_1)$ шығады:

$$\sin \vartheta_{1max} = OC'/OA = OB/OA = m_2/m_1.$$

Сонымен қатар, тағы да назар аударатын жағдай бар. Соңғы жағдайда $(m_1 > m_2)m_1$ бөлшегі бұрыштың бір ғана ϑ_1 мәніне сай AC импульсімен де AD импульсімен де шашырай алады (4.14, б-сурет), яғни бұл жағдайда шешім бірмәнді емес. Массасы m_2 бөлшекпен де тура осындай жағдай туады.

Ақыры, импульстердің осы векторлық диаграммасынан ϑ_1 және $\tilde{\vartheta}$ бұрыштарының арасындағы байланысты да табуға болады.

Берілген процесс жайлы тек импульс пен энергияның сақталу заңдарына сүйене отырып, осыдан да артық деректер ала алмаймыз.



4.14-сурет

Сонымен импульс пен энергияның сақталу заңдарының өздері-ақ қарастырылып отырған процестің қасиеттері жайлы бірқатар қорытындылар жасауға мүмкіндік береді. Мұнда осы қасиеттердің жалпылама сипатта болатындығы, олардың бөлшектердің өзара әрекеттесу түріне еш тәуелсіз болатындығының маңызы аса зор.

Бірақ бір маңызды жағдайға да назар аудару қажет. Импульс пен энергияның сақталу заңына сүйенетін импульстердің векторлық диаграммасы бөлшектердің соқтығысқаннан кейін ұшып шығуларының толық суреттемесін бере алады, мұның өзі-ақ үлкен жетістік, бірақ ол осы мүмкін жағдайлардың қайсысы нақты орындалатындығын көрсете алмайды. Бұл сұраққа жауап алу үшін соқтығысу процесіне қозғалыс теңдеулерін пайдаланғанда оны толығырақ қарастырған жөн. Яғни, соқтығысушы бөлшкетердің ϑ_1 шашырау бұрышы соқтығысатын бөлшектердің өзара әрекеттесу сипаты мен *көздеу қашықтығы* деп аталатын параметрге тәуелді. Көздеу қашықтығы – бұл түсетін бөлшектің импульсінің бағытын көрсететін түзу мен соқтығысу өтетін бөлшектің арасындағы қашықтық. Ал $(m_1 > m_2)$ жағдайында шешімнің бірмәнді болмауы бір ғана ϑ бұрыштың шашырауына *көздеу қашықтығының* екі мәні сәйкес келеді, әрі мұның өзі бөлшектердің өзара әрекеттесу заңына тәуелсіз болады.

Серпімсіз соқтығысулар

Соқтығысудың нәтижесінде шашырайтын бөлшектердің (немесе олардың біреуінің) ішкі энергиясы өзгереді, демек олай болса жүйенің қосынды кинетикалық энергиясы да өзгереді. Жүйенің кинетикалық энергиясының өсімшесін Q деп белгілеу қабылданған: $Q -$шамасының таңбасына байланысты серпімсіз соқтығысу *экзоэнергетикалық* $(Q > 0)$ немесе *эндоэнергетикалық* $(Q < 0)$ деп аталады. Бірінші жағдайда жүйенің кинетикалық энергиясы артады, ал екінші жағдайда кемиді. Серпімді соқтығысу үшін $Q = 0$ болатындығы анық.

Біздің мақсатымызға серпімсіз соқтығысқаннан кейінгі бөлшектердің мүмкін импульстерін табу жатады.

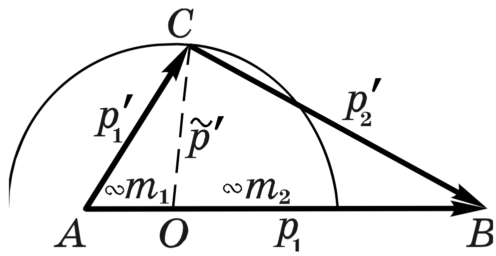
Бұл мәселе *Ц-жүйеде* жеңіл шешіледі. Шарт бойынша жүйенің берілген процесс үшін қосынды кинетикалық энергиясының өсімшесі:

$$\widetilde{K}' - \widetilde{K} = Q. \tag{4.68}$$

Бұл жағдайда $\widetilde{K}' \neq \widetilde{K}$ болатындықтан, (4.61) бойынша бөлшектердің импульсы олардың соқтығысуынан кейін модульдері бойынша өзгереді. (4.68)–гі $\widetilde{K}'$ –ті оның $\widetilde{K}' = \tilde{p}'^2/2\mu$ өрнегімен алмастырып, әрбір бөлшектің соқтығысуынан кейінгі $\tilde{p}'$-импульсін жеңіл табуға болады. Нәтижесінде:

$$\tilde{p}' = \sqrt{2\mu(\widetilde{K} + Q)} \tag{4.69}$$

Енді осы мәселені *К-жүйеде* қарастырайық, импульсы $\mathbf{p}_1$–ге тең және массасы $-m_1$ болатын бөлшек *тыныштықтағы* массасы $-m_2$-ге тең бөлшекке соқтығыссын. Бөлшектің соқтығысқаннан кейін шашырау жағдайларының мүмкіндігін қарастыру үшін импульстердің векторлық диаграммасын пайдаланған ыңғайлы.



4.15-сурет

Мұндай диаграмма серпімді соқтығысу үшін салынған диаграммаға ұқсас.

Соқтығушы бөлшектің $\mathrm{p}_1 = AB$ импульсін (4.15-сурет) O нүкте бөлшектің массаларына пропорционал түрде $OA : OB = m_1 : m_2$ екіге бөледі. Содан кейін O нүктеден (4.69) радиусы $\tilde{p}'$ $-$ға тең шеңбер жүргізіледі. Бұл шеңбер ABC импульстер ұшбұрышының С төбесінің барлық мүмкін қалыптарының нүктелерінің геометриялық орны болып табылады, ал үшбұрыштың AC және CB қабырғалары сәйкес бөлшектің соқтығысқаннан кейінгі импульстеріне тең. Енді серпімді соқтығысу кезіндегі B нүкте ($\mathbf{p}_1$ импульстің ұшы) шеңбердің бойында жатпайды, ол $Q > 0$ кезінде шеңбер ішінде, ал $Q < 0$ кезінде одан тыс жатады. 4.15-сурет соңғы жағдайға, яғни эндоэнергетикалық соқтығысуға сәйкес.

Табалдырық. Көптеген серпімсіз соқтығысуларда бөлшектің ішкі энегиясы олардың өздерінің қасиеттеріне тәуелді болатын *белгілі бір шамаға* ғана өзгере алады, бұларға мысалы, атомдар мен молекулалар арасындағы серпімсіз соқтығулары жатады. Осыған қарамастан соқтығушы бөлшектердің тіпті өте кішкентай кинетикалық энергясының өзінде деэкзоэнергетикалық процестер ($Q > 0$) өтіп жатады. Ал мұндай жағдайларда эндоэнергетикалық процестердің ($Q < 0$) *табалдырығы* болады. Соқтығушы бөлшектің минималды кинетикалық энергиясының табалдырығы деп кинетикалық энергияның қандай шамасынан бастап процестің энергетикалық мүмкіндігі туатынын айтады.

Сонымен бөлшектер ішкі энергиясы қайсыбір $|Q|$ мәнінен кем емес өсімше алатындай эндоэнергетикалық соқтығысуды іске асыруы керек. Осындай процесс қандай шарттарда мүмкін бола алады?

Бұл мәселе *Ц*-жүйеде жеңіл шешіледі, онда бөлшектің $\tilde{K}$-кинетикалық энергияның қосындысы олардың соқтығысуына дейінгі $|Q|$шамасынан кем болмауы керек, яғни $\tilde{K} \geq |Q|$. Осыдан кинетикалық энергияның $\tilde{K}_{\text{мин}} = |Q|$ белгілі бір минимал мәні болатын шарты туады, осының нәтижесінде жүйенің кинетикалық энергиясы түгелдей бөлшектің ішкі энергиясын арттыруға жұмсалады да және бөлшектер соқтығысқаннан кейін *Ц*-жүйесінде тоқталады.

Осы мәселені массасы m_1 бөлшек массасы m_2 тыныштықта жатқан бөлшекке келіп соқтығысқандағы *К*-санақ жүйесін қарастырайық. *Ц*-жүйеде $\tilde{K}_{\text{мин}}$ кезінде бөлшектер соқтығысқаннан кейін токтайтын болғандықтан, *К*-санақ жүйесінде соқтығушы бөлшектердің белгілі бір $K_{1\text{таб}}$ табалдырық кинетикалық энергиясында соқтығысқаннан кейін екі бөлшек те *бір тұтастай* қосынды импульспен қозғалады, енді осы қосынды импульстің өзі соқтығушы бөлшектің $\mathbf{p}_1$ импульсі мен $p_1^2/2(m_1 + m_2)$ - кинетикалық энергияның қосындысынан тұрады. Сондықтан:

$$K_{1\text{пор}} = \lfloor Q \rfloor + \frac{p_1^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

$K_{1\text{таб}} = p_1^2/2m_1$ болатындықтан, p_1^2 мәнін осы екі теңдеулерден шығарып тастап, аламыз:

$$K_{1\text{пор}} = \frac{(m_1+m_2)}{m_2} Q\ . \qquad (4.70)$$

Міне осы шама соқтығысушы бөлшектің табалдырық кинетикалық энергиясы болып табылады. Осыдан бастап берілген эндоэнергетикалық процестердің энергетикалық мүмкіншілігі туады.

(4.70) формула ядролық және атомдық физикада өте маңызды рөл атқарады. Осы формула арқылы көптеген эндотермиялық процестердің табалдырығын анықтауға мүмкіндік туады, сонымен қатар оларға сәйкес $|Q|$ энергияларын табуға болады.

§ 4.7. Сығылмайтын сұйықтардың механикасы

Механиканың бұл тарауында сұйықтар қозғалысының заңдарын зерттеу барысында сұйықтарды тұтас үзілмейтін орта деп қарастырады. Сұйықтың тығыздылығы қысымнан тәуелсіз, сондықтан сұйықты *сығылмайтын орта* деп қарастырады және ортаның тығыздылығы барлық көлем бойынша бірдей. Сұйықтың қозғалыс ағысының кинематикалық сипатын *Эйлер тәсілімен* келтірейік: таңдалынып алынған санақ жүйесінде сұйық үшін белгілі бір жылдамдық беріледі, яғни сұйықтың әрбір нүктесінің **v**– жылдамдығының *t*-уақытпен **r-**радиус-векторынан тәуелділігі беріледі.

Көптеген жағдайлар үшін ағып жатқан сұйықтың жеке-жеке қабаттары арасындағы үйкеліс күші елеусіз аз болғандықтан, сұйықты идеалды (шынайы) деп санауға болады (ішкі үйкеліссіз).

Ток түтігі мен сызықтары

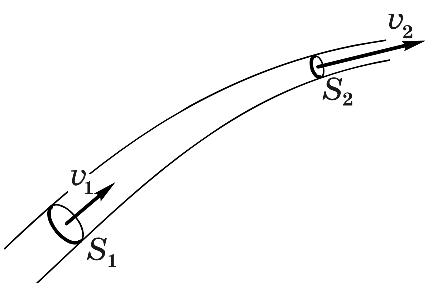
Тоқ сызығы – әрбір нүктесінде өзіне жүргізіліп жанамасының бағыты бойынша сұйықтың осы мезгіліндегі жылдамдық **v** – векторымен бірдей түсетін сызық. Осы сызықтар *ток сызықтары* деп аталады. *Ток сызықтарын* сызықтың сандарының өздеріне перпендикуляр орналасқан және өздері кесіп өтіп жататын сол ауданшаның ауданына қатынасы сұйық ағысының жылдамдығы жоғары жерде көбірек, ал сұйық ағыны баяулау жерде азырақ болатын етіп жүргізіледі. *Ток түтігі* - сұйықтың ток сызықтарымен шектелген бөлігі. **v** –векторының модуліне пропорционал. Сонымен ток сызықтарының бағыты **v** –векторының бағытымен сәйкес. Осындай көрініс сұйықтың әртүрлі нүктесіндегі вектордың модулі мен бағыты туралы мәлімет алуға мүмкіндік береді, яғни оның қозғалысын сипаттайды. Жылдамдық көбірек жерде сызықтар көбірек және керісінше.

Қалыптасқан, яғни стационар ағыс кезінде **v-**векторы t-дан тәуелсіз жағдайда, ток сызықтарының түрі өзгеріссіз қалады және ток сызықтары сұйықтағы бөлшектердің траекториясымен ток сызықтары сәйкес келеді.

Ток сызықтарымен қалыптасқан сұйықтың беті ток сызықтары тұйықталған контурдың барлық нүктелері арқылы өткізілген – оны *токтың түтігі* деп атайды. Сұйықтың стационар ағысында оның бөлшектері қозғалыс барысында ток түтігін кесіп өтпейді.

Үздіксіздік ағынның теңдеуі

Енді ток түтігі ішіндегі қалыптасқан ағысты қарастырайық. Ток түтігін оның кез келген көлденең қимасының барлық нүктелері үшін сұйық жылдамдығы бірдей болатындай етіп алайық. 4.16-суреттен Δt-уақыт аралығында ΔS −ауданның көлденең қимасынан $Sv\Delta t$-сұйықтың көлемі ағып өтеді. Сұйық сығылмайтын болғандықтан, ток түтігінің S_1 және S_2 көлденең қималараның арасындағы сұйықтың массасы өзгеріссіз қалады (4.16-сурет). Олай болса, S_1 және S_2 көлденең қималар арқылы өтетін сұйықтың көлемі Δt-уақыт аралығында бірдей. Осыдан келесі өрнек $S_1 v_1 = S_2 v_2$ шығады. Басқаша айтқанда сығылмайтын сұйық үшін $Sv -$ шамасы бір ток түтігінің кез келген қимасы үшін бірдей:



4.16-сурет

$$\boxed{Sv = \mathrm{const}} \qquad (4.71)$$

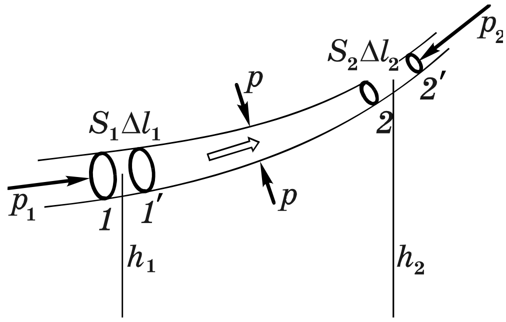
Бұл қатынасты *үзіліссіз ағынның теңдеуі* деп атайды.

Бернулли теңдеуі

Біртекті ауырлық өріс күшіндегі сұйықтың қалыпты ағысын қарастырайық. Ағып жатқан сұйық үшін оған қажетті кейбір маңызды параметрлер арасындағы қатынастарды энергия сияқты түсінік арқылы табуға болады. Осындай мақсат үшін сұйықтың ойша бір бөлігін алайық, бұл бөлік Δt уақыт моментінде тар ток түтігінің көлемін толтырады, **1**- және **2**-нормалды қималар арасындағы (4.17-сурет). $t + \Delta t$ моменті үшін тар ток түтігінің ішіндегі сұйық қиманың бағытына сай түтік бойымен қозғалады, бұл қозғалыс суретте қос нұсқағышпен келтірілген және *1'* мен *2'* қималар арасында орналасқан.

(4.54) теңдеуіне сай Δt уақыт аралығында сұйықтың осы бөлігінің толық механикалық энергиясының өсімшесі тең:

$$\Delta E = A_{\text{сырт}}^{\text{тос}}, \qquad (4.72)$$



4.17-сурет

$A_{\text{сырт}}^{\text{тос}} -$ қысым күшінің атқаратын жұмысы. Міне осы тосын күштерге жатады. Және қысым күштері түтіктің осы бөлігіне перпендикуляр болғандықтан жұмыс атқармайды. Тек **1-** мен **2-** қима арасына әсер ететінқысым күштері ғана жұмыс атқарады. Бұл жұмыс тең:

$$A_{\text{сырт}}^{\text{тос}} = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2.$$

Ағынның үзіліссіздігінен келесі теңдеу шығады: яғни *1-1'* және *2-2'* қималарының арасындағы көлем бірдей деген сөз:

$$A_{\text{сырт}}^{\text{тос}} = (p_1 - p_2)\Delta V. \qquad (4.73)$$

Сұйықтың ағысы қалыпты (стационарлы), сондықтан *1'*- мен *2*-қиманың арасындағы ток түтігіндегі сұйық бөлігінің толық механикалық энергиясы өзгермейді. Олай болса, қарастырып отырған сұйықтың бөлігі үшін $\Delta E-$ энергияның өсімшесін *2-2'* мен *1-1'* элементтерінің айырымы ретінде қарастырған жөн:

$$\Delta E = \left(\frac{1}{2}\rho\Delta V \upsilon_2^2 + \rho\Delta V g h_2\right) - \left(\frac{1}{2}\rho\Delta V \upsilon_1^2 + \rho\Delta V g h_1\right), \qquad (4.74)$$

мұндағы, $\rho -$ сұйықтың тығыздылығы.

(4.72) теңдеуіне сәйкес (4.73) пен (4.74) өрнектерді бір-біріне теңестіріп, сонан кейін оны $\Delta V -$ға бөліп, құраушы мүшелерін топтастырып, теңдеуді аламыз:

$$\rho\upsilon_1^2/2 + p_1 + \rho g h_1 = \rho\upsilon_2^2/2 + p_2 + \rho g h_2.$$

1 мен *2*-қималары кез келген жолмен алынғандықтан, осы формуланы төмендегідей келтіруге болады:

$$\boxed{\rho\upsilon^2/2 + p + \rho g h = const,} \qquad (4.75)$$

мұндағы, шамалардың бәрі бір ток сызығына жатады. Әрбір сызық үшін осындай өзінің константасы, яғни тұрақтысы болады.

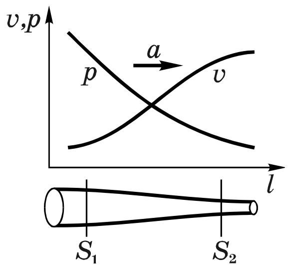
(4.75) теңдеуі **Бернулли теңдеуі** деп аталады. Бұл теңдеу идеалды сұйық үшін есептелінген, алайда, ол ішкі үйкелісі салыстырмалы түрде аз (тұтқырлық) болатын шынайы сұйықтар үшін де қолданылады.

Бернулли теңдеуін пайдалана алатын екі мысал келтірейік.

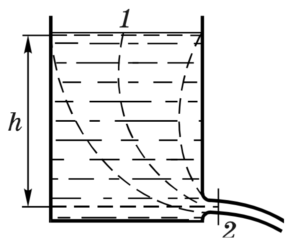
1-мысал. Горизонталь ток сызықтары үшін h шамасы бірдей болғандықтан Бернулли теңдеуі келесі түрге өзгереді:

$$\rho v^2/2 + p = const, \tag{4.76}$$

яғни нүктеге түсірілген қысым жылдамдықтың аз жерінде артық болады. 4.18-суретте өс бойына көлденең қимасы өзгеріп отыратын горизонталь түтікше көрсетілген. (4.71) сай $S_1 -$қимасымен салыстырғанда $v -$ағынының жылдамдығы S_2 көлденең қимада артығырақ болады, ал олай болса, сол жақтағы қысым да артық. Тағы да айта кету керек v, p мен $a-$векторының бағыты арасындағы график сұйықтың қозғалыс бағытына тәуелсіз.



4.18-сурет



4.19-сурет

2-мысал. Кең бактың бүйір жағындағы тесіктен ағып шығып жатқан сұйықтың жылдамдығын есептеп шығарайық 4.19-сурет.

Ток сызықтарының бәрі де сұйықтың бос жоғарғы бетінен (ыдыс кең) бастап осы тесіктен ағып жатады. Сондықтан Бернулли теңдеуіндегі тұрақты барлық ток сызықтары үшін бірдей. (4.75) теңдеуді ***1-2*** ток сызықтары үшін қолданайық және ***2*** деп белгілеген тесіктен басталатын h деңгейін есептейміз. Сонда:

$$pgh + p_0 = \frac{\rho v^2}{2} + p_0\,,$$

$p_0 -$ атмосфера қысымы, $v -2$ нүктедегі сұйықтың ағынының жылдамдығы. Осыдан:

$$v = \sqrt{2gh}\,. \tag{4.77}$$

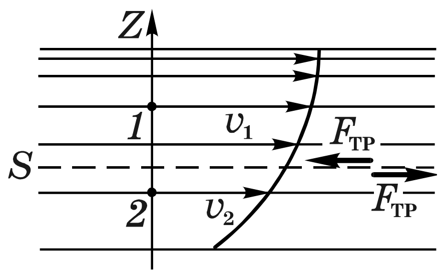
Бұл алынған нәтиже Бернулли теңдеуінің салдары болып табылады. Оны *Торичелли теңдеуі* деп атайды. Себебі Торичелли бұл өрнекті Бернуллиден 100 жылдай бұрын тұжырымдаған болатын. Сұйық кішкене тесіктен аққанда h биіктіктен еркін түсетін дененің жылдамдығымен ағып шығады. Реалды сұйықтар үшін ағын қозғалысы сұйықтың тұтқырлығының салдарынан кемірек болады.

Тұтқырлық

Реал сұйықтар мен газдар үшін ішкі үйкеліс болады, ол тұтқырлық деп аталады. Ішкі үйкелісі (тұтқырлығы) толығымен жоқ боп келетін сұйық – идеалды деп аталады. Тұтқырлықты ортаның қабаттарының бір-бірімен салыстырмалы қозғалыс кезіндегі үйкелісі деп қарастырады. Сұйықтарда тұтқырлық молекулалардың арасындағы тартылыс күшінің арқасында, ал газдарда атомдар мен молекулалардың соқтығысуларының нәтижесінде пайда болады.

$$F_{үйк} = \eta|\partial v/\partial z|S\,, \tag{4.78}$$

η-ішкі үйкеліс коэффициенті немесе тұтқырлық – оның шамасы сұйықтың табиғаты мен күйіне тәуелді. Мысалы, температураға тәуелді деп түсіндіруге болады; $\partial v/\partial z$ $-$жылдамдық модулінің *градиенті* (v мен z тәуелділік графигіндегі тіктілікті сипаттайды); $S-$ таңдалып алынған қабаттың арасындағы беттің ауданы (Z осіне осы бет перпендикуляр).



4.20-сурет

(4.78) формуласы S қабаттан жоғары орналасқан (4.20-сурет) сұйық S қабатынан төмен орналасқан қабатқа $F_{үйк}-$ күшімен (оңға қарай) әсер етеді.

Ал сұйықтың астыңғы қабаты оның үстіңгі қабатына тура осындай $F_{үйк}-$ күштің модулімен солға қарай әсер етеді.

4.20-суреттен S қабатының бойымен **1**-нүктеден өткізген тұтқырлық күші **2**-нүктемен салыстырғанда кем болатыны көрініп тұр, себебі $v\,(z)$ графигінің тіктілігі артық, ал олай болса, $\partial v/\partial z$ – градиенті де **2** нүктеде артық болады.

Бөлме температурасындағы $20℃$, мПа$\cdot$с кейбір сұйықтар үшін келтірілген тұтқырлық коэффициенті:

Су......................1,0   майсана майы...........1,0$\cdot 10^3$
Глицирин..........8,5$\cdot 10^2$ сынап.........................1,6

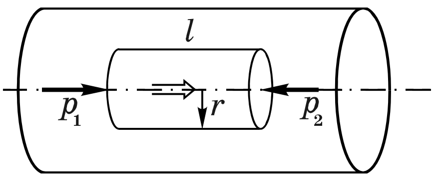
Ламинарлық және турбуленттік ағындар. Латынша *ламинарлық* – ламина – пластинка, қабат немесе тегіс, жазық деген мәнді білдіреді. Ламинарлық қозғалыстың ерекшелігіне оның қабаттылығы мен жүйелігі жатады. Түзусызықты түтікте ламинарлық ағыс кезінде сұйықтың бөлшектері түтіктің өсіне параллель түзусызықты траектория бойымен қозғалады. Алайда жылдамдықтың артуымен ағын тұрақсыз болып, турбуленттік күйге өтеді. Турбуленттілік – лат. –turbulentus – қарқынды, тәртіпсіз деген мағынаны білдіреді. Олай болса, сұйықтың бөлшектері турбуленттілік күйінде ретсіз, жүйесіз қозғалыстар жасайды, сөйтіп сұйықтың құрамындағы қабаттар бір-бірімен араласып кетеді. Мұндай тез және тәртіпсіз өзгерістер белгілі бір шарттарға байланысты ламинарлық ағындардың тұрақсыз жағдайларына сай туады. Турбуленттілік көбіне, кенет пайда болады. Ағынның сипаты ***Рейнольдс саны*** деп аталатын өлшемсіз шамаға тәуелді.

$$Re = \rho \upsilon l/\eta \,, \tag{4.79}$$

мұндағы, $\rho -$ сұйықтың тығыздылығы, $\upsilon -$ ағынға тән жылдамдық, $l -$ тән өлшем, $\eta -$ тұтқырлық. Сұйықтар Рейнольдс сандарының аз мәндерінде ламинарлық ағынмен сипатталады. Алайда белгілі бір Рейнольдс санының кризистік мәнінде ламинарлық ағын турбуленттілік ағынға өтіп кетеді. Егер дөңгелек түтік үшін оған тән өлшемді радиус ретінде алатын болсақ, онда Рейнольдс санының кризистік мәні $Re \approx 1000$ (су үшін) тең болады.

Қимасы дөңгелек түтіктердегі турбуленттік ағыс.

Радиусы $\boldsymbol{R}$ түзу түтік бойымен сұйық ағып жатсын. Ағыс стационарлы, яғни қалыпты, тоқ сызықтары түтіктің өсіне параллель. Түтіктің қабырғаларының бетінде сұйықтың жылдамдығы нөлге тең және оның өсінде максималды. Ең бірінші сұйық жылдамдығының өске дейінгі қашықтығына тәуелділігін табамыз, яғни, $\upsilon(\boldsymbol{r})$-ды. 4.21-суретте көрсетілгендей түтіктің ішінен сұйықтың цилиндрлік көлемін ойша бөліп аламыз: бұл цилиндрдің радиусы – $\boldsymbol{r}$, ұзындығы – $\boldsymbol{l}$ -ге тең. Сұйықтың барлық элементтері үдеусіз қозғалады, сұйықтың кез келген көлеміне әсер ететін сыртқы күштердің қосындысы нөлге тең. Ойша бөлініп алынған цилиндрдің бүйір бетіне $\boldsymbol{\eta|\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}r|2\pi r l}$ $-$ге тең үйкеліс күші әсер етеді. Ал осы цилиндрдің табанына алгебралық қосындысы $(\boldsymbol{p_1 - p_2})\boldsymbol{\pi r^2}$ $-$ге тең қысым күші әсер етеді.



4.21-сурет

Ағыс стационарлы болғандықтан, осы екі өзара қарама-қарсы күштер модульдері бойынша бір-біріне тең болуы қажет:

$$\eta|\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}r|2\pi r l = (p_1 - p_2)\pi r^2. \tag{4.80}$$

Түтіктің өсінен арақашықтық $r-$ өскен сайын $\upsilon -$жылдамдық азая бастайды, сондықтан $\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}r < 0$ және $|\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}r| = -\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}r$. Сонда (4.80) теңдеуін қайта жазуға болады:

$$-dv = \frac{p_1 - p_2}{2\eta l} r dr.$$

Осы өрнекті келесі шартты орындай отырып интегралдаймыз, егер цилиндрдің қабырғасының жанында $(r = R), v = 0$ тең болса:

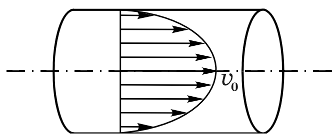
$$-\int_{v}^{0} \mathrm{d}v = \frac{p_1 - p_2}{2\eta l} \int_{r}^{R} r \mathrm{d}r\,.$$

Нәтижесінде келесі өрнекті аламыз:

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l}(R^2 - r^2). \qquad (4.81)$$

$v(r)$ – тәуелділік графигі 4.22-суретте көрсетілген, мұнда

$$v_0 = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2$$



4.22-сурет

Енді сұйықтың Q ағысын, яғни түтіктің көлденең қимасынан бір өлшем бірлігінде ($\text{м}^3/\text{с}$) сұйықтың қандай көлемі ағып өтетінін табамыз. Әр секунд сайын радиустың элементар сақинасы арқылы ағып өтіп жатқан сұйықтың көлемі тең:

$$(r, r + \mathrm{d}r), \qquad \mathrm{d}Q = v \cdot 2\pi r \mathrm{d}r.$$

(4.81) теңдеуден $v(r)$ –өрнегін алып, оны соңғы теңдеулерге қойып, сонан кейін r –бойынша интегралдап, келесі теңдеуді табамыз:

$$Q = \frac{p_1 - p_2}{2\eta l} \pi R^4 \qquad (4.82)$$

(4.82)-теңдеуі **Пуазейль формуласы** деп аталады. Q ағысы түтіктің радиусынан төртінші дәрежеде тәуелді. Сұйықтың тұтқырлығын тәжірибе жүзінде анықтау осы формулаға негізделген. Осы берілген сақина түтікте сұйықтың стационар ағысы үшін тұтқырлық күштің қуатын анықтайық. Кейбір төмендегідей пікірлерді пайдаланайық. Түтікте ағып жатқан сұйықтың кинетикалық энергиясы өзгермейді, сондықтан қысым күшімен тұтқырлық күштері қуаттарының алгебралық қосындысы нөлге тең: $P_{\text{ыс}} + P_{\text{тт}} = 0$. Осыдан $P_{\text{тт}} = -P_{\text{ыс}}$. Мұндағы $P_{\text{ыс}}$ – қысым күшінің қуаты, $P_{\text{тт}}$ – тұтқырлық күшінің қуаты. Енді $P_{\text{ыс}} = \int v \mathrm{d}F$ қысым күшінің қуатын есептеген жөн. Мұндағы, $\mathrm{d}F$ –цилиндр қабатының - $2\pi r dr$-ге тең көлденең қимасының ұшындағы қысымдар айырымы. Олай болса:

$$P_{\text{ыс}} = \int_0^R v(p_1 - p_2) 2\pi r \mathrm{d}r\ .$$

(4.81) теңдеуін алмастырғаннан кейін және (4.82) теңдеуді ескере отырып, оны интегралдағаннан кейін келесі өрнекті аламыз:

$$P_{\text{ыс}} = (p_1 - p_2)Q.$$

Сонымен іздеп отырған тұтқырлық күшінің қуаты анықталады:

$$P_{\text{тт}} = -(p_1 - p_2)Q, \tag{4.83}$$

мұнда, $p_1 > p_2$ шартын еске сақтау керек.

Мысал. Қысым айырымы $p_1 - p_2 = 10$ атм $= 10^6$Па және сұйықтың ағыны $Q = 1{,}0\text{м}^3/c$ болғанда тұтқырлық күші қуатының модулі (4.83) теңдеуге сәйкес $10^6 \cdot 1{,}0 =$ 1МВт -қа тең болады. Бұл формуланың құбырда сұйықтың тұрақты ағымын құру үшін қуаттың қандай мөлшерін жұмсауға дәл келетін ұсынысты беруде маңызы зор.

Есептер

4.1. Жұмыс пен қуат. Массасы m Жер бетінен горизонтқа α бұрыш жасай $\mathbf{v}_0$ бастапқы жылдамдықпен тас лақтырылады. Ауаның кедергісін ескермей қозғалыс басталғаннан t секунд ішінде атқарылған жұмысты табу керек.

Шығару жолы. Тастың қозғалыс басталғаннан кейін t секунд өткеннен кейінгі жылдамдығы $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}t$. Ауырлық күшінің осы уақыттағы қуаты:

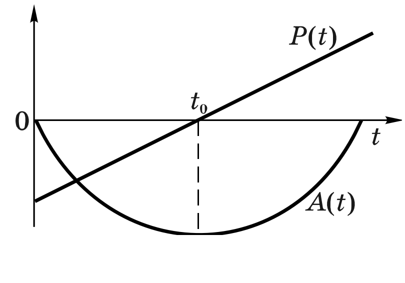
$$P = m\mathrm{g}\mathrm{v} = m(\mathrm{g}\mathrm{v}_0 + \mathrm{g}^2 t).$$

Біздің жағдайымызда $\mathbf{g}\mathbf{v}_0 = \mathrm{g}v_0 \cos(\pi/2 + \alpha) = -\mathrm{g}v_0 \sin\alpha$, сондықтан

$P = m\mathrm{g}(\mathrm{g}t - v_0 \sin\alpha)$.

Осыдан $t < t_0 = (v_0/\mathrm{g}) \sin\alpha$ кезінде қуат $P < 0$, ал керісінше, $t > t_0$ кезінде $P > 0$ болады.

Ауырлық күшінің алғашқы t секунд ішінде атқарған жұмысы:
$A = \int_0^t P\mathrm{d}t = mgt(gt/2 - v_0 \sin\alpha)$.
$P(t)$ және $A(t)$ тәуелділіктерінің графиктері 4.23-суретте көрсетілген.



4.23-сурет

4.2. Өріс күштерінің консервативтілігі. Екі стационарлық күш өрістері берілген:

1) **F**=ay**i**; 2) $\mathbf{F} = ax\mathbf{i} + by\mathbf{j}$;

мұндағы, **i**, **j** - X және Y өстерінің орттары; a және b – тұрақтылар. Осы өрістер потенциалдық бола ма?

Шығару жолы. Әрбір күштің қайсыбір $1(x_1, y_1)$ нүктеден екінші бір $2(x_2, y_2)$ нүктеге дейінгі аралықтағы атқаратын жұмысын табамыз:

1) $\delta A = \mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{r} = ay\mathbf{i}\mathrm{d}\mathbf{r} = ay\mathrm{d}x,\qquad A = a\int_{x_1}^{x_2} y\mathrm{d}x$

2) $\delta A = (ay\mathbf{i} + by\mathbf{j})\mathrm{d}\mathbf{r} = ax\mathrm{d}x + by\mathrm{d}y,$

$$A = a\int_{x_1}^{x_2} x\mathrm{d}x + b\int_{y_1}^{y_2} y\mathrm{d}y$$

Бірінші жағдайда интеграл $y(x)$ функциясының түріне тәуелді, олай болса жолдың пішініне де тәуелді болғаны, сондықтан өріс күші консервативті емес. Екінші жағдайда екі интеграл да жолдың пішініне тәуелсіз, яғни олар жолдың бастапқы және соңғы нүктедегі координаттарына ғана тәуелді. Демек, екінші өріс консервативті.

4.3. Өріс ішіндегі бөлшектердің потенциалдық энергиясы. Қайсыбір потенциалдық өрістегі бөлшекке әсер ететін күш келесі теңдеумен берілген болсын: $\mathbf{F} = a(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$, мұндағы, $a -$ тұрақты шама, **j** және **i** сәйкес түрде X және Y өстерінің орттары. Бөлшектің осы өрістегі $U(x, y)$ потенциалдық энергиясын табу керек.

Шығару жолы. **F** күштің O нүктеден (4.14) сәйкес кез келген нүктеге дейінгі жол бойында элементар жұмысын есептеп шығарайық. Осы элементар жұмысты dr орын ауыстырғандағы қайсыбір U функцияның кемуімен есептеп табуға болады. Функция өзінің анықтамасы бойынша осы өріс ішіндегі бөлшектердің потенциалдық энергиясы болып табылады. Сонымен,

$$\delta A = Fdr = a(ydx + xdy) = -d(-axy).$$

Осыдан $U(x, y) = -axy + const.$

4.4. Есептің шешуін табудағы әртүрлі тәсілдер. Массасы m шарик қаттылық коэффициенті $\varkappa$ болатын серпімді салмақсыз жіпке ілінген. Содан кейін шарикті жіп деформацияланбайтындай күйде көтеріп, оны бастапқы жылдамдықпен итерусіз қоя берген. Шариктің қозғалысы кезіндегі x_m максимал ұзаруын табу керек.

Шығару жолы. Энергетика тарапынан қарастыра отырып, осы есепті үш тәсілмен шығарып көрейік.

1. (4.29) теңдеуге сүйенеміз: шариктің кинетикалық энергиясының өсімшесі шарикке түсірілген барлық күштердің атқаратын жұмыстарының алгебралық қосындысына тең. Біздің жағдайымызда бұл mg ауырлық күші және жіп тарапынан $F_{\text{серп.}} = \boldsymbol{x}$ серпімділік күші (4.14). Шариктің бастапқы және ақырғы қалыптарында оның кинетикалық энергиясы нөлге тең (жіптің максимал созылуы кезінде шариктің тоқталатыны белгілі), сондықтан (4.29) бойынша жұмыстардың қосындысы

$$A_{\text{ау.}} + A_{\text{серп.}} = 0,$$

немесе:

$$mgx_m + \int_0^{x_m}(-\varkappa x)\mathrm{d}x = mgx_m - \varkappa x_m^2/2 = 0\ .$$

Осыдан: $x_m = 2mg/$.

2. Шарикті Жердің ауырлық өрісі ішінде қарастыруға болады. Мұндай жағдайда Жердің ауырлық өрісінде шариктің толық механикалық энергиясын қарасытырған жөн. (4.31)-теңдеуіне сай толық механикалық энергияның өсімшесі ретінде тосын күштердің жұмысы алынады. Тосын күш ретінде серпімділік күші алынады. Жердің ауырлық өрісінде толық механикалық энергияиянің өсімшесі ретінде шариктің потенциалдық энергиясы алынады: сондықтан:

$$\Delta E = 0 - mgx_m = \int_0^{x_m}(-\varkappa x)\mathrm{d}x = -\varkappa x_m^2/2.$$

Осыдан x_m үшін сол нәтиженің өзі шығады.

Айта кету керек, шарикті серпімді күш өрісінде де қарастыруға болар еді. Онда тосын күш рөлін ауырлық күші атқарар еді. Мұндай жағдайда нәтиже бірдей болып шығады.

3. Сонымен шарикті екі күштің бірлескен әсерімен, яғни серпімділік күштің де, ауырлық күштің әсерлерімен де қарастыруға болады. Сонда осындай өрістің ішінде тосын күштер болмай, шариктің толық механикалық энергиясы қозғалыс процесінде өзгеріссіз қалады. Яғни: $\Delta E = \Delta K + \Delta U = 0$. Шариктің бастапқы күйінен соңғы күйіне дейін ауысқанында $\Delta K = 0$, ал олай болса $\Delta U = \Delta U_{\text{ау.}} + \Delta U_{\text{серп.}} = 0$, немесе:

$$-mgx_m + \boldsymbol{x_m^2/2 = 0}.$$

Алынған нәтиже бастапқы екі жолдың шешулерімен бірдей.

4.5. Массасы m дене Жер бетінен бастапқы жылдамдықсыз екі күштің әсерінен көтеріледі: y көтерілу биіктігі бойынша $\mathbf{F} = -2mg(1 - ay)$ түрінде өзгеретін $\mathbf{F}$ күштің әсерінен, мұндағы a – оң тұрақты шама және mg ауырлық күшінің әсерінен. $\mathbf{F}$-күштің көтерілу биіктігінің бірінші жартысындағы атқарған жұмысын және дененің Жердің ауырлық өрісіндегі потенциалдық энергиясының өсімшесін табу керек. Ауырлық өрісін біртекті деп есептеу керек.

Шығару жолы. Әуелі тұтас көтерілу биіктігін табамыз. Жолдың басы мен соңында дененің жұмысы нөлге тең. Сондықтан кинетикалық энергияның өсімшесі де нөлге тең. Екінші жағынан (4.29) бойынша, ΔK осы жолдағы барлық күштердің атқаратын жұмыстарының A алгебралық қосындысына тең, яғни $\mathbf{F}$ күштің және ауырлық күшінің атқаратын жұмыстарының алгебралық қосындысына тең болғаны. $\Delta K = 0, A = 0$. Жоғары қарай Y өсінің оң бағыты бағытталғандығын ескере отырып, жазамыз:

$$A = \int_0^h \left(F_y - mg\right)dy = mg\int_0^h (1 - 2ay)\mathrm{d}y = mgh(1 - ah) = 0.$$

Осыдан $h = 1/a$.

F күштің көтерілу жолының бірінші жартысында атқаратын жұмысы:

$$A_{\boldsymbol{F}} = \int_0^{h/2} F_y \mathrm{d}y = 2mg\int_0^{h/2} (1 - ay)\mathrm{d}y = 3mg/4a.$$

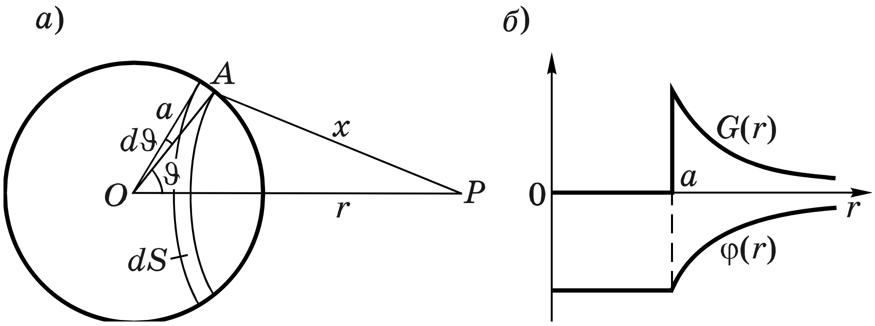
Потенциалдық энергияның өсімшесі:

$$\Delta U = mgh/2 = mg/2a.$$

4.6. Потенциал мен өрістің кернеулігі. Массасы M радиусы R болатын біртекті шардың гравитациялық өрісінің потенциалы мен кернеулігін оның центріне дейінгі r қашықтыққа тәуелді түрде табу керек.

Шығару жолы. Әуелі заттың жұқа біртекті сфералық қабатының тудыратын потенциалдық өрісін табу керек, Жұқа сфералық қабаттың массасы m және радиусы a болсын делік. Әуелі $P(r > a)$ нүктесіндегі $\mathrm{d}\varphi$ потенциалын табамыз, оны берілген қабаттың $\mathrm{d}S$ белдігі тудырады (4.24, *а*). Егер осы белдіктің массасы $\mathrm{d}m$ және оның нүктелері Р нүктеге дейін x- қашықтықта орналасса, онда $\mathrm{d}\varphi = -\gamma\mathrm{d}m/x$ болады. $\mathrm{d}m = 1/2m\sin\vartheta d\vartheta$ болатындығын ескеріп, табамыз:

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\gamma m}{2x}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \tag{1}$$



4.24-сурет

ΔOAP үшін косинустар теоремасынан $x^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\vartheta$. Осы өрнектен дифференциалдасақ, онда:

$$x\mathrm{d}x = ar\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta. \tag{2}$$

(1) теңдікті (2) теңдіктің көмегімен $\mathrm{d}\varphi = 1/2(\gamma m/ar)\mathrm{d}x$ түріне келтіріп, осы теңдікті тұтас қабат бойынша интегралдаймыз, сонда:

$$\varphi_{\text{сырт.}} = -\frac{\gamma m}{2ar}\int_{r-a}^{r+a} \mathrm{d}x = -\frac{\gamma m}{r}\,. \tag{3}$$

Сонымен, шынында да, *біртекті жұқа сфералық қабаттан тысқары P нүктедегі потенциал осы қабаттың барлық массасы оның центрінде орналасқандағыдай болады*.

Егер де P нүкте $(r < a)$қабаттың ішінде орналасса онда жоғарыдағы есептеулер интегралдағанға дейін күшін сақтайды. Енді тек x бойынша интегралдау шектері $(a - r)$ ден $(a + r)$-ге дейін болады. Нәтижесінде

$$\varphi_{\text{ішк.}} = -\gamma m/a \tag{4}$$

яғни қабаттың ішіндегі потенциал P нүктесінің орнына тәуелсіз демек, ол қабаттың ішінде барлық нүктелерде де бірдей болады.

P нүктеде кернеулік (4.26) сәйкес,

$$G_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{r}}\begin{cases} -\dfrac{\gamma m}{r^2} \textit{қабаттан тыс} \\ \textit{қабаттың ішінде} \end{cases}$$

Жұқа сфералық қабат үшін $\varphi(r)$ және $G(r)$ тәуелділік графиктері 4.24, б-суретте көрсетілген.

Енді алынған нәтижелерді массасы M, ал радиусы R болатын біртекті шарға жалпылайық. Егер Р нүкте шардан тыс болса $(r > R)$, онда (3) формуладан бірден жазуға болады:

$$\varphi_{\text{сырт.}} = -\gamma M/r\,. \tag{5}$$

Егер P нүкте шар ішінде болса $(r < R)$, онда осы нүктедегі потенциал тең:

$$\varphi_{\text{ішк.}} = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Қосында түрінде өрнектеуге болады, мұндағы φ_1-радиусы r шардың потенциалы, ал φ_2– радиустары – r дан $-R$ -ға дейінгі қабаттың потенциалы. (5) бойынша

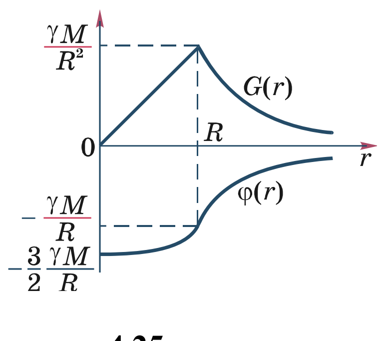
$$\varphi_1 = -\gamma\frac{M\left(\frac{r}{R}\right)^3}{r} = -\gamma\frac{M}{R^3}r^2\,.$$

Қабат тудыратын φ_2 потенциал қабат ішіндегі барлық нүктелерде де бірдей. Ыңғайлы болу үшін φ_2 потенциалды қабаттың центрінде жатқан нүкте үшін есептеп шығарайық:

$$\varphi_1 = -\gamma\frac{M\left(\frac{r}{R}\right)^3}{r} = -\gamma\frac{M}{R^3}r^2\,.$$

мұндағы, $\mathrm{d}M = 3(M/R^3)r^2\mathrm{d}r$- радиустары r және $r + \mathrm{d}r$ болатын жұқа қабаттың массасы:

$$\varphi_2 = -\gamma\int_r^R \frac{dM}{r} = -\frac{3}{2}\frac{\gamma M}{R^3}(R^2 - r^2)\,,$$



4.25-сурет

сонымен нәтижесінде:

$$\varphi_{\text{ішк.}} = \varphi_1 + \varphi_2 = -(\gamma M/2R)(3 - r^2/R^2). \quad (6)$$

(5) және (6) өрнектерден P нүктедегі өріс кернеулігін табамыз:

$$G_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \begin{cases} -\gamma M/r^2 & r \geq R\,, \\ -\gamma M/R^3 & r \leq R\,. \end{cases}$$

Радиусы R біртекті шар үшін $\varphi(r)$ және $\mathrm{G}(r)$ тәуелділік графиктері 4.25-суретте көрсетілген.

4.7. Ғарыштық жылдамдықтар. Денені Жердің тартылыс өрісінен тыс жерге шығару үшін қажетті K_2 кинетикалық энергияның осы денені Жердің жасанды серігінің дөңгелек орбитасына (Жердің бетіне жуық жердегі) шығаруға қажетті болатын K_1 кинетикалық энергиясынан екі есе артық екендігін көрсету керек. Ауаның кедергісі мен жердің өз өсінен айналуы ескерілмейді.

Шығару жолы. Дөңгелек орбитамен қозғалған дененің υ_1 жылдамдығын табамыз. Динамиканың негізгі теңдеуі бойынша:

$$m\upsilon_1^2/R = m\mathrm{g}\,.$$

мұндағы, m – дененің массасы, R – орбита радиусы, ол шамамен Жер радиусына тең. Осыдан:

$$\upsilon_1 = \sqrt{\mathrm{g}R} = 7{,}9\ \text{км/с}\,.$$

Бұл *жылдамдық бірінші ғарыштық жылдамдық деп аталады.* Дене Жердің тартылыс өрісін жеңу үшін оған υ_2 екінші ғарыштық жылдамдық беру керек. Оны энергияның сақталу заңынан шығарып алуға болады. Жер бетіне жуық жердегі кинетикалық энергия дене жеңуге тиісті потенциалдық бөгеттің биіктігіне тең болуы керек. Бұл бөгеттің биіктігі потенциалдық энергияның $r_1 = R$ және $r_2 = \infty$ нүктелерінің арасындағы өсімшесіне тең болуы тиіс. Сонымен,

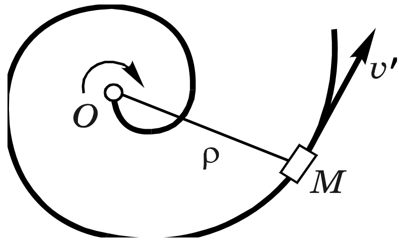
$$m\upsilon_2^2/2 = \gamma mM/R\,.$$

мұндағы, M – Жердің массасы. Осыдан:

$$\upsilon_2 = \sqrt{2\gamma M/R} = \sqrt{2\mathrm{g}R} = 11\ \text{км}/c\,.$$

Демек, $\upsilon_2 = \upsilon_1\sqrt{2}$ және $K_2 = 2K_1$.

4.8. Инерциалды емес санақ жүйесіндегі есептерді шығару. Горизонталь жазықтықта орналасқан қатты тегіс сымнан жасалған спиральді тұрақты *O* өстен тұрақты ω бұрыштық жылдамдықпен айналдырады (4.26-сурет). Спираль бойымен кішкене *M* муфта үйкеліссіз сырғанайды. Егер муфта осы өске қатысты υ_0' жылдамдықпен қозғала бастаса, оның спиралға қатысты υ' жылдамдығын *O* айналу өсіне дейінгі



4.26-сурет

ρқашықтықтың функциясы ретінде анықтау керек.

Шығару жолы. Бұл есепті спиралмен байланысқан санақ жүйенінде шешкен тиімді. Муфтаның кинетикалық энергиясының өсімшесі муфтаға түсірілген барлық күштердің атқаратын жұмыстарының алгебралық қосындысына тең болады. Барлық күштердің ішінен тек центрден тепкіш күші ғана жұмыс атқарады, ал ауырлық күші, спираль тарапынан реакция күші және Кориолис күші муфтаның v' жылдамдығына перпендикуляр, сондықтан олар жұмыс атқармайды.

(4.29) теңдеу бойынша:

$$m(v'^2 - v'^2_0)/2 = \int m\omega^2 \boldsymbol{\rho} d\mathbf{r},$$

мұндағы, m – муфтаның массасы, d**r** − спиралға қатысты оның элементар орын ауыстыруы. $\rho d r = \rho (d r)_\rho = \rho d\rho$ болатындықтан, интеграл $m\omega^2\rho^2/2$ шамасына тең болып шығады. Осыдан іздеп отырған жылдамдығымыз

$$v' = \sqrt{v'^2_0 + \omega^2\rho^2}\,.$$

4.9. Бөлшектер жүйесі. Әрбіреуінің массасы m және зарядтары q болатын бірдей үш зарядталған бөлшектер қабырғасы a болатын тең қабырғалы ұшбұрыштың төбелеріне орналастырылған. Осыдан кейін бөлшектер бір мезгілде босатылып, сосын кулондық тебілу күшінің әсерінен симметриялы түрде жан-жаққа ұшып кетеді. Табу керек:

1) Олардың арасындағы r қашықтыққа тәуелді әрбір бөлшектің жылдамдығын;

2) Бөлшектер бір-бірінен алыстаған кезде әрбір бөлшекке әсер ететін кулон күштерінің атқаратын A_1 жұмысын.

Шығару жолы. **1**. Берілген жүйе тұйықталған, сондықтан ондағы кинетикалық энергияның өсімшесі потенциалдық энергияның кемуіне тең, яғни:

$$3mv^2/2 = 3kq^2(1/a - 1/r)\,,$$

Осыдан

$$v = \sqrt{2kq^2(r-a)/mra}\,.$$

$r \to \infty$ кезде әрбір бөлшектің жылдамдығы шектік мәніне ұмтылады:

$$v_{max} = \sqrt{2kq^2/ma}\,.$$

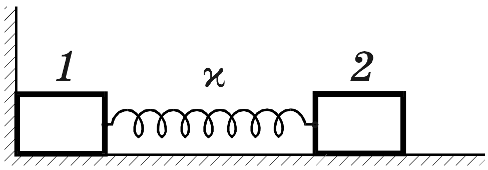
2. Осы жүйенің конфигурациясы өзгерген кездегі барлық өзара әрекеттесу күштерінің атқарған жұмысы жүйенің потенциалдық энергиясының кемуіне тең:

$$A = U_1 - U_2 = 3kq^2/a.$$

Ақырғы қалыпта $U_2 = 0$ екендігі ескерілген. Осыдан іздеп отырған жұмысымыз:

$$A_1 = A/3 = kq^2/a.$$

4.10. Тегіс горизонталь жазықтықта массалары m_1 және m_2.екі кесек орналасқан. Олар қаттылығы $\varkappa$ тең серіппемен өзара байланысқан. (4.27 –сурет). **2**-ші кесекті сол жаққа қарай x арақашықтыққа ауыстырған, сонан кейін қоя берген. ***1***-ші кесекті қабырғадан жұлып алғаннан кейінгі жүйенің масса центрінің υ_c жылдамдығын табу керек



4.27-сурет

Шығару жолы. Серіппені түзеткенде жүйеге қабырғадан қайсыбір Ғ горизонталь күші әсер етеді. Осы күштің импульсі жүйенің импульсіне әкеледі. **1**-ші кесекті қабырғадан үзгенде жүйенің импульсі өзгермейді, сондықтан жазамыз:

$$m_2\upsilon_{20} = (m_1 + m_2)\upsilon_c \qquad (1)$$

1-ші кесектің қабырғадан үзілген уақыттағы жылдамдығы $\upsilon_{10} = 0$ екенін ескеру керек. F күшінің әсер ету нүктесі қозғалмайтындықтан бұл күш жұмыс атқармайды. Олай болса жүйенің механикалық энергиясы өзгеріссіз қалады және өзінің алғашқы мағынасына тең болады. ***1***-ші кесек қабырғадан үзілген моментте ең алғашқы сығылған серіппенің потенциалдық энергиясы түгелімен ***2***-ші кесектің кинетикалық энергиясына айналып кетеді:

$$\varkappa x^2/2 = m_2\upsilon_{20}^2/2 \qquad (2)$$

(1) мен (2)-ден υ_{20}-ді айырып, келесі теңдеуді аламыз:

$$\upsilon_c = x\sqrt{\varkappa m_2}/(m_1 + m_2)$$

Айта кету керек, тура осындай құбылыс автомашина орнынан қозғалған кезде пайда болады: Үйкеліс импульсының күші автомашинаның импульсін тудырады, ал ішкі энергия көзі (отын), кинетикалық энергияны тудырады.

4.11. Жүйенің ішкі механикалық энергиясы. Массалары m_1 және m_2 екі шариктерден жүйе құрылған. Шариктерге $\mathbf{v_1}$ және $\mathbf{v_2}$ тең жылдамдықтар берілген. Осыдан кейін шариктер Жердің біртекті ауырлық өрісінде қозғала бастады. Ауаның кедергісін ескермей және серіппені дефформацияға ұшырамайды деп алып, $\mathbf{v_1} \perp \mathbf{v_2}$ қозғалыс барысында осы жүйе үшін оның ішкі механикалық энергиясын табу керек.

Шығару жолы. Жүйенің ішкі механикалық энергиясы дегеніміз *Ц*-жүйедегі оның $\tilde{E}$ энергиясы. *Ц-жүйе*сі $\mathbf{g}$ үдеуімен қозғалады, сондықтан қозғалыстағы шариктерге екі күш әсер етеді: $m_i\mathbf{g}$ - ауырлық күші және инерция күші $-m_i\mathbf{g}$. Осы күштердің қорытынды жұмысы нөлге тең (*Ц*-жүйесінде). Олай болса, $\tilde{E}$ энергиясы өзгеріссіз қалады. $\tilde{E}$-ні табу үшін серіппе әлі деформацияланбаған кездегі алғашқы моментті қарастырған жөн. Осы жағдайда *Ц*-жүйеде серіппенің энергиясы $\widetilde{K}_0$ −қорытынды кинетикалық энергияға тең болады. (4.61) формуланы пайдалана отырып, келесі теңдеуді аламыз:

$$\tilde{E} = \widetilde{K}_0 = \frac{\mu}{2}(\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2)^2 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}(\upsilon_1^2 + \upsilon_1^2).$$

4.12. Бөлшектердің соқтығысуы. К-санақ жүйесінде массасы m_1 тең **1**-ші бөлшек массасы m_2 тең **2**-ші бөлшекке әсер етеді. Әрбір бөлшектің зарядтары q тең. **2**-ші бөлшектен алыста жатқан **1**-ші бөлшектің кинетикалық энергиясы K_1-ге тең, олай болса, тікелей маңдайларымен соқтығысқан кездегі минималды арақашықтықты анықта.

Шығару жолы. Соқтығысу процестерін *Ц*– және *К*-санақ жүйелерінде жеке-жеке қарастырайық.

1. *К*–санақ жүйесінде бір-біріне ең үлкен жақындау моментінде екі бөлшек те біртұтас болып, υ-жылдамдығымен қозғалады. Осы жылдамдықты импульстердің сақталу заңынан табуға болады:

$$\mathrm{p}_1 = (m_1 + m_2)\upsilon\ ,$$

мұндағы, p_1- әсер етуші бөлшектің импульсі; $\mathrm{p}_1 = \sqrt{2m_1K_1}$.
энергияның сақталу заңынан келесі өрнекті табамыз:

$$K_1 = (m_1 + m_2)\upsilon^2/2 + \Delta U,$$

мұндағы жүйенің потенциалдық энергиясының өсімшесі:

$$\Delta U = kq^2/r_{min}.$$

υ-ны осы екі теңдеулерден шығарып тастап, келесі өрнекті табамыз:

$$r_{min} = (1 + m_1/m_2)kq^2/K_1.$$

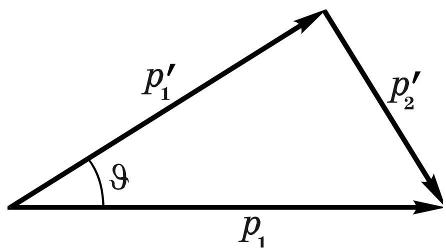
2. *Ц*-санақ жүйесінде есептің шешімі мүлдем жеңіл. Бөлшектер бір-біріне соқтығысқан моментінде олардың қорытынды кинетикалық энергиялары түгелімен бөлшектер жүйесінің потенциалдық энергиясының өсімшесіне айналып кетеді:

$$\widetilde{K} = \Delta U,$$

мұндағы, (4.61) теңдеуі бойынша $\widetilde{K} = \frac{\mu\upsilon_1^2}{2} = \frac{K_1m_2}{m_1+m_2},\ \Delta U = kq^2/r_{min}$.

Осыдан r_{min} есептеп табу оңай.

4.13. Импулсы p_1 және массасы m_1 болатын бөлшек тыныштықтағы массасы m_1бөлшекпен серпімді соғысады. Бірінші бөлшек соғысқаннан кейін бастапқы қозғалыс бағытына ϑбұрыш жасай шашырайды. Бірінші бөлшектің соқтығысқан кейінгі p_1' импульсін табу керек.



4.28-сурет

Шығару жолы. Импульстің сақталу заңынан (4.28-сурет):

$$p_2'^2 = p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1p_1'\cos\vartheta\ , \qquad (1)$$

мұндағы, p_2' - екінші тыныштықтағы бөлшектің соқтығысқаннан кейінгі импульсі.

K_1' және K_2'– бірінші және екінші бөлшектердің соқтығысқаннан кейінгі кинетикалық энергиялары. Энергия сақталу заңынан: $K_1 = K_1' + K_2'$
Бұл теңдікті $K = p^2/2m$ қатынасын пайдалана отырып, түрлендіреміз:

$$p_2'^{\,2} = \left(p_1^2 - p_1'^{\,2}\right) m_2/m_1. \qquad (2)$$

(1) мен (2) теңдеулерден - $p_2'^{\,2}$– ні алып тастап, келесі өрнекті табамыз:

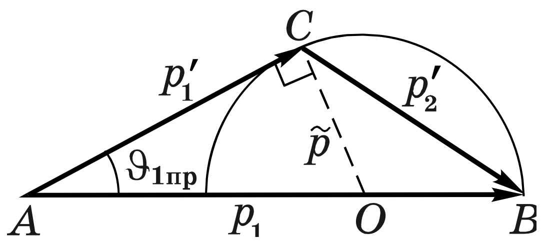
$$p_1' = p_1 \frac{\cos\vartheta \pm \sqrt{cos^2\vartheta + (m_2^2/m_1^2 - 1)}}{1 + m_2/m_1}.$$

Егер $m_1 < m_2$болса, онда түбірдің алдындағы плюс таңбасының ғана физикалық мағынасы болады. Осы кезде ғана түбір $\cos\vartheta$-дан үлкен, ал p_1' модуль болғандықтан ол теріс бола алмайды. Егер $m_1 > m_2$ болса, онда түбір алдындағы екі таңбаның да физикалық мағынасы болады. Бұл жағдайда есептің жауабы бірмәнді болмайды. ϑ бұрышпен шашыраған бөлшектің импульсы екі мәннің біріне тең болады. Бұл мәндердің өзі бөлшектер соқтығысқан уақытта олардың арасындағы салыстырмалы арақашықтықтарына сай болады. Соңғы жағдай 4.14, *в*-суретте көрсетілген векторлық диаграммаға сәйкес келеді.

4.14. Массасы m_1 бөлшек тыныштықтағы массасы m_2 бөлшектен шектік бұрышпен серпімді шашыраған кезде бөлшек өзінің кинетикалық энергиясының қандай η бөлігін жоғалтады? Мұнда $m_1 > m_2$.

Шығару жолы. K_1, p_1 және K_1', p_1' бөлшектің сәйкес түрде соқтығысқанға дейінгі және одан кейінгі кинетикалық энергиясы мен импульс мәндері болсын, сонда:

$$\eta = (K_1 - K_1')/K_1 = 1 - K_1'/K_1 = 1 - (p_1'/p_1)^2 \;, \qquad (1)$$



4.29-сурет

яғни есептің шешуі p_1'/p_1 қатынасын табуға әкеліп тіреледі. Шектік бұрышқа сәйкес келетін импульстердің векторлық диаграммасын пайдаланамыз (4.29-сурет). Тікбұрышты АСО ұшбұрыштан

$$p_1'^{\,2} = (p_1 - \tilde{p})^2 - \tilde{p}^2 = p_1^2 - 2p_1\tilde{p}$$

Осыдан:

$$p_1'/p_1^{\,2} = 1 - 2\tilde{p}/p_1 = 1 - 2m_2/(m_1 + m_2)\,. \qquad (2)$$

(2) ні (1)-ге қойғаннан кейін

$$\eta = 2m_2/(m_1 + m_2).$$

4.15. Массасы m_1 атом тыныштықтағы массасы m_2 молекуламен серпімсіз соқтығысқаннан кейін екі бөлшек те бір-бірімен ϑ бұрыш жасай сәйкес түрде K_1' және K_2' кинетикалық энергиямен ұшып кетеді. Әрі молекула қозғалған күйге келеді. Оның ішкі энергиясы белгілі Q шамаға артады. Q энергияны және молекуланың осындай қозған күйге өтуіне жеткілікті болатын табалдырықтық кинетикалық энергияны табу керек.

Шығару жолы. Осы процесс кезіндегі энергияның және импульстің сақталу заңдарынан:

$$K_1 = K_1' + K_1' + Q\,,$$

$$p_2'^2 = p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1p_1' \cos\vartheta\,,$$

Соқтығысқаннан кейінгі шамалар штрихталып белгіленген (екінші қатынас тікелей импульстер үшбырышынан косинустар теоремасынан шығады). $p^2 = 2mK$ формуласын пайдаланып, K_1 шамасын осы теңдеулерден шығарып тастап, нәтижесінде төмендегі өрнектерді аламыз:

$$Q = (m_2/m_1 - 1)K_2' + 2\sqrt{(m_2/m_1)}K_1'K_2' \cos\vartheta\,,$$

$$K_{1\text{пор}} = |Q|(m_2 + m_1)/m_2\,.$$

4.16. Бөлшектердің ыдырауы. Импульсі p_0 бөлшек (*К-жүйе*де) ұшып келе жатып, массалары m_1 және m_2 бөлшектерге ыдырайды. Осының нәтижесінде Q ыдырау энергиясы пайда болады (ол кинетикалық энергияға айналады). Осы процесс үшін импульстер диаграммасын салу керек және оның көмегімен пайда болған бөлшектің p_1 және p_2 мүмкін импульстерін табу керек.

Шығару жолы. Бұл процесс *Ц-жүйе*де өте қарапайым: ыдырайтын бөлшектер тыныштықты қалады, ал пайда болған бөлшектер модульдері бойынша бірдей импульстермен қарама-қарсы жақтарға ұшып кетеді: $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 + \tilde{p}$. Ыдырау энергиясы Q пайда болатын бөлшектің қосынды $\tilde{K}$кинетикалық энергиясына өтеді. Сондықтан:

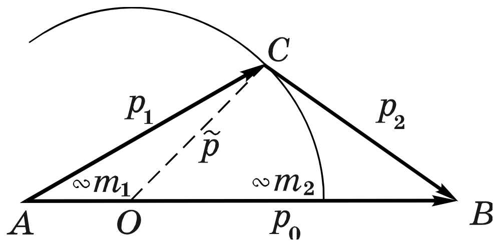
$$\tilde{p} = \sqrt{2\mu\tilde{K}} = \sqrt{2\mu Q}\,,$$

мұндағы μ пайда болатын бөлшектің келтірілген массасы. Енді осы бөлшектің *К*-жүйедегі импульстарын табамыз. *Ц*-жүйеден *К*-жүйеге өткен кездегі жылдамдықтарды түрлендіру формуласын пайдаланып, жаза аламыз:

$$\mathbf{p}_1 = m_1\mathbf{v}_1 = m_1(\mathbf{V}_C + \tilde{\mathbf{v}}_1) = m_1\mathbf{V}_C + \tilde{\mathbf{p}}_1$$

$$\mathbf{p}_2 = m_2\mathbf{v}_2 = m_2(\mathbf{V}_C + \tilde{\mathbf{v}}_2) = m_2\mathbf{V}_C + \tilde{\mathbf{p}}_2$$

Әрі импульстың сақталу заңы бойынша $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_0$. Осы формулалардың көмегімен импульстің векторлық диаграммасын саламыз (4.30-сурет). Әуелі $\mathbf{p}_0$ импульске тең болатын *AB* кесіндіні саламыз. Сосын центрі *O* нүктеде және радиусы $\tilde{p}$ болатын шеңбер сызамыз, ол *AB* кесіндіні $m_1 \div m_2$ қатынаспен екіге бөледі. Осы шеңбер *ABC* импульстер үшбырышының С төбесінің мүмкін қалыптарының геометриялық орны болып табылады.



4.30-сурет

4.17. Биіктігі h-қа тең жоғары жағы ашық цилиндр ыдысы идеалды толық сұйықпен толтырылған. Ыдыстың төменгі жағынан кішкене тесік ашылған, оның ауданы ыдыстың көлденең қимасының ауданынан η есе кіші. $\eta \gg 1$ деп санағанда, барлық сұйық осы сосудтан қандай мезгілде түгелімен ағып шығады?

Шығару жолы. υ_1–сосудтағы сұйық деңгейінің төмендеу жылдамдығы тұрақсыз. Сондықтан әуелі биіктік деңгейінің төмендеуі $-\mathrm{d}x$-ке сай $\mathrm{d}t$ уақытын табамыз.

$$\mathrm{d}t = -\mathrm{d}x/\upsilon_1 \,. \tag{1}$$

Сонан кейін υ_1 жылдамдығы мен x биіктік деңгейінің арасындағы байланысты табамыз. Ол үшін (4.71) теңдеуі мен (4.75) Бернулли теңдеуін пайдаланамыз. (4.75) теңдеуді екі көлденең қима үшін жазамыз: ***1***– x – ке тең деңгейдің биіктігі; ***2*** – ыдыстың төменгі жағынан сұйық шығатын тесік. Сонда екі теңдеудің түрлері келесі түрде өрнектеледі:

$$\eta\upsilon_1 = \upsilon_2, \qquad \upsilon_1^2/2 + \mathrm{g}x = \upsilon_2^2/2 \,. \tag{2}$$

Бұл жерде екі қима үшін де қысым (атмосфералық) бірдей деп алынады. (2) теңдеуден $\eta \gg 1$ тең деп алып, келесі өрнекті табамыз:

$$\upsilon_1 = \sqrt{2\mathrm{g}x}/\eta \tag{3}$$

(3)-ті (1)-ге қойып интегралдап табамыз .

$$t = -\eta \int_h^0 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\mathrm{g}x}} = \eta\sqrt{2h/\mathrm{g}} \,.$$

4.18. Тұтқырлық. Ұзындығы l=100 м, дөңгелек қимасының радиусы R=25 см тіке құбырдың ағымы $Q = 5{,}0$ м$/c$. Олай болса сынап отырылған құбырдан судың стационарлы ағысы кезіндегі оның үйкеліс күшін есептеп табу керек. Судың тұтқырлығы $\eta = 1{,}0$ мПа · с.

Шығару жолы. Іздеп отырылған үйкеліс күшін (4.78) формула арқылы табуға болады. Ол үшін бірінші (4.81) өрнектің $\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{dr}$ туындысын $r = R$ шарты бойынша есептеп, келесі теңдеуді табамыз:

$$F_{\text{йк.}} = \eta \left|\frac{d\upsilon}{dr}\right| 2\pi Rl = \eta \frac{(p_1 - p_2)2R}{4\eta l} 2\pi Rl \,,$$

Немесе үйкеліс күшін (4.82) формула арқылы да есептеп табуға болады:

$$F_{\text{йк.}} = \frac{8\eta l Q}{R^2} = 64\text{Н}.$$

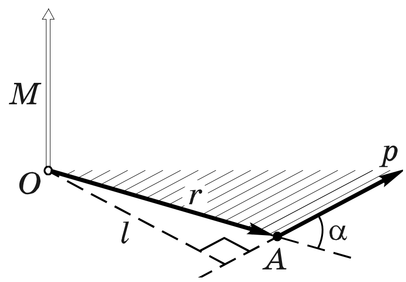
5-тарау

Импульс моментінің сақталу заңы

§ 5.1. Бөлшектің импульс моменті. Күш моменті

Энергия мен импульстің сақталу заңдарымен қатар тағы бір векторлық сақталу заңы бар, ол импульс моментінің сақталу заңы деп аталады. бұл қандай шама және оның қасиеттерінің қандай?

Бір бөлшектен бастаймыз. **r** − дегеніміз оның қайсыбір таңдап алынған санақ жүйесінің *O* нүктесіне қатысты орнын сипаттайтын радиус-векторы, ал **p**− оның осы жүйедегі импульсі болсын. *A* бөлшектің *O* нүктесіне қатысты импульс моменті деп **r** және **p** векторлардың векторлық көбейтіндісіне тең болатын **M** векторын айтады:



5.1-сурет

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}] \tag{5.1}$$

Осы анықтамадан **M** вектордың аксиалдық вектор екендігі шығады. Оның бағыты *O* нүктесінен айнала бұрылу **p** вектор бағытында болатындай етіліп алынған, сонда **M** вектор оң бұранда жүйесін түзеді. **M** вектордың модулі

$$M = r \cdot p \sin \alpha = l \cdot p \tag{5.2}$$

Бағытында мұндағы α−**r** және **p** векторлардың арасындағы бұрыш, $l = r \cdot \sin \alpha$−**p** вектордың *O* нүктесіне қатысты иіні (5.1-сурет).

Моменттер теңдеуі

M вектордың берілген санақ жүйесіндегі өзгерісі қандай механикалық шамаға тәуелді болатындығын анықтайық. Бұл үшін (5.1)-ді уақыт бойынша дифференциалдаймыз:

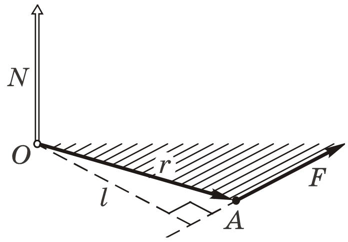
$$\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t = [\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t, \mathbf{p}] + [\mathbf{r}, \mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t].$$

O нүктесі тыныштықта болатындықтан, $\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$ вектор бөлшектің $\mathbf{v}$ жылдамдығына тең болады, яғни бағыты бойынша $\mathbf{p}$ векторымен бірдей түседі, сондықтан:

$$[\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t, \mathbf{p}] = 0.$$

Одан әрі, Ньютонның екінші заңына сай, $\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t = \mathbf{F}$, мұндағы, $\mathbf{F}$ – бөлшек түсірілген барлық күштердің тең әсерлісі. Демек,

$$\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t = [\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}]$$



5.2-сурет.

Осы теңдеудің оң жағында шаманы **F** күштің *O* нүктесіне қатысты *күш моменті* деп атайды (5.2-сурет). Осы **N** деп белгілеп, жазамыз.

$$\boxed{\mathbf{N} = [\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}].} \quad (5.3)$$

N вектор да **M** вектор тәрізді аксиалдық болып табылады. Бұл вектордың модулі да (5.2) тәрізді:

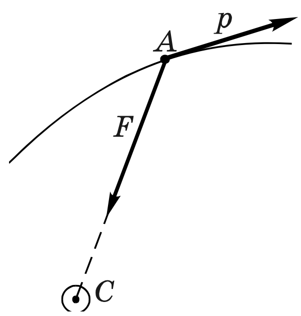
$$N = l \cdot F, \quad (5.4)$$

мұндағы, l– вектордың *O* нүктесіне қатысты *иіні* (5.2-сурет).

Сонымен, бөлшектің $\mathbf{M}$ импульс моментінің уақыт бойынша алынған туындысы таңдап алынған санақ жүйесіндегі қайсыбір *O* нүктесіне қатысты **N** моментіне тең болады:

$$\boxed{\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t = \mathbf{N}} \quad (5.5)$$

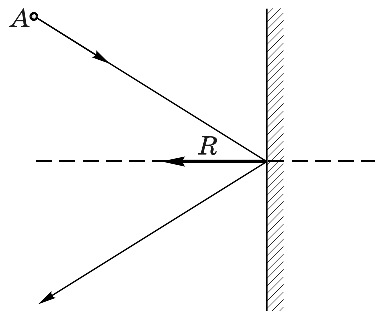
Бұл теңдеу ***моменттер теңдеуі*** деп аталады. Егер санақ жүйесі инерциялық болмаса, онда **N** күш моментіне өзара әрекеттесу күштерінің моменттері де, инерция күштерінің моменттері де кіреді (сол *O* нүктеге қатысты анықталған). (5.5) моменттер теңдеуінен егер $\mathbf{N} \equiv \mathbf{0}$, болса, онда $\mathbf{M} = const$ болатындығы шығады. Басқаша айтқанда бөлшекке әсер ететін барлық күштердің таңдалған санақ жүйесінің қайсыбір *O* нүктесіне қатысты анықталған моменті бізге қажетті уақыт аралығында нөлге тең болса, онда бөлшектің осы нүктеге қатысты импульс моменті қарастырылып отырған уақыт аралығында тұрақты болып қалады.



5.3-сурет

1-мысал. Қайсыбір *A* планета *C*- Күн жүйесінің ауырлық өрісінде қозғалады делік. Гелиоцентрлік санақ жүйесінің қандай нүстесіне қатысты осы планетаның импульс моменті уақыт бойынша сақталады? Бұл сұраққа жауап алу үшін ең бірінші A планетаға қандай күштер әсер ететіндігін анықтау қажет. Біздің жағдайымыз үшін бұл тек қана бір-ақ күш – **F-** Күннің ауырлық күші**.** Планета үнемі қозғалыста болғандықтан осы күштің бағыты үнемі Күннің центрінен өтіп отырады. Міне сондықтан іздеп отырған нүктемізге Күннің центрдегі нүктесі жатады. Осы нүкте арқылы F - күштің моменті әр уақытта нөлге тең болып отырады да, планетаның импульс моменті тұрақты шама болып қалады. Бірақ планетаның **p**-импульсі өзгеріп отырады.

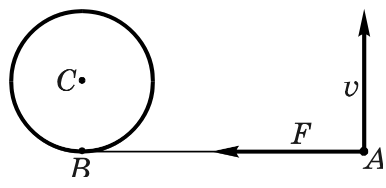
2-мысал. A шайба тегіс горизонталь бетпен сырғанай отырып, тегіс вертикаль қабырғадан серпімді ыршып кетеді. (5.4-сурет, көрініс төбесінен қарағанда). Осы процесс кезінде шайбаның импульс моментінің қандай нүктеге қатысты тұрақты болып қалатындығын анықтау керек.



5.4-сурет

Шығару жолы. Шайбаға ауырлық күші, горизонталь жазықтық тарапынан реакция күші, соқтығысу кезіндегі қабырға тарапынан пайда болатын **R** - реакция күші әсер етеді. Алғашқы екі күш бір-бірін теңестіреді де, тек **R** күші ғана қалады. Оның моменті **R** вектордың әсер сызығында жататын кез келген нүктеге қатысты нөлге тең болады, демек, осы нүктелердің кез келгеніне қатысты шайбаның импульс моменті осы процесс кезінде тұрақты болып қалады.

3-мысал. Горизонталь тегіс бетте қозғалмайтын верктикаль цилиндр мен цилиндрге AB жіппен байланған A шайба бар (5.5-сурет, төбесінен көрініс). Шайбаға суретте көрсетілгендей **v** бастапқы жылдамдық беріледі. Қозғалыс барысында өзіне қатысты анықталғандағы шайбаның импульс моментін тұрақты етіп қалдыра алатын нүкте бола ма?



5.5-сурет

Шығару жолы. Берілген жағдайда A шайбаға түсірілген күштердің ішінен орнын толтырмайтын жалғыз күш – жіп тарапынан болатын керілу күші – **F** жатады. Қозғалыс кезінде **F** - күштің моментін нөлге айналдыратындай нүктенің жоқ екендігін байқау қиын емес, яғни, шайбаның өзіне қатысты анықталған импульс моменті тұрақты болып қалатын нүкте жоқ дегенді білдіреді.

Осы мысалдан бөлшектің импульс моментінің қозғалыс кезінде қайсыбір нүктеге қатысты тұрақты бола бермейтіндігін көреміз. (5.5) моменттер теңдеуі мына екі сұраққа жауап береді:

1) егер бөлшектің берілген O нүктеге қатысты $\mathbf{M}(t)$–импульс моментінің уақытқа тәуелділігі белгілі болса, онда кез келген t-уақытында күштің осы нүктеге қатысты **N** моментін табу мүмкіншілігі;

2) егер бөлшекке әсер ететін күштің берілген O нүктеге қатысты күш моментінің (осы O нүктеге қатысты) t уақытқа тәуелділігі белгілі болса, бөлшектің O нүктеге қатысты импульс моментінің кез келген уақыты аралығы үшін өсімшесін анықтау $\mathbf{N}(t)$.

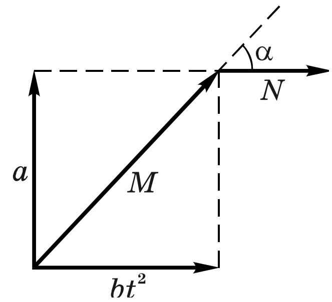
Бірінші мәселенің шешімі импульс моментінен уақыт бойынша туындыны $\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t$ -ны табуға тіреледі, яғни (5.5) бойынша іздеп отырған **N** күш моментіне тең болады.

Екінші мәселенің шешімі (5.5) теңдеуді интегралдауға әкеледі. Осы теңдеудің екі жағын да $\mathrm{d}t$ деп аламыз – бұл өрнек $\mathrm{d}\mathbf{M} = \mathbf{N}\mathrm{d}t$ вектордың элементар өсімшесін анықтайды. Осы өрнекті уақыт бойынша интегралдап, **M** вектордың шектеулі t-уақыт аралығындағы өсімшесін табамыз:

$$\mathbf{M_2} - \mathbf{M_1} = \int_0^t \mathrm{N}\mathrm{d}t. \tag{5.6}$$

Бұл теңдеудің оң жағында тұрған шаманы *күш моментінің импульсы* деп атайды. Сонымен, бөлшектің импульс моментінің кез келген уақыт аралығындағы өсімшесі күш моментінің осы уақыт аралығындағы импульсына тең болады. Мысалдар келтірейік.

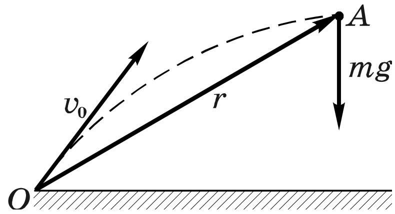
1-мысал. Бөлшектің қайсыбір нүктеге қатысты импульс моменті уақыт бойынша $\mathbf{M}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{b}t^2$ заңымен өзгереді, мұндағы **a** және **b** – қандай да бір тұрақты векторлар, әрі $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. **M** және **N** векторларының арасындағы бұрыш 45^0 болатын кезде бөлшекке әсер ететін күштің **N** моментін табу керек.



5.6-сурет

Шығару жолы. (5.5) бойынша, $\mathbf{N} = \mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t = 2\mathbf{b}t$, яғни **N -** вектор үнемі бағыты жағынан **b** вектормен бірдей. **M** және **N** векторларды қайсыбір уақыт аралығында өрнектейік (5.6-сурет). Осы суреттен, $a = bt_0^2$, алt_0 уақытта бұрыш - α болады. Осыдан, $t_0 = \sqrt{a/b}$ және $\mathbf{N} = 2\sqrt{a/b} \cdot \mathbf{b}$.

2-мысал. Массасы m болатын A тасты $\mathbf{v}_0$ бастапқы жылдамдықпен горизонтқа бұрыш жасай лақтырады. Ауаның кедергісін ескермей тастың O лақтыру нүктесіне қатысты импульс моментінің - $\mathbf{M}(t)$ уақытқа тәуелділігін табу керек (5.7-сурет).

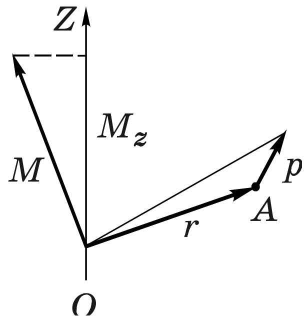


5.7-сурет

Шығару жолы. $\mathrm{d}t$ уақыт аралығында тастың O нүктеге қатысты импульс моменті $\mathrm{d}\mathbf{M} = \mathbf{N}\mathrm{d}t = [\mathbf{r}, m\mathrm{g}]\mathrm{d}t$ өсімше алады. $\mathbf{r} = \mathbf{v_0}t + \mathrm{g}t^2/2$ болатындықтан, $\mathrm{d}\mathbf{M} = [\mathbf{v_0}, m\mathrm{g}]t\mathrm{d}t$ болады. Осы өрнекті $t = 0$ уақытта $M(0) = 0$ болатындығын ескере отырып, интегралдап, $\mathbf{M(t)} = [\mathbf{v_0}, m\mathrm{g}]t^2/2$табамыз. Осыдан **M-**вектордың бағыты қозғалыс кезінде өзгеріссіз қалады (**M** вектор жазықтықтан әрі қарай бағытталған (5.7-сурет).

Өске қатысты импульс моменті мен күш моменті

Таңдап алынған санақ жүйесінде кез келген қозғалмайтын Z өсін аламыз. Z өсіндегі кез келген бір O нүктеге қатысты A бөлшектің импульс моменті $\mathbf{N}$, ал бөлшекке әсер ететін күш моментті $\mathbf{M}$ болсын.



5.8-сурет

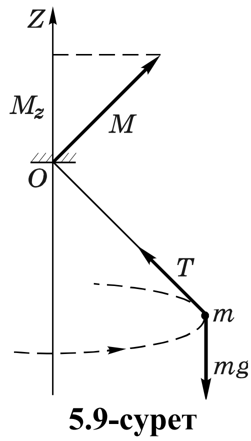
Берілген өстің кез келген O нүктесіне қатысты анықталған $\mathbf{M}$ векторының осы өске проекциясы Z өсіне қатысты анықталған импульс моменті деп аталады (5.8-сурет). Тура осындай жолмен өске қатысты күш моментідеген түсінік те енгізіледі. Оларды сәйкес түрде $\mathbf{M}_z$ және $\mathbf{N}_z$ шамалары деп белгілейді және олар Z өсінде O нүктесін таңдап алуға еш тәуелсіз болады.

Осы шамалардың қасиеттерін анықтайық. (5.5)-ті Z өсіне проекцияласақ, онда

$$dM_z/dt = N_z, \tag{5.7}$$

яғни, бөлшектің Z өсіне қатысты импульс моментінің уақыт бойынша туындысы осы өске қатысты анықталған күш моментіне тең. Егер $N_z \equiv 0$ болса, онда $M_z = const$. Басқаша айтқанда, егер қандай да бір қозғалмайтын Z өсіне қатысты күш моменті нөлге тең болса, онда бөлшектің осы өске қатысты импульс моменті тұрақты болып қалады. Осы кезде $\mathbf{M}$ вектордың өзі де өзгеруі мүмкін.

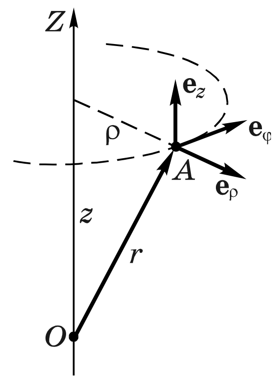
Мысал. Жіпке ілінген массасы mкішкене дене mg– ауырлық күшінің және жіп тарапынан болатын $\mathbf{T}$ керілу күшінің әсерінен горизонталь шеңбер бойымен бірқалыпты қозғалады (5.9-сурет). O нүктесіне қатысты дененің импульс моменті $-\mathbf{M}$ векторы – Z өспен және жіппен бір жазықтықта орналасқан. Дененің қозғалысы кезінде $\mathbf{M}$–вектор ауырлық күшінің $\mathbf{N}$ –моментінің әсерінен үнемі бұрылып отырады, яғни өзгереді деген сөз. Осы кезде M_z проекциясы тұрақты болып қалады. Себебі, $\mathbf{N}$ вектор Z өсіне перпендикуляр және $N_z = 0$.



5.9-сурет

Енді M_z және N_z шамаларының математикалық (аналитикалық) өрнектерін табайық. Ол үшін $[\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}]$ және $[\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}]$ векторлық көбейтінділерінің Z өсіне проекциясын табу керек. Бұл үшін

A бөлшекті сәйкес координаттардың өсу жағына қарай бағытталған $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ орттармен нық байланыстырып, ρ, φ, z цилиндрлік координат жүйесін пайдаланамыз (5.10-сурет). Бұл координат жүйесінде бөлшектің $\mathbf{r}$ радиус-векторы және $\mathbf{p}$ импульсы келесі түрде жазылады:



5.10-сурет

$$\mathbf{r} = \rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z\ ,\ \mathbf{p} = p_\rho\mathbf{e}_\rho + p_\varphi\mathbf{e}_\varphi + p_z\mathbf{e}_z,$$

мұндағы, $p_\rho,\ p_\varphi,\ p_z$ – вектордың сәйкес орттарға проекциялары. $[\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}]$ векторлық көбейтіндіні анықтауыш түрінде жазуға болатыны векторлық алгебрадан белгілі:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \rho & 0 & z \\ p_\rho & p_\varphi & p_z \end{vmatrix},$$

Осыдан бөлшектің импульс моментінің Z өске қатысты проекциясы:

$$M_z = \rho p_\varphi, \tag{5.8}$$

мұндағы, ρ– бөлшектің Z өсіне дейінгі қашықтығы. Бұл өрнекті ыңғайлырақ түрге келтірейік. $\rho_\varphi = mv_\varphi = m\rho\omega_z,$ екендігін ескерсек

$$M_z = m\rho^2\omega_z, \tag{5.9}$$

мұндағы, ω_z– бөлшектің радиус-векторы бұрылатын ω -бұрыштық жылдамдықтың проекциясы.

(5.8) тәрізді Z өсіне қатысты күш моменті де жазылады:

$$N_z = \rho\cdot F_\varphi \tag{5.10}$$

F_φ– мұндағы $\mathbf{F}$ күш векторының $\mathbf{e}_\varphi$ ортқа проекциясы.

M_z және N_z проекциялары шындығында Z өсіндегі O нүктені таңдауға тәуелсіз болады. **M** және **N** векторлары Z өсіне қатысты анықталғанын ескеру керек. Сонымен қатар, M_z және N_z алгебралық шамалар, олардың таңбалары p_φ және F_φ проекцияларының таңбаларына сәйкес.

§ 5.2. Импульс моментінің сақталу заңы

Бөлшектердің кез келген бір жүйесін алайық. Берілген жүйенің импульс моментін оны құрайтын жеке бөлшектердің импульс моменттерінің векторлық қосындысы түрінде қасарстырайық:

$$M = \sum M_i\ , \tag{5.11}$$

мұндағы барлық векторлар берілген санақ жүйесінің бір ғана O нүктесіне қатысты анықталған. Жүйенің импульс моменті *аддитивтік* шама: жүйенің импульс моменті оның жеке бөліктері өзара әрекеттесе ме жоқ па оған тәуелсіз түрде импульс моментерінің қосындысына тең болады.

Жүйенің импульс моментінің өзгерісін қандай шама анықтай алады, соны қарастырайық. Бұл үшін (5.11) өрнекті уақыт бойынша дифференциалдаймыз: $\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t = \sum \mathrm{d}\mathbf{M}_i \mathrm{d}t$. Өткен параграфта $\mathrm{d}\mathbf{M}_i \mathrm{d}t$ туындысы i-ші бөлшекке әсер ететін барлық күш моменттерінің қосындысы түрінде, яғни $\mathbf{N}_i' + \mathbf{N}_i$ түріндекелтірілген. Сонда:

$$\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t = \sum \mathbf{N}_i' + \sum \mathbf{N}_i .$$

мұндағы, бірінші қосынды – барлық ішкі күштердің O нүктесіне қатысты қосынды моменті, екінші қосынды – барлық сыртқы күштердің сол O нүктесіне қатысты анықталған қосынды моменті.

Кез келген нүктеге қатысты анықталған *барлық ішкі күштердің қосынды моменті нөлге тең* болатындығын көрсетейік. Шындығына келгенде ішкі күштер дегеніміз – бұл берілген жүйе бөлшектерінің арасындағы өзара әрекеттесу күштері. Ньютонның үшінші заңы бойынша бұл күштер жұп-жұп болып, өзара модульдері бойынша тең де, бағыттары бойынша қарама-қарсы және олар бір түзудің бойында жатады, олай болса олардың иіндері де бірдей болғаны. Сондықтан әрбір жұптың өзара әрекеттесу күштерінің моменттері модельдері бойынша өзара тең, ал бағыты бойынша қарама-қарсы, яғни бір-бірін теңгереді, демек барлық ішкі күштердің қосынды моменті әрқашан нөлге тең болады.

Осының нәтижесінде соңғы теңдеу келесі түрге өзгереді:

$$\boxed{\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t = N_{\text{сырт.}},} \tag{5.12}$$

мұндағы, $N_{\text{сырт.}}$ барлық сыртқы күштердің моменті, $N_{\text{сырт.}} = \sum N_{i.}$.

(5.12) теңдеуден шығатын қорытынды: жүйенің импульс моментінің уақыт бойынша туындысы барлық сыртқы күштердің қосынды моментіне тең. Бұл жерде $\mathbf{M}$ және $\mathbf{N}$ моменті де берілген санақ жүйесінің бір ғана O нүктесіне қатысты анықталған.

Бір бөлшек жағдайындағы тәрізді (5.12) теңдеуден жүйенің шектеулі t - уақыт аралығындағы импульс моментінің өсімшесі келесі өрнекпен анықталады:

$$\boxed{\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1 = \int_0^t \mathbf{N}_{\text{ішк.}} \mathrm{d}t \,,} \tag{5.13}$$

Яғни, жүйенің импульс моментінің өсімшесі барлық сыртқы күштердің осы уақыт аралығындағы қорытынды моментінің импульсына тең болады. $\mathbf{M}$ және $\mathbf{N}_{\text{сырт.}}$ екі момент те берілген санақ жүйесінің бір ғана *O* нүктесіне қатысты анықталған.

(5.12) және (5.13) теңдеулер инерциялық санақ жүйелерінде де, инерциялық емес санақ жүйерінде де орындалады. Тек инерциялық емес санақ жүйелерінде сыртқы күштер рөлін атқаратын инерция күштерін ескеру керек, яғни бұл теңдеулерде $\mathbf{N}_{\text{сырт}}$ деп $\mathbf{N}+\mathbf{N}_{\text{ин}}$ қорытындысын түсіну керек. Мұндағы *N*– сыртқы *өзара әрекеттесу* күштерінің қорытынды моменті $\mathbf{N}_{\text{ин}}$,– *инерция* күштерінің қорытынды моменті (санақ жүйесінің бір ғана *O* нүктесіне қатысты).

Сонымен, келесі аса маңызды қорытынды шығады: (5.12) *теңдеу бойынша жүйенің импульс моменті тек барлық сыртқы күштердің қосынды моментінің әсерінен ғана өзгере алады.* Осыдан тағы бір іргелі қорытынды пайда болады: **импульс моментінің сақталу заңы**: *инерциялық санақ жүйесінде бөлшектердің тұйықталған жүйесінің импульс моменті тұрақты болып қалады, яғни уақыт бойынша өзгермейді.*

Сонымен, инерциялық санақ жүйесінде бөлшектердің тұйықталған жүйесінің импульс моменті:

$$\boxed{\mathbf{M}=\sum \mathbf{M}_i(t)=const.} \tag{5.14}$$

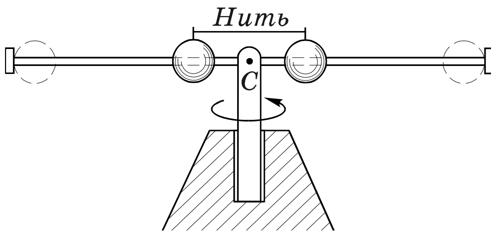
Тұйықталған жүйенің жеке бөліктерінің немесе бөлшектерінің импульс моменті уақыт бойынша өзгере алатындығы соңғы өрнекте көрсетілген. Бірақ бұл өзгерістердің барлығы жүйенің бір бөлігінің импульс моментінің өсімшесі оның екінші бөлігінің импульс моментінің кемуіне тең болатындай түрде өтіп жатады (мұның барлығы әрине санақ жүйесінің бір ғана нүктесіне қатысты).

Осы мағынада (5.12) және (5.13) теңдеулерін импульс моментінің сақталу заңының жалпылама тұжырымдамасы деп қарастыруға болады, онда бізге қажетті жүйенің импульс моментінің өзгеру себебі көрсетілген – басқа денелердің әсері (сыртқы өзара әрекеттесу күштерінің моменті арқылы). Бұл айтылғандардың бәрі, әрине, тек инерциялық санақ жүйелеріне ғана қатысты екендігі анық.

Тағыда айта кетейік, импульс моментінің сақталу заңы тек инерциялық санақ жүйелеріне қатысты ғана орындалады. Бірақ инерциялық емес санақ жүйелерінде де оның орындалып қалуы кездеседі. Бұл үшін (5.12) теңдеуі бойынша барлық сыртқы күштердің қосынды моменті (инерция күштерін қоса алғанда) нөлге тең болуы жеткілікті. Мұндай жағдайлар өте сирек кездеседі.

Импульс моментінің сақталу заңы энергия мен импульстың сақталу заңдары тәрізді аса маңызды рөл атқарады. Ол көптеген жағдайларда болып жатқан процестердің қасиеттері жайлы жеткілікті мәліметтер бере алады. Енді мысалдар келтірейік.

Мысал. Бірдей екі шар тегіс горизонталь шыбыққа оның бойымен сырғанай алатындай кигізілген (5.11-сурет). Шарларды жақындатып, оларды жіппен жалғайды. Содан кейін тұтас қондырғыны вектор өстен айналысқа келтіріп, оны өз бетінше қалдырып, жіпті үзеді. Шарлардың шыбықтың шетіне қарай ұмтылатыны анық. Осы кезде қондырғының бұрыштық жылдамдығы күрт төмендейді. Бақыланатын эффект импульс моментінің сақталу заңының тікелей заңдары болып табылады, себебі бұл қондырғы тұйықталған жүйенің үлгісі (сыртқы күштер бір-бірін өтемелеген, өстердегі үйкеліс күштері елеусіз аз). Бұрыш жылдамдығының өзгерісін сандық сипаттау үшін қондырғының массасы түгелдей шарларда шоғырланған деп аламыз. Ал олардың мөлшері ескерусіз аз. Сонда шарлардың импульс моменті жүйенің бастапқы және ақырғы күйлеріндегі C нүктеге қатысты тең болуынан $2m[\mathbf{r_1 v_1}] = 2m[\mathbf{r_2 v_2}]$ шығады:



5.11-сурет

$$r_1^2\omega_1 = r_2^2\omega_2 .$$

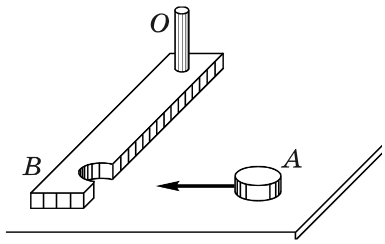
Осыдан шарлардың айналыс өсінен r қашықтығы артқан сайын, қондырғының бұрыштық жылдамдығы кемиді ($1/r^2$ тәрізді). Керісінше, егер шарлардың арақашықтығы азайса, қандай да бір ішкі күштердің әсерінен қондырғының бұрыштық жылдамдығы артқан болар еді. Бұл эффект жалпылама сипатта болады. Оны мысалы фигуристер мен гимнастар кең пайдаланады.

Ақырғы нәтиженің ішкі күштердің сипатына тәуелсіз екендігіне назар аударалық, (ішкі күштер дегеніміз – шарлар мен шыбықтың арасындағы үйкеліс күші).

М-импульсі уақыт бойынша өзгеріп отыратын тұйықталмаған жүйеде де **p** импульс моментінің сақталатын жағдайы да кездеседі. Таңдалған санақ жүйесінің қайсыбір O нүктесіне қатысты бізге қажетті уақыт ішінде сыртқы күштердің қосынды моменті $\mathbf{N}_{\text{сырт}} \equiv 0$ сақталады. Тұйықталмаған жүйе үшін мұндай нүктенің жалпы болмауы да мүмкін. Сондықтан әрбір нақты жағдайда әуелі осы шарттарды анықтап алу керек.

1-мысал. Күннің ауырлық өрісінде қозғалып жүретін Жер-Ай жүйесі тұйықталмаған болып табылады. Оның импульсі ауырлық күшінің әсерінен үнемі өзгеріп отырады. Бірақ өзіне қатысты берілген жүйеге әсер ететін ауырлық күшінің моментін үнемі нөлге айналдырып отыратын бір нүкте бар, ол – Күннің центрі. Сондықтан Жер-Ай жүйесінің Күннің центріне қатысты импульс моменті тұрақты болып қалады деп бірден айтуға болады.

2-мысал. Тегіс горизонталь жазықтықта қозғалмайтын вертикаль өстен еркін айнала алатын AB шыбық жатыр (5.12-сурет). Осы вертикаль өс оның O шеті арқылы өтеді. Жазықтықпен сырғанап келе жатқан A шайба шыбықтың B ұшына тиіп, сонда қалып қояды да, одан әрі тұтас жүйе болып, O нүктеге қатысты біртұтас түрде айнала бастайды.



5.12-сурет.

Шайба-шыбық жүйесінің тұйықталмағандығы анық. Вектикаль бағытта бір-бірін теңестірілетін күштермен қатар горизонталь күш те әсер ете бастайды. Ал шыбық айнала бастаған кезде өс тарапынан тағы бір күш пайда болады. Осының арқасында жүйенің инерция центрі шеңбер бойымен қозғала бастайды, бірақ бұл екі күш те O нүктесі арқылы өтеді, демек, бұл сыртқы күштердің O нүктесіне қатысты анықталған импульс моменті тұрақты болып қалады.

Шектелген жағдайларда тұйықталмаған жүйелерде **M** импульс моментінің өзі емес, оның қандай да бір қозғалмайтын Z өске проекциясы сақтала алады. Бұл барлық сыртқы күштердің қорытынды моментінің осы Z өске проекциясы нөлге тең болатын кезде орындалады. Шындығында да (5.12) теңдеуді Z өсіне проекциялап, келесі өрнекті аламыз:

$$dM_z/dt = N_{iz}\ . \tag{5.15}$$

мұндағы, M_z және N_{iz} – $Z-$ өсіне қатысты импульс моменті және сыртқы күштердің қорытынды моменті:

$$M_z = \sum M_{iz\,,} \qquad N_{iz} = \sum N_{iz}, \tag{5.16}$$

мұндағы, M_{iz} және N_{iz} – жүйенің i-ші бөлшегі үшін Z өсіне қатысты импульс моменті және сыртқы күштердің моменті. (5.15) теңдеуден, егер берілген санақ жүйесінде тыныштықта болатын қандай да бір Z өсіне қатысты проекция $N_{iz} \equiv 0$ болса, онда жүйенің осы өске қатысты импульс моменті сақталады:

$$M_z = \sum M_{iz\,,}(t) = const. \tag{5.17}$$

Кез келген нүктеге қатысты анықталған вектордың өзінің де өзгеруі мүмкін. Мысалы, егер жүйе біртекті ауырлық өрісінде қозғалатын болса, онда барлық ауырлық күшінің кез келген O нүктесіне қатысты қосынды моменті вертикалға перпендикуляр болады, демек, кез келген вектор өске қатысты $N_{1z} \equiv 0$ және $M_z = const$, бірақ осындай заңдылықты $\mathbf{M}$ векторы жайлы айта аламыз.

Импульс моментінің сақталуына әкелетін пікірлер түгелдей Ньютон заңдарының орындалатындығына сүйенеді. Ал осы заңдарға бағынбайтын жүйелерде, мысалы, электромагниттік сәулелену болатын жүйелерде, атомдарда, ядроларда қандай жағдай орын алады?

Импульс моментінің сақталу заңының механикадағы орасан зор рөлін ескере отырып, физиктер импульс моменті түсінігін механикалық емес жүйелерге де (Ньютон заңдарына бағынбайтын жүйелерге) таратты, сөйтіп, импульс моментінің сақталынуын барлық физикалық процестерге постулаттады.

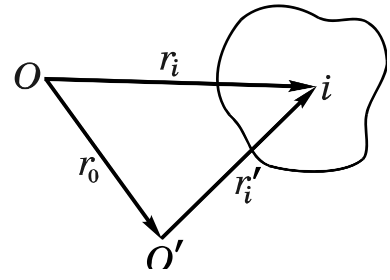
Мұндай кеңейтілген *импульс моментінің сақталу заңы* енді Ньютон заңдарының салдары болып табылады, және ол өз алдына *тәуелсіз, тәжірибе деректеріне сүйенетін жалпылама принцип болып табылады. Энергия мен импульстің сақталу заңымен қатар импульс моментінің сақталу заңы да табиғаттың аса маңызды іргелі заңдарының бірі болып табылады.*

§ 5.3. Меншікті импульс моменті

Жоғарыда көрсетілгендей жүйенің $\mathbf{M}$ импульс моменті сыртқы күштердің қосынды $\mathbf{M}$ моментінің әсерінен ғана өзгереді екен, міне осы $\mathbf{M}$ вектор $\mathbf{N}$ вектордың өзгерісін анықтайды. Енді осы шамалардың ең басты қасиеттерін қарастырып, олардан туатын қорытындыларға тоқталайық.

Сыртқы күштердің қорытынды моменті

Әрбір күштің моменті тәрізді күштердің қорытынды моменті де жалпы алғанда нүктеге қатыстытаңдап алуғатәуелді болады. $\mathbf{N}$−O нүктесіне қатысты қорытынды күш моменті болсын, ал $\mathbf{N}'$−радиус-векторы $\mathbf{r}_0$ болатын O' нүктеге қатысты анықталсын (5.13-сурет). $\mathbf{N}$ және $\mathbf{N}'$ векторларының арасындағы байланысты табамыз. $\mathbf{F}_i$ күштің әсер ету нүктелерінің $\mathbf{r}_i$ және r_i' радиус-векторлары өзара $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i' + \mathbf{r}_0$ қатынаспен байланысқан (5.13-сурет). Сондықтан, $\mathbf{N}$ үшін өрнекті мына түрде жазуға болады:



5.13-сурет

$$\mathbf{N} = \sum[\mathbf{r_i F_i}] = \sum[\mathbf{r_i' F_i}] + \sum[\mathbf{r_0 F_i}],$$

немесе

$$\boxed{\mathbf{N} = \mathbf{N}' + [\mathbf{r_0}\mathbf{F}]\,,} \tag{5.18}$$

мұндағы $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F_i}$ – барлық сыртқы күштердің қорытындысы. (5.18) формуладан $\mathbf{F} = 0$ тең болса, онда сыртқы күштердің қорытынды моменті нүктені таңдап алу жолына тәуелсіз болғаны. Осындай жағдай жүйеге *қос күш* түсірілген кезде, орындалады.

Мысал. Дененің **1** және **2** нүктелеріне модулі бойынша екі бірдей қарама-қарсы бағытталған $\mathbf{F}_1$ және $\mathbf{F}_2$ күштері әсер етеді. Бұл қос күш бір түзудің бойында әсер етеді. $\mathbf{r}_{12}$ $-$**1** нүктеден **2**−ші нүктеге жүргізілген радиус-вектор болсын. Осы қос күштің $\mathbf{N}$ $-$ қосынды моментін табу керек.

$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$ – бұл қорытынды күш, сондықтан (5.18) теңдеуге сай осы күштің $\mathbf{N}$ моменті O−нүктеге қатысты таңдап алуына тәуелсіз болуы қажет. Сондықтан O нүктесі ретінде нүкте **1**−ді таңдап алып, (осы нүктеге қатысты $\mathbf{F}_1$ момент күші нөлге тең) келесі өрнекті табамыз:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{r}_{12}]\mathbf{F}_2.$$

$\mathbf{N}$ $-$ векторының модулі келесі формуламен анықталады: $N = lF,$ мұндағы: l $-$*қосақтың иіні*, яғни бойларымен күш әсер ететін екі түзудің арасындағы ара қашықтық, F $-$*әр күштің модулі*.

Бұл жағдайда *Ц-жүйе*нің кейбір ерекшеліктері болады (бұл санақ жүйесі бөлшектер жүйесінің инерция центрімен берік байланысты және инерциялық жүйеге қатысты ілгерілемелі қозғалады). Жалпы алғанда *Ц-жүйе* инерциялық болмағандықтан барлық сыртқы күштердің қорытындысына (тең әсерлесіне) сыртқы F өзара әрекеттесу күштерімен қатар $F_{\text{ин}}$ инерция күштері де енуі керек. Екінші жағынан, *Ц-жүйе*де бөлшек жүйесі тұтастай алғанда тыныштықта болады да (5.14) бойынша $F = F + F_{\text{ин}} = 0$ дегенді білдіреді. (5.18)–ді ескере отырып, мынадай маңызды қорытындыға келеміз: *Ц-жүйеде барлық сыртқы күштердің қосынды моменті инерция күштерінің моментін қоса алғанда нүктені таңдауға тәуелсіз болады.*

Және тағы бір маңызды қорытынды: *Ц-жүйеде инерция күштерінің инерция центріне қатысты анықталған қосынды моменті әрқашанда нөлге тең*:

$$N_c^{\text{ин}} = 0\,. \tag{5.19}$$

Шындығында да, жүйенің әрбір бөлшегіне әсер ететін инерция күші $\mathbf{F}_i = -m_i\mathbf{a}_0$, мұндағы $\mathbf{a}_0$–*Ц*-жүйенің үдеуі. Сондықтан, барлық осы күштердің *С* инерция центріне қатысты қосынды моменті:

$$\mathbf{N}_c^{\text{ин}} = \sum[\mathbf{r}_i, -m_i\mathbf{a}_0] = -\left[\left(\sum m_i\mathbf{r}_i\right), \mathbf{a}_0\right].$$

(5.18) бойынша $\sum m_i\mathbf{r}_i = m\mathbf{r}_c$, ал біздің жағдайымызда $\mathbf{r}_c$ болатындықтан, $\mathbf{N}_c^{\text{ин}} = 0$ болады.

Меншікті импульс моменті

Күш моменті тәрізді жүйенің импульс моменті де, жалпы алғанда, өзінеқатысты анықталатын *О* нүктені таңдап алуға тәуелді болады. Осы нүктені $\mathbf{r}_0$ қашықтыққа жылжытқан кезде (5.13-сурет), бөлшектің жаңа $\mathbf{r}_i'$ радиус-векторлары ескі $\mathbf{r}_i$ радиус-векторларымен $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i' + \mathbf{r}_0$ формула арқылы байланысты болады. Сондықтан жүйенің *О* нүктесіне қатысты *А* импульс моментін келесі түрде келтіруге болады:

$$\mathbf{M} = \sum[\mathbf{r}_i\mathbf{p}_i] = \sum[\mathbf{r}_i'\mathbf{p}_i] + \sum[\mathbf{r}_0\mathbf{p}_i]$$

немесе келесі түрде жазуға болады:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + [\mathbf{r}_0\mathbf{p}] \tag{5.20}$$

мұндағы $\mathbf{M}'$ жүйенің O' нүктесіне қатысты импульс моменті, ал $\mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_i$ -нің толық импульсы.

(5.20) формуладан, егер жүйенің толық импульсы $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ болса, онда оның толық импульсы *О* нүктені таңдауға тәуелсіз болатындығы шығады. Бөлшектер жүйесі тұтастай тыныштықта болатын *Ц-жүйе*нің негізгі ерекшелігі міне осында. Осыдан біз үшінші маңызды қорытындыға келеміз: *Ц-жүйеде бөлшектер жүйесінің импульс моменті* өзіне қатысты анықтай алатын *нүктені таңдауға* тәуелсіз болады.

Осы моментті жүйенің *меншікті импульс моменті* деп атайды және оны $\widetilde{\mathbf{M}}$ деп белгілейді.

М және $\widetilde{\mathbf{M}}$ арасындағы байланыс

Бөлшектер жүйесінің *К*-санақ жүйедегі *О* нүктеге қатысты анықтай алатын нүкте импульс моменті $\mathbf{M}$ болсын. *Ц*-жүйенің де $\widetilde{\mathbf{M}}$ импульс моменті *О* нүктені таңдауға тәуелсіз болатындықтан, *О* нүктені берілген уақытта *К*-жүйеніңнің O' нүктесімен бірдей түсетіндей етіп алайық. Сонда, әрбір бөлшектердің радиус-векторлары екі санақ жүйесінде де бірдей болады $\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i$, ал бөлшектердің жылдамдықтары формуламен байланысты болады:

$$\mathbf{v}_i = \tilde{\mathbf{v}}_i + \boldsymbol{V}_c\,, \tag{5.21}$$

мұндағы $\boldsymbol{V}_c$*Ц*-жүйенің *К*-жүйеге қатысты жылдамдығы. Сондықтан:

$$\mathbf{M} = \sum m_i[r_i\mathbf{v}_i] = \sum m_i[\mathbf{r}_i\tilde{\mathbf{v}}_i] + \sum m_i[\mathbf{r}_i\boldsymbol{V}_c]\,. \tag{5.22}$$

Бұл теңдіктің оң жағындағы бірінші қосынды импульс моменті $\widetilde{\mathbf{M}}$ болып табылады. Екінші қосындыны (5.8)-ге сай $m[\mathbf{r}_c\boldsymbol{V}_c]$ немесе $[\mathbf{r}_c\mathbf{p}]$деп жазуға болады, мұндағы m – тұтас жүйенің массасы, $\mathbf{r}_c$– оның инерция центрінің *К*-жүйенің радиус-векторы, $\mathbf{p}$-жүйенің қосынды импульсі. Нәтижесінде:

$$\mathbf{M} = \widetilde{\mathbf{M}} + [\mathbf{r}_c\mathbf{p}]\,, \tag{5.23}$$

яғни, *бөлшек жүйесінің* $\boldsymbol{M}$ *импульс моменті О ның* $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ *меншікті импульс моменті мен бөлшектер жүйесінің біртұтас қозғалысынан туатын* $[\boldsymbol{r}_c\boldsymbol{p}]$ *моменттің қосындысынан тұрады.*

Көлбеу жазықтықпен домалап келе жатқан біртекті шарды қарастырайық. Оның осы жазықтағы қандай да бір нүктеге қатысты А нүкте импульс моменті шардың инерция центрінің қозғалысына байланысты импульс моменті мен шардың өз өсінен айналуынан туатын импульс моментінің қосындысынан тұрады.

(5.23)-формуладан жеке алғанда тағы да келесі тұжырымдар шығады. Мысалы, егер жүйенің инерция центрі тыныштықта болса және жүйенің импульсы $\mathbf{p} = 0$ болса, онда оның $\mathbf{M} -$ импульс моменті меншікті моментіне айналады. Бұл жағдаймен біз таныспыз. Екінші шектік жағдайда, $\widetilde{\mathbf{M}} = 0$ болғанда жүйенің қандай бір нүктеге қатысты импульс моменті жүйенің тұтастай қозғалысымен байланысты, яғни ол импульс моментінің екінші қосылғышымен анықталады. Ілгерілемелі қозғалыста болатын қатты дененің импульс моменті дәл осылай анықталады.

***Ц-жүйе*дегі моменттер теңдеуі**

Өткен § 5.2 параграфта (5.12) теңдеудің кез келген санақ жүйесінде орындалатындығын айтып кеттік. Олай болса, ол *Ц-жүйе*де де орындалады. Сондықтан бірден $d\widetilde{\mathbf{M}}/dt = \widetilde{\mathbf{N}}$ деп жазуға болады, мұндағы $-\widetilde{\mathbf{N}}$ моменті *Ц-жүйе*дегі барлық сыртқы күштердің моменті. *Ц-жүйе* жалпы алғанда инерциялық болмайтындықтан, $\widetilde{\mathbf{N}}$ моментке сыртқы өзара әрекеттесу күштері моменттері мен қатар инерция күштерінің моменттері де енеді. Екінші жағынан, осы параграфтың басында *Ц*-жүйеде $\widetilde{\mathbf{N}}$ күш моментінің өзіне қатысты анықталатын нүктенің орнына тәуелсіз болатындығын көрсеткенбіз. Көбінесе мұндай нүкте ретінде жүйенің масса центрін – *С* нүктесін алады. Осы нүктені алудың себебі – оған қатысты инерция күштерінің қосынды моменті нөлге тең болады, сондықтан *тек* сыртқы өзара әрекеттесу күштерінің ғана $\mathbf{N}_c$ қосынды моментін ескеру керек. Сонымен:

$$\frac{d\widetilde{\mathbf{M}}}{dt} = \mathbf{N}_c, \tag{5.24}$$

яғни, жүйенің меншікті импульс моментінің уақыты бойынша туындысы осы жүйенің инерция центріне қатысты барлық сыртқы өзара әрекеттесу күштерінің қосынды моментіне тең болады. Егер $\mathbf{N}_c \equiv 0$болса, онда $\widetilde{\mathbf{M}} = const$, яғни жүйенің *меншікті импульс моменті сақталады*.

Жүйенің инерция центрі арқылы өтетін Z өсіне проекциясы бойынша 5.24 теңдеудің түрі:

$$d\widetilde{M}_z/dt = N_{Cz}, \tag{5.25}$$

мұндағы, N_{Cz} – сыртқы өзара әрекеттесу күштерінің *Ц-жүйе*дегі масса центрі арқылы өтетін қозғалмайтын Z өсіне қатысты қосынды моменті; егер $N_{Cz} \equiv 0$ болса, онда $\widetilde{M}_z = const$.

§ 5.4. Қатты дене динамикасы

Қатты дененің қозғалысы жалпы алғанда екі векторлық теңдеулермен анықталады. Олардың біреуі – инерция центрінің қозғалыс теңдеуі (3.11), екіншісі −*Ц-жүйе*дегі моменттер теңдеуі (5.24):

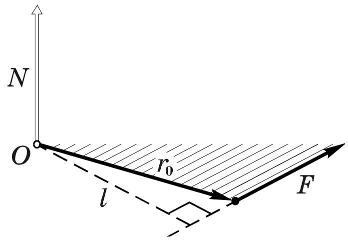
$$m\mathrm{d}\boldsymbol{V}_C/\mathrm{d}t = \mathbf{F}; \qquad \mathrm{d}\widetilde{\mathbf{M}}/\mathrm{d}t = \mathbf{N}_c. \tag{5.26}$$

Сыртқы күштердің заңдарын біле отырып, оларды қолдану түрлері мен бастапқы шарттарын біле отырып, осы теңдеулердің көмегімен қатты дененің әрбір нүктесіндегі жылдамдығын оның кез келген уақыт мезетінде табуға болады, яғни қатты дененің қозғалысы мәселесін толық шешуге болады. Бірақ, (5.26) теңдеулердің сырт қарағандағы қарапайымдылығы болмаса, оларды жалпы жағдайда шешу өте қиын. Ең алдымен бұл *Ц*-жүйедегі меншікті импульс моменті $\widetilde{\mathbf{M}}$ мен қатты дененің жеке нүктелерінің арасындағы байланыс, тек кейбір жағдайларда болмаса, көбінесе өте күрделі болып шығады. Енді кейбір дербес жағдайларды қарастырайық.

Ең алдымен (5.26) теңдеулердің жалпы түрімен шығатын кейбір тоқтамдарға тоқталайық. Егер біз күштерді олардың әсер ету бағытында орын ауыстыратын болсақ, онда олардың $\mathbf{F}$ тең әсерлесі де, олардың қорытқы $\mathbf{N}_C$ моменті де өзгермеген болар еді. Осы (5.26) теңдеулер өзгеріссіз қалады, яғни қатты дененің қозғалысы да өзгермейді. Сондықтан сыртқы күштердің түсу нүктелерін күштердің әсер ету бағытымен орын ауыстыруға болады – бұл тәсіл жиі қолданылады.

Тең әсерлі (қорытқы) күш

Барлық сыртқы күштердің қорытқы моменті тең әсерлі күшке перпендикуляр, яғни $\mathbf{N} \perp \mathbf{M}$ болатын кезде барлық сыртқы күштерді белгілі бір түзудің бойымен әсер ететін жалғыз ғана $\mathbf{F}$ күшке айналдыруға болады. Шындығында да, егер қайсы O бір нүктеге қатысты қорытқы момент $\mathbf{N} \perp \mathbf{F}$ болса, онда берілген $\mathbf{N}$ және $\mathbf{F}$ кезінде орындалатын $\mathbf{r}_0 \perp \mathbf{N}$ векторды табуға болады (5.14–сурет).



5.14-сурет

$$\mathbf{N} = [\mathbf{r}_0\mathbf{F}].$$

$\mathbf{r}_0$ векторды таңдап алу бірмәнде емес: оған $\mathbf{r}$ векторға параллель болатын кез келген $\mathbf{F}$ векторды қосу соңғы теңдікті еш өзгертпейді. Берілген теңдік $\mathbf{F}$ күштің түсу нүктесін емес, тек оның әсер ету түзуін ғана анықтайды. Сәйкес векторлардың N және F модульдерін біле отырып, $\mathbf{F}$ күштің l иінің табуға болады (5.14-сурет): $l = N/F$.

Сонымен, егер $\mathbf{N} \perp \mathbf{F}$ болса, онда қатты дененің жеке нүктелеріне *әсер ететін күштер* жүйесіне жалғыз ғана $\mathbf{F}$ қорытқы күш жауапты және барлық сыртқы күштердің қосынды $\mathbf{N}$ моментін тудыратын күшпен алмастыруға болады.

Біртекті күш өрісінде мысалға ауырлық өрісінде осындай жағдай туады, онда әрбір бөлшекке әсер ететін күштің түрі $\mathbf{F}_i = m_i\mathrm{g}$. Бұл жағдайда ауырлық күшінің кез келген O нүктеге қатысты қосынды моменті:

$$\mathbf{N} = \sum [r_i, m_i g] = \left[\left(\sum m_i \mathbf{r}_i\right)\mathbf{g}\right].$$

Дөңгелек жақшадағы қосынды (3.8) бойынша $m\mathbf{r}_c$ тең болады. Мұндағы m дененің массасы; $\mathbf{r}_c$ - инерция центрінің O нүктесіне қатысты радиус-векторы. Сондықтан:

$$\mathbf{N} = [m\mathbf{r}_c, \mathbf{g}] = [\mathbf{r}_c, m\mathbf{g}].$$

Ауырлық күшінің $m\mathbf{g} -$ тең әсерлісі дененің инерция центрі арқылы өтеді. Әдетте ауырлық күшінің тең әсерлесі дененің инерция центріне немесе оның ауырлық центріне түсіріледі. Дененің инерция центріне қатысты бұл күштіңмоменті нөлге тең болатыны анық.

Қатты денелер үшін тепе-теңдік жағдайлары

Қатты дене тыныштық күйін себепсіз бұзбайды, ол үшін қандай да бір (5.26) теңдеуіне сай қажетті екі шарттар орындалуы жеткілікті.

1) Денеге әсер еткен барлық сыртқы күштердің қорытындысы нөлге тең болуы қажет:

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_{i11} = 0;$$

2) Кез келген нүктеге қатысты сыртқы күштердің қорытқы моменті де нөлге тең болуы қажет:

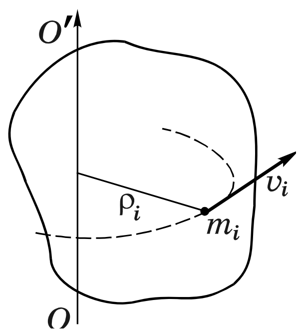
$$\mathbf{N} = \sum \mathbf{N}_{i11} = 0.$$

Осындай шарттар дене қандай санақ жүйесінде тыныштықта жатса сол жүйеде орындалуы керек. Егер санақ жүйесі инерциалды болмаса, онда сыртқы күштердің әсерінен басқа тағы да инерция күштерін ескеру қажет. Момент күштеріне де осындай шарттар сәйкес келеді.

Енді қатты дене қозғалысының төрт дербес жағдайларын қарастыруға көшеміз:

1) Қозғалмайтын өстен айналуы, 2) жазық қозғалысы, 3) еркін өстерден айналуы, 4) қозғалмайтын бір нүктесі бар ерекше қозғалыс жағдайы (гироскоптар).

1. Қозғалмайтын өстен айналу



5.15-сурет

Әуелі қатты дененің OO' айналу өсіне қатысты импульс моменті үшін өрнекті тауып (5.15-сурет), (5.9) формуланы пайдаланып, жазамыз:

$$M_z = \sum M_{iz} = (\sum \mathrm{m}_i\, \mathrm{p}_i^2)$$

мұндағы m_i және ρ_i қатты дененің i-ші бөлшегінің массасы және айналыс өсінен қашықтығы, ω_i- оның бұрыштық жылдамдығы. Дөңгелек жақшадағы шаманы I деп белгілеп, табамыз:

$$M_z = I\omega_i\,, \tag{5.27}$$

мұндағы I -қатты дененің OO' өске қатысты *импульс моменті* деп аталатын шама:

$$I = \sum m_i \rho_i^2\,. \tag{5.28}$$

Қатты дененің импульс моменті, таңдалған өске қатысты массалардың таралуына тәуелді және аддитивті шама болып табылады.

Қатты дененің импульс моментін есептеу формуласы:

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m = \int \rho r^2 \mathrm{d}V,$$

мұндағы $\mathrm{d}m$ және $\mathrm{d}V$ – дененің қарастырылып отырған Z өсіне r қашықтықта орналасқан элементінің массасы мен көлемі; ρ– дененің осы нүктедегі тығыздығы.

Инерция центрі арқылы өтетін Z_c өсіне қатысты анықталатын кейбір біртекті қатты денелердің импульс моменттері төменде келтірілген (мұндағы m – дененің массасы);

Қатты дене	$Z_C -$ өсі	Инерция моменті
Ұзындығы l жіңішке түтікше	Z_C өсі шыбыққа перпендикуляр	$1/12ml^2$
Радиусы R тұтас цилиндр	Z_C өсі цилиндр өсімен бірдей түседі	$1/2\mathrm{m}R^2$
Радиусы R жұқа диск	Z_C өсі дискінің диаметрімен бірдей түседі	$1/2\mathrm{m}R^2$
Радиусы R шар	Z_C өсі шар центрі арқылы өтеді	$2/5\mathrm{m}R^2$

Осы есептеулерге бірер мысалдар келтірейік.

Кез келген айналыс өсіне қатысты қатты дененің инерция моментін есептеу математикалық тұрғыдан қарастырғанда жалпы алғанда оңай жұмыс емес. Алайда кейбір жағдайларда егер **Штейнер теоремасын** пайдаланса инерция моментін анықтау әлдеқайда жеңілденеді: *егер $I -$ дегеніміз массасы m болатын дененің қайсыбір айналыс өсіне қатысты анықталған инерция моменті, ал $I_C -$ массалар центрі арқылы өтетін және алдыңғы өстен қашықтықта оған параллель орналасқан өске қатысты анықталған инерция моменті болса, онда мына қатынас орындалады*:

$$\boxed{I = I_C + ma^2} \quad (5.29)$$

мұндағы, m – дененің кез келген шексіз кішкене бөлігінің массасы да, ал I_C – оның айналыс өсінен перпендикуляр бойымен алынған қашықтығы.

Сонымен, егер массалар центрі арқылы өтетін өске қатысты анықталған инерция моменті белгілі болса, онда оған параллель кез келген басқа өске қатысты инерция моментін есептеп шығаруға болады. Мысалы, жіңішке шыбықтың (массасы m, ұзындығы l) $Z-$ өсіне (өс шыбыққа перпендикуляр және оның ұшы арқылы өтетін) қатысты инерция моменті келесі теңдеумен анықталады:

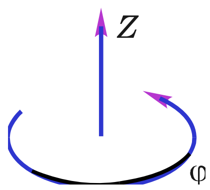
$$I=\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{3}ml^2.$$

Қатты дененің айналмалы динамикалық теңдеуі (айналыс өсі қозғалмайды). Бұл теңдеуді (5.27) уақыт бойынша дифференциалдап, (5.15) теңдеудің салдары ретінде жеңіл алуға болады:

$$\boxed{I\beta_z=N_z,} \tag{5.30}$$

мұндағы, N_z- барлық сыртқы күштердің айналыс өсіне қатысты қосынды моменті. Олай болса, қатты дененің айналыс кезінде инерция моменті оның инерциялық қасиеттерін анықтайды: күш моментінің бір ғана N_z мәні кезінде инерция моменті үлкенірек дене аз β_z- бұрыштық үдеуді алады.

Айта кету керек, өске қатысты анықталатын күш моменттері алгебралық шамалар болып табылады: олардың таңбалары $Z-$өсінің (айналыс өсімен бірдей түсетін) оң бағытын таңдап алуға да, сәйкес күш моментінің айналу бағытына да тәуелді болады. Мысалы, 5.16-суретте көрсетілгендей $Z-$өсінің оң бағытын таңдап алып, осылайша біз $\varphi-$бұрышын (бұл екі бағытта да оң бұранда ережесімен байланысты) есептеудің оң бағытын көрсетеміз.



5.16-сурет

Егер қайсыбір N_{iz} моменті $\varphi-$бұрышың оң бағытында бұрылатын болса, онда бұл момент оң деп саналады және керісінше. Ал қорытынды N_z- моментінің таңбасы β_z- бұрыштық үдеудің $Z-$өсіне проекциясының таңбасын анықтайды.

Бастапқы шарттарды – бастапқы уақыт мезетінде ω_{0z} және φ_0 мәндерін ескере отырып, (5.30) теңдеуді интегралдап, қатты дененің қозғалмайтын өстен айналу мәселесін толық шешуге, яғни бұрыштық жылдамдықтың $\omega_z(t)$ және бұрылу бұрышының $\varphi(t)$ уақытқа тәуелділіктерін табуға мүмкіндік туады.

(5.30) теңдеуін айналыс өсінің берік байланысқан *кез келген* санақ жүйесінде де орындалатындығын айта кету керек. Бірақ егер санақ жүйесі инерциялық болмаса, онда N_z күш моменті тек басқа денелермен өзара әрекеттес күштерінің моменттерін ғана емес, сонымен қатар инерция күштері моменттерін де өзіне қосып алады.

Айналыстағы қатты дененің кинетикалық энергиясы (айналу өсі қозғалмайды). Айналыстағы қатты дененің i-ші бөлшегінің жылдамдығының $\upsilon_i = \rho_i \omega$ болатындығын ескеріп, жазамыз:

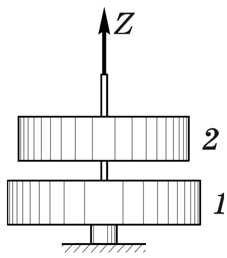
$$K = \sum m_i \upsilon_i^2/2 = \left(\sum m_i \rho_i^2\right) \omega^2/2\,,$$

немесе қысқартсақ,

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2\,, \tag{5.31}$$

мұндағы, I – дененің айналыс өсіне қатысты анықталған импульс моменті, ω – оның бұрыштық жылдамдығы.

Мысал. **1-**ші диск тегіс вектор өстен ω_1 бұрыштық жылдамдықпен айналып тұрған. Оған $\omega_2 -$ бұрыштық жылдамдығымен айналатын **2**-ші диск келіп құлайды. Арасындағы үйкелістің салдарынан екі диск қайсыбір уақыттан кейін біртұтас түрде айнала бастайды. Егер дискілердің айналыс өсіне қатысты импульс моментітері I_1 және I_2 болса, осы жүйенің айналмалы қозғалысының кинетикалық энергияның өсімшесін табу керек.



5.17-сурет

Шығару жолы. Әуелі қалыптасқан айналыстың бұрыштық жылдамдығын табамыз. Жүйенің z- өсіне қатысты импульс моментінің сақталу заңынан $I_1\omega_{1z} + I_2\omega_{2z} = (I_1 + I_2)\omega_2$ екендігі шығады, осыдан

$$\omega_z = \frac{I_1\omega_{1z} + I_2\omega_{2z}}{I_1 + I_2}. \tag{1}$$

ω_{1z} , ω_{2z} және ω_z –алгебралық шамалар. Егер, $\omega_z > 0$ болса, онда сәйкес $\boldsymbol{\omega}$ вектордың z– өсінің оң бағытымен бағыттас және керісінше болғаны.

Осы жүйенің айналмалы қозғалысының кинетикалық энергияның өсімшесі:

$$\Delta K = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega_1^2 - \frac{1}{2}(I_1\omega_{1z}^2 + I_2\omega_{2z}^2)\,.$$

ω_z шамасын оның (1) өрнегімен алмастырамыз, сонда:

$$\Delta K = -\frac{I_1 I_2}{2(I_1 + I_2)}(\omega_{1z} - \omega_{2z})^2\,. \tag{2}$$

Минус таңбасы кинетикалық энергияның кемігенін көрсетеді.

Алынған (1) және (2) нәтижелер өздерінің түрі мен мағынасы жағынан да абсолют серпімсіз соқтығысу жағдайымен бірдей екендігі көрінеді.

Қатты дененің қозғалмайтын өстен айналуы кезіндегі сыртқы күштердің жұмысы. (4.49) теңдеуіне сай қатты денеге әсер ететін барлық сыртқы күштердің элементар жұмысы тек кинетикалық энергияның өсімшесіне ғана тең болады, себебі оның өзінің меншікті потенциалдық энергиясы осы кезде өзгеріссіз қалады. Сонымен $\delta A = dK$. (5.31) бойынша $\delta A = d(I\omega^2/2)$. Осы өрнекті Z үшін соңғы теңдеуге қойып және $\omega^2 = \omega_z^2$ екендігін ескеріп, жазамыз:

$$\delta A = I\omega_z d\omega_z \,.$$

Алайда (5.30)-ға сәйкес $Id\omega_z = N_z \mathrm{d}t$ болады. Осы шыққан өрнекті соңғы теңдеуге қойып және $\omega_z dt = d\varphi$ болатынын еске алып, $\delta A -$ табамыз:

$$\delta A = N_z d\varphi \,. \tag{5.32}$$

δA жұмыс алгебралық шама: егер N_z және $d\varphi$ шамаларының таңбалары бірдей болса, онда $\delta A > 0$; егер де олардың таңбалары қарама-қарсы болса, онда $\delta A < 0$.

Қатты дене шектік φ бұрышқа бұрылу кезіндегі сыртқы күштердің атқаратын жұмысы:

$$\boxed{A = \int_0^{\varphi} N_z d\varphi \,.} \tag{5.33}$$

$N_z = const,$ болатын жағдайда, соңғы өрнек ықшамдалады: $A = N_z\varphi$. Сонымен, қатты дененің қозғалмайтын өстен айналу кезіндегі сыртқы күштердің атқаратын жұмысы өске қатысты анықталған осы күштердің N_z моментінің әсерімен анықталады. Егер бұл күштер моменттері $N_z = 0$ болса, онда олар жұмыс атқармайды.

2. Қатты дененің жазық қозғалысы

Жазық қозғалыс кезінде қатты дененің *С* инерция центрі берілген *К*− санақ жүйесінде тыныштықта болатын белгілі жазықтықта қозғалады, ал оның бұрыштық жылдамдығының $\boldsymbol{\omega} -$ векторы үнемі осы жазықтыққа перпендикуляр болып қалады. *Ц*-жүйедегі қатты дене өзінің инерция центрі арқылы өтетін және оған қатысты тыныштықта болатын өстен таза айналмалы қозғалыс жасайды. Ал қатты дененің айналмалы қозғалысы болса, ол (5.30) теңдеуімен анықталады, ал ол кез келген санақ жүйесінде де орындалады.

Сонымен, бізде қатты дененің жазық қозғалысын сипаттайтын мынадай екі теңдеу бар:

$$m\mathbf{a}_C = \mathbf{F}; \qquad I_C\beta_z = N_{Cz}\,, \tag{5.34}$$

мұндағы, m дененің массасы, $\mathbf{F}$ – барлық сыртқы күштердің қорытындысы, I_C және N_{Cz} – импульс моменті және барлық сыртқы күштердің қосынды моменті – бұлардың екеуі де дененің инерция центрі арқылы өтетін өске қатысты анықталған.

*Ц-жүйе*сінің жалпы алғанда инерциялық емес екендігіне қарамай, N_{Cz} моментте тек сыртқы өзара әрекеттесу күштерін ғана ескеретінімізді есте ұстау керек. Мұның себебі, инерция күштерінің қосынды моменті инерция центріне қатысты да, осы нүкте арқылы өтетін өске қатысты да нөлге тең болады, сондықтан оны ескермеуге болады.

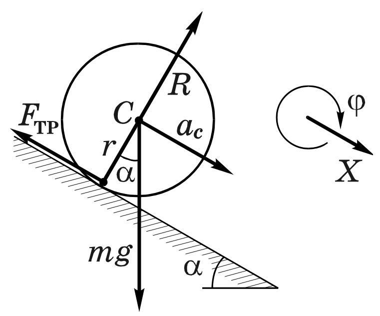
Сонымен қатар β_z бұрыштық үдеудің, демек, ω_z пен φ шамаларының да екі санақ жүйесінде де бірдей болатындығын айта кетелік, себебі $Ц-$ жүйесі инерциялық K–санақ жүйесіне қатысты ілгерілемелі қозғалыста болады.

(5.34) теңдеуді бастапқы шарттарды ескере отырып, интегралдап, қатты денеің кез келген t уақыттағы қалпын анықтайтын $\mathbf{r}_C(t)$ және $\varphi(t)$ тәуелділіктерін табуға болады.

Еркін емес қатты дененің қозғалысын қарастырғанда қозғалыстың шектелуін анықтайтын қосымша шарттарды да пайдалану керек. Ол сызықтық және бұрыштық үдеулердің арасындағы кинематикалық байланысты береді.

Мысал. Массасы m және радиусы r біртекті цилиндр сырғанаусыз горизонтпен α бұрыш жасайтын көлбеу жазықтықпен домалап келеді. (5.18-сурет). Цилиндрдің қозғалыс теңдеуін табу керек.

Шығару жолы. Осы тәріздес есептерді шығарудың стандартты жолын келесі түрде келтіруге болады. Ең бірінше денеге әсер ететін күштердің түрін және олардың қандай жерге қолданылуын (біздің мысалымызда бұл ауырлық күші $-m\mathbf{g}$, $\mathbf{R}$ –көлденең жазықтықтан түсетін реакция күшін құраушы нормал және $\boldsymbol{F}_{үйк}$ –тыныштықтың үйкеліс күші) анықтау.



5.18-сурет

Цилиндр центрінің орын ауыстыру бағытын $x-$ өсінің оң бағыты деп алып, $\varphi-$ бұрылу бұрыштарын таңдайды, (a_{Cx} мен β_z –үдеулерінің таңбалары бірдей болатындай етіп бұл бағыттарды алдын ала қиыстырып алған жөн) мысалы, 5.18-суреттің оң жағында көрсетілгендей. Міне, тек осыдан кейін ғана x пен φ –дің таңдалынып алынған оң бағыттарына проекциясының (5.34) қозғалыс теңдеуін жазамыз:

$$ma_{Cx} = mg\sin\alpha - F_{үйк}, \quad I_C\beta_z = rF_{үйк}.$$

Сонымен қатар сырғанаудың жоқтығы үдеулер арасындағы кинематикалық байланысты анықтайды:

$$a_{Cx} = r\beta_z.$$

Осы үш теңдеулерді бірге шешу a_C және β үдеулерді, сонымен қатар $F_{үйк}$ −үйкеліс күшін табуға мүмкіндік береді.

Моменттер теңдеулерін $O -$ *лездік өске қатысты* жиі жазады (5.18-суретке қара). Алайда мұндай жолдың дұрыстығы алдын ала анық емес, сондықтан *лездік өстердің* ерекше қасиеттеріне байланысты мұндай тұжырым дәлелдеуді талап етеді. Дәлелдік үшін (5.12) мен (5.23) қатынастары пайдалынады. Осы екі өрнектер арқылы келесі теңдеуді формальді түрде жазуға болады:

$$I_O\beta_z = rm\mathrm{g}\sin\alpha\ ,$$

мұндағы, I_O Штейнер теоремасына сәйкес келесі өрнекке тең болады:

$$I_O = I_C + mr^2.$$

Осы келтіріліп отырған теңдеу тек лездік өске ғана тән емес сонымен қатар көлбей жазықтықта жатқан және лездік өске параллель кез келген өске де тән. Барлық жағдайлар үшін, яғни өстің тұрған орнына тәуелсіз, r −(шардың немесе цилиндрдің) *тек қана радиус* болып келеді.

Қатты дененің жазық қозғалысының кинетикалық энергиясы

Дене қайсыбір *К*−инерциялық санақ жүйесінде жазық қозғалыста болсын. Оның осы санақ жүйесіндегі *К* кинетикалық энергиясын табу үшін (4.56) формуланы пайдаланамыз. Осы формулаға енетін $\widetilde{K}$ шамасы біздің жағдайымызда дененің *Ц-жүйе*сіндегі инерция центріне арқылы өтетін өстен айналуының кинетикалық энергиясы болып табылады. (5.31) бойынша $\widetilde{K} = I_C\omega^2/2$, сондықтан бірден жазамыз: оның

$$\boxed{K = \frac{I_C\omega^2}{2} + \frac{mV_C^2}{2},} \qquad (5.35)$$

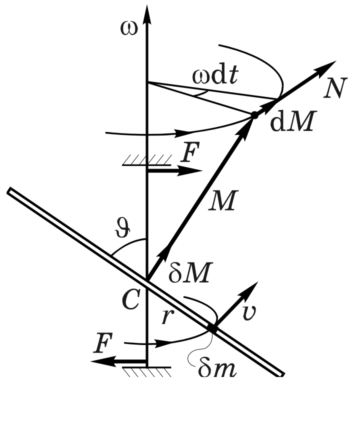
мұндағы, I_C – дененің инерция центрі арқылы өтетін өске қатысты импульс моменті , ω – дененің бұрыштық жылдамдығы, m – оның массасы, V_C – дененің инерция центрінің К − санақ жүйесіндегі жылдамдығы.

Сонымен *жазық қозғалысындағы қатты дененің кинетикалық энергиясы Ц-жүйесіндегі айналу энергиясы мен масса центрінің қозғалысына байланысты энергиядан құралады*.

3. Еркін өстер. Инерцияның бас өстері

Егер денені айналмалы қозғалысқа келтіріп, сосын оны өз бетінше қалдырса, онда айналыс өсі өз бағытын өзгеріссіз қалдыру үшін, оған белгілі мөлшерде күштер әсер ету керек.

Бұл мәселені төмендегі мысалдың негізінде қарастырайық. Біртекті шыбықтың C ортасы айналыс өсіне, шыбық пен өстің арасындағы бұрыш болатындай етіліп, нықтап бекітілген болсын (5.19-сурет). Шыбық $\vartheta-$бұрыштық жылдамдықпен айналған кезде айналыс өсінің бағыты өзгермей қалу үшін оған сыртқы күштердің қандай **N** моментін түсіру керек екендігін табу керек. (5.12) бойынша бұл момент $\mathbf{N} = \mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t$. Сонымен **N** векторды анықтау үшін, әуелі шыбықтың **M** импульс моментін, сосын оның уақыт бойынша туындысын табу керек.



5.19-сурет

M импульс моментін C нүктесіне қатысты анықтау әлдеқайда жеңіл. Шыбықтың C нүктеден **r** қашықтықта жатқан массасы δm болатын элементін ойша бөліп алайық. Оның осы нүктеге қатысты импульс моменті $\delta\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \delta m\mathbf{v}]$, мұндағы, $\mathbf{v}-$ элементтің жылдамдығы. $\delta\mathbf{M}$ вектор шыбыққа перпендикуляр (5.19-сурет). Және оның бағыты δm элементін таңдап алуға тәуелді емес. Сондықтан шыбықтың **M** момент импульсінің қосындысы $\delta\mathbf{M}$ вектордың бағытымен бірдей.

Алайда біздің жағдайымызда **M** вектордың бағыты **ω** вектордың бағытымен сәйкеспейді.

Сонымен шыбық айналған кезде **M** вектор да ω бұрыштық жылдамдықпен айналатын болады. dt уақыт аралығында **M** вектор d**M** өсімше алады, оның модуль 5.19-суреттен көрсеткендей

$$|\mathrm{d}\mathbf{M}| = M\sin(\pi/2 - \vartheta)\omega\mathrm{d}t\,,$$

немесе векторлық түрде $\mathrm{d}\mathbf{M} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{M}]\mathrm{d}t$. Соңғы өрнектің екі жағын да dt уақытқа бөліп, келесі өрнекті табамыз:

$$\mathbf{N} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{M}]\,.$$

Сонымен айналу өсінің бағытын өзгеріссіз ұстап отыру үшін оған қандай да бір **F** сыртқы күштердің **N** моментін түсіру керек болғаны (олар 5.19-суретте). Егер $\vartheta = \pi/2$, болса, оны **M** вектордың бағыты $\boldsymbol{\omega}$ вектормен бірдей болғаны және бұл жағдайда $\mathbf{N} \equiv 0$ болатындығын жеңіл байқауға болады, яғни айналу өсінің бағыты сыртқы әсерінсіз-ақ өзгеріссіз қалады.

Сыртқы күштердің әсерінсіз-ақ өзінің кеңістіктегі бағытын сақтап отыратын айналу өсін *дененің еркін өсі* деп атайды.

Қатты дененің жалпы теориясында кез келген қатты дене үшін оның инерция центрі арқылы өтетін өзара перпендикуляр үш өстің болтындығы дәлелденеді, олар еркін өстер рөлін атқарады. Оларды *инерцияның бас өстері деп атайды.*

Кез келген пішіндегі қатты дене үшін инерцияның бас өстерін табу математикалық тұрғыдан оңай шаруа емес. Бірақ ол қандай да бір симметриясы бар денелер үшін көп жеңілденеді, себебі бұл жағдайда инерция центрінің орны мен инерцияның бас өстерінің бағыттарының да симметриялары бірдей.

Мысалы, біртекті тікбұрышты паралепипедтің бас инерция өстері оның қарсы жақтарының центрлері арқылы өтеді. Егер дененің симметрия өсі болса, (мысалы, біртекті цилиндр), онда оның бас инерция өстерінің біреуі симметрия өсі бола алады да, қалған екі өсі ретінде кезкелеген екі өзара перпендикуляр, әрі симметрия өсіне перпендикуляр жазықтықта жататын және дененің инерция центрі арқылы өтетін өстерді алуға болады, сонымен, өстік симметрия бар денелерде бас инерция центрі арқылы өтетін кез келген өзара перпендикуляр үш өс алынады. – бас өстердің бірде-біреуі де денеге қатысты бекітілмеген. Дененің бас инерция өстерінің маңызды қасиеті: олардың кез келген біреуінен айналғанда дененің $\mathbf{M}$ импульс моменті бағыты бойынша дененің $\boldsymbol{\omega}$ бұрыштық жылдамдығымен бірдей түседі және формуламен анықталады:

$$\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega} \qquad (5.36)$$

мұндағы, I – дененің берілген бас инерция өсіне қатысты анықталатын импульс моменті әрі $\mathbf{M}$ өзі қатысты анықталатын нүктеге тәуелсіз болады (бұл айналу өсі тыныштықта деп есептелінеді).

(5.36) формуланың дұрыстығына өстік симметриясы бар біртекті дене жағдайында жеңіл көз жеткізуге болады, шындығында да, (5.27) бойынша, қатты дененің айналыс өсіне қатысты импульс моменті $M_z = I\omega_z$ (бұл жерде осы өстің бойындағы кез келген нүктеге қатысты анықталатын M_z вектордың проекциясы). Егер дене айналу өсіне қатысты симметриялы болса, онда симметриялықтан $\mathbf{M}$ вектордың бағыты $\boldsymbol{\omega}$ вектордың бағытымен бірдей болатындығы шығады, яғни:

$$\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega}.$$

Жалпы алғанда, (айналу өсі дененің инерция центрі арқылы өтетін болса да, бірақ инерцияның бас өстерінің бірде біреуімен бірдей $\mathbf{M}$ түспейді) $\mathbf{M}$ вектордың бағыты $\boldsymbol{\omega}$ вектордың бағытымен сәйкеспейтіндіктен олардың арасындағы байланыс күрделі болады. Айналып тұрған қатты дененің қозғалыс сипатының күрделілігі міне, осында.

4. Гироскоптар

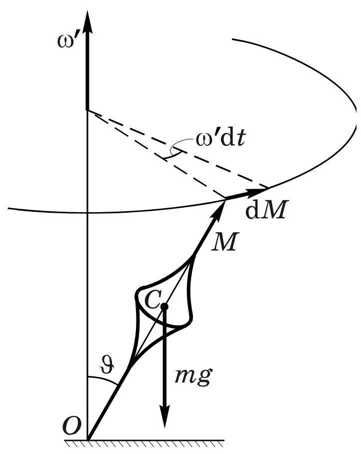
Гироскоп деп симметрия өсінен үлкен бұрыштық жылдамдықпен айналатын ауыр (шомбал) симметириялық дене аталады. Енді гироскоптың қимыл әрекетін зырылдауықтың негізінде қарастырамыз.

Тәжірибе көрсеткендей, егер айналып тұрған зырылдауықтың өсі вертикалға көлбеу болса, онда зырылдауық құламай *прецессия* деп аталатын қозғалыс жасайды. Вертикалды айнала оның өсі қандай да бір $\boldsymbol{\omega}'$ бұрыштық жылдамдықпен конус сызады, әрі зырылдауықтың айналу $\boldsymbol{\omega}'$ бұрыштық жылдамдығы аз болады.

Гироскоптың осындай қасиетін (5.12) теңдеудің көмегімен жеңіл түсіндіруге болады, бұл үшін тек $\omega \gg \omega'$ деп алу керек (міне осы шарт гироскоптың үлкен жылдамдығын айқындап бере алады). Шындығында да прецессия жасап тұрған зырылдауықтың O таяныш нүктесіне қатысты $\mathbf{M}_\omega$ импульс моментінекі момент импульстерінің қосындысы түрінде өрнектеуге болады, яғни:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_\omega + \mathbf{M}'.$$

$\mathbf{M}_\omega$ −зырылдауықтың өз өсінен айналу нәтижесінде туған момент импульсі мен $\mathbf{M}'$ − зырылдауықтың вектор өсі арқылы прецессиясынан туатын кейбір қосымша $\mathbf{M}'$ импульс моменті 5.20-суретте көрсетілген. Зырылдауықтың өсі инерцияның бас өстерінің бірімен бірдей түсетін болғандықтан, (5.36) сай $\mathbf{M}_\omega = I\boldsymbol{\omega}$ болады. Мұндағы I – зырылдауықтың осы өске қатысты импульс моменті. Сонымен қатар прецессия бұрыштық жылдамдығы азырақ болған сайын оған сәйкес $\mathbf{M}'$ моменті де кішірееді. $\omega \gg \omega'$ кезінде барлық практикалық маңызы бар жағдайларда $M \gg M'$ болады, сондықтан қорытынды $\mathbf{M}$ импульс моменті шама жағынан да, бағыты жағынан да $\mathbf{M}_\omega$ импульс моментімен бірдей түседі, сондықтан



5.20-сурет

$$\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega}$$

$\mathbf{M}$ вектор жайлы бәрін білсек, зырылдауық-гироскоп жайлы да бәрін білетін боламыз.

Бірақ $\mathbf{M}$ вектордың қасиеті (5.12) моменттер теңдеуіне бағынады. Осы теңдеуге сай ол O нүктесіне қатысты $\mathbf{M}$ импульс моменті $\mathrm{d}t$ уақыт аралығында (5.20-сурет) келесі өсімше алады:

$$\mathrm{d}\mathbf{M} = \mathbf{N}\mathrm{dt}\,, \tag{5.37}$$

ал осы өсімшенің бағыты мұндағы $\mathbf{N}$ вектормен – сол O нүктесіне қатысты сыртқы күштердің моментімен (бұл жерде ол $m\mathrm{g}$ ауырлық күшінің моменті)– бірдей түседі. $\mathrm{d}\mathbf{M} \perp \mathbf{M}$ екені 5.20-суреттен көрініп тұр. Нәтижесінде $\mathbf{M}$ вектор (демек зырылдауықтың өсі де) $\mathbf{N}$ вектормен бірге жартылай төбе бұрышы ϑ болатын дөңгелек конус сыза вектор өстен айналады. Зырылдауық-гироскоп вектор өстен қайсыбір $\boldsymbol{\omega}'$ бұрыштық жылдамдықпен прецессия жасайтын болады.

$\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ және $\boldsymbol{\omega}'$ векторының арасындағы байланысты тағайындайық. Суретке сай мұндағы, $\mathbf{M}$ вектордың dt уақыттағы өсімшесі $|d\mathbf{M}| = M\sin\vartheta\,\omega'\mathrm{d}t$, немесе векторлық түрде $\mathrm{d}\mathbf{M} = [\boldsymbol{\omega}'\mathbf{M}]\mathrm{dt}$. Осы өрнекті (5.37)–ге қойғаннан кейін:

$$[\boldsymbol{\omega}'\mathbf{M}] = \mathbf{N}\,. \tag{5.38}$$

Осы теңдеуден $\mathbf{N}$ күш моменті үдеуді емес прецессияның $\boldsymbol{\omega}'$ бұрыштық жылдамдығын анықтайтыны көрініп тұр. Сондықтан $\mathbf{N}$ моментінің лезде жоғалуы прецессиясының да лезде жоғалуына әкеледі. Міне, осы тұрғыдан прецессияның инерттілігі жоқ деп айтуға болады.

Гироскопқа әсер ететін $\mathbf{N}$ күш моментінің тегі әртүрлі болуы мүмкін. Регулярлдық прецессияны ($\boldsymbol{\omega}'$ жылдамдығы тұрақты болуы қажет) қамтамасыз ету үшін ең маңыздысы мұндағы $\mathbf{N}$ вектор модулі бойынша өзгермей, тек гироскоптың өсімен бірге бұрылып отыруы ғана керек.

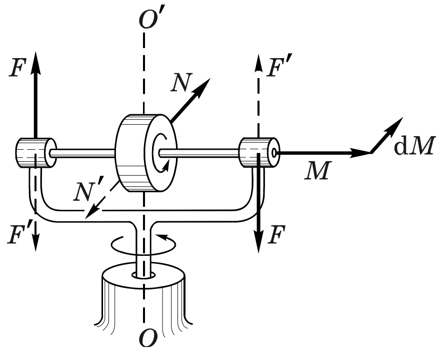
Мысал. Массасы m өз симметрия өсінен үлкен ω бұрыштық жылдамдықпен айналатын көлбеу зырылдауық прецессиясының бұрыштық жылдамдығын табу керек, егер оның өз өсіне қатысты импульс моменті I болса. Зырылдауықтың инерция центрі тірелу нүктесінен l қашықтықта орналасқан.

Шығару жолы. (5.38) бойынша $\omega' I\omega\sin\vartheta = mgl\sin\vartheta$, мұндағы ϑ – вектормен зырылдауық өсінің арасындағы бұрыш (5.20-сурет). осыдан

$$\omega' = mgl/I\omega.$$

ω' шамасы зырылдауық өсінің ϑ көлбеулік бұрышына тәуелсіз,сонымен қатар, алынған нәтижеден ω' шамасының ω шамасына кері пропорционалдығы да шығады, яғни, шындығында да, зырылдауықтың бұрыштық жылдамдығы неғұрлым үлкен болса, солғұрлым оның прецессиясының бұрыштық жылдамдығы азырақ болады.

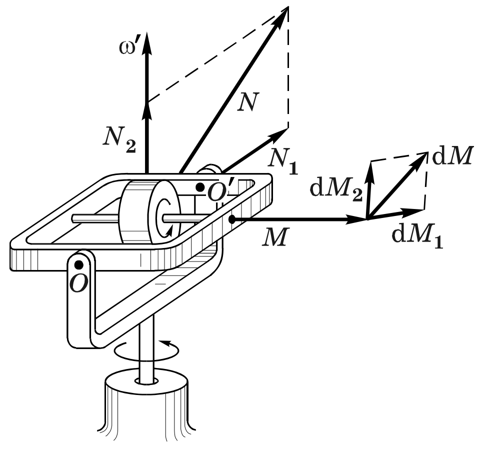
Гироскоптық момент. Гироскоптың өсін еріксіз бұрған кезде пайда болатын эффектіні қарастырайық. Мысалға, гироскоптың өсі U тәрізді сүйемелге (тұқырыққа) бекітілсін және ол 5.21-суретіндегідей OO' өсінен айналдырылсын. Егер гироскоптың $\mathbf{M}$ импульс моменті оңға бағытталған болса, онда осындай бұрылу кезінде $\mathrm{d}t$ уақыт аралығында $\mathbf{M}$ векторы $\mathrm{d}\mathbf{M}$ өсімшесін алады. $\mathrm{d}\mathbf{M}$ −векторы сурет жазықтығынан әрі қарай бағытталған. (5.37) теңдеуіне сай гироскопқа бағыты бойынша $\mathrm{d}\mathbf{M}$ вектормен бірдей болатын $\mathbf{N}$ күш моменті әсер етеді. $\mathbf{N}$ моменті гироскоп өсіне U тәрізді сүйемел тарапынан әсер ететін F қос күштің пайда болуынан шығады. Ал гироскоптың өсі болса, ол Ньютонның үшінші заңына сай U тәрізді сүйемелге F' күшпен әсер етеді (5.21-сурет). Бұл күштерді *гироскоптық күштер* деп атайды. Олар $\mathbf{N}' = -\mathbf{N}$ *гироскоптық моментті* тудырады. Бұл жағдайда гироскоп өз өсінің айналу бағытын өзгертуге қарсы тұра алмайтындығын айта кету керек.



5.21-сурет

Гироскоптық күштің пайда болуын *гироскоптық эффект* деп атайды. Подшипниктерге (мойынтірекке) гироскоптық қысымның әсерінен болатын мұндай гироскоптық эффект кемелердің бұрылыстары мен шайқаулары кезінде олардың турбиналарының роторларында, винтті ұшақтарда олардың бұрылыстары кезінде және т. б. жағдайларда байқалынады.

Гироскоптық моменттің әсерінен оның өсі рамкамен бірге $U -$ тәрізді сүйемелдің OO' горизонталь өсінен еркін айнала алатыны гироскоптың көмегімен қарастырайық (5.22-сурет). Егер суретте көрсетілгендей сүйемелді вертикаль өстен $\boldsymbol{\omega}'$- бұрыштық жылдамдықпен айналдыруға мәжбүр етсек, онда гироскоптың $\mathbf{M}$ импульс моменті $\mathrm{d}t$ уақыт аралығында $\mathrm{d}\mathbf{M}_1$ өсімше алады, бұл вектор суреттен әрі қарай бағытталғанықталған бұл өсімшені гироскоптың өсіне рамканың тарапынан әсер ететін қос күштің $\mathbf{N}_1$ моменті тудырады. Гироскоптың өсінің тарапынан рамкаға әсер ететін гироскоптық



5.22–сурет

күштер рамканы OO' горизонталь өсті айналдыра бұрады. Осы кезде $\mathbf{M}$ вектор қосымша $\mathrm{d}\mathbf{M}_2$ өсімше алады, ал мұның өзі рамка тарапынан гироскоптың өсіне әсер ететін күштің $\mathbf{N}_2$ моментін тудырады. Осының нәтижесінде гироскоптың өсі $\mathrm{d}\mathbf{M}_2$ вектор бағыты бойынша $\boldsymbol{\omega}'$ вектормен бірдей түсуге тырысатындай болып бұрылады.

Сонымен уақыт $\mathrm{d}t$ аралығында гироскоптың $\mathbf{M}$ импульс моменті $dM = \mathrm{d}\mathbf{M}_1 + \mathrm{d}\mathbf{M}_2 = (\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2)\mathrm{d}t$ өсімше алады. Осы кезде рамкаға гироскоптық момент әсер етеді:

$$\mathbf{N}' = -(\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2).$$

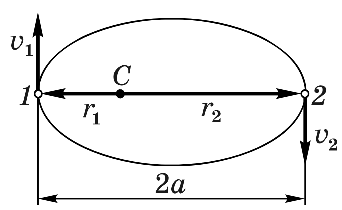
Бұл моменттің $\mathbf{N}_1' = -\mathbf{N}_1$ құраушысы рамканың OO' горизонталь өстен айналуын, ал екінші $\mathbf{N}_2' = -\mathbf{N}_2$ құраушысы тұтас жүйенің вертикаль өстен *бұрылуына қарсы әсер* тудырады.

Гироскоптық эффект гироскоптың: гирокомпас, кемелердің шайқалуын реттейтін гироскоптық тыныштандырғыш, гироскоптық стабилизатор және тағы басқа көптеген пайдалануларының негізінде жатады.

Есептер

5.1. Күнді эллипс бойымен айналып жүретін планетаның толық механикалық энергиясы $-E$ тек осы эллипстің ең үлкен жарты өсіне a-дан ғана тәуелді екенін дәлелдеу қажет. Планета мен Күннің массалары (m және M сәйкес) және эллипстің үлкен жарты өсі $-a$ белгілі болған жағдайдағы E −нің шамасын табу қажет (5.23-сурет).

Шығару жолы. Импульс моменті мен энеригияның сақталу заңдарын пайдаланайық. Планетаның импульс моментін сақтайтын салыстырмалы нүкте ол Күннің центрі (5.23-сурет). Сондықтан планетаның *1* мен *2* орындары үшін, жылдамдық векторы радиус-векторына пенпендикуляр болған жағдайда келесі өрнекті келтіруге болады:



5.23-сурет

$$mr_1v_1 = mr_2v_2. \qquad (1)$$

мұндағы, m – планетаның массасы. Толық механикалық энергияның сақталу заңына сай планетаның осы орындары үшін келесі теңдеуді жазуға болады:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \gamma\frac{mM}{r_1} = \frac{mv_2^2}{2} - \gamma\frac{mM}{r_2}. \quad (2)$$

мұндағы, M – Күннің массасы, γ− гравитациялық тұрақты. Осы екі теңдеуден v_1 жылдамдықты шығарып тастап, оны r_1 мен r_2 арқылы өрнектесек, онда келесі формула шығады:

$$v_1^2 = \frac{2\gamma M}{r_1 + r_2}\frac{r_2}{r_1}.$$

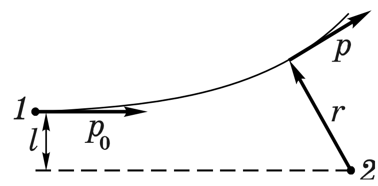
Сонымен толық механикалық энергияны табудың жолы табылды:

$$E = K(v_1) + U(r_1) = -\gamma m M/(r_1 + r_2).$$

Нәтижесінде $r_1 + r_2 = 2a$ шартын орындай отырып, $E = -\gamma m M/2a$ табамыз.

5.2. Массасы m_1 болатын, **1** бөлшек массасы m_2 болатын тыныштықта жатқан **2**-ші бөлшекке келіп соқтығысады: Оның **2**-ші бөлшектен алыс жердегі кинетикалық энергиясы K_0 және көздеу параметрі l – импульс векторның **2** бөлшекке қатысты иіні (5.24-сурет). Әрбір бөлшектің заряды q. Егер:

1) $m_1 \ll m_2$; 2) m_1 масса m_2 массамен шамалас болса, бөлшектердің бір-біріне қандай минимал қашықтыққа дейін жақындай алатынын табу керек.



5.24-сурет

Шығару жолы. **1**. $m_1 \ll m_2$ шарты ***2*** бөлшек өзара әрекеттесу кезінде тыныштықта қалады дегенді білдіреді. ***2***-ші бөлшекке қатысты ***1*** бөлшекке әсер ететін күш векторы үнемі сақталып отырады. Сондықтан,

$$lp_0 = r_{min} p,$$

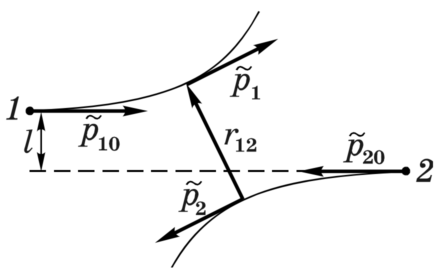
осыдан, 5.24-суретте сол жақта ***1*** бөлшектің ***2*** бөлшектен алыс жерлердегі импульс моменті, ал оң жақта $-\mathbf{r} \perp \mathbf{p}$ болғанда ең жақын қашықтыққа жеткен кездегі импульс моменті көрсетілген, сонда:
Энергияның сақталу заңынан:

$$K_0 = K + kq^2/r_{min},$$

мұндағы, K−***1*** бөлшектің ең жақын жету уақытындағы кинетикалық энергиясы. Осы екі теңдеуді бірге шешіп (K және p арасындағы байланысты ескере отырып), келесі теңдеуді аламыз:

$$r_{min} = \frac{kq^2}{2K_0}\left(1 + 4\sqrt{\left(\frac{lK_0}{kq^2}\right)^2}\right). \qquad (1)$$

2. Бұл жағдайда енді ***2*** бөлшекті өзара әрекеттесу кезінде тыныштықта қалады деп санауға болмайды. Бұл жерде шешімді *Ц*-жүйеде іздестірген дұрыс, сонда соқтығысу сипаты 5.25-суреттегідей болады, екі бөлшектен тұратын жүйе тұйықталған болып саналады, сондықтан оның меншікті импульс моменті сақталады:



5.25-сурет

$$l\tilde{p}_{10} = r_{min}\tilde{p}_1, \qquad (2)$$

ең күшті жақындау кезінде $\mathbf{r}_{12} \perp \tilde{\boldsymbol{p}}$ болатынын ескере кетіп, (5.25-сурет) энергияның сақталу заңына сай жазамыз:

$$\widetilde{K}_0 = \widetilde{K} + kq^2/r_{min}, \qquad (3)$$

мұндағы, $\widetilde{K}_0$ және $\widetilde{K}$–бөлшектердің бір-бірінен алыста болатын кездегі және ең жақын келетін кездегі $Ц$-жүйесіндегі қосынды кинетикалық энергиялары. (2) және (3) теңдеулерді сол (1) өрнекке әкелеміз, тек K_0 орнына енді $\widetilde{K}_0$ тұрады. Әрі бұл жағдайда (***2*** бөлшек басында тыныштықта болған). (4.61) бойынша:

$$\widetilde{K}_0 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} K_0 .$$

$m_1 \ll m_2$ кезінде $\widetilde{K}_0 \approx K_0$ болады да, r_{min} үшін өрнектің (1)-ге ұқсас болатындығы көрініп тұр.

5.3 Кішігірім шарикті ұзындығы l жеңіл жіппен O нүктеге іліп қояды. Содан кейін жіп вертикальмен ϑ бұрыш жасайтындай етіп, шарикті ауытқытып, оған жіп орналасқан вертикаль жазықтыққа перпендикуляр бағытта v_0 бастапқы жылдамдық береді. v_0 жылдамдықтың қандай мәнінде жіптің вертикальдан ауытқуының максимал бұрышы 90^0 болады?

Шығару жолы. Қозғалыс кезінде шарикке екі күш әсер етеді – ауырлық күші және жіп тарапынын болатын керілу күші. Нүкте арқылы өтетін вертикаль Z өсіне қатысты бұл күштердің моментінің $M_z \equiv 0$ болатындығы анық. Демек, бұл өске қатысты шариктің импульс моменті $L_z = const$ болады, немесе:

$$l \sin\vartheta \cdot mv_0 = lmv, \tag{1}$$

мұндағы, m – шариктің массасы, v – жіптің вертикальмен ϑ бұрыш жасайтын кездегі оның жылдамдығы.

Шарик Жердің ауырлық өрісінде тосын күштің − жіптің керілу күшінің әсерінен қозғалады. Бұл күш әрқашанда шариктің жылдамдық векторына перпендикуляр болғандықтан жұмыс атқармайды. Осыдан (4.31) сай Жердің ауырлық өрісіндешариктің механикалық энергиясы сақталады:

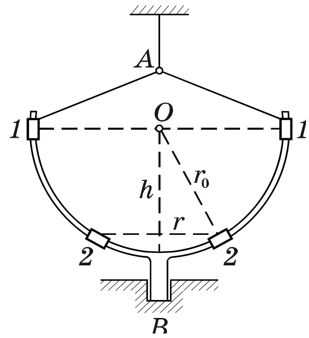
$$mv_0^2/2 = mv^2/2 + mgl\cos\vartheta, \tag{2}$$

Мұндағы теңдіктің оң жағы жіптің горизонталь қалпына сәйкес келеді. (1) және (2) – ні бірлестіріп келесі өрнекті шешеміз:

$$v_0 = \sqrt{2gl/\cos\vartheta}.$$

5.4. AB вертикаль өстен еркін айнала алатын радиусы $-r_0$ болатын қатты сым сақинада бірдей екі кішігірім муфта бар (5.26-сурет). Оларды жіппен жалғап, 1-1 қалпында қояды. Сосын бүкіл жүйеге ω_0 бұрыштық жылдамдық беріп, оны өз бетінде қалдырып, жіпті Aнүктеде үзіп жібереді. Қондырғының массасы тек муфталарда ғана шоғырланған деп алып, муфталардың сырғанап түсіп, үйкеліссіз ең төменгі 2-2 қалыпқа келетін кездегі оның бұрыштық жылдамдығын табу керек.

Шығару жолы. Төменгі қалыпта муфталардың айналу өсінен қашықтығы r және қондырғының бұрыштық жылдамдық ω болсын. Сонда энергияның және айналу өсіне қатысты импульс моментінің сақталу заңы шығады:



5.26-сурет

$$r^2\omega^2 - r_0^2\omega_0^2 = 2gh, \qquad r^2\omega = r_0^2\omega_0\,,$$

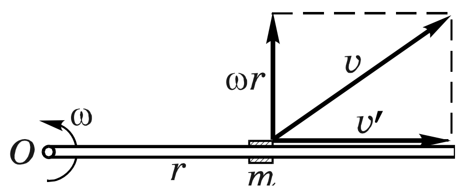
мұндағы, h муфталардың жоғарғы және төменгі қалыптағы биіктіктерінің айырымы. Сонымен қатар (5.26-сурет)

$$r_0^2 = r^2 + h^2\,.$$

Осы үш теңдеуді біріктіре шешіп, табамыз:

$$\omega = \frac{\omega_0}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{4g}{r_0\omega_0^2}\right)^2}\right).$$

5.5. Тегіс шыбық горизонталь жазықтықта ω_0 бұрыштық жылдамдықпен қозғалмайтын вертикаль O өстен айналады (5.27-сурет), әрі оған қатысты оның импульс моменті I. Шыбықта айналу өсіне жуық жерде осы өске жіппен байланған массасы m кішігірім муфта бар. Жіпті үзіп жібергеннен кейін муфта шыбық бойымен сырғанай бастайды. Муфтаның шыбыққа қатысты v' жылдамдықғын оның айналу өсіне дейінгіrқашықтығына тәуелді түрде табу керек.



5.27-сурет

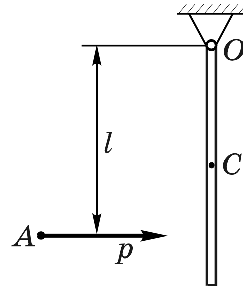
Шығару жолы. Берілген жүйеде қозғалыс кезінде кинетикалық энергия және айналу өсіне қатысты импульс моменті сақталады. Осыдан:

$$I\omega_0^2 = I\omega^2 + mv^2, \qquad I\omega_0^2 = (I + mr^2)\omega,$$

мұндағы, $v^2 = v'^2 + \omega^2 r^2$(5.27-сурет). Осы теңдеулерден:

$$v' = \omega_0 r\sqrt{1 + mr^2/I}\,.$$

5.6. Горизонталь ұшып келе жатқан A оқ жоғарғы ұшы шарнирлі O нүктесіне бекітілген массасы m ұзындығы l_0 біртекті вертикаль шыбыққа тиіп, сонда қалып қояды (5.28–сурет). Оқтың импульсі **p** және ол шыбыққа O нүктесінен l қашықтықта тиеді. Массасын ескермей келесі шарттарды орындай:



5.28-сурет

1) оқтың шыбық ішіндегіқозғалыс уақытындағы оқ-шыбық жүйесініңимпульс өсімшесін;

2) бағыты бойынша **p** вектормен бірдей түсетін (оң қозғалыс бағыты төңірегінен айналады) $\widetilde{\mathbf{M}}$ меншікті импульс моментін ескере отырып, шыбықтың алатын бұрыштық жылдамдығын табу керек.

Шығару жолы. **1.** Оқ-шыбық жүйесі тұйықталмаған: бір-бірін өтемелейтін күштермен қатар, оқтың қозғалысы кезінде шыбықта O нүктесінде реакция күшінің горизонталь құраушысы пайда болады. Міне осының әсері жүйенің импульсының өсімшесін тудырады:

$$\Delta p = mv_C - p,$$

мұндағы, v_C – шыбықтың инерция центрінің онда оқ тұрып қалғаннан кейінгі жылдамдықығы.

Бұл процестер кезінде барлық сыртқы күштер O нүктесі арқылы өтетіндіктен, шыбық ішіндегі оқтың қозғалыс уақытына сай жүйенің импульс моменті осы нүкте арқылы өтетін кез келген өске қатысты тұрақты. Сурет жазықтығына перпендикуляр өсті алып келесі өрнекті табамыз:

$$lp = I\omega\,,$$

мұндағы, I – шыбықтың қабылданған өске қатыстыимпульс моменті, ал ω шыбықтың оқ тоқтағаннан кейінгі бұрыштық жылдамдығы.

Осы екі теңдеуден $v_C = \omega r,$ және r – O нүктеден шыбықтың инерция центріне дейінгі қашықтықекендігін ескеріп, төмендегі өрнекті табамыз:

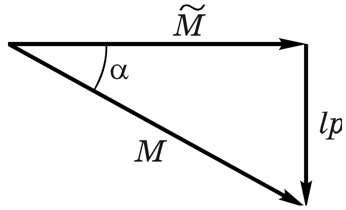
$$\Delta p = (3l/2l_0 - 1)p.$$

Осыдан, Δp өсімшенің таңбасы l/l_0 қатынасына тәуелді болады. Жеке алғанда $l/l_0 = 2/3$ кезінде $\Delta p = 0,$ яғни жүйенің импульсі оқтың шыбық ішіндегі қозғалысы кезінде өзгеріссіз қалады. Бұл O нүктедегі реакция күшінің горизонталь құраушысы болмайды дегенді білдіреді.

2. Бұл жағдайда да жүйенің O нүктесіне қатысты импульс моменті оқтың шыбықтағы қозғалысы кезінде де тұрақты болып қалады, сондықтан (5.23) бойынша

$$\widetilde{\mathbf{M}} + [\mathbf{lp}] = \mathbf{M}\,.$$

сол жақта оқтың O нүктесіне қатысты импульс моменті, ал оң жақта–шыбықтың (оқпен бірге) оқ тоқтаған бойдағы импульс моменті (5.29-суретте барлық үш вектор горизонталь жазықтықта орналасқан). Шыбық (оқпен бірге) ω бұрыштық жылдамдық алатын кездегі **M** векторды есептеп шығарайық. Шыбықтың O нүктеден r қашықтықта орналасқан массасы dm кішкене элементін алайық. Оның O нүктесіне қатысты импульс моменті:



5.29-сурет

$$\mathrm{d}\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathrm{d}m\mathbf{v}] = dm \cdot r^2\boldsymbol{\omega} = (m\boldsymbol{\omega}/l_0)r^2\mathrm{d}r$$

мұндағы, **v** – берілген элементтің жылдамдығы. Осы өрнекті барлық элементтер бойынша интегралдап аламыз:

$$M = ml_0^2\omega/3.$$

Сонымен,

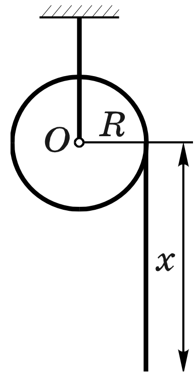
$$\widetilde{\mathbf{M}} + [\mathbf{lp}] = ml_0^2\boldsymbol{\omega}/3.$$

Осы формуладан 5.20-сурет бойынша келесі өрнекті табамыз:

$$\omega = \sqrt[3]{M^2 + l^2p^2}/ml_0^2.$$

суреттің көмегімен **ω** вектордың бағытын да табуға болады (α −бұрыш).

5.7. **Айналмалы қозғалыстың динамикасы.** Массасы m_0 және радиусы R біртекті тұтас цилиндр үйкеліссіз қозғалмайтын горизонталь O өстен айнала алады (5.30-сурет). Цилиндрге бір қабат етіліп ұзындығы l және массасы m созылмайтын жіңішке жіп тығыздалып оралған. Цилиндрдің бұрыштық үдеуін жіптің салбырап тұрған x бөлігінің ұзындығына тәуелді түрде табу керек. Сырғанау жоқ және жіптің оралған бөлігінің ауырлық центрі цилиндрдің өсінде жатыр деп есептеу керек.



5.30-сурет

Шығару жолы. O өсіне қатысты моменттер теңдеуін (5.15) пайдаланамыз. Бұл үшін жүйенің осы өске қатысты M_z импульс моменті және оған сәйкес N_z күш моментін табамыз. Импульс моменті:

$$M_z = I\omega_z + Rmv = (m_0/2 + m)R^2\omega_z,$$

мұндағы цилиндрдің инерция моментінің $I = m_0R^2/2$ және $v = \omega_zR$ екендігі (жіп сырғанамайды) ескерілген. Сыртқы ауырлық күштерінің O өсіне қатысты моменті:

$$N_z = Rmg\,x/l$$

M_z шамасын уақыт бойынша дифференциалдап және dM_z/dt мен N_z өрнектерін моменттер теңдеуіне қойып, табамыз:

$$\beta_z = \frac{2mg\,x}{lR(m_0 + 2m)}.$$

5.8. Тегіс горизонталь жазықтықта радиусы r_0 біртекті диск жатыр. Алдын ала ω_0 бұрыштық жылдамдық берілген дәл осындай екінші дискіні осы біртекті дискіге ақырындап түсіреді. Егер дискілердің арасындағы үйкеліс коэффициенті k болса, қанша уақыттан кейін екі диск бірдей бұрыштық жылдамдықпен айнала бастайды?

Шығару жолы. Әуелі қалыптасқан ω бұрыштық жылдамдықты табамыз. Импульс моментінің сақталу заңынан:

$$I\omega_0 = 2I\omega,$$

мұндағы, I– әрбір жеке дискінің ортақ айналыс өсіне қатысты импульс моменті, осыдан:

$$\omega = \omega_0/2.$$

Енді дискілердің біреуін мысалы төменгі дискінің қозғалысын қарастырайық. Оның бұрыштық жылдамдығы үйкеліс күшінің N моментінің әсерінен өзгереді. N

моментін есептеп шығарайық. Бұл үшін дискінің жоғарғы бетінен радиустары $r, r+\mathrm{d}r$ болатын элементар сақинаны бөліп алайық. Осы сақинаға әсер ететін үйкеліс күштерінің моменті:

$$\mathrm{d}N = rk(m\mathrm{g}/\pi r_0^2)2\pi r\,\mathrm{d}r = 2k(m\mathrm{g}/r_0^2)r^2\mathrm{d}r,$$

мұндағы, m – әрбір дискінің массасы. Осы теңдеуді r бойынша 0-ден r_0 ге дейін интегралдап, табамыз:

$$N = \frac{2}{3}km\mathrm{g}r_0.$$

(5.30) теңдеуге сай төменгі дискінің бұрыштық жылдамдығын dω шамасына артуы уақыт ішінде өтеді.

$$\mathrm{d}t = (I/N)\mathrm{d}\omega = (3\mathrm{r}_0/4k\mathrm{g})\mathrm{d}\omega$$

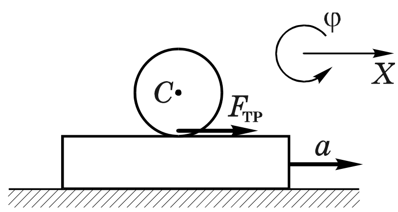
Осы теңдеуді ω бойынша 0-ден $\omega_0/2$ дейін интегралдап, іздеп отырған уақытты табамыз:

$$t = 3r_0\omega_0/8k\mathrm{g}.$$

5.9. Қатты деннің жазықтық қозғалысы. Біртекті цилиндр горизонталь тақтаның үстінде жатыр (5.31-сурет). Олардың арасындағы үйкеліс коэффициенттері k. Тақтаға цилиндрдің өсіне перпендикуляр горизонталь бағытта a үдеу беріледі. Табу керек:

1) Сырғанау жоқ кездегі цилиндр өсінің үдеуін;

2) Сырғанау жоқ болатын кездегі үдеудің $a_{\text{шект}}$ – шектік мәнін.



5.31-сурет

Шығару жолы. **1**. X және φ шамаларының оң бағыттарын 5.31-суретте көрсетілгендей етіп алып, цилидр өсінің қозғалыс теңдеуін және осы өске қатысты моменттер теңдеуін *Ц*-жүйеде жазамыз:

$$ma_c = F_{үйк}, \qquad\qquad I\beta = rF_{үйк},$$

мұндағы, m және I – цилиндрдің массасы және өске қатысты оныңимпульс моменті сонымен қатар r – цилиндрдің радиусы. Цилиндрдің сырғанауының жоқтығы үдеулердің арасындағы кинематикалық байланысты береді:

$$a - a_c = \beta r.$$

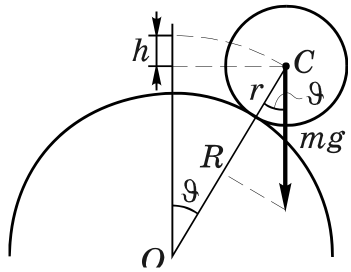
Осы үш теңдеуден $a_c = a/3$-ні табамыз.

2. Жоғарыдығы теңдеулерден цилиндрдің сырғанаусыз шайқалуын қамтамасыз ететін $F_{үйк}$ – үйкеліс күшінің мәнін табамыз: $F_{үйк} = ma/3$. Бұл күштің максимал мүмкін мәні $km\mathrm{g}$. Осыдан:

$$a_{\text{шект}} = 3k\mathrm{g}.$$

5.10. Радиусы біртекті шар радиусы r сфераның R төбесінен сырғанаусыз домалай бастайды (5.32-сурет). Шардың сфера бетінен ажырағаннан кейінгі ω бұрыштық жылдамдығын табу керек.

Шығару жолы. Ең алдымен шардың бұрыштық жылдамдығының сферадан ажырағаннан кейін өзгермейтіндігін айта кету керек. Сондықтан бізге оның ажырар мезеттегі мәнін табу керек.



5.32-сурет

Шар центрінің ажырар мезеттегі қозғалыс теңдеуін жазамыз:

$$mv^2/(R+r) = mg\cos\vartheta,$$

v – шар центрінің ажырар мезеттегі жылдамдығы, ϑ- осыған сәйкес келетін бұрыш (5.32-сурет). v жылдамдықты энергияның сақталу заңынан табамыз:

$$mgh = mv^2/2 + I\omega^2/2,$$

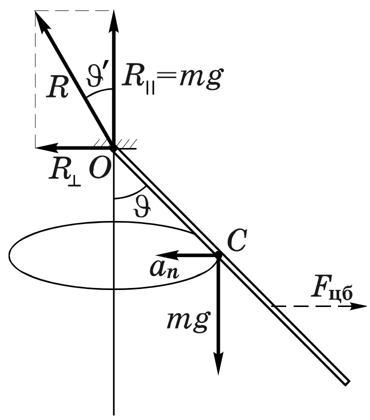
мұндағы, $I-$ өзінің центрі арқылы өтетін өсіне қатысты шардың инерция моменті. Сонымен қатар:

$$v = \omega r, \qquad h = (R+r)(1-\cos\vartheta).$$

Осы төрт теңдеуден:

$$\omega = \sqrt{10\mathrm{g}(R+r)17r^2}.$$

5.11. **Конустық маятник**. Массасы m және ұзындығы l жіңішке біртекті шыбық тұрақты ω − бұрыштық жылдамдықпен өзінің O іліну нүктесінен өтетін вертикаль өстен айналады (5.33-сурет). Осы кезде шыбық жартылай ашылу бұрышы ϑ болатын конустық бет сызады. ϑ бұрышты, сонымен қатар, O нүктедегі $\mathbf{R}$ реакция күшінің модулі мен бағытын табу керек.



5.33-сурет

Шығару жолы. Шыбықпен бірге вертикаль өстен айналатын санақ жүйесін қарастырамыз. Бұл санақ жүйесінде шыбыққа mg ауырлық күші және $\mathbf{R}$ реакция күшімен қатар центрден тепкіш $-\mathbf{F}_{\text{цт}}$ инерция күші әсер етеді. Шыбық осы санақ жүйесінде тыныштықта болады, яғни тепе-теңдік күйде, демек, барлық күштердің қорытындысың кез келген нүктеде шыбық осы санақ жүйесінде тыныштықта болады, яғни тепе-теңдік күйде, демек қорытындысы нөлге тең болады.

O нүктесіне қатысты моментті тек ауырлық күші және центрден тепкіш инерция күштері ғана тудырады. Осы күштердің моменттерінің теңдігінен:

$$\frac{1}{2}mgl\ \sin\vartheta = N_{\text{цт}}. \tag{1}$$

$N_{\text{цт}}$ мәнін есептеп шығарайық. Шыбықтың O нүктеден x қашықтыққа орналасқан dx элементіне әсер ететін инерция күшінің моменті:

$$dN_{\text{цт}} = (m\omega^2/l)\sin\vartheta\cos\vartheta\, x^2 dx\ .$$

Шыбықтың түгел ұзындығы бойынша интегралдап, табамыз:

$$N_{\text{цт}} = \frac{1}{3}m\omega^2 l^2 \sin\vartheta\cos\vartheta. \qquad (2)$$

(1) және (2) теңдеулерден:

$$\cos\vartheta = 3g/2\omega^2 l. \qquad (3)$$

Енді **R** вектордың модулі мен бағытын табамыз. Шыбық ω -бұрыштық жылдамдықпен айналатын санақ жүйесінде оның инерция центрі – C нүктесі – горизонталь шеңбер бойымен қозғалады. Сондықтан инерция центрінің қозғалыс заңынан – (3.11) формуладан **R** вектордың вертикаль құраушысының $R_{\parallel}$, ал $R_{\perp}$ горизонталь құраушысының $R_{\parallel} = mg$ теңдеуімен анықталатындығы шығады,

$$ma_n = R_{\perp}$$

мұндағы, a_n C инерция центрінің нормал үдеуі. Осыдан:

$$R_{\perp} = \frac{1}{2}m\omega^2 l\sin\vartheta. \qquad (4)$$

R вектордың модулі:

$$R = \sqrt{(mg)^2 + R_{\perp}^2} = \frac{m\omega^2 l}{2}\sqrt{1 + 7/4(g/\omega^2 l)^2}\ ,$$

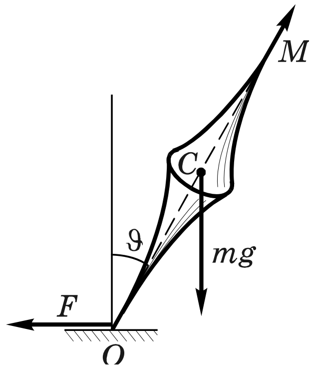
Ал оның бағыты –ϑ'– **R** векторымен мен вертикаль арасындағы бұрыш – $\cos\vartheta' = mg/R$ формуламен анықталады. $\vartheta' \neq \vartheta$, сондықтан **R** вектор бағыты шыбықпен бірдей түспейді. Бұған $\cos\vartheta'$ мәнін $\cos\vartheta$ мәні арқылы өрнектеп көз жеткізуге болады:

$$\cos\vartheta' = \frac{4\cos\vartheta}{\sqrt{9 + 7cos^2\vartheta}}.$$

Осыдан, $\cos\vartheta' > \cos\vartheta$, олай болса$\vartheta' < \vartheta$, бұл 5.33-суретте көрсетілген.

Тағы да айта кетелік центрден тепкіш $F_{\text{цт}}$ инерция күшінің тең әсерлісі C нүктесі арқылы өтпейді, ол одан төмен жатыр. Шынында да $F_{\text{цт}} = R_{\perp}$ және (4) формуламен анықталады, ал қорытынды $N_{\text{цт}}$ момент (2) формуламен анықталады. Осы формулалардан $F_{\text{цт}}$ вектордың O нүктесіне қатысты иінінің $\frac{2}{3}l\cos\vartheta$ екендігі шығады (5.33-сурет).

5.12. Гироскоп. Өсі вертикальмен ϑ бұрыш жасайтын массасы m зырылдауық O тіреу нүктесі арқылы өтетін вертикаль өсті айналатын центрінен O нүктеге дейінгі қашықтық l. O нүктедегі реакция күшінің горизонталь құраушысы **F** векторның модулі мен бағытын табу керек.



5.34-сурет

Шығару жолы. (5.38) бойынша (прецессия −дененің импульс моменті әсерінен сыртқы күштің өрісінде өз бағытын өзгертетін құбылысы) прецессияның бұрыштық жылдамдығы:

$$\omega' = mgl/M.$$

зырылдауықтың инерция центрі шеңбер бойымен қозғалады, демек, **F** вектор 5.34-суретте көрсетілгендей бағытталған бұл вектор зырылдауықтың өсімен бірге прецессия жасайды.
Инерция центрінің қозғалыс (3.11) теңдеуінен:

$$m\omega'^2 l \sin\vartheta = F.$$

Нәтижесінде:

$$F = (m^3 \mathrm{g}^2 l^3 / M^2) \sin\vartheta.$$

Егер зырылдауықтың тіреу нүктесі абсолют тегіс жазықтықта жатса, онда зымырауық дәл осы бұрыштық жылдамдықпен прецессия жасаған болар еді, тек енді зырылдауықтың центрі *C* нүктесі арқылы өтетін вертикаль өсті айналатын болар еді.

6-тарау

Тербелістер

§ 6.1. Гармоникалық тербелістер

Гармоникалық тербелістердің кинематикасы

Гармоникалық тербелмелі қозғалыс деп нүкте қозғалысының тепе-теңдік қалпынан ауытқу шамасының синусоида немесе косинусоида бойымен периодты түрде қайталанып отыруын айтамыз.

Егер тербелістегі нүктенің тепе-теңдік қалпынан ауытқу шамасын $x-$ арқылы белгілесек, онда осы ауытқудың уақытқа байланысты өзгеруі келесі формуламен өрнектеледі:

$$x = a\cos(\omega_0 t + \alpha), \tag{6.1}$$

мұндағы, $a-$ амплитуда, $(\omega_0 t + \alpha)$ – фаза, α −алғашқы фаза, ω_0- тербелістің циклдік (дөңгелек) жиілігі. Осы жиілік T −периодпен және $\nu-$ сызықтық жиілікпен келесі формула арқылы байланысқан:

$$\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi\nu \tag{6.2}$$

Тербелістегі нүктенің тепе-теңдік қалпынан ең үлкен ауытқуын оның амплитудасы *(a)* деп атайды. Ал тербеліс периодына кері шама тербеліс периодының жиілігі (ν) делінеді. Егер *t=0* мезетте тербелістегі нүкте өзінің тепе-теңдік қалпында болмаса, онда оның алғашқы фазасы $(\omega_0 t + \alpha)$ туралы сөз болады.

Циклдік $-(\omega)$ және сызықтық $-(\nu)$ жиіліктердің айырмашылығына назар аударайық: $\omega,\ c^{-1}$, ал ν, Гц (герц).

(6.1)* теңдеуін уақыт бойынша дифференциалдап, $\dot{x}$ −жылдамдығын және $\ddot{x}$ −үдеуін табамыз:

$$\dot{x} = -a\omega_0\sin(\omega_0 t + \alpha) = a\omega_0\cos(\omega_0 t + \alpha + \pi/2), \tag{6.3}$$

$$\ddot{x} = -a\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \alpha) = a\,\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \alpha + \pi). \tag{6.4}$$

Осы өрнектерден $a\omega_0$ және $a\omega_0^2-$ амплитудаларына сәйкес гармоникалық заңға сай $\dot{x}$ − жылдамдық пен $\ddot{x}$ −үдеудің өзгеріп отыратыны

---

* (6.1) теңдеуінің басқа шешімі болуы мүмкін, мысалы $x = A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t,$ мұндағы A және B–тұрақтылар; немесе $x = Re\{ae^{i(\omega_0 t+\alpha)}\}$.

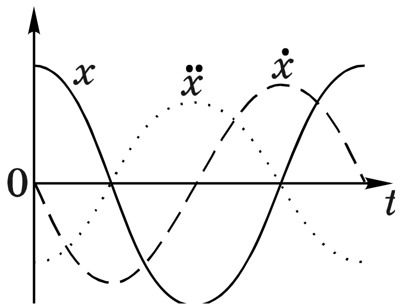
көрініп тұр. Жылдамдық фаза бойынша $x-$ті ығысуын $\pi/2$, ал үдеуді $\pi-$ге озып отырады, яғни a үдеу $x-$ті ығысу мен қарама-қарсы фазада болғаны. Мұның өзі үдейдің ауытқудың бағытына қарсы екендігін көрсетеді.

Сөйтіп, гармоникалық тербелістегі нүктенің жылдамдығы тепе-теңдік қалыптың маңына, ал үдеуі ауытқудың шеткі мәндерінде максимумге ие болады. 6.1-суретте $\alpha=0$ болған жағдай үшін $x(t), \dot{x}(t)$ және $\ddot{x}(t)$ тәуелділік графиктері келтірілген.

(6.4) және (6.1) теңдеулерін бір-бірімен салыстыра отырып, үдеу үшін келесі өрнекті табамыз: $\ddot{x}=-\omega_0^2 x$ немесе

$$\boxed{\ddot{x}+\omega_0^2 x=0.} \qquad (6.5)$$

(6.5) дифференциалдық теңдеуі ***гармоникалық осциллятордың теңдеуі*** деп аталады. Осы теңдеудің (6.1) шешуінің құрамында екі тұрақты бар: α және a. Әрбір нақты тербеліс үшін олар алғашқы шарттармен беріледі $-x_0$ ығысуымен және алғашқы моменті $t=0$ болғандағы $\dot{x}_0$ $-$жылдамдығымен:



6.1-сурет

$$x_0=a\cos\alpha, \qquad \dot{x}_0=-a\omega_0\sin\alpha. \qquad (6.6)$$

Осыдан ізделініп отырған тұрақтылар табылады:

$$a=\sqrt{x_0^2+(\dot{x}_0/\omega_0)^2}, \qquad tg\alpha=-x_0/\omega_0 x_0. \qquad (6.7)$$

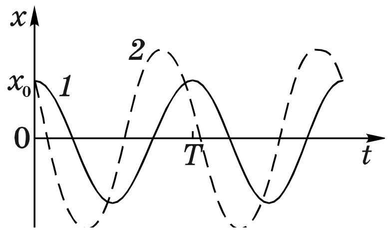
Әдетте α $-$ның мәні $(-\pi,+\pi)-$аралығында қаралады. $tg\alpha$ $-$теңдеуі осы көрсетілген аралығында α $-$ның екі мәнімен қанағаттанады. Осы екі шаманың тек біреуі ғана (6.6)-теңдеуіндегі $\cos\alpha$ мен $\sin\alpha$ дұрыс таңбаларына сәйкес келеді.

Алғашқы шарттардың маңызын қарастыратын мысалдар келтірейік.

1-мысал. 6.2-суретте графиктерде келтіргендей тербелістер гармоникалық заңға сай тербеледі (екі жағдай: ***1*** және ***2***). Осы екі жағдай үшін алғашқы шарттардың қандай екендігін қарастырайық және олар тербелістің түріне қалай әсер етеді екен?

1-жағдай үшін алғашқы ығысу $x>0$, ал жылдамдығы $\dot{x}_0=0$ (еске сақтай кету керек туынды дегеніміз осы нүктедегі $x(t)$ графигінің көлбеуін сипаттайды). Сонда тербеліс амплитудасы $a=x_0$.

2-жағдай үшін $x>0$ және $\dot{x}_0<0$. Сонда a $-$амплитуда (6.7) теңдеуге сай x_0 $-$ден үлкен болады.



6.2-сурет

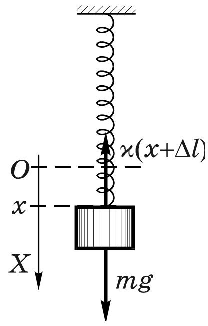
2-мысал. (6.1) теңдеуіне сәйкес бөлшек жиі тербеліске ұшырайды, сөйтіп $t=0$ болғанда $x<0$ және $\dot{x}_0>0$. Сонымен α $-$алғашқы фазасының мүмкін мәндерінің аралығын табайық.

(6.7)-ден $tg\alpha > 0$ екендігі шығады. Яғни, α бірінші немесе үшінші квадранттарында, яғни $(0, \pi/2)$ немесе $(-\pi, -\pi/2)$ аралығында болуы мүмкін. Осы шамаларды (6.6) теңдеудегі $\cos\alpha$ және $\sin\alpha$ −ның таңбаларымен салыстырғанда, тек екінші аралығында $(-\pi, -\pi/2)$ мүмкіншілігі бар екендігі шығады.

Гармоникалық тербелістердің динамикасы

Механикалық жүйе қозғалысының сипатын анықтау үшін динамика заңына немесе энергияның сақталу заңына сүйене отырып, жүйе қозғалысының теңдеуін құрастыру керек. Егер осы теңдеу (6.5) түріне келе алатын болса, онда осы берілген жүйенің гармоникалық осциллятор екеніне ешқандай күмән тумайды. Осы гармоникалық осциллятордың жиілігі x −тің қасындағы коэффициенттің квадрат түбіріне тең. Бірнеше мысал келтіріп, олардан алынған қорытындыларды жалпылап көрейік.

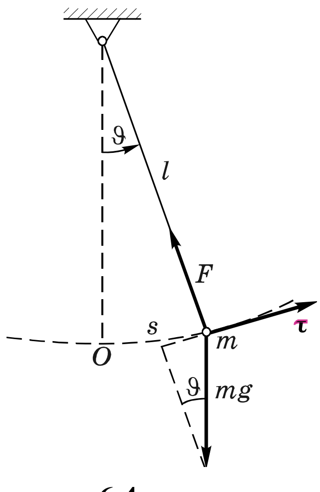
Дененің тербелісі немесе осцилляциясы жайлы сөз болғанда, біз оның бір ғана траекториясымен оңға, солға, жоғары-төмен және т.б. қайталанып отырған қозғалысын айтамыз. Басқаша айтқанда қозғалыс периоды болады дейміз. Периодты қозғалыстың қарапайым мысалына серіппенің ұшындағы дененің қозғалысын келтіруге болады.



6.3-сурет

Серіппедегі жүк. 6.3-суретте массасы m жүк салмақсыз серіппеге ілінген, оның қаттылығы $\varkappa$ және ол вертикаль тербеліс жасайды. X өсіндегі бастапқы O нүктесін тепе-теңдік қалпына келтіреміз. Мұндағы $mg = \varkappa\Delta l$, $\Delta l -$ осы қалыптағы серіппенің керілуі. Сонда динамиканың негізгі заңына сай $m\ddot{x} = mg - \varkappa(x + \Delta l) = -\varkappa x$ немесе:

$$\ddot{x} + (\varkappa/m)x = 0.$$



6.4-сурет

Осы теңдеуді (6.5)-пен салыстырғанда, оның гармоникалық осциллятор теңдеуі екені шығады. Тепе-теңдік қалпының жанында оның периодтығы T -ға, жиілігі ω_0- тең болады.

$$\omega_0 = \sqrt{g/l}, T = 2\pi\sqrt{g/l}. \qquad (6.8)$$

Вертикаль ілінген серіппе қозғалысының горизонталь орналасқан серіппе қозғалысынан еш айырмашылығы жоқ.

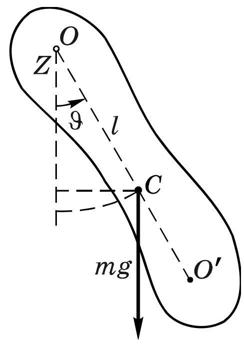
Математикалық маятник. Математикалық маятник дегеніміз – жіңішке жіпке ілінген кішкентай жүк. Созылмайтын жіңішке жіптің массасы жүктің массасымен салыстырғанда, әлдеқайда ескерусіз аз болады деп саналады. Математикалық маятниктің қозғалысы қарапайым гармоникалық тербеліске ұқсас: жүк шеңбер доғасының бойымен тепе-теңдік қалыптан (жіптің вертикаль тік болатын кезі) бірдей амплитудамен екі жаққа тербеліп отырады және төменгі нүктеден максимал жылдамдықпен өтеді. Бірақ бұл тербелістер гармоникалық болып табыла ма екен? Осыны анықтайық. Созылмайтын салмақсыз ұзындығы l жіпке ілінген массасы m материалдық нүкте вертикаль жазықтықта тербеліс жасайды (6.4-сурет). Осы жағдай үшін (2.16) динамика теңдеуінің τ-ортқа проекциясын пайдалану ыңғайлы. Орттың бағыты s доғалық координаттар жүйесінің бағытымен сәйкес келеді ($s -$ алгебралық шама, суретте $s > 0$ жағдайы келтірілген). s-ің бастапқы санағын тепе-теңдік қалпындағы O нүктесі деп белгілейік. $s = l\vartheta$, $\ddot{s} = l\ddot{\vartheta}$ шарттарын орындап, $F_\tau = 0$ қайтарғыш күштің проекциясын келесі түрде жазамыз: $m\ddot{s} = -ml\ddot{\vartheta} = m\text{g}\sin\vartheta$ немесе

$$\ddot{\vartheta} + (g/l)\sin\vartheta = 0.$$

(6.5) теңдеулерімен осы теңдеуді салыстырғанда, оның гармоникалық осциллятор теңдеуі емес екені көрініп тұр. Себебі оның құрамында ϑ-ығысудың орнында $\sin\vartheta$ тұр. Алайда өте аздаған вертикаль ауытқулар кезінде $\sin\vartheta \approx \vartheta$ тең болып, математикалық маятниктің қозғалысы (6.5) өрнекпен сипатталатын гармоникалық тербеліс болып табылады, сонымен аздаған (ауытқулар) тербеліс жасайтын математикалық маятниктің Т периоды мен ω_0 жиілігі келесі теңдеулермен сипатталады:

$$\omega_0 = \sqrt{\text{g}/l}, \qquad T = 2\pi\sqrt{l/\text{g}} \tag{6.9}$$

Тербеліс периодының массаға тәуелсіз екені формуладан жақсы көрініп тұр. Бір ғана әткеншекте баланың да ересек адамның да бірдей тербеле алатындығы міне осыдан.



6.5-сурет

Физикалық маятник деп бекітілген горизонталь өске қатысты өз салмағының арқасында еркін тербеле алатын қатты денені айтады (6.5-сурет). Ауырлық күш әсер ететін дененің тербелісін қарастырайық. Физикалық маятникті айналмалы қозғалыс динамикасының көмегімен сипаттаған ыңғайлы. 6.5-суретте көрсетілгендей, ϑ ауытқу бұрышының сағат тіліне қарсы оң бағытын таңдап аламыз және Z өсі бізге қарай бағытталған болсын. Сонда Z өсіне ауырлық күш моментінің проекциясын келесі өрнекпен келтіруге болады: $M_z = -mgl\sin\vartheta$. Олай болса айналмалы қозғалыстың динамикалық теңдеуі (5.30) келесі түрге өзгереді:

$$I\ddot{\vartheta} = -mgl\sin\vartheta,$$

мұндағы, $I - O$ өсіне қатысты дененің инерция моменті, $l – O$ іліну өсімен $C –$ масса центрінің арасындағы арақашықтық. $\sin\vartheta \approx \vartheta$ сияқты болмашы бұрыштарға ауытқитын тербелістерді қарастырумен шектелейік. Осы шарттардың себебімен алдыңғы теңдеу келесі түрге өзгереді:

$$\ddot{\vartheta} + (mgl/I)\vartheta = 0.$$

Егер тербелістің жиілігі ω_0 және периоды T болса, онда олар гармоникалық тербелістер жасайды және физикалық маятниктің тербеліс жиілігі мен периоды келесі түрде анықталады:

$$\omega_0 = \sqrt{mgl/I}\,, \qquad T = 2\pi\sqrt{I/mgl} \tag{6.10}$$

Тура осындай ұзындығымен сипатталатын математикалық маятникте жиілік пен периодқа ие бола алады:

$$l_{\text{келт}} = I/ml\,, \tag{6.11}$$

Бұл ұзындықты физикалық маятниктің *келтірілген ұзындығы* деп атайды.

Түзу сызықтың бойында орналасқан, O' нүктесі O ілiну нүктесімен С массалар центрі арқылы өтеді. O нүктесінен $l_{\text{келт}}$ қашықтықта орналасқан осы O' нүктесін физикалық маятниктің *тербеліс центрі* деп атайды (6.5-сурет). O' тербеліс центрінің өте маңызды қасиеті бар: егер маятникті төңкеріп жіберсе және O' өсіне қатысты ол болмашы тербелістер жасаса, онда тербеліс периоды өзгермейді. *Төңкерілген маятниктің* осы қасиетіне байланысты дененің еркін түсу үдеуі анықталған: екі нүктені, яғни O мен O' немесе өстерді олардың жиіліктері бірдей болатындай етіп, болмашы тербелістер жасатамыз, сөйтіп OO' арақашықтығын келтірілген ұзындыққа теңестіреміз: $\text{OO} = l_{\text{келт}}$. Осыдан ω_0– жиілікпен $l_{\text{келт}}$ келтірілген ұзындықты тауып, келесі формуладан $\omega_0 = \sqrt{\text{g}/l_{\text{келт}}}$ нүктенің еркін түсу үдеуін $-\text{g}$ табамыз.

Жалпы қорытындылар. Қарастырылған мысалдар үйкеліссіз еркін тербелістерге жатады. Мұндай жүйелер тек өзіне ғана міндеттелген, себебі ол тепе-теңдік қалыптан шығарылған. Сонымен кез келген осциллятор үйкеліссіз еркін тербеліс кезінде, егер ондағы әсер ететін күш немесе күш моменті квазисеріппелі болса, гармоникалық болып табылады. Квазисерпімді күш дегеніміз тепе-теңдік қалпына бағытталған және ығысудың түзу сызықты тәуелділігін көрсететін күш. Осы квазисеріппелі күш немесе момент күшінің сипаты болмашы тербелістердің *шарты* болып табылады.

Сонымен қатар үйкеліссіз еркін тербелістердің жиілігі мен периоды осы осциллятордың ғана өзінің қасиетіне тәуелді, ал тербелмелі және бастапқы фазалы амплитудаға келсек, оның айырмашылығы бастапқы шарттармен анықталады.

Физикалық маятник оның барлық массасы тербеліс центрінде шоғырланған жағдайымен бірдей болатын периодпен тербеледі. Сонымен тербеліс центрінің екі маңызды қасиеті бар: 1) Егер С нүктесінің О нүктесі арқылы өтетін өске қатысты тербеліс центрі болса, онда ол О нүктесі арқылы өтетін өске де қатысты тербеліс центрі болып табылады әрі екі жағдайда да тербеліс периодтары бірдей болады. 2) Егер өске бекітілген денені горизонталь бағытта тербеліс центрінен соғып қалсақ, онда іліну нүктесінде ешқандай реакция күші байқалмайды (6.5-сурет). Сондықтан тербеліс центрін *соғу центрі* деп атайды.

Ауытқуы үлкен емес болмашы тербелістерге тағы бірнеше мысалдар келтірейік.

Мысал. Бір ауырлық күші өрісінде массасы m тең бөлшек тербеліс жасайды. Оның потенциалдық энергиясы x координатынан келесі формуламен тәуелді: $U = U_0 = (1 - \cos \alpha x)$, мұндағы U_0 мен α тұрақтылар. ω_0 тепе-теңдік күйі маңындағы бөлшектің тербелісінің жиілігін табайық.

Динамиканың негізі теңдеуіне сай келесі өрнекті келтірейік:

$$m\ddot{x} = F_x = -\partial U/\partial x = -\alpha U_0 \sin \alpha\, x.$$

Тербелістердің ауытқуы болмашы болғандықтан $\sin \alpha x \approx \alpha x$ тең және алдыңғы теңдеу келесі түрге өзгереді:

$$\ddot{x} + (\alpha^2 U_0/m)x = 0.$$

Осыдан келесі өрнек шығады:

$$\omega_0 = \alpha\sqrt{U_0/m}.$$

Гармоникалық осциллятордың энергиясы. Квазисеріппелі $F_x = -\varkappa x$ күшінің әсерінен тербелетін массасы m материалдық нүктенің энергиясын қарастырайық. Бөлшектің потенциалдық және кинетикалық энергиялары келесі теңдеулермен анықталады:

$$U = \varkappa x^2 = (\varkappa a^2/2)cos^2(\omega_0 t + \alpha),$$

$$K = m\dot{x}^2/2 = (ma^2\omega_0^2/2)sin^2(\omega_0 t + \alpha). \qquad (6.12)$$

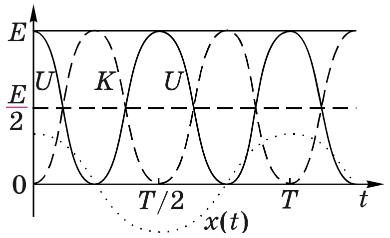
Осы өрнектерден U мен K мәндері бір-біріне қатысты $\pi/2$ тең фазамен ығысқан: U энергиясы максимал болса, K кинетикалық энергия минималды және өзгеруі керісінше. Алайда толық энергия өзгеріссіз сақталып қалады:

$$E = U + K = \varkappa a^2/2 = ma^2\omega_0^2/2, \qquad (6.13)$$

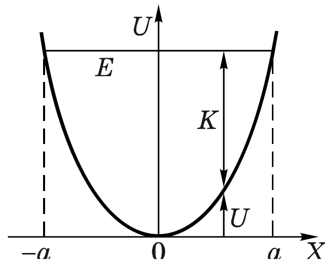
Мұнда $\omega_0^2 = \varkappa/m$ екені ескерілген. (6.13)-ті ескере отырып, (6.12) теңдеуін қайта көшіріп жазамыз:

$$U = Ecos^2(\omega_0 t + \alpha), \qquad K = Esin^2(\omega_0 t + \alpha). \qquad (6.14)$$

6.6-суретте $U(t)$ мен $K(t)$ тәуелділік графиктері келтірілген. Осы суреттен потенциалдық энергияның кинетикалық энергияға айналатыны көрініп тұр және керісінше. 6.7-сурет осы қорытындыларды дәлелдеп отыр.



6.6-сурет



6.7-сурет

Тербеліс периодында кинетикалық энергия мен потенциалдық энергиялардың орташа мәндері бірдей және оның әрбіреуі $E/2$─тең:

$$< U >=< K \geq E/2\,, \tag{6.15}$$

Себебі период ішінде синустар* мен косинустар квадраттарының қосындысының орташа мәндері − 1/2-тең.

(6.13) теңдеуіне сәйкес осциллятордың тербеліс энергиясы $E \backsim a^2$ тең. Бұның үлкен маңызы бар және ол әрдайым алдымызда қолданылып отыратын болады.

Энергия мен қозғалыс теңдеуі

Жүйенің тербеліс қозғалысының теңдеуін динамиканың ғана теңдеулерінен ғана емес сонымен қатар энергияның сақталу заңдарынан да табуға болады (кейде мұндай әдіс ыңғайлырақ). Сондықтан энергия үшін өрнекті құрастырып, оны уақыт бойынша дифференциалдап, және $E = const$ болғандықтан $\mathrm{d}E/\mathrm{d}r$ шартын орындап, табуға болады. Міне, осы жағдайлар ізделініп отырған теңдеуді табуға мүмкіншілік береді.

Егер $U \backsim x^2$ шарты орындалса, потенциалдық энергия тепе-теңдіктен ығысудың *квадратына* пропорционал болғанда, тербелмелі жүйе гармоникалық осциллятор бола алады. Міне, осы шарт әлсіз тербелістердің «энергетикалық» критериі болып табылады.

Мысал. Тербелмелі жүйеде $U = \alpha x^2$ мен $K = \beta \dot{x}^2$ болсын, мұндағы x- тепе-теңдіктен ығысу қалпы, α, β- оң тұрақтылар. $E = U + K = const$ шарттарының гармоникалық осциллятордың теңдеуі екенін дәлелдейміз.

Уақыт бойынша E дифференциалдап, келесі өрнекті аламыз:

$$dE/dt = 2\alpha x\ddot{x} + 2\beta \dot{x}\ddot{x} = 0.$$

Осыдан $\ddot{x} + (\alpha/\beta)x = 0$ екені анықталады. Міне, осының өзі $\omega_0 = \sqrt{\alpha/\beta}$ гармоникалық осциллятордың теңдеуі болып табылады.

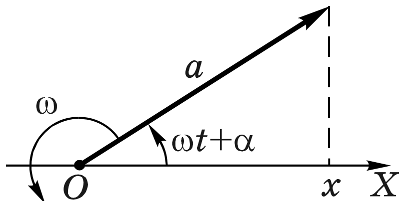
---

* $sin^2\varphi + cos^2\varphi = 1$ теңдеуін 2π периоды шектерінде орташалау арқылы $< sin^2\varphi > + < cos^2\varphi >= 1$ аламыз. Косинустар мен синустар арасындағы айырмашылықтар тек $\pi/2$ фазаның ығысуымен ғана болса, онда $< sin^2\varphi > = < cos^2\varphi >= 1/2$ екені табылады

§ 6.2. Гармоникалық тербелістерді қосу

Бір бағыттағы тербелістерді қосу

Векторлық диаграмма. Вектор-амплитуда графигін сызу арқылы көптеген сұрақтарды жеңілдетуге болады. **а** вектор-амплитуда ω бұрыштық жылдамдықпен сағат тіліне қарсы бағытта айналады. Егер $t = 0$ болғанда а-векторы X-өсімен α-бұрышын түзеді (6.8-сурет), онда **а** векторының X өсіне проекциясы уақыт бойынша гармоникалық заңмен өзгереді. (6.1) тербелісті осындай түрде келтіруді *векторлық диаграмма* деп атайды. Бір бағыттағы тербелістерді қосу үшін осындай векторды пайдалану ыңғайлы.



6.8-сурет

Тербелістерді қосу. Енді бір бағытта қозғалатын, жиіліктерінің мәні арасында аздап қана айырмашылығы бар немесе тіпті бірдей екі тербелісті екі түрлі жолмен қосып көрейік.

1. Бірдей жиіліктер: $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Бұл жағдай үшін қорытынды ығысу:

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + a_2 \cos(\omega t + a_2). \qquad (6.16)$$

Қосылатын тербелістердің әрбіреуін $\mathbf{a}_1$ мен $\mathbf{a}_2$ векторлары арқылы келтіруге болады. X өсіне жүргізілген осы проекциялардың қосындысы $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}$ вектордың проекцияларының қосындысына тең (6.9-сурет). $\mathbf{a}_1$ мен $\mathbf{a}_2$ векторлары бірдей ω бұрыштық жылдамдықпен айналғандықтан, **а** векторы да тура сондай бұрыштық жылдамдықпен айнала алады. Олай болса қорытынды тербеліс те гармоникалық болып табылады және оның түрі:

$$x = a \cos(\omega t + \alpha)\,, \qquad (6.17)$$

мұндағы, a мен α -ны 6.9-суреттен табуға болады:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos\delta, \qquad (6.18)$$

$$tg\alpha = \frac{a_1 \sin\alpha_1 + a_2 \sin\alpha_2}{a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2}. \qquad (6.19)$$

Фазалар айырымы – δ – біздің жағдайымыз үшін уақытқа тәуелді емес және оны келесі түрде келтіруге болады:

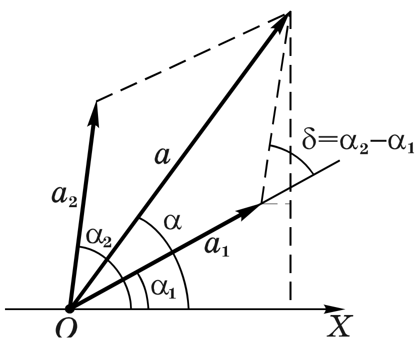
$$\delta = \alpha_2 - \alpha_1 \, . \qquad (6.20)$$

6.9-суреттен және (6.18) формуладан: қорытынды тербелістің a амплитудасы δ фазалар айырымына айтарлықтай тәуелді. Синфазды тербелістерді қосқанда ($\delta = 0$) $a-$ максималды, ал қарама-қарсы фазалы тербелістерді қосқанда ($\delta = \pi$) а – минималды:

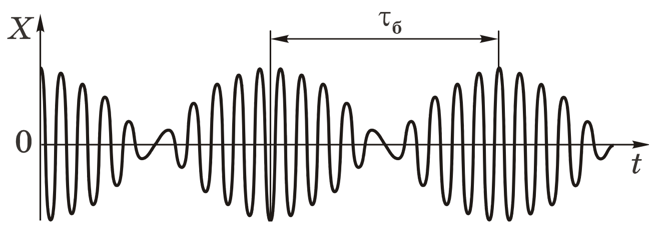
$$a_{max} = a_1 + a_{2\,,} \qquad a_{min} = |a_1 \pm a_2|.$$

Тербелістердің энергиясы $E \backsim a^2$ болғандықтан, a амплитуда сияқты E-нің бір бағыттағы тербелістерінің қосындысы $\delta -$ фазалар айырымынан айтарлықтай тәуелді, атап айтқанда синфазды тербелістер қосылғанда ол максимумына, қарсы фазалы тербелістерді қосқанда минимумына жетеді. (6.18) теңдеудің құрамындағы соңғы қосындының ($2a_1a_2\cos\delta$) салдарынан қорытынды тербелістің энергиясы әрбір тербеліс энергияларының қосындысы ретінде алынбайды, яғни $E \neq E_1 + E_2$ (тек $\delta = \pi/2$ жағдай ерекше).

2. Жиіліктері өзара тең емес: $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1\,\omega_2$. Бұл тәсіл үшін қорытынды тербеліс 6.18-формуламен анықталады және оған 6.9-сурет сәйкес. Екі тербелістің жиіліктері өзара тең болмаған жағдайда, қозғалыс күрделі болып шығады. Жалпы жағдайда траектория тұйықталмай, қозғалыс периодты болмай шығатын кездер де кездеседі. Бірақ егер жиіліктердің қатынасы бүтін санға еселі болса, онда траектория тұйықталып, қозғалыс периоды пайда болады. $\mathbf{a}_1$ мен $\mathbf{a}_2$ векторлары айналғанда пайда болатын бұрыштық жылдамдықтарының айырмашылығы шамалы болғандықтан, а қорытынды вектордың модулі a_{max}-нан a_{min} дейін баяу өзгеріп, а $-$ вектордың өзі ω_1 мен $\omega_2 -$ ге жақын бұрыштық жылдамдықпен айналады. Сонымен, егер тербелістің амплитудасы мен периоды өте баяу өзгеретін болса, қорытынды тербелісті гармоникалық тербеліс деп қарастыруға болады, және мұндай тербелістерді *соғулар* деп атайды. Оның $a_1 = a_2 -$ ге сай түрі 6.10-суретте келтірілген. Тербелістердің амплитудасы (6.18) теңдеумен анықталады. Алайда осы формуланың құрамына енетін $\delta -$ фазалар айырымы уақытқа тәуелді.



6.9-сурет



6.10-сурет

$$\delta = (\alpha_2 + \omega_2 t) - (\alpha_1 + \omega_1 t) = (\alpha_2 - \alpha_1) + (\omega_2 - \omega_1 t) \qquad (6.21)$$

a - амплитуда максимал болғанда көршілес моменттердің арасындағы уақыт аралығы $\tau_б -$ *соғу периоды* деп аталады. Осы уақыт аралығында $\delta -$ фаза айырымы 2π −ге өзгереді (векторлық диаграммадан да көрініп тұр). Олай болса $|\omega_2 - \omega_1|\tau_б = 2\pi$. Осыдан соғулардің периоды мен жиіліктері тең:

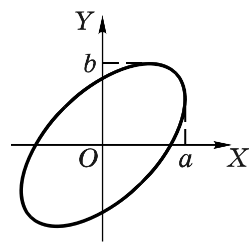
$$\tau_б = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|} = \frac{1}{|v_2 - v_1|}, \qquad v_б = \frac{1}{\tau_б} = |v_2 - v_1|. \qquad (6.22)$$

Бір-біріне перпендикуляр тербелістерді қосу

Ең бірінші жиіліктері бірдей тербелістерді қарастырайық. Бөлшектердің x және y координаттары келесі заңдылықпен өзгерсін:

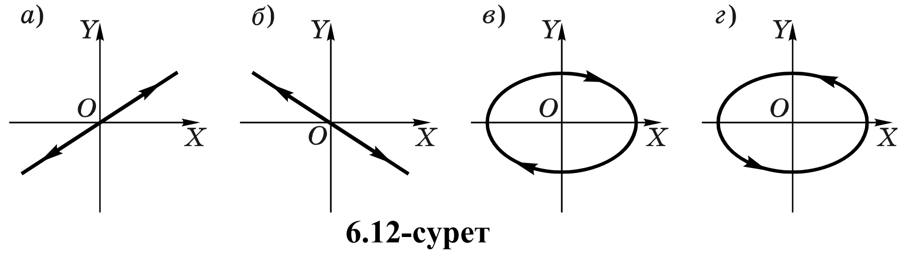
$$x = a\cos\omega t, \qquad y = b\cos\omega t + \delta. \qquad (6.23)$$

Осы жағдайлар үшін бөлшектердің траекториясы эллипсті салады (6.11-сурет). Осы эллипстің түрі a мен b амплитудаларының және $\delta -$ фазалар айырымының қатынастырына тәуелді. Осыдан кейбір жеке-жеке жағдайлар шығады:



6.11-сурет

а) $\delta = 0$ болғанда $y = (b/a)x$, яғни бөлшек бірінші және екінші квадранттарда түзумен қозғалады (6.12, а);



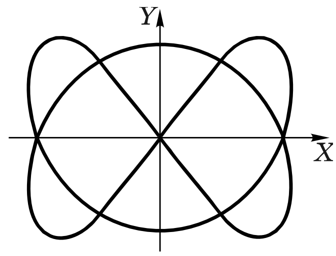
6.12-сурет

б) $\delta = \pi$ болғанда $y = -(b/a)x$ және бөлшек тағы да түзудің бойымен қозғалады, бірақ енді екінші мен төртінші квадратта (6.12, б);

в) $\delta = \pi/2$, бұл жағдайда $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, яғни бөлшек эллипспен қозғалады, олардың жартылай өстері a мен b координат өстерімен сәйкес келеді. $a = b$ болғанда эллипс шеңберге айналады. Y өсінде тербеліс X өсімен салыстырғанда фазасы бойынша $\pi/2$-ге озып отырғандықтан, ең басында y сонан кейін барып x өсінің максимал мәніне жетеді. Яғни сонда қозғалыс сағат тілінің бағытымен сәйкес қозғалады (6.12, в);

г) $\delta = 3\pi/2$. Мұның өзі $\delta = -\pi/2$ тең деген сөз, себебі 2π фазаға өзгеру елеусіз (6.12,г).

Егер де бір-біріне өзара перпендикуляр тербелістердің жиіліктері бірдей болмаса және бір-біріне қатынасы бүтін сандармен сипатталса, онда қорытынды қозғалыстың траекториясының пішіні өте күрделі болып шығады. Осы фигураларды Лиссажу деп атайды. Сондай фигуралардың біреуінің пішіні 6.13-суретте келтірілген, ол келесі жиіліктердің қатынасына сәйкес: $\omega_y : \omega_x = 3:2$.



6.13-сурет

Бір-біріне өзара перпендикуляр тербелістер біріне-бірі қосылғанда олардың толық энергиясы:

$$E = \left(\frac{\varkappa_1 x^2}{2} + \frac{\varkappa_2 y^2}{2}\right) + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = E_x + E_y, \qquad (6.24)$$

яғни толық энергия әрбір тербеліс энергияларының қосындысынан тұрады (бір бағыттағы тербелістердің қосындысынан айырмашылығы міне осында). (6.13)-ке сай осы энергия келесі өрнекпен анықталады:

$$E = \frac{m}{2}\left(a^2\omega_x^2 + b^2\omega_y^2\right). \qquad (6.25)$$

§ 6.3. Өшетін гармоникалық тербелістер

Өшетін гармоникалық тербелістердің теңдеуі

Шынайы жағдайларда тербелістегі кез келген серіппенің немесе тербелістегі кез келген маятниктің амплитудасы мен тербеліс энергиясы кеміп отырады да ақыры тербеліс мүлдем тоқталады. Мұндай тербелістер *өшетін тербелістер* деп аталады.

Динамиканың негізгі теңдеуіне сүйеніп, массасы m бөлшекке $(-\varkappa x)$-квазисеріппелі күштен басқа тағы да бөлшектің жылдамдығына пропорционал $F_x = -r\dot{x}$ -кедергі күші әсер етсін. Мұндағы, $r-$ кедергі коэффициенті (өлшемді шама). Сонда қозғалыс теңдеуі келесі түрде өрнектеледі:

$$m\ddot{x} = -\varkappa x - r\dot{x}\,, \qquad (6.26)$$

немесе

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (6.27)$$

мұндағы $2\beta = r/m, \omega_0^2 = \varkappa/m. \omega_0$ үйкелиссіз еркін тербелістің жиілігі. ω_0- жиілікті *осциллятордың меншікті жиілігі,* $\beta -$ *өшу коэффициенті* деп атайды.

(6.27) теңдеуі $\beta < \omega_0$ шартта өшетін тербелісті сипаттайды. Осы теңдеудің шешімін келесі түрде келтіруге болады:

$$x = a_0 e^{-\beta t}\cos(\omega' t + \alpha)\,, \qquad (6.28)$$

мұндағы, a_0 мен $\alpha -$бастапқы шарттармен анықталатын тұрақты, $x(0) = x_0$ мен $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, $\omega' -$ *өшетін тербелістің жиілігі.*

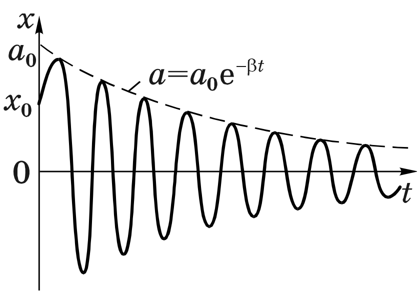
$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2\,.} \qquad (6.29)$$

(6.28) функцияның графигі $x > 0$ мен $\dot{x}_0 > 0$ шарты үшін 6.14-суретте көрсетілген. Функция периодты емес екені суреттен көрініп тұр. Алайда $T = 2\pi/\omega' -$ шамасы *өшетін тербелістің периоды* деп аталады.

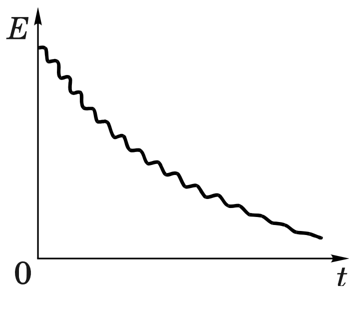
$$T = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \qquad (6.30)$$

$a = a_0 e^{-\beta t}$– көбейткіші косинустың алдындағы (6.28) теңдеудегі *өшетін тербелістің амплитудасы* деп аталады. (6.14-суретте) үзік-үзік сызықпен көрсетілген

Өшетін гармоникалық тербелістерге қарағанда жиіліктің азайып, ал периодтың артатындығын көреміз.



6.14-сурет



6.15-сурет

Өшетін тербелістердің энергиясы

Мұндай энергия потенциалдық және кинетикалық энергиялардың қосындысынан тұрады: $E = \varkappa x^2/2 + m\dot{x}^2/2$. $x(t)$ мен $\dot{x} = (t)$ шамаларын осы теңдеуге қойғаннан кейін (6.28) теңдеуіне сай келетін өшетін тербелістер мен $E(t)$ тәуелділігінің графигін аламыз (6.15-сурет). Тербелістер энергиясының кемуі кедергілер күшінің әсерінен болып отыр. Осы күштің қуаты тең: $-r\dot{x}\cdot\dot{x} = -r\dot{x}^2$, сонда

$$\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = -r\dot{x}^2 .$$

$\mathrm{d}E/\mathrm{d}t < 0$ тең $\dot{x} = 0$ тең шамасынан басқа моменттерден.

Тербеліс $(\beta \ll \omega_0)$ аздап өшкен кезде, $E(t)$ энергияның тәуелділігі экспоненциалды түрде өзгереді:

$$E = E_0 e^{-2\beta t} . \tag{6.31}$$

Осыдан бір уақыт бірлігінде энергияның кемуі тең:

$$-\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 2\beta E. \tag{6.31*}$$

Өшудің сипаттамасы

$\beta -$ коэффициентінен басқа өшу процесін басқа да шамалармен сипаттауға болады:

1. *Релаксация уақыты* τ*–е* рет тербеліс амплитудасының кемуіне сай келетін уақыт. $a = a_0 e^{-\beta t}$ өрнегінен келесі формула шығады:

$$\tau = 1/\beta . \tag{6.32}$$

2. *Өшудің логарифмдік декременті*. Оның өрнегі:

$$\lambda = ln\frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T, \tag{6.33}$$

мұндағы, T – өшетін тербелістердің периоды. Алдыңғы екі формуладан келесі өрнек шығады:

$$\lambda = 1/N_e \tag{6.34}$$

мұндағы, N_e – τ уақыты ішіндегі тербелістер саны, оның амплитудасы $e -$ рет кішірейеді.

Өшу онша үлкен болмайтын кезде $(\beta \ll \omega_0)\lambda$ −период ішіндегі тербеліс амплитудасының салыстырмалы кемуін сипаттайды. Мұның өзі (6.33)-тен шығады, себебі мұндай жағдайда келесі өрнек орын алады:

$$\lambda = ln\frac{a+\delta a}{a} = ln\left(1+\frac{\delta a}{a}\right) \approx \frac{\delta a}{a}. \tag{6.35}$$

Сонымен қатар ($\beta \ll \omega_0$) $-$ өшу онша үлкен болмайтын кезде период ішіндегі энергияның кемуі (6.31*)-ге сәйкес тең болады: $\delta E/E = 2\beta T = 2\lambda$, содан

$$\lambda = \delta E/2E\ . \tag{6.36}$$

3. Анықтамасы бойынша осциллятордың *сапалығы*:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e. \tag{6.37}$$

Өшу онша үлкен болмайтын кезде ($\beta \ll \omega_0$) 6.36) теңдеуі дұрыс болып, келесі өрнек шығады:

$$Q \approx 2\pi E/\delta E. \tag{6.38}$$

Мысал. Әрбір N $-$ тербеліс кезінде ығысу амплитудасы η рет кемитін осциллятордың сапалылығын анықтау керек. $Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi/\beta T$ тең болғандықтан T мен β табу керек. $\Delta t -$ амплитуданың η рет кемуіне сәйкес келетін уақыт, сонда $\eta = e^{\beta \Delta t}$ мен $\beta \Delta t = ln\, \eta$. Сонымен, $T = \Delta t/N$. T мен β мәндерін алғашқы формулаға қойғаннан кейін табамыз: $Q = \pi N/ln\eta$.

Қорытындысында айта кету керек үлкен өшулер кезінде ($\beta \gg \omega_0$) *жүйе апериодтық қозғалыс* жасайды. Тепе-теңдік қалпынан шығарылған жүйе тербеліс жасамай қайта қалпына оралады.

§ 6.4. Мәжбүр тербелістер

Мәжбүр тербелістердің теңдеулері

Шынайы тербеліс жүйелеріндегі еркін тербелістер өшетін тербелістерге жататыны белгілі. Осындай жүйелерде өшпейтін тербелістерді тудыру үшін кедергі күштер арқылы энергияның кемуін теңестіру қажет. Мұндай әсерді келесі түрде жүзеге асыруға болады: жүйеге сырттан айнымалы күшпен әсер етеді − ең қарапайым дегенде гармоникалық заң бойынша $F_x = F_m \cos \omega t$. Осы жағдайда пайда болатын тербелістер *мәжбүрлік* деп аталады. Көптеген жағдайларда жүйе тек өз бетімен ғана тербеліп тұрмайды, сонымен қатар белгілі жиілікпен өзгеріп отыратын F $-$сыртқы күш әсеріне де ұшырайды. Мұндай жағдайларда тербелісті *мәжбүр тербелістер* деп атайды.

Енді тербелістегі бөлшекке бір мезгілде үш күшпен әсер етейік: квазисерпімді күш ($-\varkappa x$), кедергі күші ($-r\dot{x}$) және мәжбүр етуші сыртқы күш (F_x). Динамиканың негізгі заңына сай жазамыз:

$$m\ddot{x} = -\varkappa x - r\dot{x} + F_m \cos\omega t \qquad (6.39)$$

немесе ыңғайлырақ түрде тағы да жазамыз:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_m \cos\omega t \qquad (6.40)$$

мұндағы, $2\beta = r/m,\ \omega_0^2 = \varkappa/m\ , f_m = F_m/m.$

Тәжірибе бойынша едәуір уақыт өткеннен кейін (мәжбүр етуші күштерді әсер ету моментінен бастап) жүйеде белгілі бір гармоникалық тербеліс* орнайды, оның жиілігі мәжбүр етуші сыртқы күштің жиілігіне тең, тек фазасы бойынша $\varphi -$ шамасына қалып отырады:

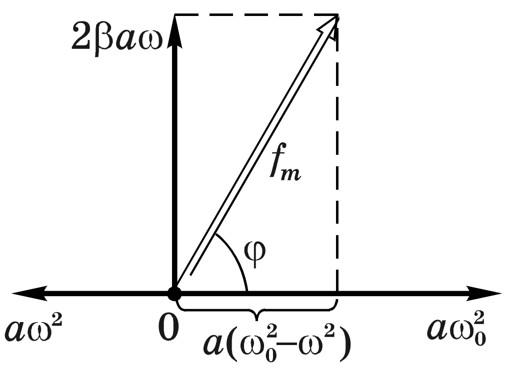
$$x = a\cos(\omega t - \varphi). \qquad (6.41)$$

Осы теңдеудегі a мен φ тұрақтыларын табу қажет. Ол үшін (6.41) теңдеуін уақыт бойынша екі рет дифференциалдаймыз:

$$\dot{x} = -a\,\omega\sin(\omega t - \varphi) = a\omega\cos(\omega t - \varphi + \pi/2)\,,$$

$$\ddot{x} = -a\,\omega^2\cos(\omega t - \varphi) = a\omega^2\cos(\omega t - \varphi + \pi)\,, \qquad (6.42)$$

Бастапқы (6.40) теңдеуге $x,\ \dot{x}$ және $\ddot{x}$ мәндерін қойып, табамыз (6.40) теңдеуінің сол жағындағы үш гармоникалық функцияның қосындысы $f_m\cos\omega t$ функциясына тең болады. $x,\ \dot{x}$ және $\ddot{x}$ арасындағы фазалық ығысуды ескере отырып, осы теңдеуді *векторлық диаграмма* $(\omega < \omega_0)$ жағдай үшін келтірейік (6.16-сурет). Осы диаграммада әрбір вектордың мағынасы келтірілген, олардың модульдері үдеудің өлшемдігін алады (жақшада көрсетілген).



6.16-сурет

Пифагор теоремасы арқылы осы диаграммадан келесі өрнек шығады:

$$a^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2 a^2 = f_m^2\,,$$

Осыдан:

$$\boldsymbol{a = f_m/\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \qquad (6.43)$$

---

* (6.40) теңдеуінің шешімі біртекті теңдеулердің жалпы шешімдері мен біртекті емес теңдеулердің жеке шешімдерінің қосындысымен анықталады: $x = a_0 e^{-\beta t}\cos(\omega' t + \alpha) + +\cos(\omega t - \varphi)$. Бізге тек қалыптасқан тербелістерге сәйкес келетін теңдеулердің жеке шешімдері ғана қажет. Ал біртектес теңдеудің жалпы шешімі өшетін тербелістерді сипаттайды.

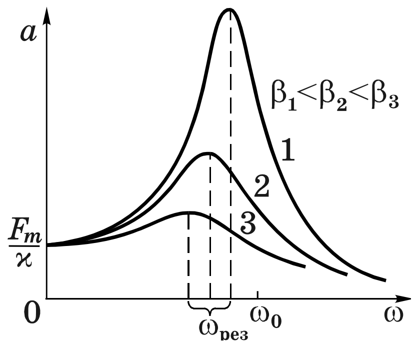
Диаграммадан мәжбүрлеуші күштің әсерінен туатын фаза бойынша φ –ға ығысу анықталады:

$$tg\varphi = 2\beta\omega/(\omega_0^2 - \omega^2). \tag{6.44}$$

(6.43) пен (6.44) теңдеулері келесі қорытындыға әкеледі: мәжбүрлеуші күштің әсерінен болатын тербелістің a –амплитудасы мен фаза бойынша φ –ға ығысуы бастапқы шартқа тәуелсіз болып, бірақ (ω_0, β) осциллятор мен мәжбүрлеуші күштің (f_m , ω) тек өздерінің қасиеттеріне ғана байланысты екені анықталды.

Резонанс

6.17-суретте үш өшу коэффициенттерінің мәнін табу үшін мәжбүр тербелістер амплитудасының мәжбүр етуші күштердің жиілігінен $a(\omega)$ тәуелділік графигі келтірілген. $\mathrm{d}a/\mathrm{d}\omega = 0$ шартынан $a(\omega)$ –ның максимал мәнге ие болатыны оңай табылады, ол үшін түбір астындағы шаманың экстремумы табылса болғаны (экстремум- лат. шеткі яғни максимум немесе минимум деген түсінік). Осы жиілікті *резонансты* деп атайды:



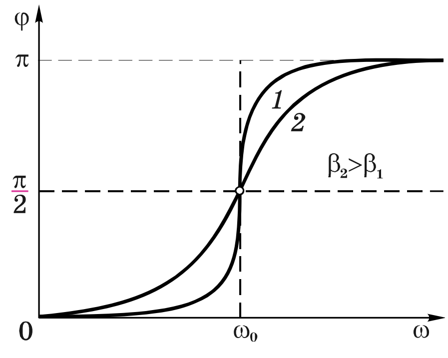
6.17-сурет

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\,, \tag{6.45}$$

Ал егер a – амплитуданың максимумы болса оны *резонанс құбылысы* деп атайды. 6.17-суретте көрсетілген графикті *резонансты қисықтар* деп атайды. (6.45) теңдеуін (6.43) теңдеуіне қою арқылы резонанс уақытындағы амплитуданы анықтаймыз:

$$a_{max} = \frac{f_m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \tag{6.46}$$

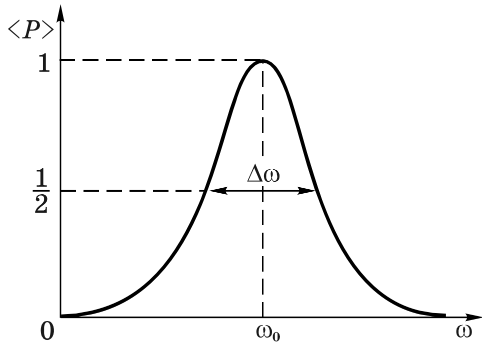
Жүйенің өшуі неғұрлым әлсіз болса, солғұрлым резонанс күшті болады. Техника мен физикада резонанс құбылысы үлкен рөл атқарады. Тербелістерді күшейту үшін резонансты пайдаланады және егер ол ұнамсыз тербелістерді тудыратын болса, онда мұндай резонанстан құтылу әрекеттері жүргізіледі.



6.18-сурет

6.18-суретте φ фазалық ығысудың ω жиіліктен тәуелділігі келтірілген (екі өшу тұрақтылары үшін). Аз өшу жағдайында $\omega_{рез} \approx \omega_0$, резонанс кезінде φ −дің мәні $\pi/2$ −ге тең болады (6.18-сурет).

6.19-суретте график келтірілген мәжбүр етуші күштің орташа қуатының (период үшін) оның жиілігінен $< P(\omega) >$ тәуелділігі келтірілген. Осыдан егер β өшу тұрақтысына тәуелсіз $\omega = \omega_0$ болса, онда $< P(\omega) \geq max$ болады. $< P(\omega) >$ резонанс қисығының маңызды параметрі ретінде резонанстың «өткірлігін» сипаттайтын, оның биіктігінің жартысына сәйкес келетін $\Delta\omega$ −ені болып табылады. Аз өшу жағдайында ($\beta \ll \omega_0$) амплитуданың ауытқуы өте күрт жүреді және резонанстың «өткірлігі», яғни $\omega_0/\Delta\omega$ қатынасы, осциллятордың сапалығына тең болады:



6.19-сурет

$$\omega_0/\Delta\omega = Q \tag{6.47}$$

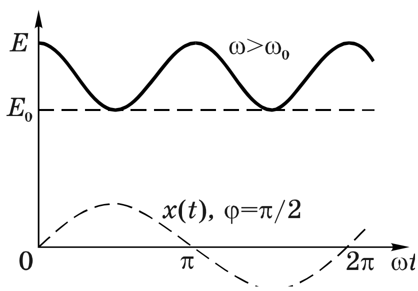
Мәжбүр тебелістердің энергиясы

Егер осциллятор уақытқа қатысты қалыптасқан тербелісті жасаса, онда E −энергиясы қалай өзгереді? $E = U + K$ тең болғандықтан:

$$E = \frac{\varkappa x^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2} = ma^2[\omega_0^2 cos^2(\omega t - \varphi) + \omega^2 \, sin^2(\omega t - \varphi)]/2 \tag{6.48}$$

Мұнда $\varkappa = m\omega_0^2$ ескерілген. $E(t)$ −нің $\omega > \omega_0$ жағдайы үшін тәуелділік графигі 6.20-суретте көрсетілген. Тербеліс энергиясы E неғұрлым аз болса солғұрлым ω жиілік ω_0 −ке жақындайды, ал жиіліктер $\omega = \omega_0$ теңессе, онда E энергия t −уақыттан тәуелсіз болады:

$$E_0 = ma^2\omega_0^2/2 = const.$$



6.20-сурет

Қалыптасқан тербелістер $\omega \neq \omega_0$ үшін мәжбүр етуші күштің жұмысы период ішінде кедергі күштерінің жұмысы арқылы жүйедегі энергияның шығынын толтырып отырады. Әр момент үшін, егер $\omega = \omega_0$ болса, мәжбүр етуші күштің қуаты кедергі күштерінің қуатының модуліне тең болады. Ал қарсы жағдайда бұл қуаттар период ішінде тек орташа модульдері бойынша теңеседі.

Мысал. Өшу коэффициенті β болатын осциллятордың $< K >$ деңгейіндегі кинетикалық энергиясының орташа мәніне сәйкестік үшін тербеліс периоды ішінде мәжбүр етуші күштің $< P > -$ орташа қуатын табу керек. Энергияның сақталу заңы бойынша$< P >$ кедергі күш қуатының орташа мәнінің модуліне тең болуы керек:

$$< P >= |< -r\dot{x} \cdot \ddot{x} >| =< r\dot{x}^2 >.$$

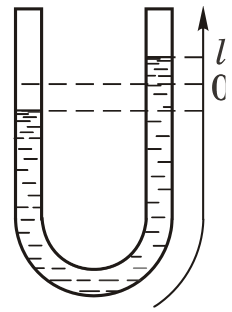
Себебі:

$\dot{x}^2 = 2K/m,$ онда$r\dot{x}^2 = 2(r/m)K = 4\beta K$мен $< P \geq 4\beta < K >$.

Есептер

6.1. Үйкеліссіз еркін тербелістер. U тәрізді түтікке көлемі V идеалды сұйық құйылған (6.21-сурет). Түтіктің көлденең қимасының ауданы S. Сұйық үшін оның әлсіз тербелістерінің периодын тап.

Шығару жолы. Осы тәріздес есептерді l доғалық координат арқылы шығару ыңғайлырақ. Сұйыққа әсер ететін барлық күштерді τ ортқа проекциялап, $m\ddot{l} = F_\tau$ динамиканың негізгі теңдеуіне сәйкес келесі теңдеуді аламыз: $m\ddot{l} = -\rho gS \cdot 2l$. Осы теңдеудің оң жағында бір-ақ компенсацияланбаған ауырлық күштің проекциясы жазылған, ал оң жағында сұйықтың $2l$ −ұзындығы. Осыдан $m/\rho = V$ ескере отырып, келесі өрнекті аламыз:

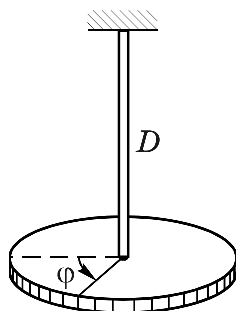


6.21-сурет

$$\ddot{l} + (2gS/V)l = 0.$$

Осыдан $\omega_0^2 = 2gS/V \;\; T = \pi\sqrt{2V/gS}.$

6.2. Айналдыру тербелістері. Момент инерциясы I горзонталь дискінің өзінің өсіне қатысты центрінде жіңішке серпімді шыбық (6.22-сурет) орналасқан. Диск айналғанда оған серпімді күш моменті әсер етеді: $M_Z = D\varphi$, мұндағы D – айналу коэффициенті. Егер бастапқы моментте дискіні тепе-теңдік қалпынан φ_{0-} бұрышқа бұраса және оған φ_{0-} бұрыштық жылдамдығын берсе, сондағы айналу тербелістерінің ω_0 жиілігі мен φ_0 амплитудасын табу керек.



6.22-сурет

Шығару жолы. Қозғалыс теңдеуінен $I\ddot{\varphi} = -D\varphi$ келесі өрнекті табамыз. Энергия сақталу заңына сүйене отырып, тербелістің амплитудасын табу оңай. ($\omega_0 = \sqrt{D/I}$). Энергия бастапқы моментте тепе-теңдік күйінен максималды ауытқу кезіне тең:

$$(E = U + K) \quad D\varphi_0^2/2 + I\dot{\varphi}_0^2/2 = D\varphi_m^2/2.$$

Осыдан

$$\varphi_m = \sqrt{\varphi_0^2 + (I/D)\dot{\varphi}_0^2}\,.$$

Потенциалдық энергияның анықтамасынан шығады ($U = D\varphi^2/2$), U −шамасының *кемуі* серпімді күштің жұмысына тең (біздің жағдайымызда бұл оның моментінің):

$$U(0) - U(\varphi) = \int_0^{\varphi} M_z \, \mathrm{d}\varphi$$

Тепе-теңдік күйінде ($\varphi = 0$) потенциалдық энергия $U(0) = 0$ тең деп жорамалдаймыз.

6.3. Физикалық маятник. C центрдің қандай x арақашықтығында ұзындығы l болатын жіңішке біртектес шыбықты ілу керек (оның әлсіз тербелістерінің периоды ең кішісіне сай болады).

Шығару жолы. (6.10) теңдеуіне сай физикалық маятниктің тербеліс периоды $T = 2\pi\sqrt{I/mgx}$. Мұндағы $I -$ шыбықтың ілу нүктесіне қатысты инерция моменті. Штейнер теоремасы бойынша $I = I_C + mx^2$, мұндағы $I_C -$ С центр массасына қатысты инерция моменті. Осы өрнекті T формуласына қойып, келесі теңдеуді табамыз:

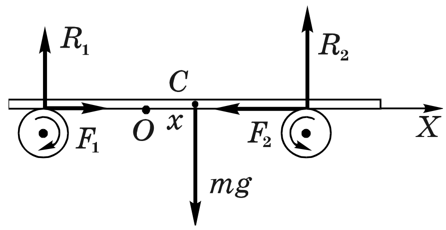
$$T = 2\pi\sqrt{(l/12x + x/l)l/\mathrm{g}}\,.$$

Егер $\mathrm{d}T/\mathrm{d}x = 0$ шарты орындалса, T−периоды ең кіші шамасына ие болады, (немесе түбір астындағы шама нөлге тең болса):

$$-l/12x^2 + 1/l = 0,$$

Осыдан $x = l/\sqrt{12}$.

6.4. Біртекті сырық екі тез айналатын блоктың үстіне қойылған (6.23-сурет). l блок өстерінің арасындағы арақашықтығы мен блок пен сырық арасындағы үйкеліс коэффициенті$-k$ белгілі. Осы сырықтың гармоникалық тербелісі мен периодын табу керек.



6.23-сурет

Шығару жолы. Динаманың негізгі заңына сай:

$$m\ddot{x} = F_1 - F_2 = k(R_1 - R_2). \qquad (*)$$

Сырық айналмайды, себебі сырыққа әсер ететін күштердің алгебралық қосындысы нөлге тең. O нүктесіне қатысты (x координатасының басы)

$$(R_1 - R_2)l/2 + mgx = 0.$$

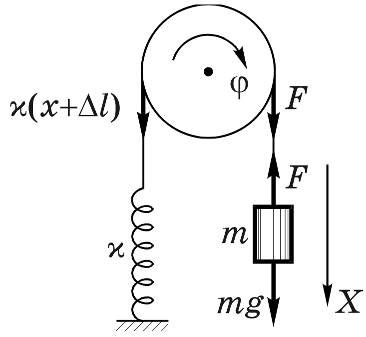
Мұнда жақшаның ішіндегі табылған шаманы ($R_1 - R_2$) осының алдындағы теңдеуге қойып, (m)-ге қысқартқаннан кейін аламыз:

$$\ddot{x} + (2kg/l)x = 0.$$

Осы алынған теңдеу жиілігі $\omega_0 = \sqrt{2k\mathrm{g}/l}$ мен периоды $T = \pi\sqrt{2l/k\mathrm{g}}$ гармоникалық осциллятордың теңдеуі болып табылады.

Сырықтың барлық қалыптарында *сырғанау үйкелісі* үнемі болып тұруы үшін блоктар өте жылдам айналулары керек.

6.5. Егер блоктың радиусы R, айналу өсіне қатысты оның инерция моменті I, жүктің массасы m, серіппенің қаттылығы $\varkappa$ болса, сондағы жүйенің әлсіз тербелістерінің периодын табу керек (6.24-сурет). Блок бойымен жіп сырғанамайды. Өсте үйкеліс жоқ.



6.24-сурет

Шығару жолы.
x —координаталарының оң бағытын және φ (блок үшін) таңдап алып, жүк пен блоктың қозғалыстары үшін теңдеуді келтірейік:

$$m\ddot{x} = mg - F, I\ddot{\varphi} = RF - R(x + \Delta l),$$

мұндағы Δl – тепе-теңдік қалпындағы серіппенің керілуі. Сонымен кинематикалық үдеуді де ескеру қажет: $\ddot{x} = R\ddot{\varphi}$.
Осы екі теңдеуден F алып тастап, келесі өрнекті аламыз:

$$I\ddot{x}/R = R(mg - m\ddot{x}) - R\varkappa(x + \Delta l).$$

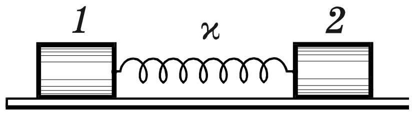
Тепе-теңдік қалпында $mg = \varkappa\Delta l$ алдыңғы теңдеу келесі түрге өзгереді: $(I/R + Rm)\ddot{x} = -R\varkappa x$, немесе

$$\ddot{x} + [\varkappa R^2/(I + mR^2)]x = 0.$$

Осыдан $\omega_0 = \varkappa R^2/(I + mR^2)$ және тербеліс периоды:

$$T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{(I/R^2 + m)/\varkappa}.$$

6.6. Тегіс горизонталь наушада екі цилиндр орналасқан олардың массалары m_1 және m_2. Олар бірбірімен серіппе арқылы қосылған, оның қаттылығы $-\varkappa$. 6.25-сурет. Наушаның бойындағы сол жақтағы цилиндрге v_1 бастапқы жылдамдық беріп, соғып жіберген. Табу керек: 1) Қозғалыс барысында жүйе тербелісінің жиілігін; 2) Тербелістің энергиясы мен амплитудасын.



6.25-сурет

Шығару жолы. Цилиндр центрінің координаттары белгілі бір моменттерде x_1 және x_2 болсын. Сонда

$$x_2 - x_1 = l + x, \qquad (1)$$

мұндағы l цилиндр арасындағы арақашықтық деформацияланбаған серіппе үшін, $x-$ оның дефориациясы. Енді серіппе тартылсын. $(x > 0)$ тартылғандағы екі цилиндр үшін де олардың қозғалыс теңдеуін жазайық:

$$m_1\ddot{x}_1 = \varkappa x, \qquad m_2\ddot{x}_2 = -\varkappa x,$$

Оң жағында серпімді күштің проекциясы жазылған. Серіппеден әрбір цилинрдге әсер ететін серпімді күш шығады. Бірінші теңдеуді m_1 ал екінші теңдеуді m_2 бөліп, екіншіден бірінші теңдеуді алып тастап келесі өрнекті шығарамыз:

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -\varkappa\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)x = -\left(\frac{\varkappa}{\mu}\right)x\,,$$

мұндағы, μ – жүйенің келтірілген массасы. Осы теңдеудің сол жағы (1) $\ddot{x}$–е сәйкес тең сондықтан

$$\ddot{x} + (\varkappa/\mu)x = 0,$$

Осыдан $\omega_0 = \sqrt{\varkappa/\mu}$.

1. Жүйенің механикалық энергиясы (4.57)-ке сай:

$$E = \tilde{E} + (m_1 + m_2)v_C^2/2,$$

мұндағы $\tilde{E}$ - Ц-жүйедегі механикалық энергия, міне осы шама біздің іздеп отырған тербелістің энергиясы болып табылады: $\tilde{E} = E_{тер}$. Сонымен,

$$E_{тер} = E - (m_1 + m_2)v_C^2/2\,. \qquad (2)$$

Енді $E -$ мен v_C табу қалды. Үйкеліс жоқ болғандықтан энергия сақталады: олай болса ол бастапқы моменттегі сол жақтағы цилиндрдің кинетикалық энергиясына тең болғаны: $E = m_1v_1^2/2$ жүйенің импульсы сақталады:

$$m_1v_1 = (m_1 + m_2)v_C.$$

$E -$ мен v_C орындарына олардың шамаларын қойғаннан кейін (2) аламыз:

$$E_{тер} = \mu v_1^2/2, \qquad \mu = m_1m_2/(m_1 + m_2).$$

$E_{тер} = \mu v_1^2/2$ формуласынан тербелістің амплитудасын табамыз.

$$a = v_1\sqrt{\mu/\varkappa}.$$

6.7. Өшетін тербелістер. Егер маятник жібінің ұзындығы $l = 50$ см болса және $\Delta t = 5{,}2$ мин уақыт аралығында оның тербеліс энергиясы $\eta = 4{,}0 \cdot 10^4$ рет кемісе, сонда оның сапалығы қандай болады?

Шығару жолы. (6.31) формуласын осы жағдай үшін пайдалануға бола ма, жоқ па соны анықтап алу керек. Өшуі үлкен емес жағдай үшін арналған теңдеу ($\beta \ll \omega_0$). Егер $E \propto e^{-2\beta t}$ болса, онда есептің шартынан шығады: $\eta \approx e^{2\beta\Delta t}$ мен $\beta = ln\eta/2\Delta t = 10{,}6/624 = 0{,}017\ c^{-1}$, $\omega_0 = \sqrt{g/l} = 4{,}4c^{-1}$. Бұл жағдайда шынында да $\beta \ll \omega_0$ болады. Осыдан сапалық тең:

$$Q = \pi/\beta T \approx \omega_0/2\beta = (\Delta t/ln\eta)\sqrt{g/l} = 1{,}3 \cdot 10^2.$$

6.8. Бастапқы моментте $t = 0$ осциллятордың ығысуы $x_0 -$ке тең және $x_0 > 0$. Осциллятор релаксациясының уақыты τ және ығысуы амплитудаға тең болғанда жағдайда $\dot{x}_0 -$бастапқы жылдамдықты табу керек.

Шығару жолы. Ығысу амплитудасы келесі формуламен анықталады: $a = a_0 e^{-\beta t}$. Егер бастапқы жылдамдық $\dot{x}_0 = \mathrm{d}a/\mathrm{d}t$ тең болса, сонда ғана $t = 0$ моментінде ығысу амплитудаға тең $(x_0 = a)$ болады, яғни графиктің $x(t)$ мен $a(t)$ ылдилары $t = 0$ уақытында бірдей. Осыдан $\dot{x}_0 = -\beta x_0 = -x_0/\tau$.

6.9. Мәжбүр тербелістер. Өшулердің $\beta \ll \omega_0$ жағдайы үшін резонанстық жиіліктегі a_m амплитудасының өте кішкентай жиіліктердегі a_0 амплитудаларына қатынасы осциллятордың сапалылығына тең екенін көрсету қажет.

Шығару жолы. $\beta \ll \omega_0$ жағдай үшін a_m амплитуда (6.46) теңдеуге сай тең: $a_m = f_m/2\beta\omega_0$. Ал $\omega \longrightarrow 0$ болғанда амплитуда $a_0 = f_m/\omega_0^2$ тең болады. Олардың қатынасы:

$$a_m/a_0 = \omega_0/2\beta \approx \omega/2\beta = 2\pi/2\beta T = \pi/\lambda = Q.$$

Жүйенің аздап өшу тербелістері үшін осы қатынас болса оның Q сапалылығы да өте үлкен болуы мүмкін.

6.10. Мәжбүр күштердің $F_x = F_m \cos \omega t$ әсерінен осциллятор $x = a\cos(\omega t - \varphi)$ заңына сай қалыптасқан тербеліс жасайды. Тербеліс период ішіндегі мәжбүр күштердің жұмысын табу керек.

Шығару жолы. Қалыптасқан тербелістер үшін T −период ішінде мәжбүр күштердің жұмысы кедергі күштердің жұмысына теріс таңбамен тең болады:

$$A_F = -A_{\text{кед}} = -< P_{\text{кед}} > T = -< -r\dot{x}\cdot\dot{x} > T =$$
$$= ra^2\omega^2 < sin^2(\omega t - \varphi) > T = 2\pi\beta m a^2\omega$$

Мұндағы, $< P_{\text{кед}} >$– кедергі күшінің орташа қуаты, сонымен қатар бір период ішінде синустың орташа квадраты тең ½ екенін еске сақтау керек. Векторлық диаграммадан $2\beta ф\omega = f_m \sin\varphi$ теңдігі көрініп тұр (6.16-сурет). Сондықтан A_F −ның түрі келесі формуламен анықталады:

$$A_F = \pi a F_m \sin\varphi.$$

7-тарау

Арнайы салыстырмалы теорияның кинематикасы

§ 7.1. Релятивистікке дейінгі физиканың негізгі қағидалары

XX ғасырдың басында белгілі болған тәжірибелік және теориялық материалдарды терең талдау Энштейнді классикалық физиканың негізгі қағидаларын, оның ішінде ең алдымен, кеңістік пен уақыттың қасиеттері жайлы көзқарастарды қайта карауға әкеп тіреді. Осының нәтижесінде ол классикалық физиканың логикалық аяқтамасы болып табылатын арнаулы **салыстырмалық теориясын** жасады. Бұл теорияның негізіне Ньютонның классикалық механикасы сияқты кеңістік пен уақыттың біртектілігі алынған. Сондықтан арнайы салыстырмалық теория кеңістік пен уақыттың физикалық теориясы ретінде қаралады. Физикалық деп аталу себебі кеңістікте уақыт бойынша өтіп жатқан физикалық құбылыстардың заңдылықтары кеңістік пен уақыттың қасиеттерімен тығыз байланысты. Арнайы деген термин бұл теорияның физикалық құбылыстарды тек қана инерциялық санақ жүйелерінде ғана қарастырылатындығын көрсетеді.

Релятивистікке дейінгі фзиканың негізгі қағидалары

Әуелі кеңістік пен уақыттың Ньютон заңдарымен байланысты болатын яғни классикалық физиканың негізінде жатқан көзқарастарды еске салайық.

1) Үш өлшемділігі бар кеңістік эвклидтік геометрияға бағынады.

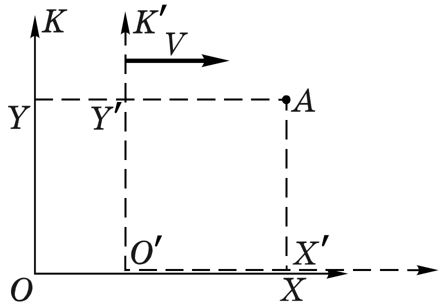
2) Үш өлшемділікті кеңістікпен қатар оған тәуелсіз түрдегі уақыт бар (кеңістіктің үш өлшемдері бір-біріне қалай тәуелсіз болса, уақытта солай тәуелсіз). Бірақ оған қарамай уақыт кеңістікпен қозғалыс заңдары арқылы байланысты. Шынында да уақыт сағатпен өлшенеді, ал сағат-уақыт масштабын бере алатын қандай да бір периодты процесті пайдаланатын кез келген бір құрал. Сондықтан да уақытты қайсыбір периодты процеске қатыссыз анықтау мүмкін емес.

3) Қатты денелердің мөлшері (масштабтары) және берілген оқиғалардың арасындағы уақыт аралықтары түрліше санақ жүйелерінде бірдей. Бұл кеңістік пен уақыттың абсолюттігі жайлы ньютондық концепцияға сәйкес және олардың қасиеттері санақ жүйелеріне тәуелсіз, яғни кеңістік пен уақыт барлық санақ жүйелерінде де бірдей.

4) Бұл теория классикалық механиканың кеңістіктің евклидтілігі және Галилей-Ньютонның инерция заңы тәрізді қағидаларын өзгеріссіз

қабылдайды. Ал қатты денелердің мөлшермен уақыт аралықтарының түрлі санақ жүйелерінде өзгеріссіз қалады деген қорытындыларына келсек, бұл жерде Эйнштейн олардың баяу қозғалыстарда зерттеу кезінде пайда болғандығына және сондықтан оларды үлкен жылдамдықтар обылысына таратудың заңсыз болып табылатындығына назар аударды. Яғни Галилей - Ньютонның инерция заңының дұрыстығы мойындалды, басқа денелер тарапынан әсер түсірілмейтін дене түзусызықты және бірқалыпты қозғалады. Бұл заң инерциалық санақ жүйелерінің болатындығын тағайындайды, оларда Ньютонның заңдары (сонымен қатар Галилейдің салыстырмалылық принципі) орындалады.

5) Осындай көзқарастардан кез келген уақиғаның түрліше инерциялық санақ жүйелеріндегі кеңістік-уақыттық байланысты білдіретін Галилей түрлендірулері шығады. Егер K' −санақ жүйесі K-санақ жүйесіне қатысты $\mathbf{V}$ −жылдамдықпен қозғалса (7.1-сурет) және уақыттың санақ басы екі санақ жүйесінің де O және O' координаттар* бастарына бірдей түсетін болса, онда



7.1-сурет

$$x' = x - Vt; y' = y; \qquad t' = t. \tag{7.1}$$

Осыдан кез келген оқиғалардың координаттарының салыстырмалығы шығады, яғни олардың әртүрлі санақ жүйелеріндегі мәндері әртүрлі; оқиғаның өтетін уақыты түрліше санақ жүйелерінде бірдей. Соңғы деректер уақыттың әртүрлі санақ жүйелерінде бірдей өтетіндегін көрсетеді. Бұл тұжырымдар сенімінің күштілігі соншалықты тіптен ол арнайы постулат ретінде де қарастырылған жоқ.

(7.1)-ден тікелей жылдамдықтарды түрлендірудің (қосудың) классикалық заңы шығады:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V} \tag{7.2}$$

$\mathbf{v}'$ мен $\mathbf{v} - K' -$ және K- санақ жүйелеріндегі материалдық нүктелердің (бөлшектердің) жылдамдықтары.

6) *Галилейдің салыстырмалылық принципі* орындалады: *барлық инерциялық санақ жүйелері механикалық тұрғыдан қарағанда өзара эквивалентті (теңдес), механиканың барлық заңдары осы санақ жүйелерінде бірдей немесе Галилейдің түрлендіруіне қатысты инвариантты.*

7) *Алыстан әсәр етуші принципі* орындалады: денелердің өзара әрекеттесуі шексіз жылдамдықпен лезде беріледі.

Классикалық механиканың осындай көзқарастары сол кезде белгілі болатын барлық тәжірибе деректеріне толық сай келеді (бұл деректер денелердің жарық жылдамдығынан көп төмен жылдамдықпен өтетін

---

* Осыдан кейін біз әрдайым тек екі кеңістіктік координаталарымен шектелеміз: x және y. Ал $z -$ і координатасы y координатасына барлық жағынан бірдей болғандықтан, ол келтірілмейді.

қозғалысты қарастырады). Механиканың өзінің де табысты даму қарқыны осыған дем бере түсті. Сондықтан классикалық механиканың кеңістік пен уақыттың қасиеттері жайлы көзқарастары іргелі деп саналды.

Бірінші сынақ Галилейдің салыстырмалық принципіне түсті, ол физиканың сол кездегі дамуының шыңына көтерілген бөлімі – механикаға ғана қатысты болатын. Физиканың басқа бөлімдерінің оның ішінде оптика мен электродинамиканың дамуына да салыстырмалық принципті таратуға бола ма деген табиғи сұрақ туады. Егер жоқ десе, онда механикалық болып табылмайтын құбылыстардың көмегімен инерциялық санақ жүйелерін бір-бірінен ажыратуға болар еді және басты санақ жүйесінің немесе абсолюттік санақ жүйесінің болуы жайлы мәселені де көтеруге болар еді деген принциптер туар еді.

Әртүрлі санақ жүйелерінде түрліше өтуге тиіс деп саналған осындай құбылыстардың бірі – жарықтың таралуы. Сол кезде үстем болатын жарықтың толқындық теориясы бойынша жарық толқындары қайсы-бір гипотезалық ортаға қатысты (жарық тасүшы эфирген) белгілі жылдамдықпен таралуы тиіс болатын, бірақ мұндай ортаның қасиеттері қандай болмасын ол барлық инерциялық жүйелерінде сөзсіз бір мезгілде тыныштықта бола алмайды. Осылайша, инерциялық санақ жүйелердің ішінен біреуі дара шығып, абсолютті болып, жарық тасымалдаушы эфирге қатысты тыныштықта болуы керек еді. Міне тек осы санақ жүйесіне қатысты ғана жарық барлық бағыттарда бірдей $c -$жылдамдықпен таралады деп есептелді. Егер қандай да бір инерциялық санақ жүйесі эфирге қатысты $\mathbf{V} -$ жылдамдықпен қозғалатын болса, онда бұл санақ жүйесінде жарықтың $c -$ таралу жылдамдығы жылдамдықтарды қосудың (7.2) заңына бағынуы тиіс, яғни $c' = c - \mathbf{V}$.

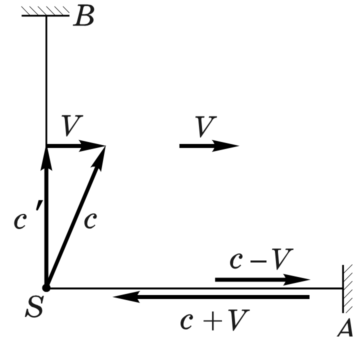
Бұл болжам Майкелсон (Морлимен бірге) тәжірибесінен алынған қорытындыларға негізделген.

Жер қозғалысының жарық жылдамдығына әсерін өлшеу мақсатымен американдық физик А. Майкельсон (1852-1931) тәжірибе жүргізген (1881). 19 ғасырдың аяғына дейін физика ғылымында жарық белгілі бір универсалды орта - эфирде таралады деген көзқарас қалыптасып тұрды. Мұның үстіне бірқатар құбылыстар (жарық аберрациясы, Физо тәжірибесі) негізінде эфир қозғалмайды, не қозғалған дене эфирдің белгілі бір бөлігін өзімен ілестіре кетеді деген қорытындылар жасалды. Қозғалмайтын эфир жөніндегі гипотеза бойынша, Жер эфир ішінде қозғалғанда, “эфир желі” байқалуға тиіс, әрі жарық жылдамдығы жарық сәулесінің Жердің қозғалу бағытына қарағанда ғана тәуелді болуға тиіс еді.

Майкельсон тәжірибесі

Бұл тәжірибенің мақсаты Жердің эфирге қатысты шын қозғалысын анықтау. Тәжірибеде Жердің орбита бойымен 30 км/с жылдамдықпен қозғалысының жарықтың таралу жылдамдығына байланысты әсері тексерілді. Жарық S көзден (7.2-сурет) өзара перпендикуляр екі бағытта жіберіледі, олар S көзден бірдей $l-$ қашықтықта орналасқан A және B айналардан шағылып, S көзге қайтып оралады. Бұл тәжірибеде жарықтың екі: SAS және SBS жолмен жүріп өткен уақыттары салыстырылады.

Қондырғы Жермен бірге оның эфирге қатысты **V** жылдамдығы SA бағытында қозғалады (тәжірибенің қойылу уақытында). Егер жарық жылдамдығы жылдамдықтарды қосу (7.2) заңына бағынатын болса, онда SA жолда жарықтың қондырғыға қатысты (Жерге қатысты) $c-V$, ал кері қайтқанда $c+V$ жылдамдығы болады. Сонда SAS жолды өту уақыты:



7.2-сурет

$$t_{\parallel}=\frac{l}{c-V}+\frac{l}{c+V}=\frac{2l}{c}\frac{1}{\left(1-(V/c)\right)^2}$$

Ал SBS жолда қондырғығы қатысты жарық жылдамдығы $c'=\sqrt{c^2-V^2}$ (7.2-сурет) ал осы жолды жүріп өту уақыты:

$$t_{\perp}=\frac{2l}{\sqrt{c^2-V^2}}=\frac{2l}{c}\frac{1}{\left(1-(V/c)\right)^2}.$$

$t_{\parallel}$ және $t_{\perp}$ үшін өрнектерді салыстырудан жарықтың екі жолды екі түрлі уақытта өтетіндігі шығады. $t_{\parallel}-t_{\perp}$ айырымын өлшеп, қондырғының (Жердің) эфирге қатысты жылдамдығын анықтауға болады.

Уақыт аралығының тым аз болғанына қарамай қондырғы осындай аз айырмашылықта да сенімді ажырата алатындай жеткілікті сезімтал еді (өте дәл интерференциялық әдіс қолданылған).

Осыған қарамай нәтиже теріс болып шықты: сәуле жолдарының айырымы таңбасын өзгерту керек еді. Мүмкін қандай да бір кездейсоқ жағдаймен тәжірибе өткізіліп жатқан кезде Жердің эфирге қатысты жылдамдығы нөлге тең болған шығар. Бірақ онда жарты жылдан кейін Жердің эфирге қатысты жылдамдығы 60 км/с болуы тиісті еді, алайда жарты жылдық тәжірибе де еш нәтиже бермеді.

Одан кейінгі дәлірек қайталанған, жаңадан қойылған тәжірибелер де Майкельсон тәжірибесін қайталап, дәлдігі бұрынғыдан да жоғары теріс нәтиже берді.

Майкельсон тәжірибесінің теріс нәтижесі Галилей түрлендіруінің негізінде шығатын жылдамдықтарды қосу заңына қайшы келетін еді. Ол сонымен қатар эфирге қатысты қозғалысты байқаудың мүмкін еместігін, жарық жылдамдығының жарық көзінің қозғалысына тәуелсіз екендігін көрсетті (жарық көзі эфирге қатысты жылдың түрлі мезгілінде әртүрлі қозғалады).

Жарықтың таралу жылдамдығының жарық көзінің жылдамдығына тәуелсіз болатындығын кейінірек арнайы қойылған астрономиялық бақылаулар мен тәжірибелер де дәлелдеді.

Классикалық физика Майкельсон тәжірибесінің теріс нәтижесін түсіндіруге дәрменсіз болды, әрі қозғалыстағы орталардың электродинамикасының ешбір құбылыстарымен үйлестіре алмады. Салыстырмалық теориясында жарықтың таралу жылдамдығының барлық инерциялық санақ жүйелерінде тұрақты болуы, көптеген тәжірибе нәтижелерімен расталған постулат ретінде қабылданды.

XX ғасырдың басында теориялық және эксперименттік физикада қызық жағдайлар пайда болды. Бір жағынан теориялық жолмен сансыз көп инерциялық санақ жүйелерінің ішінен бір абсолютті жүйені бөліп алуға болатын түрліше эффектілер айтылды. Екінші жағынан, осы эффектілерді тәжірибе жүзінде анықтау түгелімен жоққа айналып жатты. Сонымен қатар тәжірибелер салыстырмалылық принципінің дұрыс екендігін, оның осы кезге дейін қолданылмайды деп келген құбылыстарға да үздіксіз қолданылатындығын көрсетті.

Майкельсон тәжірибесінің және оған ұқсас басқаша тәжірибелердің теріс нәтижелерін классикалық механика тұрғысынан түсіндіруге тырысқан талай талпыныстар болды. Бірақ олардың барлығы да ақыры дәрменсіз болып шықты. Бұл мәселенің нағыз шешімін Эйнштейннің салыстырмалылық теориясы ғана бере алды.

§ 7.2. Эйнштейін постулаттары

XX ғасырдың басында белгілі болған тәжірибелік және теориялық материалдарды терең талдау Эйнштейнді классикалық физиканың негізгі қағидаларын, оның ішінде ең алдымен, кеңістік пен уақыттың қасиеттері жайлы көзқарастарды қайта қарауға әкеп тірелді. Осының нәтижесінде ол классикалық физиканың логикалық аяқтамасы болып табылатын арнайы салыстырмалылық теориясын жасады.

Бұл теория классикалық механиканың Эвклид кеңістігі және Галилей-Ньютонның инерция заңы тәрізді қағидаларын өзгеріссіз қабылдады. Ал түрлі санақ жүйелерінде қатты денелердің мөлшері мен уақыт аралықтарының өзгеріссіз қалады деген қорытындылары тек баяу қозғалыстар үшін ғана тән және оларды үлкен жылдамдықтар обылысына тарату заңсыз болып табылатындығына Эйнштейн назар аударады. Олардың шын қасиеттері тек тәжірибеден алынған қорытындыларға негізделген. Галилейдің түрлендіруіне және алыстан әсерлесу принципіне қатысты да осыны айтуға болады.

Арнайы салыстырмалылық теориясының басты қағидалары ретінде Эйнштейн екі постулатты (принципті) алды, олар тұтастай тәжірибелік деректерге (оның ішінде бірінше кезекте Майкельсонның тәжірибесі) сүйенген:

1) *салыстырмалылық принципі*; Табиғаттағы кез келген физикалық құбылыс барлық инерциялық жүйеде бірдей өтеді.

2) *жылдамдықтың инвариантты принципі* (жарық жылдамдығының жарық көзінің жылдамдығына тәуелсіздігі).

Бірінші постулат. Галилейдің салыстырмалылық принципі кез келген физикалық процестерге жалпылау болып табылады: *барлық физикалық құбылыстар барлық инерциялық санақ жүйелерінде бірдей өтеді, табиғаттың барлық заңдары және оларды сипаттайтын теңдеулер инвариантты*, яғни олар бір инерциялық санақ жүйесінен екіншісіне өткен кезде өзгеріссіз қалады. Басқаша айтқанда, барлық инерциялық санақ жүйелері өздерінің физикалық қасиеттері бойынша эквивалентті (бір-бірінен ажырамайды); ешқандай тәжірибенің көмегімен қалғандарының ішінен олардың біреуін бөліп алуға болмайды.

Екінші постулат. *Жарық жылдамдығы вакуумде жарық көзінің қозғалысына тәуелсіз және барлық бағыттарда да бірдей.* Бұл *жарық жылдамдығы вакуумде барлық санақ жүйелерінде бірдей* дегенді білдіреді. Сонымен, жарық жылдамдығы табиғатта ерекше орын алады, бір санақ жүйесінен екіншісіне өткенде өзгеріп отыратын барлық жылдамдықтардай емес, жарық жылдамдығы инвариантты шама болып табылады. Жылдамдықтың мұндай түсінігі кеңістік пен уақыт жайлы көзқарастарды түпкілікті өзгертетінін әлі алда көреміз.

Сонымен қатар Эйнштейннің постулатынан *вакуумдегі жарық жылдамдығының шектік* болып табылатындығы да шығады. Бір денеден екінші денеге әсер ету сигналының ешқандай түрі вакуумдағы жарық жылдамдығынан артық жылдамдықпен тарала алмайды. Осы жылдамдықтың шектілік сипаты жарық жылдамдығының барлық санақ жүйелерінде бірдей болатындығын түсіндіреді. Шынында да осы постулат бойынша табиғат заңдары барлық инерциялық санақ жүйелерде бірдей. Кез келген сигналдың жылдамдығының шектік мәннен артық бола алмайтындығы да табиғат заңы болып табылады. Демек, жылдамдықтың шектік – жарықтың вакуумдегі жылдамдығының мәні де барлық инерциялық санақ жүйелерінде бірдей болуы керек. Шектік жылдамдықтың болуы бірден бөлшектердің қозғалыс жылдамдығына c −шамасымен шектеу қояды. Керісінше жағдайда бұл бөлшектер сигналды шектік жылдамдықтан артық жылдамдықпен (немесе денелер арасындағы өзара әрекеттесулерді) бере алатын еді. Сонымен, Эйнштейннің постулаттары бойынша табиғаттағы денелер қозғалысының барлық мүмкін жылдамдықтарының және өзара әрекеттесулердің таралуларының мәні c шамасымен шектелген. Осы арқылы классикалық механиканың алыстан әсәрлесу принципі осы тұрғыдан қабылданбайды.

Дербес салыстырмалылық теорияның түгел мазмұны оның осы екі постулатынан шығады. Қазіргі кезде Эйнштейнның постулаттары бойынша олардан шығатын барлық салдар тәжірибелік материалдардың барлық жиынтығымен дәлелденіп отыр.

Сағаттарды синхрондау

Осы постулаттардан қандай да бір қорытындылар жасамастан бұрын Эйнштейн кеңістік пен уақытты өлшеу тәсілдері жайлы көзқарастарды мұқият талдап шықты. Ньютон дәуірінен Эйнштейдікіне дейін уақыт пен кеңістікке байланысты ұғымдар терең қарастырылған, уақыт барлығына бірдей "абсолютті" және "бірқалыпты" (Ньютон сөзі) ағады деп есептелді. Классикалық механика ғылымы Ньютонның осы ойына негізделеді. XIX ғасыр соңына қарай электризм мен магнетизмге байланысты физиктер классикалық уақыт мағынасынан қиындықтар көре бастады. Эйнштейн бұл мәселені сағаттарды тұрақты шама, белгінің ең үлкен жылдамдығы – жарық жылдамдығын, пайдаланып синхрондау тәсілімен шешеді. Бұл тікелей уақытты, бір-бірімен салыстырғанда қозғалмалы әртүрлі байқаушылар үшін, әр-түрлі жылдамдықпен жүреді дегенді қорытады.

Уақыт — өлшемдер жүйесінің оқиғаларды реттеу, олардың ұзақтығын және араларындағы интервалдарын және нәрселердің қозғалысын сипаттауда пайдаланатын маңызды мүшесі. Уақыт – оқиғаның ұзақтығы және тізбектілігін сипаттайтын физиканың негізгі түсініктерінің бірі.

Физикалық реалдық деп ең әуелі Эйнштейн кеңістіктегі нүктені емес, оның қандай мезгілде өтуін көрсететін уақыт емес, тек оқиғаның өзін алуды ұсынды. Оқиғаны берілген санақ жүйесінде сипаттау үшін оның өткен орны мен өту уақытын көрсету керек.

Оқиға өтіп жатқан нүктенің орнын қатқыл масштабтардың көмегімен евклидтік геометрия әдістерімен анықтап, декарттық координаттармен өрнектеуге болады. Классикалық механика өлшенетін шамаларды үлгі эталондарымен салыстыру арқылы іске асырады.

Ал сәйкес уақыт мезетін санақ жүйесінің сол оқиға болып жатқан нүктеге орналастырылған сағаттың көмегімен анықтауға болады. Бірақ түрлі жерлерде өтіп жатқан оқиғаларды салыстыру немесе басқаша айтсақ сағаттан алыс орналасқан жердегі өтіп жатқан оқиғалар уақыттарын салыстыру қанағаттанарлық деп айтуға болмайды.

Шынында да санақ жүйесінің әртүрлі нүктелеріндегі уақытты (сағат уақытын) салыстыру үшін ең әуелі санақ жүйесінің барлық нүктелеріне ортақ болатын уақытты анықтау тәсілін тағайындау керек. Басқаша айтқанда берілген санақ жүйесіндегі барлық сағаттардың синхрондық жүрісін қамтамасыз ету керек. Санақ жүйесінің түрліше нүктелерінде орналасқан сағаттарды синхрондау қандай да бір сигналдардың көмегімен ғана іске асады. Осындай ең жедел жарамды сигналдар ретінде белгілі $c-$ жылдамдықпен таралатын жарық немесе радиосигналдар алынады. Мұндай сигналдарды тірек етіп алудың себебі, олардың жылдамдықтарының кеңістіктегі бағытқа тәуелсіздігі мен барлық инерциялық санақ жүйелерінде бірдей болуында.

Мысалға, берілген санақ жүйесінің басы O нүктесінде тұрған бақылаушыға дәл уақыт мезгілі сигналын береміз. Менің сағатым бойынша қазір сағат t_0 делік. Осы сигнал O нүктеден белгілі $r-$ қашықтықта орналасқан сағатқа жеткен кезде, оның көрсетуі $t = t_0 + r/c$ тең, яғни сигналдың жолдағы қалысы ескеріледі. Сигналды белгілі уақыт аралықтарында қайталап беріп отыру арқылы әрбір бақылаушыға сағатын O нүктедегі сағатпен синхрондауға мүмкүндік береді. Осындай операцияның арқасында берілген санақ жүйесінің барлық санақтары әрбір уақыт мезетінде бәріне бірдей уақытты көрсетеді.

Бұл жерде баса айта кететін жағдай осылай анықталған уақыт тек өзіне қатысты синхрондалған сағаттар тыныштықта болатын санақ жүйесі үшін ғана орындалады.

Оқиғалар арасындағы қатынастар

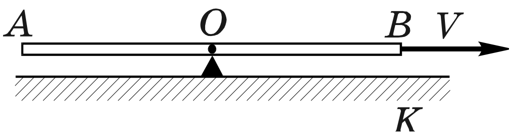
Әртүрлі инерциалдық санақ жүйелеріндегі берілген оқиғалардың арасындағы кеңістіктік және уақыттық қатынастар мәселесіне тоқталайық.

Классикалык механиканың өзінде-ақ түрліше оқиғалардың арасындағы кеңістіктік қатынастар қай санақ жүйесінде қарастырылғандығына тәуелді болатын. Мысалға, қозғалатын пойыздағы шамның қатарынан екі рет жануы пойызбен қатынасты санақ жүйесінде кеңістіктің бір ғана нүктесінде өтетін болса, ал жол табанымен қатынасты санақ жүйесінде ол кеңістіктің түрлі нүктелерінде өтеді. Әртүрлі уақыттарда өтетін екі оқиға бір жерде немесе бір-бірінен қандай да бір қашықтықта өтеді деп тоқтам жасау үшін бұл оқиғаның қандай санақ жүйесіне қатысты екендігін көрсету керек.

Ал оқиғалардың арасындағы уақыттық қатынастарға келетін болсақ, классикалық механикада олар санақ жүйесіне тәуелсіз болып саналады.

Егер қандай да бір екі оқиға бір санақ жүйесінде өтетін болса, онда олар барлық санақ жүйелерінде де бірмезгілде өтеді. Жалпы алғанда берілген екі оқиғаның арасындағы уақыт аралығы барлық санақ жүйелерінде бірдей болып саналады.

Бірақ, шындығында *бірмезеттіліктің өзі де* (демек уақыттың өтуі де) *салыстырмалы түсінік екендігіне* жеңіл көз жеткізуге болады, яғни тек осы түсінік қай санақ жүйесіне қатысты айтылғандығын көрсеткен кезде ғана оның мағынасы болады. Жай пікірдің көмегімен-ақ бір санақ жүйесінде бірмезгілде өтетін екі оқиғаның басқа санақ жүйесінде бірмезгілде болмайтындығын көрсетейік.



7.3-сурет

K-санақ жүйесіне қатысты тұрақты V жылдамдықпен қозғалатын AB шыбықты қарастырайық. Шыбықтың қақ ортасында O нүктеде шам, ал шеттерінде A және B нүктелерінде фотоэлементтер бар (7.3-сурет). Қайсыбір уақыт мезетінде шам лып етіп, лездік жарық шығарсын делік.

Шыбықпен байланысты санақ жүйесі (кез келген инерциалды санақ жүйесі тәрізді) екі бағытта да болатындықтан, жарық импульстері O нүктеден бірдей қашықтықта орналасқан A және B фотоэлементтерге бір мезгілде келіп жетіп («шыбық» санақ жүйесінде), фотоэлементтер бір мезгілде іске қосылады.

K-санақ жүйесінде жағдай басқаша. Бұл жүйеде де жарық импульсінің екі бағытта да таралу жылдамдығы бірдей $-c$, бірақ олардың жүрген жолдары әртүрлі. Шынында да, жарықимпульстері A және B нүктелерге келе жатқан кезде бұл нүктелер оңғақарай жылжып үлгереді, демек A фотоэлемент B фотоэлементке қарағанда ертерек іске қосылады.

Сонымен, бір санақ жүйесінде бірмезеттік болып табылатын оқиғалар басқа санақ жүйесінде бірмезеттік болып табылмайды, яғни бірмезеттік түсінігі классикалық механикадағыдай абсолют емес, салыстырмалы. Ал олай болса әртүрлі санақ жүйелерінде уақыттың өтуі әртүрлі.

Егер біздің қолымызда лезде таралатын сигналдар болса, онда бір санақ жүйесінде бірмезгілде өтетін оқиғалар кез келген басқа санақ жүйелерінде де тура сол мезгілде өтер еді. Мұны біз тікелей жаңа ғана қарастырылған мысалдан көріп отырмыз. Бұл жағдайда уақыттың өтуі санақ жүйесіне тәуелсіз, біз Галилей түрлендірулерінде кездесетін абсолют уақыт жайлы сөз ете алар едік. Сонымен, Галилейдің түрлендірулері сағаттардың синхрондалуы лезде таралатын сигналдардың көмегімен іске асырылады деген болжамға сүйенеді. Бірақ мұндай сигналдар табиғатта жоқ.

§ 7.3. Уақыттың баяулауы және ұзындықтың қысқаруы

Эйнштейннің постулаттарынан шығатын аса маңызды үш салдарды – денелердің көлденең қималарының мөлшері әртүрлі санақ жүйелерінде бірдей болатындығын, қозғалыстағы сағаттар жүрісінің баяулауын, қозғалыстағы денелердің барлық мөлшерлерінің қысқаруын қарастырып, алынған нәтижелерді координаттар мен уақыттың сәйкес түрлену фомулалары түрінде жалпылаймыз.

Осы мәселелерді қарастыруға кіріспестен бұрын санақ жүйесі деп координат өстерімен байланысқан санақ денесін, өзара тыныштықтағы бірдей синхрондалған сағаттар қатарын түсінетіндігімізді еске алайық. Одан әрі барлық санақ жүйелерінде координаттар мен сағаттар *бірдей түрде* өлшемденген (градуирленген) деп есептелінеді. Мұны тек ұзындық пен уақыт эталондары көмегімен бірдей түрде барлық санақ жүйелерінде іске асыруға болады.

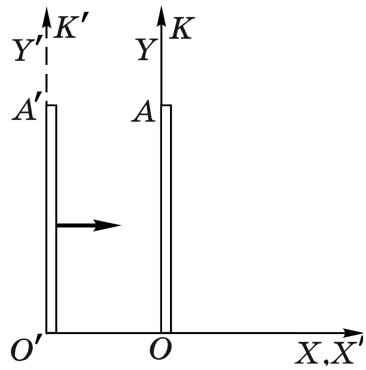
Бұл үшін ұзындықтың да, уақыттың да табиғи масштабын беретін табиғаттың қандай да бір периодтық процесін, мысалға, берілген санақ жүйесінде тыныштықта болатын белгілі бір атомдардың шығаратын монохроматтық толқындарының бірін пайдалануға болады. Осы санақ жүйесінде ұзындықтың эталоны ретінде толқын ұзындығын, ал уақыт эталоны ретінде сәйкес тербеліс периодын алуға болады. Осы эталондардың көмегімен берілген толқын ұзындықтарының белгілі санын *бір метр* эталоны деп және берілген тербелістердің периодтарының белгілі санын *бір секунд эталоны* деп алынады.

Мұндай операцияны осы санақ жүйелерінің әрбіреуінде тыныштықта бола алатын ылғи бір атомдардың оның ылғи бір ғана монохроматтық толқындарын қолдана отырып, әрбір инерциялық санақ жүйесінде іске асыруға болады. Салыстырмалылық принцип бойынша тыныштықтағы атомдардың физикалық қасиеттері олардың қай санақ жүйесінде тыныштықта болатындығына тәуелсіз.

Әбір санақ жүйесінде ұзындық пен уақыттың эталондарын тағайындап, осы эталондарды түрлі санақ жүйелерінде салыстыру мәселесіне көңіл бөлу керек. Басқаша айтсақ, осы жүйелерде денелердің өлшемі мен уақыттың өтуін салыстыру мәселесін шешу керек.

Денелердің көлденең өлшемінің теңдігі

Денелердің көлденең өлшемін әртүрлі инерциялық санақ жүйелерінде салыстырудан бастайық. K және K'-инерциялық санақ жүйелері болсын, олардың Yжәне Y'өстері бір-біріне параллель және бір жүйенің екінші жүйеге қатысты қозғалысының бағытына перпендикуляр (7.4-сурет), әрі K'-жүйенің O' басы *K-жүйе*нің O басы арқылы өтетін тузу бойымен қозғалады; Yжәне Y'өстерінің бойына OA және OA' шыбықтар орналастырылады, олар метрдің осы санақ жүйелерінің әрбіреуіндегі эталондары. Енді Y' және Y өстері бірдей түскен кезде сол жақтағы шыбықтың жоғарғы шеті K-жүйенің Yөсінде белгі тастады делік. Осы белгі оң жақтағы шыбықтың жоғарғы шеті болып табылатын A нүктесімен бірдей түсе ала ма екен?



7.4-сурет

Салыстырмалық принцип бұл сұраққа бірден жауап береді. Егер мысалы, бір шыбықтың ұзындығы екіншісінен қысқарақ болып шықты делік, онда қысқарақ болып шыққан көлденең өлшем бойынша бір инерциялық санақ жүйесін екінші жүйеден ажырата алатын болар едік. Бірақ бұл салыстырмалық принципіне қайшы.

Осыдан, денелердің көлденең өлшемінің барлық инерциялық санақ жүйелерінде бірдей болатындығы шығады. Сонымен қатар K'-және *K-жүйе*лерінің санақ бастарын көрсетілгендей түрде таңдап алғанда кез келген нүктенің немесе оқиғаның y' және y координаттарының бірдей түсетіндігін көрсетеді, яғни

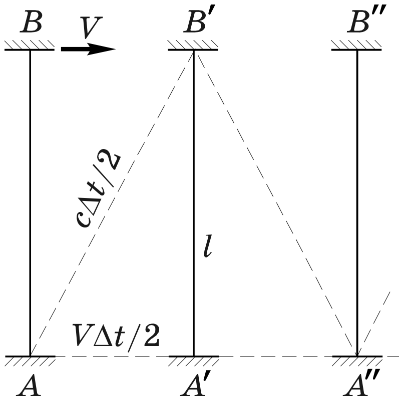
$$y' = y. \tag{7.3}$$

Бұл қатынас координатгардың іздеп отырған түрлендірулерінің бірі болып табылады.

Уакыттың баяулауы

Келесі қарастыратын мәселе – түрліше санақ жүйелерінде уақыттың өтуін салыстыру. Уақыт сағаттармен өлшенеді, ал сағат қандай да бір периодтық процесс пайдаланылатын кез келген құрал. Сондықтан да салыстырмалылық теориясында инерциялық санақ жүйелерінде барлық жағынан бірдей болатын сағаттардың жүрістерін салыстыру қабылданған.

Бұл мәселені шешудің ең қарапайым жолы: ойша қойылған (жалпы мүмкін болатын) тәжірибенің көмегіне сүйену. Бұл үшін *жарық сағатын* - екі ұшында айналар орналасқан және олардың арасында қысқа жарық импульсы «жүгіріп» жүретін шыбықты алайық. Мұндай сағаттың периоды жарық импульсінің шыбықтың белгілі бір шетіне екі рет жетіп үлгеретін уақыт интервалына тең болады.



7.5-сурет

Одан әрі бір-біріне қатысты V жылдамдықпен қозғалатын екі инерциялық K' және K-санақ жүйесін алдық делік. AB жарық сағаты K'-жүйеде тыныштықта және оның *К-жүйе*ге қатысты қозғалысы бағытына перпендикуляр орналасқан болсын (10.5-сурет). Енді осы сағаттың жүрісін екі санақ жүйесінде де: K' және $Қ$ бақылайық. K'-жүйеде сағат қозғалмайды, оның периоды:

$$\Delta t_0 = 2l/c$$

мұндағы, $l-$ айналардың ара қашықтығы, $c -$жарық жылдамдығы.

Сағат *К-жүйе*ге қатысты қозғалыста болса да, айналардың арақашықтығы l, себебі денелердің көлденең өлшемдері барлық инерциялық санақ жүйелерінде бірдей. Бірақ жарық импульсінің бұл жүйедегі жолы басқаша, сынық-сынық болады (7.5-сурет): жарық импульсі төменгі айнадан жоғары айнаға жетем дегенше, ол оңға қарай қайсыбір қашықтыққа ығысып үлгереді және т.с.с. Сондықтан жарық импульсы төменгі айнаға қайтып оралу үшін *К-жүйе*де үлкенірек қашықтықты өтеді, бірақ сол $c -$жылдамдықпен таралады. Демек сағат тыныштықта тұрғанға қарағанда жарық *бұған* көбірек уақыт жібереді. Сондықтан қозғалыстағы сағаттың периоды ұзарады – ол K жүйеге қатысты *баяуырақ* жүреді.

Қозғалыстағы сағаттың *К-жүйе*дегі периодын $\Delta t -$арқылы белгілейік. $AB'A'$ тікбұрышты үшбұрыштан (7.5-сурет $l^2 + (V\Delta t/2)^2 = (c\Delta t/2)^2$ екендігі шығады, бұдан:

$$\Delta t = (2l/c)/\sqrt{1-(V/c)^2}.$$

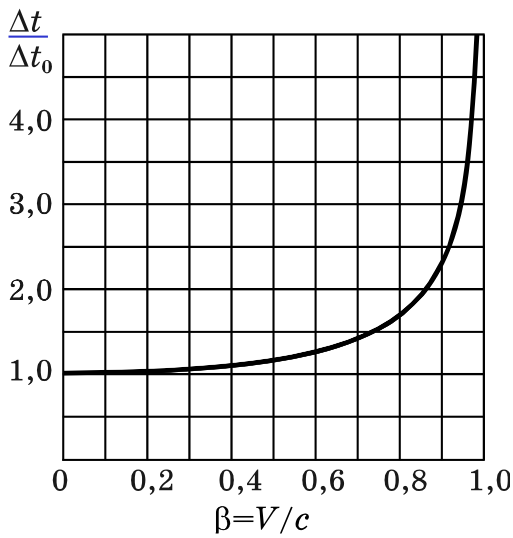
$2l/c = \Delta t_0$ болатындықтан:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (7.4)$$

мұндағы, $\beta = V/c, V$ – сағаттың *К-жүйе*дегі жылдамдығы.

Осыдан, $\Delta t > \Delta t_0$, яғни, бір ғана сағат әртүрлі инерциялық санақ жүйелерінде түрліше жүреді; ол өзі салыстырмалы қозғалыста болатын санақ жүйесінде өзі тыныштықта тұрған санақ жүйесіне қарағанда баяуырақ қозғалады. Басқаша сөзбен айтканда, *қозғалыстағы сағат тыныштықтағы сағатқа қарағанда баяуырақ қозғалады.* Бұл құбылыс *уақыттың баяулауы* деп аталады.

Қандай да бір процесс өтіп жатқан денемен бірге қозғалып келе жатқан сағаттың көрсететін уақытын осы дененің *меншікті уақыты* деп аталады. Оны Δt_0 деп белгілейді. (7.4)-тен, меншікті уақыт ең қысқа уақыт екені көрініп тұр. Осы процестің басқа санақ жүйесіндегі Δt *уақыты* осы жүйенің процесс өтіп жатқан денеге қатысты $V -$ жылдамдығына тәуелді болады. Бұл тәуелділік жарық жылдамдығына жақын болатын $V -$жылдамдықтар кезінде күштірек білінеді (7.6-сурет). Сонымен, классикалық механикадағыдай емес, уақыттың өтуі шынында да қозғалыс күйіне тәуелді әлемдік бірдей уақыт деген жоқ, екі оқиғаның арасындағы уақыт аралығы деген түсінік салыстырмалы болып шықты. Берілген екі окиғаның арасында осыншама секунд уақыт өтті деген тоқтам тек бұл тоқтамның қай санақ жүйесіне қатысты айтылып отырғаны белгілі болса ғана мағынаға ие болады.



7.6-сурет

Классикалық механиканың абсолюттік уакыты салыстырмалылық теорияда жуықталған түсінікке айналады, ол тек кіші (жарық *жыл*-дамдығымен салыстырғанда) жылдамдықтармен қозғалған санақ жүйелерінде ғана орындалады. Мұндай қорытынды (7.4)-тен шығады және оны 7.6-суреттен көруге болады: $V \ll c$ кезінде $\Delta t \approx \Delta t_0$.

Сонымен келесі іргелі қорытынды шығады: *сағатпен бірге қозғалып келе жатқан санақ жүйесінде уақыт баяуырақ өтеді* (бақылаушыға қатысты сағаттың қозғалысы). Мұндай тұжырымды бақылаушыға қатысты қозғалыстағы санақ жүйелерінде өтіп жатқан барлық процестерге де таратуға болады.

Заңды түрде сұрақ туады: *К*-санақ жүйесіне қатысты қозғалыстағы *К'-жүйе*дегі бақылаушы өзінің сағатының *К*-санақ жүйесіндегі сағатпен салыстырғанда баяуырақ жүретінін байқай ала ма? Жоқ, байқамайды. Бұл тікелей салыстырмалылық принципінен шығады. Егер жүйедегі бақылаушы да сағатының жүрісінің өз санақ жүйесінде баяулағанын байқаған болса, онда бұл олардың екеуі үшін де, яғни, *К'* және *К*-жүйдегі бақылаушылар үшін инерциалды: санақ жүйелерінің бірінде уақыт өтуінің баяулағанын білдірер еді. Осыдан олар инерциялық санақ жүйелерінің біреуінің екіншісінен айырмашылығы бар деп ұғар еді, ал бұл салыстырмалылық принципіне қайшы.

Осыдан уақыт баяулау эффектілерінің екі ($K-$және $K'-$) санақ жүйелеріне қатысты өзара симметриялы болатындығы шығады. Басқаша айтқанда, егер *К*-санақ жүйесі тарапынан *К'*-санақ жүйесінің сағаты баяулау жүретін болса, онда *К'*-санақ жүйесі тарапынан керісінше, *К-жүйе*нің сағаты баяуырақ жүреді (әрі баяулау мөлшері бірдей болады). Осыдан келесі қорытынды шығады: *уақыттың баяулау құбылысы таза кинематикалық эффект болып табылады.* Ол жарық жылдамдығы инварианттылығының міндетті салдары болып табылады және қозғалыстың әсерінен туатын өзгеріске сағат қасиеттерінің ешқандай қатысы жоқ екендігін көрсетеді.

(7.4) формула тәжірибеде дәлелденіп, Жер атмосферасында мюондар қозғалысының «құпиясын» ашып берді. Мюондар дегеніміз – тұрақсыз бөлшектер, олар орташа есеппен алғанда $2 \cdot 10^{-6}$ с уақыт аралығында өз бетінше басқа бөлшектерге ыдырап кетеді (айтылған уақыт олар тыныштықта немесе өте баяу қозғалатын кезде өлшенген). Мюондар атмосфераның жоғары қабаттарында 20-30 км биіктікте пайда болады. Егер мюондардың өмір сүру уақыты жылдамдыққа тәуелсіз болса, онда олар жарық жылдамдығымен қозғалғанның өзінде де $c \cdot \Delta t = 3.10^{8} \cdot 2 \cdot 10^{-6}$ м $=$ 600 м $-$ денартық жол жүре алмаған болар еді. Бірақ бақылаулар көрсеткендей, мюондардың бірталай саны жер бетіне келіп жетеді.

Мұны қалай түсіндіруге болады? $\Delta t - 2 \cdot 10^{-6}$ с - бұл мюондардың меншікті өмір сүру уақыты, яғни мюондармен бірге қозғалатын сағатпен өлшенген уақыты. Ал жердегі сағатпен өлшенген оның өмір сүру уақыты (7.4) әлдеқайда артық болуы керек (бұл бөлшектердің жылдамдықтары жарық жылдамдығына жақын), ал мұның өзі мюондардың Жер бетіне жете алатындығана күмән тудырмайды.

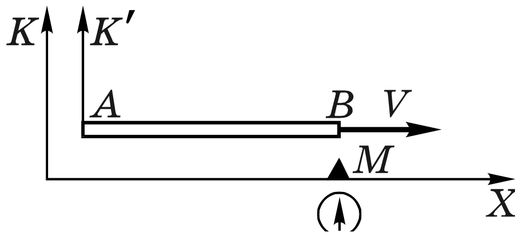
«Сағаттар парадоксы», немесе «егіздер парадоксы» деп аталатын жағдайға да тоқтала кетейік. Бірдей *екі А* және *В* сағаттар болсын, олардың ішінен *А* сағат қайсыбір инерциялық санақ жүйесінде тыныштықта, ал *В* сағаты әуелі *А* сағаттан қашықтап, сосын оған қайтып оралсын. Басында екі сағат та бірдей уақыт көрсетіп тұрған.

А сағат үшін *В сағаты* қозғалыста болып табылады, сондықтан ол баяу жүреді де, қайтып келгеннен кейін *А* сағаттан қалып қойған болып шығады. Ал *В сағат* үшін *А* сағаты қозғалыста, сондықтан қайтып кездескенде ол қалып қалу керек, осыдан қарама-қайшылық пайда болады, міне «парадокс» деген осы.

Бұл *В сағаттың* тарапынан түсінбестік болып тұр: онымен байланысты санақ жүйесі инерциялық болып табылмайды (ол әуелі үдемелі түрде қашықтайды, сосын үдемелі түрде жақындайды), сондықтан бұл жерде тек инерциялық санақ жүйелерінде ғана орындалатын нәтижені пайдалана алмаймыз. Арнайы салыстырмалылық теориясынан тыс болатын деректерге сүйеніп жүргізілген есептеулер үдемелі қозғалыстағы сағат (біздің жағдайымызда *В* сағат) жүрісінің баяулайтындығын көрсетеді, сондықтан да қайтып оралғанда *В* сағат қалыс болады.

Лоренцтік қысқару

AB шыбық K санақ жүйесіне қатысты тұрақты V –жылдамдықпен қозғалатын болсын (7.7-сурет) және оның ұзындығы шыбықпен байланысты K'-санақ жүйесінде l болсын. Шыбықтың *K-жүйе*сіндегі l – ұзындығын анықтау керек. Бұл үшін мынадай ой тәжірибесін жасайық. *K-жүйе*нің *x* өсінде *M* белгіні қояйық та, оның қасына сағатты орналастырайық. Осы сағат бойынша шыбықтың *M* белгі жанынан ұшып өтіп бара жатқан Δt_0 уақытын байқап алайық. Сонда шыбықтың *K-жүйе*дегі іздеп отырған ұзындығы:



7.7-сурет

$$I = V\Delta t_0$$

Бақылаушы үшін шыбықпен байланысты ұшып өту уақыты басқа. Шынында да, ол үшін Δt_0 уақытты көрсеткен сағат V жылдамдықпен қозғалып бара жатыр, демек ол «бөгде» уақытты көрсетіп отыр. Бұл бақылаушы үшін Δt «өз» уақыты (7.4) бойынша артық болу керек.

Бұл уақыт келесі қатынастан табылады:

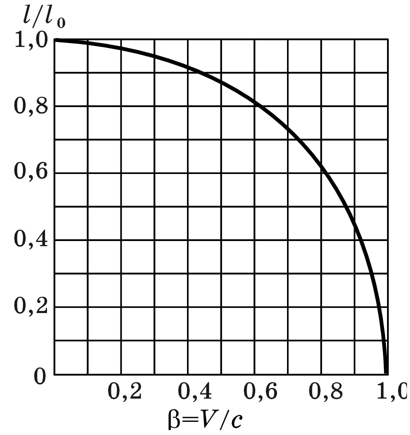
$$l_0 = V\Delta t$$

Осы екі қатынастан (7.4) -ні ескере отырып:

$$l/l_0 = \Delta t_0/\Delta t \ = \sqrt{1-\beta^2}$$

немесе

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2}, \qquad (7.5)$$



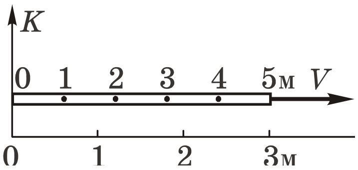
7.8-сурет

мұндағы, $\beta = V \ / $ c. Шыбық тыныштықта тұрған санақ жүйесінде өлшенген ұзындықты *меншікті ұзындық* деп атайды.

Сонымен, қозғалыстағы шыбықтың бойлық ұзындығы оның өзінің меншікті ұзындығынан қысқа болып шықты, яғни, $l < l_0$. Бұл құбылыс *лоренцтік қысқару деп аталады.*

Дененің өзіндік ұзындығы оның ең үлкен ұзындығы. Дене қозғалған кезде оның ұзындығы кемиді. Бұл қарастырылған қысқару тек денелердің бойлық қозғалыс бағытындағы өлшеміне ғана жатады, ал көлденең өлшемдері өзіміз көрсетіп кеткендей, өзгеріссіз қалады. Дененің өзі тынштықта болатын санақ жүйесіндегі пішінімен салыстырғанда қозғалыстағы санақ жүйесіндегі пішіні қозғалыс бағытында сығылыңқы секілді. Қозғалыстағы шыбықтың ұзындығының қысқаруын 7.8-суреттен жақсы тусінуге болады.

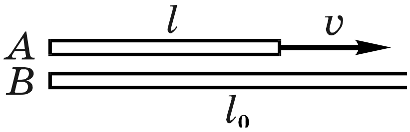
1-мысал. Шыбықтың ұзындығы $l_0 = 5$ м болса, ол бойлай V –жылдамдықпен K-санақ жүйесіне қатысты қозғалады. Осы жылдамдықтың қандай мәнінде K-санақ жүйесіне қатысты шыбықтың ұзындығы $l = 3.0$м тең болады? (7.9-суретте тура осындай жағдай келтірілген.). Осындай қысқаруды бақылау үшін шыбық ұзындығының (7.5) формуласына сәйкес келесі өрнек пайдалынады:



7.9-сурет

$$V = \sqrt{1-(l/l_0)^2} = {}^4\!/_5\, c.$$

2-мысал. A шыбығы B шыбығының қасынан қозғалмайтын K-санақ жүйесінде υ-жылдамдықпен қозғалады. Осындай жағдай 7.10-суретте келтірілген. Екі шыбықтың да меншікті ұзындықтары бірдей - l_0. Енді K-санақ жүйесінде шыбықтың оң және сол жақтағы ұштарының бір-бірімен үйлесетін Δt уақыт аралығын табу керек. A шыбықтың K-санақ жүйеде қозғалғандағы ұзындығы тең: $l = l_0\sqrt{1-(v/c)^2}$, 7.10-суреті бойынша іздеп отырған уақыт аралығы келесі формуламен табылады:



7.10-сурет

$$\Delta t = (l_0 - l)\boldsymbol{v} = \left(1 - \sqrt{(v/c)^2}\right) l_0/v.$$

3-мысал. Екі бөлшек К-жүйеде бір түзудің бойымен бірдей $v = c$ жылдамдықпен қозғалып келе жатып, осы санақ жүйесінде қозғалмайтын нысанаға $\Delta t = 5 \cdot 10^{-9}c$ уақыт аралығында тоқтап қалады. Нысанаға түскенше бөлшектердің арасында қандай меншікті арақашықтық болды? K-санақ жүйесіндегі бөлшектер арасындағы арақашықтық $l = v\Delta t$ тең. Сондықтан іздеп отырған меншікті арақашықтық (7.5) формуласымен анықталады:

$$l_0 = v\Delta t/\sqrt{\left(1-(v/c)\right)^2 = 2\text{м}}\,.$$

Сонымен әртүрлі санақ жүйелерінде бір ғана шыбықтың ұзындығы әртүрлі болып отыр. Басқаша айтқанда *ұзындық* дегеніміз – салыстырмалылық түсінік болып шыққаны, оның тек қарастырылып отырған санақ жүйесіне қатысты ғана мағынасы болады. Дененің ұзындығы метр деген мағына бұл шаманың қай санақ жүйесіне қатысты айтылып отырғанын көрсетеді.

Кіші жылдамдықтар кезінде ($V <<$ c) (10.5) формуладан шығатындай және 7.8-суреттен көріп отырғанымыздай, $l \approx l_0$ және дененің ұзындығы деген түсүнік абсолют сипатта болады.

Дене қозғалған кезде оның ұзындығы кемиді. Уақыттың баяулауы тәрізді *лоренцтік қысқару* да өзара бір-біріне қатысты. Мысалы, егер бір-біріне қатысты қозғалатын және меншікті ұзындықтары бірдей болатын шыбықтарды салыстырсақ, онда әрбір шыбық «үшін» екінші шыбық бірдей қатынаста қысқарақ болады. Егер мұндай заңдылық орын алмаса, онда осы шыбықтармен байланысқан инерциялық санақ жүйелерін бір-бірінен ажырата алар едік, ал бұл болса салыстырмалылық принципке қайшы.

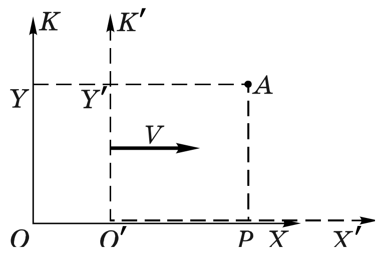
Лоренцтік қысқару да таза кинематикалық эффект болып табылады, яғни қандай да бір деформация тудыратын кернеуліктер денеде пайда болмайды.

Денелердің қозғалыс бағытында қысқаруы да, уақыттың баяулауы да нақты болатын құбылыс, ол бақылаушының санасындағы ауытқулардан туған алдамшы сезім емес. Әртүрлі санақ жүйелерінде алынған денелердің өлшемдерінің мәндері немесе уақыт аралықтары бәрі де тең мәнді болады (олардың барлығы да «дұрыс»). Бұларды түсінудегі қиындық біздің күнделікті өмір тәжірибелерімізден туып отыр, біздің көзімізге түсетін қозғалыстың барлығы да баяу қозғалыстар, сондықтан да бізге ұзындықтар мен уақыт аралықтары өзгеріссіз қалатын секілді, олар абсолютті мәндер секілді болып көрінеді. Ал шын мәнісінде олай емес. Қозғалыс пен тыныштық қаншалықты салыстырмалы болса, ұзындық пен уақыт аралығы түсініктері де соншалықты салыстырмалы.

§ 7.4. Лоренц түрлендірулері

Енді біздің алдымызда аса маңызды – координаттар мен уақыттың түрлендіру формулаларын табу мәселесі тұр (бір ғана оқиғаның түрлі инерциялық санақ жүйелеріндегі координаттары мен уақыт аралықтарын байланыстыратын формулаларды табу).

Галилейдің түрлендірулері жетпей ме? Бірақ бұл түрлендірулер денелердің мөлшерлері олардың қозғалысына тәуелсіз және уақыттың өтуі барлық инерциялық санақ жүйелерінде бірдей болады деген тоқтамға сүйенеді. Өткен параграфта шын мәнінде бұл тоқтамның дұрыс емес екендігін көрдік, яғни уақыттың өтуі мен денелердің ұзындығы санақ жүйесіне тәуелді болғаны. Осының бәрі Эйнштейн постулаттарының тікелей салдары. Сондықтан бізге Галилейдің түрлендірулерінен бас тартпай, оны дәлірек айтқанда түрлендірулердің жалпы жағдайы деп қарастыруға тура келді. Біз біріншіден уақыттың баяулауын және лоренцтік қықаруды (яғни, ақыры келіп Эйнштейн постулаттарының салдары болып шығатын), екіншіден баяу қозғалыстарға қатысты шектік жағдайда Галилейдің түрлендірулеріне өтетін түрлендіру формулаларын табуды іздестірейік. Енді екі *К* және *К-′* инерциялық санақ жүйелерін қарастырамыз. *К’*− жүйе *К-жүйе*ге қатысты $\boldsymbol{V}-$ жылдамдықпен қозғалатын болсын. Екі жүйенің де координат өстерін 7.11-суретте көрсетілгендей түрде бағыттаймыз: x және x' өстері бірдей түседі және $\boldsymbol{V}-$ векторға параллель бағытталған, ал yжәне y' өстері бір-біріне параллель. Екі жүйенің де түрлі нүктелеріне сағаттарды



7.11-сурет

қойып, оларды синхрондаймыз – *К-жүйе*нің сағаттарын бір бөлек *К'-жүйе*нің сағаттарын - бір бөлек. Ақыры, уақыттың санақ басы ретінде екі жүйе үшін де олардың координаттарының O және O' бастары бірдей түсетін кезді аламыз $(t = t' = 0)$. Енді t −уақытта *(К-жүйе*де) координаттары $x\,, y$ болатын нүктеде қайсыбір A оқиға өтсін делік, мысалы шам жансын. Біздің мақсатымыз осы оқиғаның *К'*-жүйедегі $x',\ y'$ координаттары мен t' уақыт мезетін табу. y' координатына келсек оның жөні бөлек, жоғарыда айтқандай $y' = y$. Сондықтан оқиғаның x' координатын табуға кірісеміз. x' координаты *К'*-жүйеде тыныштықта болатын *O'P* кесіндінің меншікті ұзындығын сипаттайды (7.10-сурет). Ал кесіндінің *К-жүйе*дегі ұзындығы (онда *t* уақыт мезетінде есептелінеді) $x - Vt$ болады. Бұл ұзындықтардың арасындағы байланыс (7.5) формуламен беріледі, ол бойынша $x\ -\ Vt\ = \sqrt{1-\beta^2}$. Осыдан

$$x' = (1 - Vt)/\sqrt{1-\beta^2}. \qquad (7.6)$$

Екінші жағынан, *x* координаты *К*-жүйесінде қозғалмайтын *OP* кесіндінің меншікті ұзындығын сипаттайды. Бұл кесіндіні өлшеу *t'* мезетте жүргізілетін *К'*-жүйедегі ұзындығы $x' + Vt'$ болады. Тағы да (7.5) ескере отырып, $x' + Vt' == x\sqrt{1-\beta^2}$ аламыз, осыдан

$$x = (x' + Vt')/\sqrt{1-\beta^2} \qquad (7.6a)$$

Алынған формулалар *A* оқиғаның екі санақ жүйелеріндегі *t және* t' уақыт мезеттерінің арасындағы байланысты да тағайындауға *x'* мүкіндік береді. Бұл үшін (7.6) *және* (7.6а) формулалардан x немесе x' координатын шығарып тастау керек сонда:

$$t' = (t - xV/c^2)/\sqrt{1-\beta^2}\,; t = (t' + x'V/c^2)/\sqrt{1-\beta^2}\,. \qquad (7.7)$$

(7.3), (7.6), (7.6а) және (7.7) ***формулалар Лоренц түрлендірулері*** деп аталады. Олар салыстырмалылық теориясында маңызды рөл атқарады. Осы формулалар бойынша бір инерциялық санақ жүйесінен екіншісіне өткен кезде кез келген оқиғаның координаттары мен уақыттары түрлендіріледі. Сонымен, *К-жүйе*ден *К'*-жүйеге өткен кездегі Лоренц түрлендірулерінің түрі:

$$x' = \frac{x-Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad y' = y; \quad t' = \frac{t-xV/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (7.8)$$

керісінше, *К'* жүйеден *К* жүйеге өткен кезде:

$$x = \frac{x'+V't}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad y = y'; \quad t = \frac{t'+x'V/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (7.9)$$

мұндағы, $\beta = V/c$,V $-K$-$'$ жүйенің *К-жүйе*ге қатысты жылдамдығы.

Бірден (7.8) *және* (7.9) формулалар симметриялы (түрі бірдей). Бұл екі санақ жүйесінің де тең баламалылығын көрсетеді (алдындағы таңбалардың әртүрлі болуы тек жүйелердің бір-біріне қатысты қарама-қарсы бағытта қозғалуын ғана білдіреді).

Лоренц түрлендірулерінің (7.1) Галилей түрлендірулерінен айырмашылығы үлкен, бірақ соңғы түрлендірулер (7.8) *және* (7.9)-дан оларға $c = \infty$ мәнін қою арқылы алынған. Бұл нені білдіреді?

Өткен параграфтың алдында Галилейдің түрлендірулерінің негізінде сағаттарды лезде таралатын сигналдың көмегімен синхрондаймыз дегенбіз.

Осыдан Лоренц түрлендірулеріндегі шамалар сағаттарды синхрондауда пайдаланатын сигналдардың жылдамдығы ролін атқарады дей аламыз.

Егер осы жылдамдық шексіз үлкен *болса,* онда Галилей түрлендірулері, ал жарық жылдамдығына тең болса онда Лоренц түрлендірулері шығады. Сонымен, сағаттарды синхрондау үшін Лоренц түрлендірулерінің негізінде жатқан шектік мәнге ие болатын жарық сигналдарын пайдалану жатады.

Лоренц түрлендірулерінің тамаша қасиеті олардың $V \ll c$ шартында Галилей түрлендірулеріне өтетіндігі* (7.1). Сонымен, шектік жағдайда салыстырмалылық теориясының *және* классикалық механиканың түрлендіру заңдары бірдей. Салыстырмалылық теория Галилейдің түрлендірулерін жоққа шығармай, оларды түрлендірудің дұрыс дербес жағдайы ретінде қосып алатындығын білдіреді. Осымен салыстырмалылық теория мен классикалық механика арасындағы жалпы өзара байланысты көруге болады, яғни салыстырмалылық теорияның зандары мен қатынастары классикалық механиканың зандары мен қатынастарына баяу жылдамдықтардың шектік жағдайында өтетін болады.

Одан әрі, Лоренцтің түрлендірулерінде түбір астындағы өрнек теріс мәнге ие болады да, формулалар физикалық мағынасын жоғалтады. Бұл – денелердің вакуумде жарық жылдамдығынан артық жылдамдықпен қозғала алмайтындығын көрсетеді. Жарық жылдамдығымен қозғалатын санақ жүйесін де пайдалануға болмайды; себебі түбір астындағы өрнектер нөлге айналып, формулалар физикалық мағынасын жоғалтады. Мысалы, жарық жылдамдығымен қозғалатын фотонды ешқандай санақ жүйесімен байланыстыруға болмайды. Немесе, басқаша айтсақ *фотонның тыныштықта бола алатын санақ жүйесі табиғатта жоқ* деген сөз.

Кеңістіктік координаттың параметрі уақыттың түрлендіру формуласына енеді. Бұл аса манызды жағдай кеңістік пен уақыттың арасындағы ажырамас тығыз байланысты көрсетеді. Салыстырмалылық теориясы уақыт пен кеңістіктің бірлігін көрсетті, сөйтіп барлық физикалық құбылыстар өте алатын кеңістік-уақыттық төртөлшемдік контимуум туралы түсінік қалыптасты.

---

* мұнан басқа да шарт болуы қажет: $x/c \ll t$, яғни жарық сигналдарының таралу уақыттары бізге қажет уақыт аралықтарымен салыстырғанда әлдеқайда аз.

§ 7.5. Лоренц түрлендірулерінің салдары

Бірмезеттік түсінігі

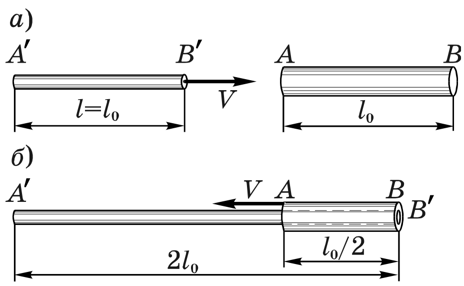
K жүйеде қайсыбір $A_1(x_1, y_1, t_1)$ және $(A_2(x_2, y_2, t_2)$ екі оқиғалар өтіп жатсын. X *өсі* бойымен 7.10-суретте көрсетілгендей V −жылдамдықпен қозғалып келе жатқан жүйеде осы оқиғалардың арасындағы уақыт интервалын табайық. Уақытты түрлендірудің (7.8) формуласы бойынша табамыз:

$$t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1) - (x_2 - x_1)V/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (7.10)$$

Осыдан *К-жүйе*де $t_2 = t_1$ бірмезеттік болып табылатын оқиғалар K'-жүйеде бірмезеттік болмайтындығы $(t_2' - t_1') \neq 0$ анықталды. Тек x координатының мәні бірдей болатын жағдайда ғана *К-жүйе*де екі оқиға да бірмезгілде жүріп жататын ерекше жағдай туады (y координаты әр-түрлі болуы мүмкін).

Сонымен, *бірмезеттік – салыстырмалы түсінік* бір жүйеде бірмезеттік болып табылатын оқиғалар, жалпы алғанда, басқа санақ жүйесінде бірмезеттік болмайды. Оқиғалардың бірмезгілділігі жайлы сөз болғанда міндетті түрде қай санақ жүйесі жайлы сөз болып отырғанын анық көрсету жөн, немесе онда бірмезеттік түсінігі өзінің бар мағынасынан айырылады. Ал керісінше болған жағдайларда қателіктер мен «парадокстар» тууы мүмкін.

Мысал. Түтікше мен шыбықтың «парадоксы». K-санақ жүйесінде орналасқан ұзындығы l_0, қозғалмайтын AB түтігі арқылы меншікті ұзындығы $2l_0$ болатын $A'B'$ шыбығы ұшып өтеді. K−санақ жүйесінде шыбықтың жылдамдығы түтіктің ұзындығы $l = l_0$ (7.12, а-сурет) тең және шыбықтың қайсы-бірмезгілде түгел өзінің ұзындығымен түтікке сиып кететін жағдайына сәйкес болады. Алайда шыбықпен салыстырғанда түтік Лоренц қысқаруына екі еселеп ұшырайды (7.12,б-сурет), сондықтан шыбықтың ұзындығы $-2l_0$ түтікке (түтіктің ұзындығы $l_0/2$) симайды. Осы жағдай үшін «парадокс» немесе қарама-қайшылық туа ма жоқ па? Қарама-қайшылық жоқ, не себебтен? Осы сұрақты түтікке қатысты шешетін болсақ, онда ұшып бара жатқан шыбықтың ұштары түтіктің ұштарымен бір мезгілде сәйкестенеді. Енді осы сұрақты шыбыққа қатысты шешетін болсақ, онда олардың бір-бірінің ұштарының сәйкестенуі (A мен A', B мен B') бір мезгілде болмайды, бірінші B мен B' (7.12,б-сурет), соңынан белгілі бір уақыт өткеннен кейін A мен A' ұштары сәйкеседі.

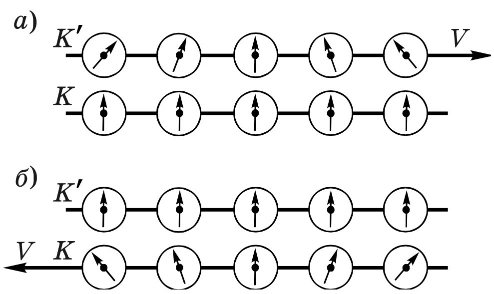


7.12-сурет

Бірмезеттіктің салыстырмалылығынан, *К'*− жүйеде x' өсінің бойында орналастырылған және өзара синхрондалған сағаттардың *К -ж*үйеде түрліше уақыттарды көрсететіндігі шығады. Шынында да, ықшамдылық үшін екі санақ жүйесінің де O және O' санақ бастарының бірдей түсетін және осы нүктелердегі сағаттардың бірдей $t = t' = 0$ уақытты көрсетіп жаткан мезетті алайық. Ұзындықтың *К-жүйе*де координаты xболатын нүктеде *К-жүйе*нің сағаты осы мезетте $t = 0$ уакытты көрсетеді де, ал *К'-жүйе*нің сағаты дәл осы нүктеде баска t' уақытты көрсетеді. Шынында да, уакыттың (7.8) түрлендіру формуласы бойынша:

$$t' = -xV/c^2\sqrt{1-\beta^2}\ ;$$

Осыдан, $t = 0$ уақытта *(К-жүйе*де) жүйенің сағаттары x координатқа тәуелді болатын басқа уакыттарды көрсетеді *(жергілікті уақыт деп* аталады). Бұл 7.13,а-суретте көрсетілген. K'-жүйесіне қатысты, инерциялық санақ жүйелерінің бір-бірімен тең баламалылығы бойынша керісінше болады (7.13, б-сурет). Одан әрі (7.10) формуладан *К-жүйе*дегі бірмезгілді оқиғалар үшін $t_2' - t_1'$ айырымының таңбасы $-(x_2 - x_1)V$ өрнектің таңбасымен анықталады. Демек әртүрлі санақ жүйелерінде *(*V жылдамдықтың әртүрлі мәндері кезінде) $t_2' - t_1'$ айырымы тек модульдері бойынша ғана емес, таңбалары жағынан да түрлі болады. Бұл жағдай $(A_1(x_1, y_1, t_1)$ және $(A_2(x_2, y_2, t_2)$ екі оқиғалардың да өту реті түрлі болатындығын білдіреді (тура да, кері де бола алады).



7.13-сурет

Осы айтылғандар себеп-салдар байланысы бар оқиғаларға жатпайды. Мұндай оқиғалардың өту реттілігі (себеп салдар) барлық санақ жүйелерінде бірдей. Келесі мысалдар аркылы осы тұжырымдарға көз жеткізуге болады.

Мысал. Атылу $-(A_1(x_1, y_1, t_1)$ оғын және оқтың нысанаға тиюі - $(A_2(x_2, y_2, t_2))$ екі оқиға, осы екі оқиға да x өсінде өтетін болсын. *К*-санақ жүйесінде $t_2' > t_1'$ оқтың жылдамдығы v және анықтық үшін $x_2 > x_1$ пен ұзындық $x_2 > x_1 = v(t_2 - t_1)$ тең болсын. Осы теңдікті (7.10) формулаға қойғаннан кейін:

$$t_2' - t_1' = (t_2 - t_1)(1 - vV/c^2)/\sqrt{1-\beta^2}$$

Алымының екінші дөңгелек жакшасындағы шама аркашанда $V <$ с болатындығына байланысты оң болады (тіптен $v =$ с болатын кезде де). Осыдан, егер $t_2 > t_1$ болса, онда $t_2' > t_1'$, яғни, себеп-салдар болып байланысқан оқиғалардың өтуі барлық инерциялық санақ жүйелерінде бірдей.

Лоренцтік қысқару

K'-санақ жүйесінде тыныштықтағы шыбықты X$'$ өсінің бойына, яғни осы санақ жүйенің *К*-жүйеге қатысты қозғалысы бағытында орналастырамыз. K'-жүйеде шыбықтың ұзындығы $l_0 = x_2' - x_1$ болсын (меншікті ұзынды).

К-жүйеде өзіне қатысты салыстырмалы қозғалыста болатын шыбықтың ұзындығы оның *бір ғана уақыт мезетінде* ($(t_2 = t_1)$) алынған ұштарының x_2 және x_1 координаттарының арасындағы l –қашықтық ретінде *анықталады.* (7.8) Лоренц түрлендіруін пайдаланып, x' және x координаттары үшін:

$$l_0 = x_2' - x'_1 = (x_2 - x_1)/\sqrt{1-\beta^2} = l/\sqrt{1-\beta^2}$$

осыдан

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2}. \tag{7.11}$$

Сонымен, қозғалыстағы шыбықтың ұзындығы оның меншікті $l_0 -$ ұзындығынан кіші болып шығады және әртүрлі инерциалдың санақ жүйелерінде оның өз мәні болады. Бұл нәтиже осыған дейін алынған (7.5) мәнімен толық үйлесімді.

Уақыттың біртектілігінің салыстырмалалық салдарынан берілген шыбықтың ұзындығының салыстырмалылығы осы ұзындықтың өзінің анықтамасынан шығады. Осындай түсінік кез келген дененің пішініне де жатады, яғни кез келген инерциялық санақ жүйесіңдегі қозғалыс бағытында дененің мөлшерлері әртүрлі болады.

Процестердің ұзақтылығы

K' жүйесінің координаты x' нүктесінде қайсыбір процесс өтіп жатсын, осы жүйедегі оның ұзақтылығы $\Delta t_0 = t_2' - t_1'$ (процестің меншікті уақыты). Осы процестің ұзақтылығын $\Delta t = t_2 - t_1$ *К-жүйе*де анықтайық; *К'*-жүйе оған қатысты қозғалыста. Осы мақсатпен уақыт үшін Лоренц түрлендіруін пайдаланамыз. Бұл процесс *К'*-жүйенің берілген x' нүктесінде өтетін болғандықтан (7.9) формуласын пайдаланған ыңғайлы:

$$t_2 - t_1 = (t_2' - t_1')/\sqrt{1-\beta^2}\,,$$

немесе

$$\Delta t = \Delta t_0/\sqrt{1-\beta^2}\,. \tag{7.12}$$

Осыдан, бір ғана процестің ұзақтылығы әртүрлі инерциялық санақ жүйелерінде түрлі болады. *К-жүйе*де ол ұзағырақ ($\Delta t > \Delta t_0$), демек, бұл жүйеде *К'*-жүйеге қарағанда процесс баяуырақ өтеді. Яғни, әртүрлі инерциялық санақ жүйелерінде бір ғана сағаттың жүрісін алынған нәтижемен салыстырғанда (7.4) формуламен бірдей түседі.

Интервал

Салыстырмалылық теория кеңістіктік пен уақыттық аралықтарының салыстырмалылығын келтіре отырып, жалпы абсолюттік шамалардың барлығын жоққа шығармайды. Ал шындығында іс тура керісінше болып шығады. Салыстырмалылық теорияның алдына қойған негізгі мәселесі, инерциялық санақ жүйелеріне тәуелсіз болатын шамаларды (заңдарды) табу.

Осындай шамалардың біріне өзара әрекеттесулердің таралуының вакуумдегі жарық жылдамдығына тең болатын универсал жылдамдық жатады. 1-ші және 2-ші оқиғалардың арасындағы екінші аса маңызды инварианттық шама *интервал* болып табылады, және оның квадраты келесі өрнекпен анықталады:

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = \mathrm{inv} \tag{7.13}$$

мұндағы, t_{12} – оқиғалар арасындағы уақыт аралығы, l_{12} – осы екі оқиға өтіп жатқан нүктелердің арақашықтығы

$$(l_{12}^2 = x_{12}^2 + y_{12}^2 + z_{12}^2).$$

Интервалдың инварианттылығына оны *К*-және *К*□-жүйелерінде тікелей есептеулер арқылы көз жеткізуге болады. (7.8) Лоренц түрлендірулерін пайдаланып және $y_{12}' = y_{12}$ және $z_{12}' = z_{12}$ екендігін ескере отырып жазамыз:

$$c^2 t_{12}'^2 - x_{12}'^2 = c^2 \frac{\left(t_{12} - \frac{x_{12}V}{c^2}\right)^2}{1-\beta^2} - \frac{x_{12} - V{t_{12}}^2}{1-\beta^2} = c^2 t_{12}^2 - x_{12}^2.$$

Сонымен интервал шынында да инварианттық шама болып табылады. Басқаша айтканда, «екі оқиға s интервалмен берілген» деген тоқтам абсолюттік сипатта болады − ол барлық инерциялық санақ жүйелерінде де орындалады. Интервалдың инварианттылығы салыстырмалылық теориясында аса маңызды рөл атқарады және көптеген мәселелерді талдаумен шешу кезінде өте тиімді құралдардың біріне айналады.

Интервалдың түрлері. Кеңістікті-уақыттық интервалда қандай құраушы басым рөл атқаратын болса, кеңістіктік пе, әлде уақытық па, соған байланысты интервалдар кеңістік тәрізді ($l_{12} > ct_{12}$), уақыт тәрізді ($ct_{12} > l_{12}$) болып екіге бөлінеді. Интервалдардың осы екі түрімен қатар оның үшінші түрі де бар, ол – жарық тәрізді интервал: $ct_{12} = l_{12}$.

Егер екі оқиғаның арасындағы интервал кеңістік тәрізді болса, онда екі оқиғада бір мезгілде өте алатын *К'*− санақ жүйесін табуға болады: $t_{12}' = 0$

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = -l_{12}'^2 \,.$$

Егер интервал уақыт тәрізді болса, онда екі оқиға да бір нүктеде өте алатын *К'*− санақ жүйесін табуға болады $l_{12}'^2 = 0$:

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 \,.$$

Кеңістік тәрізді интервалдар кезінде $l_{12} > ct_{12}$, яғни ешбір санақ жүйесінде оқиғалар бір-біріне ешқандай әсер ете алмайды, оқиғалар арасындағы байланыс шектік c – жылдамдықпен атқарылатын кезде де дәл осындай жағдай туады.

Ал $l_{12} < ct_{12}$ болатын уақыт тәрізді немесе жарық тәрізді интервалдар үшін жағдай басқаша. Демек, уақыт тәрізді немесе жарық тәрізді интервалдар мен бөлінген оқиғалар бір-бірімен себеп-салдарлы байланыста бола алады.

Жылдамдықты түрлендіру

*К-жүйе*де X, Y жазықтығында проекциялары υ_x және υ_y болатын бөлшектер $\mathbf{v}$ –жылдамдықпен қозғалатын болсын. (7.8) Лоренц түрлендірулерінің көмегімен осы жылдамдықтың 7.11-суретте көрсетілгендей, $\mathbf{V}$ –жылдадықпен қозғалатын *К'-жүйе*сіндегі υ'_x және υ'_y проекцияларын табайық. Ол үшін есептеуді келесі үлгімен орындайық:

$$\upsilon'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'/\mathrm{d}t},$$

$$\upsilon'_y = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}y'/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'/\mathrm{d}t}.$$

(7.8) өрнегін x', y' пен t' үшін t –уақыт бойынша дифференциалдап, алынған нәтижелерді υ'_x және υ'_y формуларына қойып, шамалы түрлендірулерді жасағаннан кейін келесі өрнекті жазамыз:

$$\upsilon'_x = \frac{\upsilon_x - V}{1 - \upsilon_x V/c^2}, \qquad \upsilon'_y = \frac{\upsilon_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \upsilon_y V/c^2}, \tag{7.14}$$

мұндағы, $\beta = V/c$. Осыдан бөлшектің K' жүйедегі жылдамдығы:

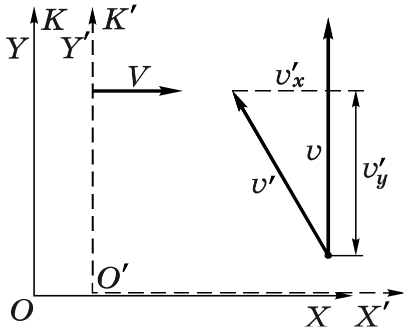
$$\upsilon_x = \sqrt{{\upsilon_x}'^2 + {\upsilon_y}'^2} = \frac{(\upsilon_x - V)^2 + \upsilon_y^2(1-\beta^2)}{1 - \upsilon_x V/c^2}. \tag{7.15}$$

Бұл формулалар *жылдамдықтың релятивистік түрлену заңын* береді. Кіші жылдамдықтар кезінде, яғни $(V \ll c)$ мен $\upsilon \ll c$ олар классикалық механиканың жылдамдықтарына түрленеді:

$$\upsilon'_x = \upsilon_x - V; \qquad \upsilon'_y = \upsilon_y$$

немесе векторлық түрде:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$$



7.14-сурет

Соңғы формуланың тек ньютондық жуықталуда ғана орындалатындығына назар аударайық; релятивистік жағдайда оның мағынасы жоқ – бұл жерде жылдадықтарды қосудың мұндай қарапайым заңы орындалмайды. Оған келесі қарапайым мысалмен-ақ көз жеткізуге болады. *K-жүйеде* $\mathbf{v}$ −жылдамдық векторы x өсіне перпендикуляр болсын, яғни оның проекциялары $\upsilon_x = 0$ және $\upsilon_y = 0$. Сонда (7.14) бойынша осы бөлшектің жылдамдығының *K'*− жүйедегі проекциялары:

$$\upsilon'_x = -V; \quad \upsilon'_y = \upsilon_y\sqrt{1-\beta^2}, \tag{7.16}$$

Біздің жағдайда ($\mathbf{v} \perp$ X өсіне) *K′*-жүйесіне өткенде жылдамдықтың υ'_y −проекциясы азаяды, осыдан $\mathbf{v}' \neq \mathbf{v} - \mathbf{V}$ болатындығы анық (7. 14-сурет).

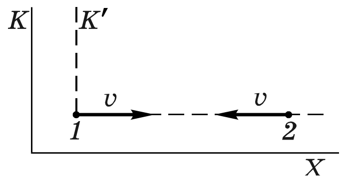
Түрлендіру формуласын (7.14) пайдаланудың тағы бір мысалын келтірейік.

Мысал. Енді *K-жүйеде* екі бөлшектің түзу сызықтың бойымен бірдей υ −жылдамдықпен бір-біріне қарсы қозғалып келе жатқан жағдайын қарастырайық. Табу керек: 1) бір бөлшектің екінші бөлшекке қатысты салыстырмалылық жылдамдығы қандай болады? 2) осы жүйедегі бөлшектердің жақындау жылдамдықтары қандай?

Ең алдымен осы жылдамдықтардың мағынасын анықтайық.

1. Жақындау жылдамдығы дегеніміз – осы санақ жүйесіндегі бөлшектер арасындағы арақашықтықтың өзгеру (азаю) жылдамдығы. Біздің жағдайымыз үшін ол 2υ −ге тең және бұл жылдамдық жарық жылдамдығынан да артық болуы мүмкін, оның ешқандай қайшылығы жоқ.

2. Бөлшектердің салыстырмалылық жылдамдықтары туралы түсінікке тоқталсақ, бөлшектердің біреуін, мысалы, x өсінің оң бағытында қозғалып келе жатқан бөлшекпен *K′*-санақ жүйесін байланыстырамыз (7.15-сурет). Сонда біздің мақсатымыз екінші бөлшектің осы санақ жүйесіндегі жылдамдығын табу. (7.14) формулаға $\upsilon_x = -\upsilon$ жылдамдықтың проекциясын және $V = \upsilon$, қойып келесі өрнекті аламыз:



7.15-сурет

$$\upsilon'_x = -\frac{2\upsilon}{1+(\upsilon/c)^2}.$$

Минус таңбасы екі бөлшектің де K'-санақ жүйесіңде X −өсінің теріс бағытында қозғалатындығын көрсетеді. Екі бөлшекте максимал мүмкін $\upsilon \approx$ c жылдамдықпен қозғалғанның өзінде де $\upsilon'_x -$ жылдамдық $c -$ жарық жылдамдығынан артық бола алмайды (мұны тікелей соңғы формуладан көруге болады).

Ақыры, жылдамдықтарды түрлендірудің релятивистік формулаларының $c -$ жарық жылдамдығының барлық инерциялық санақ жүйелерінде өзгеріссіз қалатындығын білдіретін Эйнштейннің екінші постулатына сәйкестілігін тікелей тексерейік. *K-жүйесінде* c −векторының c_x ажәне c_y −проекциялары болсын делік, сонда $c^2 = c_x^2 + c_y^2$. Енді (7.15) формуласын пайдаланайық, ол үшін тек ондағы түбір астындағы өрнекті келесі жолмен түрлендірсе болғаны:

$$c_x^2 - 2c_xV + V^2 + (c^2 - c_x^2)\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = \left(c - \frac{c_xV}{c}\right)^2$$

Осыдан кейн $\upsilon' = c$ екендігіне көз жеткізу қиын емес. Бұл жерде әрине *К'*− жүйедегі c' −вектордың бағыты жалпы алғанда басқаша болатындығы анық.

Есептер

7.1. **Ұзындықты түрлендіру.** *К-жүйе*де OX −өсіне $\vartheta -$ бұрышпен бағытталған, ұзындығы l =100 *см* шыбық тыныштықта тұр (7.16-сурет). *К-жүйе*ге қатысты OX −өсі бойымен $V = c/2$ жылдамдықпен қозғалып келе жаткан *К'-жүйе*де оның $l -$ ұзындығын және сәйкес $\vartheta -$ бұрышын табу керек.

Шығару жолы. Шыбықтың K' жүйедегі ұзындығы:

$$l' = \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2} = \sqrt{(\Delta x)^2(1 - \beta^2) + (\Delta y)^2},$$

мұндағы, $\beta = V/c$. $\Delta x = l\cos\vartheta$мен $\Delta y = l\sin\vartheta$ екендігін ескере отырып, келесі өрнекті табамыз:

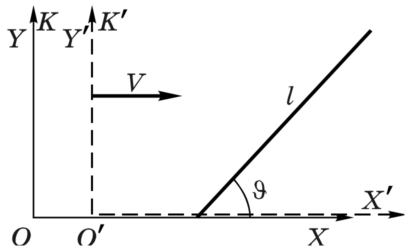
$$l' = l\sqrt{1 - \beta^2\cos 2\vartheta} = 94\text{см}.$$

K' жүйедегі ϑ −бұрышты тангенс арқылы табамыз:

$$\text{tg}\vartheta' = \frac{\Delta y'}{\Delta x'} = \frac{\Delta y}{\Delta x\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\text{tg}\vartheta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1{,}155.$$

Осыдан $\vartheta' = 49°$. *К'*-жүйесінің жылдамдығының бағытында алынған нәтижелер тәуелсіз болатындығына назар аудару керек, ол тек x −өсінің оң немесе теріс бағытымен қозғалуы мүмкін.

7.2. Меншікті ұзындық. Шыбық сызғыштың бойымен қайсы-бір тұрақты жылдамдықпен қозғалады. Егер шыбықтың екі басын да сызғышпен байланысты санақ жүйесінде бірмезгілде өлшесе, онда санақтар айырымы сызғыш бойынша $\Delta x_1 = 4{,}0$м болып шығады. Ал егер оның екі шетін сызғышпен байланысты санақ жүйесінде бір мезгілде өлшеп алса, онда сызғыш бойындағы оның ұзындығы $\Delta x_1 = 9{,}0$ м .



7.16-сурет

1) Шыбықтың меншікті ұзындығы $-l_0$;

2) шыбықтың сызғышқа қатысты жылдамдығын табу керек.

Шығарылу жолы. Шыбықтың меншікті ұзындығы және Δx_1 −шамалары келесі формулалармен байланыста:

$$\Delta x_1 = l_0\sqrt{1 - \beta^2},$$

мұндағы, $\beta -$ шыбықтың жылдамдығы (жарық жылдамдығы бірліктерімен).

Енді l_0 −шыбықтың меншікті ұзындығы – шыбықпен байланысты санақ жүйесінде өлшенген қозғалыстағы сызғыштың ұзындық бөлігі. Δx −сызғыштың өзінің ұзындығы. Сондықтан

$$l_0 = \Delta x_2\sqrt{1-\beta^2}$$

Осы формулалардан:

$$\beta = \sqrt{1-\Delta x_1/\Delta x_2} \approx 0{,}75$$

$$l_0 = \sqrt{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2} = 6{,}0\text{м}$$

Немесе

$$\upsilon \approx 0,75\text{c}.$$

7.3. **Уақытты түрлендіру.** Екі тұрақсыз бөлшек *К-жүйеде* сызықты, бір бағытта $\upsilon = 0990c$ бірдей жылдамдықпен қозғалып келеді. Осы санақ жүйесінде бөлшектер арасындағы арақышықтық $l = 12$м. Осы бөлшектермен байланысқан K'-жүйеде бір мезгілде осы екі бөлшек бірдей ыдырап кетеді. Табу керек: 1) бастапқы K-жүйедегі ыдырау моментінің екі бөлшек арасындағы уақыт аралығын; 2) K-жүйеде қай бөлшек кешірек ыдырады?

Шығару жолы. 1. Алдында қозғалып келе жатқан бөлшекті 1-ші оқиға деп, артқы бөлшекті 2-ші оқиға деп белгілейік. Сонда Лоренцтің (7.9) теңдеулеріне сәйкес уақыт үшін келесі өрнекті жазамыз:

$$t_1 - t_2 - \frac{(x_1' - x_2')\upsilon/c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$$

Мұндағы $t'_1 = t'_2$ (шарт бойынша). $(x_1' - x_2') -$ айырымы бөлшектер арасындағы меншікті ұзындық. (7.5) теңдеуіне сай $l_0 = l/\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}$. Сондықтан:

$$t_1 - t_2 = \frac{l\upsilon/c^2}{1-(\upsilon/c)^2} = 2\text{мкс}.$$

2. $t_1 - t_2 > 0$ болса, онда $t_1 > t_2$ болады; басқаша айтсақ, алдында қозғалып келе жатқан бөлшек соңғымен салыстырғанда кешіктеу ыдырайды.

Ескерту: осындай есептерді басқаша да шығаруға болады: (7.8) теңдеуіне сай:

$$t_1' - t_2' = \frac{(t_1 - t_2) - (x_1 - x_2)\upsilon/c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} = 0$$

Осыдан

$$t_1 - t_2 = (x_1 - x_2)\frac{\upsilon}{c^2} = l\upsilon/c^2.$$

Осы жолмен шығарылған есептің нәтижесі алдыңғы есеппен салыстырғанда қате болып шығады. $(x_1 - x_2) -$ айырымын $l -$мен айырбастай алмаймыз, себебі x_1 мен x_2 ыдыраудың (оқиғаның) координаттары. K-жүйеде уақыттың әртүрлі моментінде ыдыраған бөлшек арасындағы арақашықтық $-l$ анықтама бойынша бір мезгілде белгіленген бөлшектердің координаттарының айырымына тең.

7.4. Егер осы санақ жүйесіндегі оның өмір сүру уақыты $\Delta t = 3{,}0$ мкс, ал меншікті уақыт өмірі $\Delta t_0 = 2{,}2$ мкс. болса, *К-жүйеде* пайда болғанынан бастап ыдырап кеткенге дейінгі тұрақсыз бөлшектің ұшып өткен қашықтығын табу керек.

Шығару жолы. (7.12) формуланы пайдаланып, бөлшектің жылдамдығын және іздеп отырған қашықтықты табамыз:

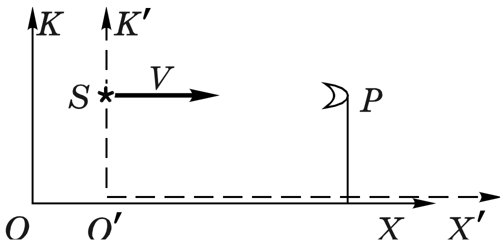
$$l = \Delta t \cdot V = \Delta tc\sqrt{1-(\Delta t_0/\Delta t)^2} = 0{,}6\text{км}.$$

Интервалдың инварианттылығын пайдалану арқылы есепті басқа жолмен де шығаруға болады:

$$c^2(\Delta t_0)^2 = c^2(\Delta t)^2 - l^2,$$

мұнда теңдіктің сол жағындағы интервалдың квадраты бөлшектің өзімен байланысты санақ жүйесінде жазылған, ал оң жағында интервалдың квадраты *К-жүйеде* жазылған. Осыдан сол бұрынғы *l* мәнін табуға болады.

7.5. Доплер эффектісі. *К-жүйеде* жарық сигналдарын қабылдайтын қозғалмайтын P қабылдаушы орналасқан (7.17-сурет). Оған V −жыламдықпен S −жарық сигналдарының көзі жақындап келеді.



7.17-сурет

Жарық көзімен байланысты санақ жүйесінен ν_0 − меншікті жиілікпен периодты түрде сигналдар шығарылады. Сигналдарды қабылдағыш P осы сигналдарды қандай ν − жиіліктермен кабылайды?

Шығару жолы. Жарық көзімен байланысты *К′-жүйеде* қатарласа шығарылан екі сигналдың (импульстердің) уақыт аралығы келесі өрнекпен сипатталады: $T_0 = 1/\nu_0$. Бұл санақ жүйесі V −жылдадықпен қозғалатындықтан *К-жүйедегі* оған сәйкес уакыт аралығы (7.12) бойынша артығырақ:

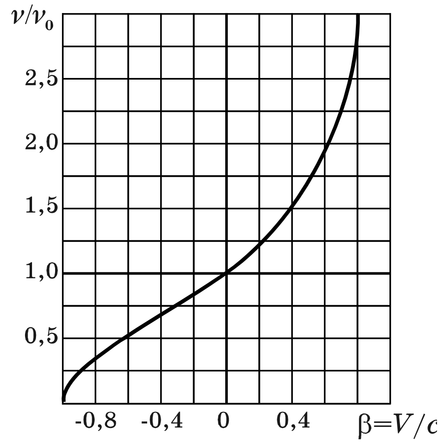
$$T = T_0/\sqrt{1-\beta^2}, \beta = V/c.$$

К-жүйедегі қатарлас екі импульстің арақашықтығы:

$$\lambda = cT - VT = (c - V)T = (c = V)\frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (1)$$

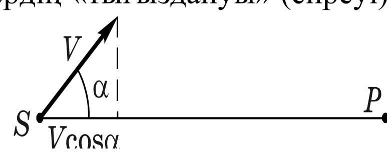
сондықтан қабылдағыш кабылдайтын жиілік $\nu = c/\lambda$, немесе:

$$\nu = \nu_0\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta} \quad (2)$$



7.18-сурет

Егер қабылдағышқа жарық көзі жақындап келе жатса (біздің жағдайымыздай), онда $\nu > \nu_0$, ал егер алыстап бара жатса, онда $\nu < \nu_0$ (бұл жағдайда β −таңбасы қарама-қарсыға өзгереді, 7.18-сурет). ν −жиілік үшін алынған формула Доплердің *бойлық эффектісі деп* аталады. Осы келтірілген мысалдардан Доплер эффектісінің екі құбылыстардың салдарларынан туатыны көрініп тұр: қозғалыстағы сағат жүрісінің баяулануы (2) формуладағы бөлшекті бөліміндегі түбір мен импульстердің «тығыздануы» (сиреуі).



7.19-сурет

Қабылдағыш пен жарық көзінің арасындағы арақашықтықтың өзгерісіне байланысты импульстер сирейді немесе тығызданады (формула (1) –де келтірген).

Классикалық физикада уақыттың абсолюттілігіне байланысты, яғни релятивистік емес жағдай үшін $T = T_0$, сондықтан Доплер эффектісінің формуласында

$\sqrt{1-\beta^2}$ — түбір жоқ. Оның орнында бір тұрады:

$$v = v_0/(1-\beta) \approx v_0(1+V/c).$$

Жалпы жағдайды қарастырайық: *K-жүйеде* жарық көзінің **V** векторлық жылдамдығы бакылау сызығымен α — бұрыш жасайды Бұл жағдайда (1) формулада V — шамасын $V\,cos\alpha$ — шамасымен алмастырса жеткілікті. Сонда:

$$v = v_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\alpha}$$

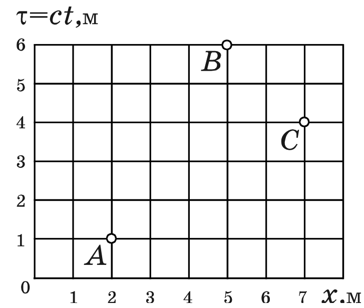
мысалы, $\alpha = \pi/2$ болғанда *Доплердің көлденең эффектісі* бақыланады:

$$v = v_0\sqrt{1-\beta^2}$$

Осы кезде Р– қабылдағышпен бақыланатын v — жиілік меншікті v_0 —жиіліктен әрқашан да кіші болады.

7.6. Оқиғалар арасындағы қатынастар. 7.20-суретте *кеңістік-уақыт диаграммасы* өрнектелген. Бұл диаграмманың әрбір нүктесі *(әлемдік нүкте)* қайсыбір оқиғаны, оның координатын, өту уақытын сипаттайды. *A, B* және C әлемдік нүктелерге сәйкес келетін үш оқиғаны қарастырайық. Бұл оқиғалардың арасындағы қатынастар төменде көрсетілген:

Ескерту: интервалдың инварианттылығын пайдалану керек.



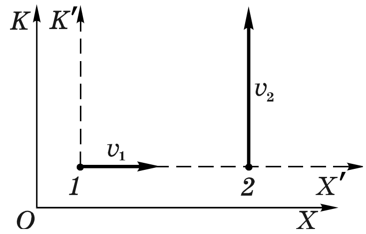
7.20-сурет

Уақиғалар жұбы	Интервал түрі	Меншікті		Себеп-салдар байланысы
		Уақыт $c\Delta t_0$, м	Ұзындық Δx_0, м	
AB	Уақыттәріздес	4	-	A ⟶B
AC	Кеңістіктіктәріздес	-	4	жоқ
BC	Жарықтәріздес	0	0	C⟶ B

7.7. Екі бөлшек *K*-жүйеде бір-біріне тік бұрыш жасай қозғалып келеді: бірінші бөлшектің жылдамдығы $-v_1$, екіншінікі $-v_2$. Бір бөлшектің екінші бөлшекке қатысты жылдамдығын табу керек.

Шығару жолы. *K*-жүйенің координаттар өстерін 7.21-суретте көрсетілгендей етіп аламыз. 1-ші бөлшекпен *K′*-жүйені байланыстырамыз, сонда 2-ші бөлшектің осы жүйедегі жылдамдығы іздеп отырған жыламдығымыз болады. (7.15) формуланың көмегімен $V = v_1$ және $v_x = 0$ деп алып, табамыз:

$$v_2' = \sqrt{v_{2x}'^2 + v_{2y}'^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - (v_1 v_2/c)^2}$$



7.21-сурет

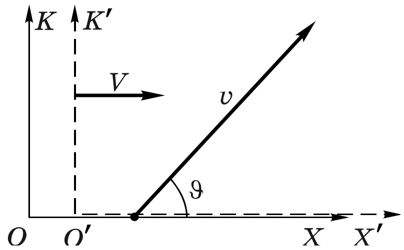
Жылдамдықтарды қосудың классикалық заны бойынша:

$$v_2' = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

7.8. Жылдамдықтың бағытын түрлендіру. Бөлшек *К-жүйе*де X –өсіне ϑ –бұрыш жасай **v** –жылдамдықпен қозғалады. 7.22-суреттегідей **V** –жылдамдықпен қозғалып бара жатқан бөлшектің K'-жүйеге сәйкес ϑ' –бұрышын табу керек.

*Шығару жолы. К-жүйе*де **v**-вектордың проекциялары υ_x және υ_y болсын. Сонда ϑ –бұрыш үшін қатынасты жазуға болады:

$$tg\vartheta = \upsilon_y/\upsilon_x.$$



7.22-сурет

K' -жүйеде (7.14) формуланы ескерсек, онда:

$$tg\vartheta' = \upsilon'_y/\upsilon'_x = \upsilon_y\sqrt{1-\beta^2}/(\upsilon_x - V).$$

$\upsilon_x = \upsilon\cos\vartheta$ пен $\upsilon_y = \upsilon\sin\vartheta$ өрнектерін осы теңдеуге қойғаннан кейін, теңдеудің түрі өзгереді:

$$tg\vartheta' = \frac{\sin\vartheta\sqrt{1-\beta^2}}{\cos\vartheta - \frac{V}{\upsilon}}$$

Осы формулалардан жылдамдықтар үшін бұрыштарды түрлендіру заңы кесінділерге қарағанда бөлек болатыны көрініп тұр.

7.9. *К-жүйе*де X –өсіне параллель бағытталған шыбық осы жүйеде υ – жылдамдықпен Y– өсінің оң бағытында қозғалады. *К-жүйе*ге қатысты оның X –өсінің оң бағытында V –жылдамдықпен қозғалатын *К'*– жүйеде осы шыбық пен X' –өсінің арасындағы ϑ – бұрышты табу керек. Xжәне X'-өстері бірдей түседі, ал Y –және Y' –өстері бір-біріне параллель.

Шығару жолы. Қайсыбір уақыт мезетінде шыбықтың ұштары *К* жүйеде X өсімен бірдей түссін делік, *К-жүйе*де бірмезгілде өтетін бұл екі оқиға K' -жүйеде бірмезгілдік болмайды; (7.10) бойынша олар арасына уақыт салып өтеді:

$$\Delta t' = \Delta x V/c^2\sqrt{1-\beta^2},$$

мұндағы, Δx –шыбықтың меншікті ұзындығы. Осы уақыт ішінде шыбықтың оң жақ ұшы сол жағының $\Delta y' = \upsilon'_y\Delta t'$ –шамасынан «биігірек» болады, мұнда $\upsilon'_y = \upsilon\sqrt{1-\beta^2}$ (7.16- формуланы қара). Сонымен *К'-жүйе*сінде берілген шыбық сағат тіліне қарсы бағытта қайсыбір ϑ'- бұрышқа бұрылады және оны келесі формуламен табуға болады:

$$tg\vartheta' = \frac{\Delta y'}{\Delta x'} = \beta\upsilon/c\sqrt{1-\beta^2}$$

мұндағы, $\Delta x' = \Delta x\sqrt{1-\beta^2}$ – шыбықтың *К'-жүйе*дегі X' –өсіне проекциясы, $\beta = Vc$.

7.10. Үдеудің релятивистік түрлендірілуі. *К-жүйе*де бөлшек **v** –жылдамдықпен және **a** –үдеумен қозғалады. *К*-жүйенің X –өсі бойымен оған қатысты **V** –жылдамдықпен қозғалатын *К'*-жүйедегі осы бөлшектің үдеуін табу керек. *К-жүйе*нің келесі өстер бойымен бөлшектер қозғалысын қарастыру керек: 1). X; 2). Y.

Шығару жолы. 1. Бөлшектің үдеуінің *К'-жүйе*дегі әрбір проекциясын жазамыз:

$$a'_x = \frac{\mathrm{d}\upsilon'_x}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}\upsilon'_x}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\mathrm{d}t'/\mathrm{d}t}$$

(7.14) пен (7.8) формулаларын пайдаланып, дифференциалдағаннан кейін:

$$a'_x = \frac{\left(1-\beta^2\right)^{\frac{3}{2}}}{(1-\beta\upsilon_x/c)^3}a_x, \qquad a'_y = 0.$$

2. Осыған ұқсас есептеулер келесі нәтижелерге әкеледі:

$$a'_x = 0 \qquad\qquad a'_y = (1-\beta^2)a_y$$

Бұл формулаларда $\beta = V/c$.

8-тарау

Релятивистік динамика

§ 8.1. Релятивистік импульс

Импульс туралы ньютон механикасынан екі негізгі қағиданы есімізге түсірейік:

1) Бөлшектің импульсі $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ арқылы анықталады, мұндағы m −бөлшектің массасы өзінің жылдамдығынан тәуелсіз деп саналады;

2) Тұйықталған бөлшектер жүйесінің импульсі кез келген инерциялық санақ жүйелерінде уақыт бойынша сақталады деп алынады.

Енді релятивистік динамикаға оралайық. Релятивті бөлшектерден құралған тұйықталған жүйе үшін ньютонның импульс сақталу заңы орындалмайды. Оны жәй қарапайым мысалдар арқылы қарастыруға болады. Осыдан альтернатива туады: не Ньютонның импульске берген анықтамасынан бас тарту немесе осы шаманың сақталу заңына бағынатындығы.

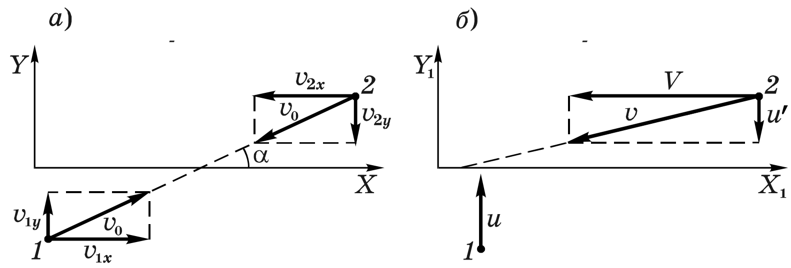
Салыстырмалылық теориясында іргелі заңдардың біріне сақталу заңдары жататындықтан импульстің сақталу заңын маңызды деп белгілейміз*.

Импульстің сақталу заңы кез келген инерциялық санақ жүйелерінде орындалады деген талап, жылдамдықтың релятивистік түрленуін бір инерциялық санақ жүйесінен басқа инерциялық жүйеге өткенде ескеру бөлшектердің массасының өзінің жылдамдығына тәуелділігі шығады, ал мұның өзі ньютондық механикадан өзгеше, яғни керісінше. Ол үшін абсолютті серпімсіз екі теңдеу арасындағы соқтығысуды қарастырайық – жүйе тұйықталған деп саналады.

Бір кейбір инерциялық *К*-санақ жүйесінде *1-ші* және *2-ші* деп белгіленген *бірдей* екі бөлшек біріне-бірі қарама-қарсы қозғалып келеді, олардың жылдамдықтары бірдей v_0, бірақ Х-өсіне $\alpha-$ бұрыш жасай қозғалады.

---

* Импульсті табудың өзі сол сақталу түсүінігінен шығып отырса, онда импульстің сақталу заңы деген сұрақтың пайда болу табиғаты қандай? Бұл сұраққа жауап беру үшін бөлшекті алайық, ол өзінің қозғалыс барысында басқа бөлшекпен соқтығысады. Ең бірінші соқтығысу үшін осы берілген соқтығысудағы оның импульсын анықтаймыз. Ал келесі соқтығысуда іс басқаша болады, бір бөлшектің импульсын білгендіктен осы заңының анықтамасы бойынша емес енді сақталу заңы табиғат заңының тереңдігіне сай орындалады.



8.1-сурет

(8.1-сурет, а) Осы санақ жүйесінде екі бөлшектің импульстерінің қосындысы сақталады: соқтығысқанға дейін және кейін ол нөлге тең (симметрия заңының салдарынан құрастырырылған бөлшек қозғалмайтын болып шығады).

Енді басқа инерциялық санақ жүйесінде осы жағдайларды қарастырайық. Ол үшін екі санақ жүйесін таңдап алайық: K_1-жүйесін $v_{1x}-$ жылдамдықпен қозғалатын оңға қарай жылжитын және K_2 – жүйесін $v_{2x}-$ жылдамдықпен солға қарай қозғалатын (8.1-сурет, *а*). Және 1-ші бөлшек K_1 – жүйесінде және 2-ші бөлшек K_2 –жүйеде тек $Y-$ өсінің бойымен ғана қозғалады. Олардың модуль бойынша $u-$ жылдамдықтары бірдей.

Енді K_1 – санақ жүйесіндегі бөлшектердің соқтығысуын қарастырайық (8.1, *б*-сурет). Мұнда 1-ші бөлшектің жылдамдығы u деп алынсын. Осы санақ жүйесінде бөлшек 2-нің жылдамдығының $y-$тік құраушысын $u'-$ деп белгілеп, табайық. Бұл бөлшек $Y-$өсінің бойымен K_2 – жүйесінде $u-$ жылдамдықпен қозғалып келе жатыр. Және осы K_2 –жүйесімен бірге солға қарай K_1 – жүйесіне қатысты $V-$ жылдамдықпен ауысады. Сондықтан(7.16) теңдеуге сай K_1 – санақ жүйесіндегі 2-ші бөлшектің жылдамдығының y -тік құраушысы тең:

$$u' = u\sqrt{1-(V/c)^2}. \qquad (8.1)$$

K_1 – санақ жүйесінде екі бөлшектің де импульстерінің $y-$ құраушысын келесі түрге келтіреміз: m_1u мен m_2u'. (8.1) сай $u' < u$ олай болса, импульстің сақталу заңы жалпы алғанда ньютондық механиканың тұжырымдамасына үйлеспейді. Шынында да біздің жағдайымыз үшін $m_1 = m_2$ (бөлшектер бірдей) және бөлшектердің қосынды импульстерінің $y-$құраушысы соқтығысқанға дейін нөлден басқаша, ал соқтығысқаннан кейін нөлге тең (құрастырырылған бөлшек тек X$-$өсімен ғана қозғалатын болады).

Енді K_1–санақ жүйесінде де импульстердің сақталу заңының орындалғанын талап етіп көрейік, яғни $m_1u = m_2u'$ болуы керек. (8.1) ескере отырып, келесі өрнекті аламыз:

$$m_2 = m_1/\sqrt{1-(V/c)^2}$$

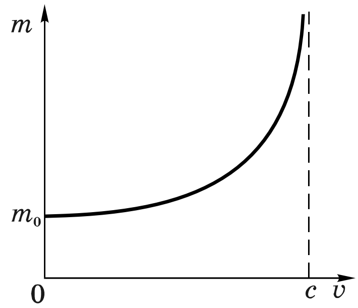
$\alpha \to 0$ мен $u \to 0$ ұмтылғанда m_1- тыныштықтағы бөлшектің массасын көрсетеді (8.1-сурет); Осы массаны m_0- деп белгілеп, *тыныштық* *массасы* деп атайды. Осы шарттарға сай $V -$ жылдамдық 2-ші бөлшектің 1-ші бөлшекке қатысты салыстырмалы жылдамдығына тең. Сондықтан соңғы формуланы қайтадан түрлендіріп басқаша жазуға болады:

$$m = m_0/\sqrt{1-(v/c)^2}, \tag{8.2}$$

мұндағы m - қозғалып келе жатқан бөлшектің «массасы» (ескерте кетеміз екі бөлшекте бірдей). $m -$ шамасын *релятивистік масса* деп атайды.

(8.2) – формуладан релятивистік масса тыныштық массасынан артық және ол бөлшектердің жылдамдығына тәуелді екені көрініп тұр. (8.2-сурет). Басқаша айтқанда *бір бөлшек үшін оның өзінің релятивистік массасы әртүрлі санақ жүйелерінде әртүрлі болып келеді.*

Релятивистік массадан $m_0 -$ *тыныштық массасының айырмашылығы – ол инвариантты шама, яғни басқаша айтқанда барлық санақ жүйелерінде ол бірдей.* Осы себептен бөлшектердің тыныштық массасы осы бөлшектердің сипаттамасы бола алады.



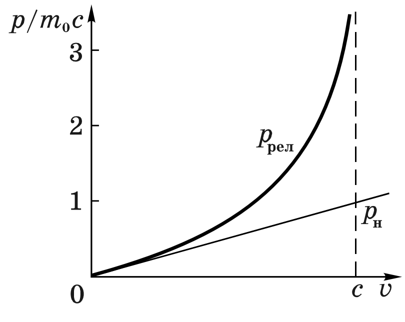
8.2-сурет

Айта кету керек, мұнда біз m деп келесі қатынасты қысқартылған түрде аламыз:$m_0/\sqrt{1-(v/c)^2}$. Алайда алдымызда $m -$ релятивистік массасын да талай қолданатын боламыз. Көптеген тұжырымдарды, есептеулерді, қорытындыларды ықшамдау үшін ғана релятивистік масса түсінігі қолданылады.

Ал m_0 −тыныштық массасын тек жай ғана *масса* деп атап кетеміз. Енді ең соңғы адым жасайық: - релятивистік бөлшектің импульсы үшін оның теңдеуін жазайық. (8.2) ескере отырып, осындай теңдеудің түрі тең:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{8.3}$$

Міне, осы теңдеу бөлшектің *релятивистік импульсі* болып табылады. Тәжірибелерден алынған нәтижелер осы тұжырымды растап дәлелдейді, яғни осындай жолмен анықталған импульс сақталу заңына бағынып, инерциялық санақ жүйелерінен тәуелсіз болады.



8.3-сурет

$v \ll c$ болған жағдайларда (8.3) $\mathbf{p} = m_0\mathbf{v}$ импульстің ньютондық анықтамасы алынады: мұндағы m_0 жылдамдықтан $-v$ тәуелсіз. Салыстыру үшін 8.3-суретте $p_{реал} -$ релятивистік импульс пен $p_н -$ ньютондық импульстердің бөлшектер жылдамдығынан тәуелділік графигі келтірілген.

Екі импульстер арасындағы айырмашылық жарық жылдамдығына жақындаған сайын күшее түседі.

1-мысал. Қазіргі заманғы аса зор үдеткіштер деп протонның жылдамдығы жарық жылдамдығынан тек 0,0003% қана айырмашылығы болатын жылдамдықпен үдейді. Осындай протондардың релятивистік массалары тыныштық массасынынан неше есе айырмашылығы болатынын есептеу керек. (8.2) теңдеуге сай $m/m_0 = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, мұндағы $\beta = \upsilon/c$. β -ның бір шамасынан шамалы ғана айырмашылығы болғандықтан түбір астындағы санды келесі түрде келтіруге болады

$$1-\beta^2 = (1+\beta)(1-\beta) \approx 2(1-\beta).$$

Сонда іздеп отырған қатынас тең болады:

$$m/m_0 \approx 1/\sqrt{2(1-\beta)} \approx 4 \cdot 10^2.$$

2-мысал. Ньютондық импульс релятивистік импульспен салыстырғанда бөлшектің қандай жылдамдығында айырмашылықтары 1%; 10% -ке жететін болады?

Келесі шарттан $\eta = (p - p_н)/p = 1 - \sqrt{1-(\upsilon/c)^2}$ аламыз

$$\upsilon/c = \sqrt{\eta(2-\eta)} = \begin{cases} 0{,}14 \text{ при } \eta = 0{,}01, \\ 0{,}45 \text{ при } \eta = 0{,}10. \end{cases}$$

Релятивистік формуланы импульс үшін пайдаланғанда оның дәлдік гарантиясы $\upsilon/c \ll 0{,}14$ жағдайы үшін − 1%-тен және $\upsilon/c \ll 0{,}45$ үшін-10%-тен кем болмайды.

§ 8.2. Релятивистік динамиканың негізгі теңдеуі

Эйншетйннің салыстырмалалық принципі бойынша табиғаттың барлық зандары инерциялық санақ жүйелеріне қатысты инвариантты болуы тиіс. Басқаша айтқанда заңдардың математикалық тұжырымдамалары барлық санақ жүйелерінде бірдей түрде болады. Бұл жағдай динамика заңдарына жатады.

Бірақ дәлірек қарайтын болсақ ньютон динамикасының негізгі теңдеуі $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ Эйнштейннің салыстырмалылық принципін қанағаттандырмайтын болып шықты, себебі Лоренц түрлендірулері бір инерциалды санақ жүйесінен екіншісіне өткен кезде оған басқа түр берді.

Салыстырмалылық принципін қанағаттандыру үшін динамиканың негізгі теңдеуінің түрі басқа болу керек, тек $\upsilon \ll c$ кезінде ғана ол ньютондық теңдеуге өтуі тиісті. Бұл талапты, яғни салыстырмалалық теорияны канағаттандыратын теңдеуді аламыз:

$$\mathrm{d}\mathbf{p}/\,\mathrm{d}t = \mathbf{F}, \tag{8.4}$$

мұндағы, **F** – бөлшекке әсер ететін күш. Бұл теңдеудің түрі ньютон динамикасының (3.1) негізгі теңдеуімен бірдей түседі. Бірақ мұның физикалық мағынасы басқа: сол жақта (8.3) формуламен анықталатын релятивистік импульстің уақыт бойынша туындысы тұр. (8.3)-ті (8.4)-ке койып, соңғы теңдеуді келесі түрде жазамыз:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) = \mathbf{F} \tag{8.5}$$

Осы теңдеу *релятивистік динамиканың негізігі теңдеуі* болып табылады. Динамиканың негізгі теңдеуі міне осындай түрде ғана еркін бөлшектің импульсының сақталуын береді және баяу қозғалыстар кезінде ($v \ll c$) ньютон динамикасының негізгі теңдеуінің түрін қабылдайды

$$(m\mathbf{a} = \mathbf{F}).$$

Сонымен қатар, динамика теңдеуі міне осындай түрде ғана Лоренц түрлендірулеріне қатысты инвариантты болады. Демек Эйнштейннің салыстырмалылық принципін қанағаттандырады. Тағы да салыстырмалылық теориясында $\mathbf{F}$ күштің түрліше[*] инерциялық санақ жүйелеріне қатысты инвариантты болмайтындығын айта кету керек.

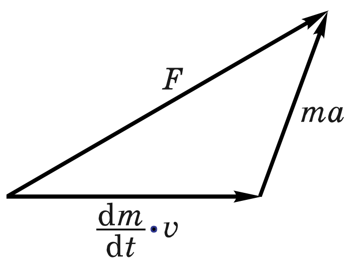
Релятивистік динамиканың негізгі теңдеуінен мынандай күтпеген қортынды шығады: бөлшектің $\mathbf{a}$ – үдеу векторы жалпы алғанда бағыты бойынша күшпен бірдей түспейді. Мұны көрсету үшін (8.5)-ті мына түрде жазайық

$$\mathrm{d}\,(m\mathbf{v})\;/\;\mathrm{d}t = \mathbf{F},$$

мұндағы, m - бөлшектің релятивистік массасы. Уақыт бойынша дифференциалдап, келесі өрнекті аламыз:

$$(\mathrm{d}m/\mathrm{d}t)\mathbf{v} + m(\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t) = \mathbf{F} \tag{8.6}$$

Бұл өрнек 8.4-суретте график түрінде көрсетілген. Сөйтіп, шынындада $\mathbf{a}$ – үдеу векторы жалпы алғанда $\mathbf{F}$ күш векторына коллинеар емес. $\mathbf{a}$ – үдеу бағыты жағынан $\mathbf{F}$ вектормен тек екі жағдайда ғана бірдей түседі:



8.4-сурет

1) $\mathbf{F} \perp \mathbf{v}$ (көлденең күш); осы кезде жылдамдық векторы $\mathbf{v}$ модулі жағынан өзгермейді, яғни $v = \mathrm{const}$, ал (8.5) теңдеу түрін қабылдайды:

$$m_0\mathbf{a}/\sqrt{1-(v/c)^2 = \mathbf{F}}$$

осыдан үдеу:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{F}/m_0)\sqrt{1-(v/c)^2}$$

[*] Ньютондық механикада күштер абсолютті, ал салыстырмалылық теорияда жарық санақ жүйесіне қатысты вектордың бағытына перпендикуляр күштердің проекциялары әртүрлі жүйелерде әртүрлі болады. Осы проекциялар берілген моментте тыныштықта жатқан бөлшектер жүйесінде өзінің еңүлкен мәніне ие болады: $F'_x = F_x$, $F'_y = F_y\sqrt{1-(v/c)^2}$.

2) $\mathbf{F}||\mathbf{v}$ (бойлық күш). Бұл жағдайда (8.5) теңдеуді скаляр түрінде жазуға болады; оның сол жағын уақыт бойынша дифференциалдап, аламыз:

$$\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}+\frac{m_0\upsilon^2/c^2}{(1-(\upsilon/c)^2)^{3/2}}\right)\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}=F$$

осыдан үдеу (векторлық түрде):

$$\mathbf{a}=(\mathbf{F}/m_0)(1-(\upsilon/c)^2)^{3/2}$$

Екі жағдайда да бірдей **F** күш пен **v** – жылдамдық кезінде, көлденең күш бөлшекке бойлық күшке қарағанда көбірек үдеу береді.

Егер $\mathbf{p}(t)$ релятивистік импульстың уақытқа тәуелділік түрі белгілі болса, онда релятивистік динамиканың негізгі теңдеуі бөлшекке әсер ететін **F** күшінің заңын таба алады. Сонымен қатар осы теңдеу арқылы, егер әсер етуші күш пен бастапқы шарттар, яғни бөлшектің бастапқы мезеттегі υ_0 – жылдамдығы мен оның $\mathbf{r}_0$ – қалпы белгілі болса, онда бөлшектің $\mathbf{r}(t)$ –қозғалыс заңын табуға мүмкіндік береді.

(8.5) теңдеудің қолданылуына мысал ретінде 8.1-8.3 есептер келтірілген.

§ 8.3. Масса мен энергияның өзәра байланыс заңы

Релятивистік бөлшектердің кинетикалық энергиясы

Бұл шаманы классикалық механикадағы тәрізді әдіспен, яғни өсімшесі бөлшекке әсер ететін күштің жұмысына тең болатын шама ретінде анықтаймыз. Әуелі **F** күштің әсерінен $\mathrm{d}\mathbf{r}=\mathbf{v}\mathrm{d}t$ элементар орын ауыстыратын бөлшектің кинетикалық энергиясының $\mathrm{d}K$ өсімшесін табамыз:

$$\mathrm{d}K=\mathbf{F}\mathbf{v}\mathrm{d}t$$

Релятивистік динамиканың (8.4) негізгі теңдеуіне сай $\mathbf{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}(m\mathbf{v})=\mathrm{d}m\mathbf{v}+m\mathrm{d}\mathbf{v}$, мұндағы m – релятивистік масса. Сондықтан

$$\mathrm{d}K=\mathbf{v}(\mathrm{d}m\cdot\mathbf{v}+m\mathrm{d}\mathbf{v})=\upsilon^2\mathrm{d}m+m\upsilon\mathrm{d}\upsilon$$

мұнда $\mathbf{v}\mathrm{d}\mathbf{v}=\upsilon\mathrm{d}\upsilon$ екендігі ескерілген. Бұл өрнекті массаның жылдамдыққа тәуелділігінің (8.2) формуласын пайдалана отырып, ықшамдауға болады. Осы формуланы квадраттап, келесі түрге келтіреміз:

$$m^2c^2=m^2\upsilon^2+m_0^2c^2$$

Осы өрнекті m және с шамаларының тұрақты екенін ескере отырып, дифференциалдаймыз:

$$2mc^2\mathrm{d}m = 2mv^2\mathrm{d}m + 2m^2v\mathrm{d}v$$

Егер енді осы теңдікті $2m$ бөлсек, онда оның оң жағы $\mathrm{d}K$ өрнекпен бірдей түседі. Осыдан:

$$\mathrm{d}K = c^2\mathrm{d}m \tag{8.7}$$

Сонымен бөлшектің кинетикалық энергиясының өсімшесі оның релятивистік массасының өсімшесіне тең және тыныштықтағы бөлшектің кинетикалық энергиясы нөлге, ал оның массасы $m = m_0$ тыныштық массасына тең болып шығады. Сондықтан (8. 7)-і интегралдап аламыз:

$$K = (m - m_0)c^2 \tag{8.8}$$

немесе

$$K = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right), \tag{8.9}$$

мұндағы, $\beta = v/c$. Міне, осы бөлшектің *релятивистік кинетикалық энергиясының өрнегі* болып табылады. Оның классикалық $m_0v^2/2$ өрнектен күшті айырмашылығы бар. Енді осы өрнектің кіші жылдамдықтар кезінде ($\beta \ll 1$) классикалық өрнекке өтетіндігін көрсетейік. Бұл үшін Ньютонның биномының формуласын пайдаланамыз, ол бойынша:

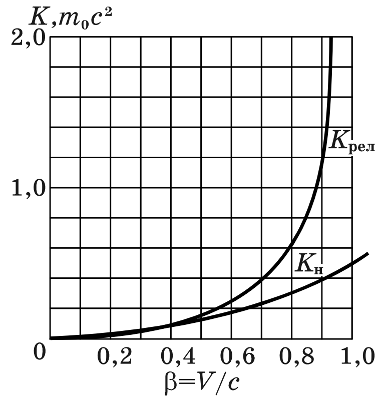
$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = (1-\beta^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \cdots$$

$\beta \ll 1$ кезінде осы қатардың алғашқы екі мүшесімен шектелуге болады, сонда

$$K = m_0c^2\beta^2/2 = m_0v^2/2$$

Сонымен үлкен жылдамдықтар кезінде бөлшектің кинетикалық энергиясы $m_0v^2/2$ өрнектен ерекше болатын (8.9) формуламен анықталады (8.9)-ды $mv^2/2$ түрінде жазуға болмайтындығына назар аударайық, мұндағы *m* – релятивистік масса.

8.5-суретте $K_{рел}$ –релятивистік және $K_{н}$ – классикалық кинетикалық энергиялардың β –ға тәуелділігінің графиктері келтірілген. Олардың арасындағы айырмашылық жарық жылдамдығымен шамалас жылдамдықтар аумағына да жақсы білінеді.



8.5-сурет

Мысал. Тыныштық массасы *m* бөлшектің жылдамдығын 0,6-дан 0,8с-ке дейін арттыру үшін қандай жұмыс атқару керек? Алынған нәтижені классикалық формуламен есептелген нәтижемен салыстыру керек.

Шығару жолы. Іздеп отырған жұмысымыз (8.9) формулаға сай болады:

$$A = K_2 - K_1 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}\right) = 0{,}42m_0c^2.$$

Осы жұмыс классикалық формула бойынша:

$$A = \frac{m_0(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2)}{2} = 0{,}14m_0c^2$$

Нәтижелердің айырмашылығы айтарлықтай.

Масса мен энергияның өзара байланысы

(8.7) формуладан бөлшектің, кинетикалық энергиясының, өсімшесінің, оның, релятивистік массасының өсімшесіне пропорционал болатындығы шығады:

$$mc^2 = m_0c^2 + K, \qquad (8.8')$$

мұндағы, m дененің немесе бөлшектің релятивистік массасы. K – бөлшектің кинетикалық энергиясы. Қалған екі құраушысы да энергияға жатады. Бірақ олардың физикалық мағынасы қандай?

Сонымен қатар табиғатта кез келген процестер өтіп жатқан кезде энергияның бір түрлері екінші түрлеріне айналады. Мысалы, соқтығысатын бөлшектердің кинетикалық энергиясы пайда болған бөлшектердің ішкі энергиясына айнала алады. Сондықтан дененің массасы тек оған кинетикалық энергия берген кезде ғана емес, жалпы дененің энергиясының толық қорының кез келген артуы кезінде де артады, және бұл арту энергияның қандай түрінің есебінен болатындығына тәуелсіз.

Осыдан Эйнштейн мынадай іргелі қорытындыға келді. Дененің (немесе денелер жүйесінің) жалпы энергиясы ол энергияның қандай түрінен тұрмасын (кинетикалық, электрлік, химиялық және т.б.) осы дененің масса қатынасымен байланысқан. Бұл энергияны *тыныштық энергиясы* немесе *меншікті энергия* деп атайды:

$$E_0 = m_0c^2. \qquad (8.10)$$

$m_0c^2 + K$ –ың қосындысына тең mc^2 –шамасын дененің (бөлшектің) *толық энергиясы* деп атайды.

Бұл формула табиғатгың *ең іргелі зандарының* бірі – дененің m массасы мен оның *E толық* энергиясының өзара байланысы (пропорционалдығы) заңын өрнектейді. *E толық* энергияға дене сыртқы өрісте болатын кездегі өрістің потенциалдық энергиясының кірмейтінін айта кетелік. (8.10) қатынасты (8.8) формуланы ескере отырып, басқа түрде де жазуға болады. Сонда дененің толық энергиясы:

$$E = mc^2 = m_0c^2 + K. \qquad (8.11)$$

мұндағы, $m_0 -$ дененің тыныштық массасы, $K -$ оның кинетикалық энергиясы. Осыдан тікелей тыныштықтағы дененің де *(К* = 0) энергиясы болатындығы шығады: $E_0 = m_0c^2$.

Сонымен релятивистік механикада дененің инерттілігінің мөлшері (Ньютонның екінші заңында) және гравитациялық әсер мөлшері (бүкіл әлемдік тартылыс заңы) ретінде көрінген дене массасы енді дененің энергия сыйымдылығының мөлшері ретінде де орын тепті. Салыстырмалылық теориясы бойынша тыныштықта тұрған дененің өзінде де энергия қоры – тыныштық энергиясы болады.

Дененің (жүйенің) тыныштық энергиясының өзгеруі эквивалентті түрде оның масса шамасының $\Delta m_0 = \Delta E_0/c^2$ өзгеруімен жүреді және керісінше. Күнделікті макроскопиялық процестерде денелердің массасының өзгерісі тым аз болып, оны өлшеу мүмкін болмайды. Мұны мына мысалдардан көруге болады.

1-мысал. Қаттылық коэффициенті $\varkappa = 1{,}0$Н/см серіппені $\Delta l = 1{,}10$см сығады. Осыкезде серіппе $U = \varkappa(\Delta l)^2/2$ энергия алады. Оның массасының өзгерісі:

$$\Delta m_0 = \frac{U}{c^2} = 0{,}5 \cdot 10^{-16}\text{кг.}$$

2-мысал. Бір литр суды 0-ден 100°С-ге дейін қыздырғанда оған

$$Q = mc_p\Delta t$$

энергия беріледі, мұндағы c_p= 4,2Дж*/ (*г·К*)* – судың жылу сыйымдылығы, Δt – температуралар айырымы. Судың массасының өзгерісі

$$\Delta m_0 = Q/c^2 = 0{,}47 \cdot 10^{-10}\text{кг.}$$

Қарастырылған үш жағдайда да массаның өзгерісі тәжірибе дәлдігінен әлдеқайда алыс жатыр.

Бірақ астрономиялық мысалы, жұлдыздардың сәулеленуімен байланысты құбылыстарда массалардың өзгерісі аса қомақты болады. Бұған мысал ретінде Күн жүйесін алып көз жеткізуге болады.

Мысал. Астрономиялық бақылаулардан белгілі, Күн сәулелерінің Жер бетіне 1 с ішінде 1м^2 ауданға перпендикуляр түскен сәулелерінің әкелетін энергия мөлшері шамамен 1,4.103 кДж*/(*с·м^2*)* болады. Олай болса 1 с ішінде Күннің шығаратын толық энергиясын есептеп шығаруға болады:

$$P = 1{,}4 \cdot 10^3 \cdot 4\pi R^2 = 4 \cdot 10^{26}\text{Дж/с}$$

мұндағы, R – Жерден Күнге дейінгі қашықтық. Демек, Күн секундынақанша масса жоғалтады!

$$\Delta m_0 = \frac{P}{c^2} = 4{,}4 \cdot 10^9\text{кг/с}$$

Бұл Жер масштабында аса зор шама, бірақ Күннің массасымен салыстырғанда ескермеусіз аз шама: $\Delta m_0/m_0 = 2 \cdot 10^{-21}c^{-1}$.

Ядролық физикадағы жағдай тіптен басқаша. Физиканың міне осы саласында тұңғыш рет массаның және энергияның өзара байланыс заңын тәжірибеде тексеру мүмкін болды. Мұның мәнісі ядролық процестер және элементар бөлшектердің бір-біріне түрленуі бөлшектердің өздерінің тыныштық энергияларымен шамалас болатын энергияның зор өзгерістерімен байланысты. Бұл мәселеге алда тоқталамыз.

§ 8.4. Бөлшектің энергиясы мен импульсының арасыдағы байланыс

E энергиясы мен p импульсының әр түрлі санақ жүйелерінде түрліше мәндерге ие болатындығы анық. Бірақ E энергия *мен* p импульстың қайсыбір комбинациясынан тұратын шама инвариант, яғни барлық санақ жүйелерінде де бірдей мәнге ие болады. Бұл шама - $E^2-p^2c^2$. Осыған көз жеткізейік:

$E=mc^2$ мен $p=mv$ формулаларды пайдаланып, келесі өрнекті жазамыз:

$$E^2-p^2c^2=m^2c^2-m^2v^2c^2=\frac{m_0^2c^4}{1-(v/c)^2}[1-(v/c)^2]$$

немесе қысқартқаннан кейін:

$$E^2-p^2c^2=m_0^2c^4 \qquad (8.12)$$

Оң жақтағы $v-$ жылдамдықтың қысқарып кетуі $E^2-p^2c^2-$ шамасының жылдамдыққа демек, санақ жүйесіне $E^2-p^2c^2$ тәуелсіздігін көрсетеді. Басқаша айтқанда, $E^2-p^2c^2$ шамасы шын мәнінде инвариант болып табылады және барлық инерциялық санақ жүйелерінде бір ғана мәнге - $m_0^2c^4$ −тең болады:

$$E^2-p^2c^2=\mathrm{inv} \qquad (8.13)$$

Бұл өте маңызды қортынды: алда көретініміздей, ол көп жағдайларда есептің шешуін жеңілдетеді және талдауларды ықшамдайды. Тағы да жиі кездесетін екі қатынасқа тоқтала кетейік. Біріншісі,

$$\mathbf{p}=\mathrm{m}\mathbf{v}=E\mathbf{v}/c^2, \qquad (8.14)$$

ал екіншісі – бөлшектің импульсі мен оның $K-$ кинетикалық энергиясының арасындағы байланыс; оны (8.12)−ге $E=m_0c^2+K$. Сонда

$$pc=\sqrt{K(K+2m_0c^2)}. \qquad (8.15)$$

Соңғы қатынас $K\ll m_0c^2$ кезінде классикалық $p=\sqrt{2m_0c^2}$ өрнекке айналады, ал $K\gg m_0c^2$ кезінде $p=K/c$ түрін қабылдайды.

Мысал. Электронның тыныштық энергиясын 0,51 МэВ алып,

1) кинетикалық энергиясы тыныштық энергиясына тең болатын электронның импульсін*;

2) импульсі 0,51 МэВ/ с болатын электронның кинетикалық энергиясын (мұндағы с - жарық жылдамдығы) есептеп шығару керек.

1. (8.15) бойынша $K = m_0c^2$кезінде $p = \sqrt{3}m_0c^2$ =0,9 МэВ */с*.

2. Бұл сұраққа да (8.15)-тің көмегімен жауап беруге болады. Ал одан да жеңіл жолы(8. 12)-ні пайдалану:

$$K = E - m_0c^2 = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} - m_0c^2 = 0{,}21\text{МэВ}$$

Тыныштық массасы нөлге тең бөлшектің қасиетіне тоқтала көтейік *(*$m_0 = 0$).

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad p = \frac{m_0v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

Формулаларынан тыныштық массасы $m_0 = 0$ болатын бөлшектің энергиясы мен импульсінің тек сол бөлшек $c-$ жарық жылдамдығымен қозғалатын болса ғана шығады. Соңғы екі формула да 0/0 түріне келеді, бірақ бұл энергия мен импульстің анықталмағандығын көрсетпейді. Бұл екі формула да жылдамдыққа тәуелсіз болып шығады. $p-$ импульс пен $E-$ энергияның арасындағы байланыс (8.14) формуламен беріледі, мұнда $v = c$, яғни

$$p = E/c \tag{8.16}$$

Сонымен салыстырмалылық теория бойынша массасы нөлге тең бөлшек жарық жылдмдығымен қозғалуы тиіс. Бұл қозғалыс мұның алдындағы үдемелі қозғалыстың нәтижесі емес, бұл бөлшектердің бола алатын жалғыз ғана мүмкін күйі болып табылады. Мұндай бөлшектің тоқтауы оның жұтылуымен (жоғалуымен) бірдей. Қазіргі кезде мұндай бөлшектерге фотон мен нейтрино жататыны белгілі.

Импульс пен энергия үшін Лоренц түрлендірулері

Бөлшек *К-жүйе*де $v = \mathrm{d}l/\mathrm{d}t$ жылдамдықпен қозғалатын болсын. (7.13) формуладан элементар интервал тең:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{c^2(\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}l)^2} = c\mathrm{d}t\sqrt{1-(v/c)^2}$$

Осы өрнекті ескере отырып, бөлшектің импульсінің проекцияларын және энергияны мына түрде жазайық:

---

* Релятивистік бөлшектердің импульстері энергия бірліктерімен (с-жарық жылдамдығы) анықталған. Мысалы, энергия МэВ-пен өрнектелсе, онда импульс МэВ/с өрнектеледі. Осындай импульстің өлшем бірлігі біраз есептеулерді жеңілдетеді.

$$p_x = \frac{m_0}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} \frac{c\mathrm{d}x}{c\mathrm{d}t} = m_0 c \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}; \qquad p_y = m_0 c \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}s};$$

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} \frac{c\mathrm{dt}}{c\mathrm{d}t} = m_0 c \frac{\mathrm{c}^2\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}.$$

ds интервалдың m_0 −инварианттылығын бірден p_xжәне p_y −тердің басқа инерциялық санақ жүйесіне өткен кезде dx және dy −*ке* ұқсас түрленетіндігі шығады, яғни x пен y −*ке* ұқсас, ал E энергия $-t-$ а ұқсас, яғни t уақытқа түрленеді. Сонымен келесі теңестірулерді жасауға болады:

$$p_x \leftrightarrow x, \qquad p_y \leftrightarrow y, \qquad E/c^2 \leftrightarrow t$$

Осындай орын ауыстыруларды (7.8) Лоренц түрлендірулерінде жүргізіп, бірден іздеп отырған импульс пен энергия үшін түрлендірулерді аламыз:

$$p_x' = \frac{p_x - EV/c^2}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \; p_y' = p_y, \; E' = \frac{E - p_x V}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \tag{8.17}$$

мұндағы $V - K'$ жүйенің *К-жүйе*ге қатысты жылдамдығы.

Бұл формулалар бөлшектің импульсының проекцияларының және энергияның *К-жүйе*ден *К-'* жүйеге өткен кездегі түрлену зандарын береді.

Релятивистік формулалардың ықшамдырақ жазылу түрлері

Қазіргі кезде (әсіресе, ядролық физика мен элементар бөлшектер физикасында) релятивистік механиканың формулаларын ықшамдырақ етіп жазу қабылданған. Ол үшін келесі қысқарту белгілері енгізілген: 1) mc^2 және pc шамаларын жай ғана m және p деп және сәйкес түрде энергетикалық өлшем бірліктерімен (мысалға, МэВ-*термен)* алынады; 2) барлық жылдамдықтарды жарық жылдамдығы бірліктерімен алып, β −деп белгілейді:

$$\beta = \upsilon/c; \tag{8.18}$$

3) жиі кездесетін $1/\sqrt{1-\beta^2}$ көбейткішті γ −д*еп* белгілейді және оны *лоренцфактор* деп атайды:

$$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}. \tag{8.19}$$

Бұл белгілер формулалардың түрін де, сонымен қатар барлық түрлендірулер мен есептеулерді де қатты ықшамдайды. Релятивистік динамиканың негізгі формулаларының осындай белгілер арқылы жазылуын келтірейік:

(8.3) релятивистік импульс:

$$\mathbf{p} = \frac{m_0\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma m_0\boldsymbol{\beta}; \tag{8.20}$$

кинетикалық (8.9) және толық (8.11) энергиялар:

$$K = m_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) = m_0(\gamma - 1), \tag{8.21}$$

$$E = m_0 + K = m = \gamma m_0; \tag{8.22}$$

энергия мен импульс арасындағы байланыс (8.12)-(8.15):

$$E^2 - p^2 = m_0^2 = \text{inv}, \tag{8.23}$$

$$p = E\boldsymbol{\beta}, \tag{8.24}$$

$$p = \sqrt{K(K + 2m_0)}; \tag{8.25}$$

импульс пен энергия үшін Лоренцтің түрлендірулері (8.17):

$$p'_x = \frac{p_x - \beta E}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma(p_x - \beta E),$$

$$E' = \frac{E - \beta p_x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma(E - \beta p_x). \tag{8.26}$$

§ 8.5. Релятивистік бөлшектер жүйесі

Жүйенің энергиясы мен импульсы

Біз бүгінге дейін тек бөлшектердің қасиеттерін зерттеумен ғана шектеліп келдік. Салыстырмалық теорияда «бір бөлшектің» динамикасын жасаумен салыстырғанда бөлшектер жүйесінің динамикасын тузу қайда күрделі мәселе болып табылды. Бұл жерде бірқатар жалпылама зандықтарды тағайындауға тура келді.

Егер бізге «жүйенің» тұтастай қозғалысы қажет болса, онда жүйедегі ішкі процестерге қарамай және оның кеңістік бойлығын ескермей, жүйені бір ғана материалдық нүкте – бөлшек деп қарастыру қолайлы. Бұл шынында да осылай болатындықтан тұтастай алғанда релятивистік бөлшектер жүйесін E $-$*толық* энергиямен $\mathbf{p}$ $-$импульспен және M_0 $-$тыныштық массасымен сипаттап, осыған дейін алынған өрнектер тұтастай алғандағы жүйені де сипаттайды деген тоқтам жасай аламыз.

Енді жүйені тұтастай алғандағы $E -$ *толық* энергиясы деп, $\mathbf{p}$ $-$импульсі және M_0 –тыныштық массасы деп нені ұғатындығын анықтайық. Жалпы алғанда, егер жүйе өзара әрекеттесетін релятивистік бөлшектерден тұратын болса, онда оның толық энергиясы

$$E = \sum m_i c^2 + W, \tag{8.27}$$

мұндағы, $m_i c^2$-i –бөлшектің толық энергиясы (бұл шамаға басқа бөлшектермен өзара әрекеттесу энергиясының кірмейтінін айта кетейік); W жүйенің өзара әрекеттесетін барлық бөлшектердінің қосынды энергиясы.

Классикалық механикада W дегеніміз жүйе бөлшектерінің өзара әрекеттесу потенциалдық энергиясы – берілген сипаттағы өзара әрекеттесу кезінде жүйенің конфигурациясына тәуелді болатын шама болып табылады. Релятивистік динамикада бөлшектердің өзара әрекеттесуінде потенциалдық энергиясы түсінігі жоқ екен, бұған себеп потенциалдық энергия деген түсінікті өзінің алыстан әрекеттесу (өзара әрекеттесудің лезде берілу) көзқарасымен тығыз байланыстылығы. Жүйенің конфигурациясының функциясы болатындықтан потенциалдық энергия әрбір уақыт мезетінде бөлшектердің осы мезеттегі салыстырмалы орналасуымен анықталады. Жүйенің конфигурациясының өзгеруі лезде потенциалдық энергияның да өзгерісін тудыруы тиіс. Шын мәнісінде олай болмайтындықтан (өзара әрекеттесу шектеулі жылдамдықпен беріледі), релятивисті бөлшектер жүйесі үшін потенциалдық энергия түсінігін пайдалану мүмкін емес.

Жалпы жағдайда W өзара әрекеттесу энергиясының және өзара әрекеттесетін релятивистік бөлшектер жүйесі үшін *E толық* энергияның өрнегін жазу мүмкін емес. Дәл осыны импульс жайлы да айтуға болады, себебі релятивистік динамикада импульсты *E* энергиядан бөліп қарауға болмайды. Осындай қиындықты жүйенің M_0 –тыныштық массасына да таратуға болады, ол жайлы жалпы жағдайда айта аламыз: ол берілген механикалық жүйенің тұтастай тыныштықта болатын санақ жүйесіндегі массасы (яғни *Ц-жүйе*дегі).

Осы айтылғандардан келіп релятивистік бөлшектер жүйесінің динамикасын құруда тек кейбір дербес жағдайлармен ғана шектелеміз. Осындай жағдайлардың екеуіне тоқтала кетеміз.

Өзара әрекеттеспейтін релятивистік бөлшектер жүйесі

Релятивистік бөлшектер жүйесінің динамикасын құруда келесі екі жағдайға тоқталған жөн: өзара әрекеттеспейтін релятивистік бөлшектер жүйесі мен практикалық тұрғыдан маңызды болатын екі бөлшектің соқтығысуы. Өзара әрекеттеспейтін релятивистік бөлшектер жүйесі үшін *E толық* энергияның және **p** импульстың аддитивтік касиеттері орын алады сөйтіп, жүйе үшін оларды келесі түрде жазуға болады:

$$E = \sum m_i c^2 , \;\; p = \sum p_i, \tag{8.28}$$

мұндағы, m_i*;* және p_i; -жүйенің i–ші бөлшегінің релятивистік массасы мен импульсі. Өзара әрекеттесулер жоқ болатындықтан барлық бөлшектердің де жылдамдықтары тұрақты. Демек түгел жүйенің толық энергиясы мен импульсы да уақыт бойынша тұрақты.

Бөлшектер жүйесінің E_0 −толық энергиясын оның $Ц-$ жүйедегі толық энергиясы ретінде енгізейік, онда толық импульс $\tilde{p} = \sum \tilde{p}_i = 0$ және де жүйе тұтастай алғанда тыныштықта болады. Сонымен

$$E_0 = \sum \tilde{E}_i, \tag{8.29}$$

мұндағы, $\tilde{E}_i - i -$ ші бөлшектің *Ц-жүйе*дегі толық энергиясы. Яғниі тыныштық энергиясына әрбір бөлшектің тыныштық энергиясымен қатар оның *Ц*-жүйедегі кинетикалық энергиясы да кіреді дегенді білдіреді:

$$\tilde{E}_i = m_{0i}c^2 + \tilde{K}_i.$$

Мұны жүйенің тыныштық массасына да қатысты айтуға болады:

$$M_0 = E_0/c^2. \tag{8.30}$$

Осыдан жүйенің тыныштық массасының жеке бөлшектердің тыныштық массаларының қосындысына тең болмайтындығы шығады:

$$M_0 > \sum m_{0i}.$$

Жүйенің E_0 және M_0 энергиясы мен тыныштық массасын кіргізу өзара эректеттеспейтін релятивистік бөлшектердің жүйесінің толық энергиясы $E = \sum m_i c^2$, импульсы $p = \sum p_i$ және тыныштық массасы $M_0 = E_0/c^2$ болатын бір бөлшек деп қарастыруға және (8.12) және (8.14) формулалар бөлшектер жүйесі үшін де орындалады деген тоқтам жасауға мумкіндік береді:

$$E^2 - p^2c^2 = M_0^2c^4 = \mathrm{inv}, \tag{8.31}$$

$$\mathbf{p} = E\mathbf{V}/c^2, \tag{8.32}$$

мұндағы, $\mathbf{V} -$ бөлшектер жүйесінің тұтастай алғандағы жылдамдығы, яғни *Ц-жүйе*нің жылдамдығы. Бұл жылдамдықты (8.32)-ге сай түрінде өрнектеуге болады:

$$\mathbf{V} = \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\sum m_i}, \tag{8.33}$$

мұндағы, $m_i - i$ -бөлшектің релятивистік массасы. (8.33) түрінің жүйенің инерция центрі үшін релятивистік емес (3.9) өрнекпен бірдей түсетіндігіне назар аударайық.

Екі бөлшектің соқтығысуы

Соқтығысу процесінің екі сатысын қарастырайық: қайсыбір A^* құрама бөлшектің пайда болуы және сосын оның, жалпы алғанда қандай да бір басқа екі бөлшекке ыдырауы:

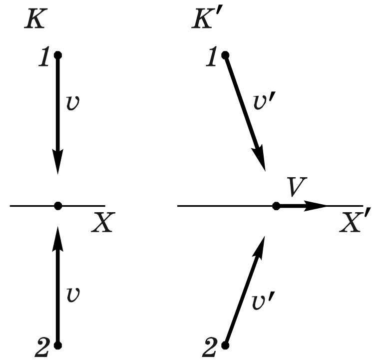
$$A_1 + A_2 \to A^* \to A_3 + A_4 + \cdots$$

A_1 және A_2 бөлшектері бір-біріне жақындаған кезде олардың арасындағы өзара әрекеттесу азғантай болып қалмай, артып кетуі мүмкін, мұндай жағдайда (8.28) формуланы қолдануға болмай қалады. Бірақ пайда болған бөлшектер бір-бірінен алыстаған кезде, бұл формулаларды қайтадан қолдануға болады.

Берілген жағдайда бастапқы екі бөлшектің толық энергияларының қосындысының (олар бір-бірінен тым алыста және олардың арасындағы өзара әрекеттесу әлі әлсіз болатын кезде) құрама бөлшектің толық энергиясына тең болатындығын көрсетуге болады. Мұны процестің екінші сатысына – ыдырауға да таратуға болады. Басқаша айтқанда, бұл процесс үшін энергияның сақталу заңын жазуға болады:

$$E_1 + E_2 \to E^* \to E_3 + E_4 + \cdots \tag{8.34}$$

Ол үшін төмендегідей мысал келтірейік: бірдей ***1***-ші және ***2***-ші бөлшектердің соқтығысуының нәтижесінде қайсы-бір құрама бөлшек пайда болады делік. Бөлшектер соқтығысқанға дейін бір-біріне қарама-қарсы υ −жылдамдықпен K -жүйеде қозғалып келе жатыр (8.6-суретте). Енді осы процесті *К-жүйе*ге қатысты солға қарай $\mathbf{V}$ − жылдамдықпен қозғалып келе жатқан K'-жүйеде қарастырайық. *К'-жүйе*де әрбір бөлшектің жылдамдығы $\mathbf{V}$ векторға перпендикуляр болатындықтан, (7.14) бойынша екі бөлшектің де *К'*-жүйеде $\mathbf{V}$ −шамасына тең болатын x −компоненті болады. Жаңадан пайда болған бөлшектің де *К'-жүйе*де дәл осындай жылдамдығы болады, оның релятивистік массасын m^* деп белгілейміз. Соқтығысуға дейінгі және одан кейінгі импульстің сақталу заңынан (импульстың x-құраушысы үшін) $2m(\upsilon')V = m^*V$ шығады, мұндағы υ' − әрбір бастапқы бөлшектің *К'-жүйе*дегі жылдамдығы. Осыдан:



8.6-сурет

$$2m(\upsilon') = m^*,$$

яғни, бастапқы бөлшектердің релятивистік массаларының қосындысы пайда болған бөлшектің релятивистік массасына тең. *К-жүйе*де де дәл осындай жағдай туады. Шынында да, V −жылдамдықтың кіші мәні кезінде υ' жылдамдық υ −жылдамдыққа тең дерлік болады, ал m^* − масса пайда болған бөлшектің m_0^* −массасына тең, сөйтіп *К-жүйе*де:

$$2m(v) = m_0^*.$$

Осыдан пайда болған бөлшектің тыныштық массасы бастапқы бөлшектердің тыныштық массаларының қосындысынан артық болады. Бастапқы бөлшектердің кинетикалық энергиясында өзгерістер пайда болып, осының нәтижесінде пайда болған бөлшектің тыныштық массасы бастапқы бөлшектердің тыныштық массаларынан артық болып шығады.

Сонымен біз импульстің сақталу заңының нәтижесінде бастапкы бөлшектердің релятивистік массаларының косындысы пайда болған бөлшектің релятивистік массасына тең болатындығын көрсеттік. Толық энергия үшін де дәл осындай жағдайдың болуы анық. Сондықтан (8.34) түрі толық энергияның сақталуы бұл процестің қарастырылып отырған сатысы үшін орындалады деген қорытынды жасауға болады.

Энергияның сақталу заңын ядролық процестерге колдану, жоғарыда айтып көрсеткеніміздей, салыстырмалылық теориясының іргелі заңдарының бірі – масса мен энергияның өзара байланысы заңының дұрыстығына кепілдік бере алды. Мысалдар қарастыра кетейік.

1-мысал. **Ядролық реакциялардың энергетикалық шығымы.**

Төменде келтірілген ядролық реакцияны қарастырайық:

$$A_1 + A_2 \rightarrow A_3 + A_4$$

мұнда сол жақта – бастапқы ядролар, ал оң жақта жаңа пайда болған ядролар. Осы реакцияға энергияның сақталу заңын қолданайық:

$$E_1 + E_2 \rightarrow E_3 + E_4$$

Әрбір бөлшектің толық энергиясын $E = m_0c^2 + K$ түрінде беруге болатындығын ескере отырып, мұндағы m_0 –сәйкес бөлшектің тыныштық массасы, K – оның кинетикалық энергиясы, сонда алдыңғы өрнекті жазамыз:

$$(m_1 + m_2)c^2 + K_{12} = (m_3 + m_4)c^2 - K_{34}$$

мұндағы K_{12} және K_{34} – ядролардың реакцияға дейінгі және одан кейінгі қосынды кинетикалық энергиялары. Осыдан:

$$K_{34} - K_{12} = (m_1 + m_2)c^2 - (m_3 + m_4)c^2$$

Бұл теңдіктің сол жағы − берілген жүйенің ядроларының қосынды кинетикалық энергиясының өсімшесі, яғни ядролық реакцияның энергетикалық шығымы деп аталатын шама, оны Q әрпімен белгілейді. Сонымен

$$Q = [(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)]c^2$$

Бұл шаманың таңбасы ядролық реакцияның түріне байланысты оң да, теріс те болуы мүмкін. Сонымен ядролық реакцияның энергетикалық шығымы ядролардың реакцияға дейінгі және одан кейінгі қосынды тыныштық массаларының айырымымен анықталады. Бұл қатынасқа кіретін барлық шамаларды жеткілікті жоғары дәлдікпен тәжірибеде өлшеп, сөйтіп тендіктің өзін де тексеруге болады.

Нақты бір реакцияны қарастырайық

$$^{7}\mathrm{Li} + {}^{1}\mathrm{H} \to 2\,{}^{4}\mathrm{He}$$

Бұл ядролардың өлшенген тыныштық массалары (массаның атомдық бірлігі - м.а.б.*)* сәйкес түрде 7,0160; 1,0078 және 4,0024 м.а.б. Осыдан ядролардың тыныштық массаларының қосындысының реакция нәтижесінде 0,019 м.а.б.- не кемігенін көреміз. 1 м.а.б.-ның энергияға шаққанда 931,4 МэВ *екендігін* ескерсек, онда Q= 0,019·931,4 МэВ = 17,7 МэВ. Бұл шама тәжірибе нәтижесін үлкен дәлдікпен дәлелдейді.

2-мысал. **Бөлшектердің ыдырауы**. Тыныштықтағы A_1 бөлшек өз бетінше A_2 және A_3бөлшектерге ыдырап кетсін: Толық энергияның сақталу заңы бойынша

$$E_1 = E_2 + E_3$$

Әрбір бөлшектің толық энергиясы $E = m_0c^2 + K$ болатындықтан жоғарғы теңдеу келесі түрін қабылдайды

$$m_1c^2 = (m_2 + m_3)c^2 + K_{23}$$

мұндағы, K_{23} - пайда болған бөлшектердің қосынды кинетикалық энергиясы. Бұл энергияны ыдырау энергиясы Q − деп те атайды. Сонымен

$$Q = [m_1 - (m_2 + m_3)]c^2$$

Q − шамасы әрқашанда оң болатындықтан бөлшектің өз бетінше ыдырауы тек

$$m_1 > m_2 + m_3$$

шарты орындалатын кезде ғана, яғни алғашқы бөлшектің тыныштық массасы пайда болатын бөлшектердің тыныштық массаларының қосындысынан артық болатын кезде ғана мүмкін болады. Керісінше жағдайда, бөлшектің өзбетінше ыдырауы мүмкін емес. Тәжірибе де осыны дәлелдейді.

π −мезонның ыдырауын қарастырайық. Тәжірибе көрсеткендей, зарядталған $\pi -$ мезондар мезон мен нейтриноға ыдырайды: $\pi \longrightarrow \mu + \nu$.Бұл бөлшектердің тыныштық массалары (электронның тыныштық массасы бірліктерімен) сәйкес түрде 273,2; 206,8 және 0. Осыдан тыныштық массасының 66,4 электрон массасына кемитіні шығады. Электронның тыныштық массасына 0,51 МэВ *энергия* келетін болғандықтан ыдырау энергиясы Q = 66,4·0,51 МэВ= 34 МэВ, бұл тәжірибе нәтижесімен дәл түседі.

Бөлшектердің соқтығысуы және содан кейін құрама бөлшектің ыдырауы нәтижесінде жүйенің толық энергиясының (демек оның импульсі да) өзгеріссіз қалуы бір жаңа қортындыға әкеледі. Жүйе үшін $E^2 - p^2c^2$ шамасының инварианттылығы тек әртүрлі инерциялық санақ жүйелері үшін ғана емес, сонымен қатар ол жоғарыда көрсетілген ыдырау процестері үшін де орындалады.

Мысалға екі релятивистік бөлшектер соқтығысын, осының нәтижесінде тыныштық массасы M_0 болатын жаңа бөлшек пайда болсын делік. Егер K-санақ жүйесінде бөлшектердің соқтығысқанға дейінгі толық энергиялары E_1

және E_2 ал олардын импульстері сәйкес түрде $\mathbf{p}_1$ және $\mathbf{p}_2$ болса, онда бірден *К-жүйе*ден (соқтығысқанға дейін) *Ц* -жүйеге (соқтығысқаннан кейін) өткен кезде мына қатынас орындалуы тиіс:

$$(E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = M_0^2 c^4, \quad (8.35)$$

мұнда пайда болған бөлшектің *Ц-жүйе*де тыныштықта болатындығы ескерілген. Теңдеудің сол жағы *К-жүйе*ге, ал оң жағы *Ц* –жүйеге қатысты. $E^2 - p^2c^2$ шамасының инварианттылығы релятивистік бөлшектердің ыдыраулары мен соқтығысулары арқылы өтетін процестерді қарастырған кезде есептеулерді ықшамдауға мүмкіндік береді.

Мысал. *К-жүйе*де тыныштық массасы m_0 және кинетикалық энергиясы $-K$ болатын бөлшек тыныштық массасы дәл осындай болатын тыныштықтағы екінші бөлшекке келіп соқтығады. Соқтығысу нәтижесінде пайда болған құрама бөлшектің M_0 тыныштық массасы мен V жылдамдығын табу керек. $E^2 - p^2c^2$ шамасының инварианттылығын пайдаланып жазамыз:

$$E^2 - p^2c^2 = M_0^2 c^4,$$

мұнда тендіктің сол жағы *К* жүйеге қатысты (соқтығысқанға дейін), ал оң жағы-*Ц-жүйе*ге жатады (соқтығысқаннан кейін). Біздің жағдайымызда $E = K + 2m_0c^2$ сонымен қатар (8.15) бойынша $p^2c^2 = K(K + 2m_0c^2)$. Сондықтан:

$$(K + 2m_0c^2)^2 - K(K + 2m_0c^2) = M_0^2 c^4$$

Осыдан

$$M_0 = \frac{1}{c}\sqrt{2m_0(K + 2m_0c^2)}$$

Пайда болған бөлшектің жылдамдығы - бұл *Ц*− жүйенің жылдамдығы. (8.32) бойынша

$$V = pc^2/E = c\sqrt{K/(K + 2m_0c^2)}$$

Есептер

8.1. **Бойлық күштің әсерінен болатын қозғалыс.** Тыныштық массасы m болатын бөлшек тұрақты **F** күштің әсерінен қозғала бастайды. Бөлшектің жылдамдығының уақытқа тәуелділігін табу керек.

Шығарылу жолы. (8.5) теңдеудің екі жағын да d*t*-ға көбейтеміз, сонда

$$\mathrm{d}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}\right) = F\mathrm{d}t$$

Бастапқы уақытты $v = 0$ ескере отырып, осы теңдеуді интегралдаймыз - $m_0 v / \sqrt{1 - v/c^2} = Ft$. Осыдан

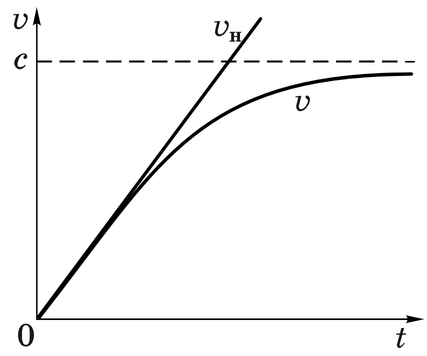
$$v(t) = \frac{v_{\text{н}}}{\sqrt{1-(v_{\text{н}}/c)^2}}.$$

Алынған нәтижені Ньютонның екінші заңы бойынша классикалық өрнектермен

$a = F/m$ және $v_н = Ft/m_0$ салыстырайық. Сондықтан жоғарыда келтірілген $v(t)$ жылдамдықтың өрнегін келесі түрде жазуға болады:

$$v(t) = \frac{v_н}{\sqrt{1-(v_н/c)^2}}.$$

Осыдан $v < v_н$, шындығында да бөлшектің v −жылдамдығы $v_н$ −классикалық жылдамдықпен салыстырғанда уақыт бойынша баяу өзгереді, әрі $t \longrightarrow \infty$ кезінде жылдамдық $v \longrightarrow c$ (8.7-сурет). Сонымен қатар бөлшектің импульсі уақыт бойынша сызықты өзгереді: $\mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t = \mathbf{F}$ теңдеуінен $\mathrm{p} = Ft$ екендігі шығады. Бұл релятивистік қозғалыстың ерекшелігі: бөлшектің жылдамдығы белгілі бір шекке ұмтылған кезде (яғни, қалыптасуға жетеді), оның импульсі әрі қарай арта береді.



8.7-сурет

8.2. Көлденең күштің әсерінен болатын қозғалыс. Тыныштық массасы m_0 және заряды q болатын релятивистік бөлшек индукциясы $\mathbf{B}$ біртекті тұрақты магнит өрісінде қозғалады. Радиусы ρ болатын шеңбер бойымен $\mathbf{B}$ векторға перпендикуляр жазықтықта осы қозғалыс орындалады. Бөлшектің импульсін және шеңбер бойымен айналуының дөңгелек жиілігін (бұрыштық жылдамдығын) табу керек.

Шығару жолы. Бұл жерде бөлшек $\mathbf{F} = q[\mathbf{vB}]$ *Лоренц күшінің* әсерінен қозғалады, мұндағы $\mathbf{v}$ −бөлшектің жылдамдығы. $\mathbf{F} \perp \mathbf{v}$ болатыңдықтан $v = const$ бөлшектің жылдамдығы және (8.5) теңдеу түріне келеді:

$$m\mathbf{a} = q[\mathbf{vB}],$$

мұндағы, $m -$ бөлшектің релятивистік массасы. v^2/ρ модулі $\mathbf{a}$ болатын норма үдеу болатындықтан алдыңғы теңдеуді $mv^2/\rho = qvB$ деп жазамыз.
Осыдан теңдеудің импульсі:

$$p = mv = qvB. \qquad (1)$$

Сонымен ρB көбейтіндісі осы бөлшектің релятивистік импульсінің мөлшері рөлін атқара алады.
(1) теңдеуді ескере отырып, бөлшектің айналуының дөңгелек жиілігін табамыз:

$$\omega = qB/m.$$

Осыдан, ω −дөңгелек жиілік бөлшектің жылдамдығына тәуелді болады, бөлшектің жылдамдығы неғұрлым үлкен болған сайын, демек оның m релятивистік массасы артқан сайын ω жиілік солғұрлым азырақ болады.

Бірақ аз жылдамдықтар кезінде $(v \ll c) m \longrightarrow m_0$ және

$$\omega = qB/m_0 = const,$$

яғни жылдамдықтарды бұл обылысында ω −жиілік жылдамдыққа тәуелсіз деуге болады.

8.3. Импульсі $\mathbf{p}_0$ релятивистік протон $t = 0$ мезетте кернеулігі $\boldsymbol{E}$ болатын біртекті көлденең электр өрісі бар облысқа енеді, әрі $\mathbf{p}_0 \perp \boldsymbol{E}$. Протонның бастапқы қозғалыс бағытынан ауытқуының $\theta -$ бұрышының уакытқа тәуелдлігін табу керек.

Шығару жолы. Координаттар өсін тандап алып (x – векторы бойында, y - E векторы бойында), (8.4) теңдеуді осы өстерге проекциялары арқылы жазамыз:

$$dp_x/dt = 0, \qquad dp_y/dt = eE,$$

мұндағы, e – протонның заряды. Осы теңдеулерден соңғы екі теңдіктердің қатынасын табамыз

$$p_x = p_0, \qquad p_y = eEt$$

немесе:

$$\frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = p_0, \ \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = eEt. \tag{1}$$

Соңғы екі теңдеудің қатынасын алып, төмендегі өрнекті табамыз:

$$tg\vartheta = v_y/v_x = eEt/p_0.$$

Релятивистік емес жағдаймен салыстырғанда бұл жерде v_xуақыт артқан сайын азаяды. Бұған көз жеткізу үшін (1) тендіктің екі жағын да квадраттаймыз, олардың оң және сол жақтарын бөлек-бөлек қосамыз:

$$\frac{m_0^2\left(v_x^2 + v_y^2\right)}{1-(v/c)^2} = p_0^2 + (eEt)^2$$

$v_x^2 + v_y^2$ болатындығын еске аламыз:

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(1 - \frac{m_0^2 c^2}{p_0^2 + (eEt)^2}\right)^{-1}.$$

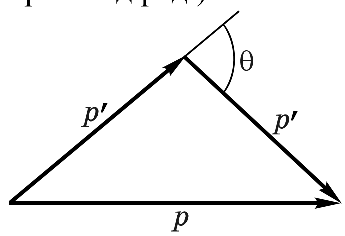
Осы өрнекті (1) тендікке қойып,

$$v_x = \frac{c}{\sqrt{1 + (m_0 c/p_0)^2 + (eEt/p_0)^2}},$$

шынында да, t артқан кезде v_x кемиді.

Ескерту! 8.4 - 8.11-есептерде қысқартылған белгілер пайдаланылған (мысалға p мен $m -$ дегеніміз pc мен $mc^2 -$ тің қысқартылған белгілерін білдіреді).

8.4. Симметриялық серпімді соктығысу. Кинетикалық энергиясы $-K$ релятивистік протон тыныштықтағы протонмен соқтығады, осының нәтижесінде екі протон да бастапқы қозғалыс бағытына қатысты симметриялы түрде ұшып шығады. Протондардың соқтығысқаннан кейінгі қозғалыс бағыттарының арасындағы бұрышты табу керек.



8.8-сурет

Шығару жолы. Протондардың симметриялық ұшып шығуы кезінде олардың импульстері мен энергиялары өздерінің модулдері жағынан бірдей болуы тиіс. Мұны импульстің сақталу заңын білдіретін импульстер үшбұрышынан көруге болады (8.8-сурет). Осы үшбұрыштан косинустар теоремасы бойынша $p^2 = 2p'^2 + 2p'^2\cos\theta$ келесі формула шығады.

$$\cos\theta = p^2/2p'^2 - 1$$

(8.25) формуланы пайдаланып, $K = 2K'$ шартын ескере отырып, (K' −протондар соқтығысқаннан кейінгі протондардың кинетикалық энергиясы) келесі өрнекті табамыз:

$$\frac{p^2}{p'^2} = \frac{K(K+2m_0)}{K\prime(K'+2m_0)} = 4\frac{K+2m_0}{K+4m_0}.$$

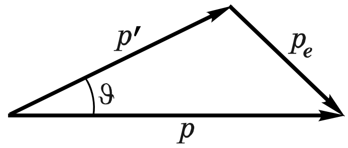
мұндағы, m_0– электронның тыныштық массасы, осы формуланы $\cos\theta$ −теңдеуіне қойып, қарапайым түрлендірулерден кейін табамыз:

$$\cos\theta = K/K + 4m_0$$

Релятивистік жағдайда $\theta < 90°$, алал релятивистік емес жағдайда $\theta = 90°$ болатыны анық.

8.5. Фотонның тыныштықтағы электроннан шашырауы.

Энергиясы $-\varepsilon$ фотон тыныштықтағы еркін электроннан шашырасын. Соқтыққан фотон мен шашыраған фотонның қозғалыс бағыттары арасындағы бұрыш $-\vartheta$ болсын, сонда шашыраған фотонның ε' −энергиясы қандай болады?



8.9-сурет

Шығару жолы. Осы процесс кезіндегі энергия мен импульстыңсакталу зандарын пайдаланамыз:

$$K_e = \varepsilon - \varepsilon', \qquad \mathbf{p}_e = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$$

K_e мен $\mathbf{p}_e$ −қайтарым электронныңкинетикалық энергиясы мен импульсі, $\mathbf{p}$ мен $\mathbf{p}'$ − соқтыққан және шашыраған фотонның импульстері. Импульстер үшбұрышынан (8.9-сурет) косинустар теоремасына сай келесі өрнекті жазуға болады:

$$p_e^2 = p^2 + p'^2 - 2pp'\cos\vartheta$$

$p = \varepsilon$ және $p' = \varepsilon'$ болғандықтан келесі өрнек шығады:

$$p_e = \sqrt{K_e(K_e + 2m_e)} = \sqrt{(\varepsilon - \varepsilon')(\varepsilon - \varepsilon' + 2m_e)},$$

$\boldsymbol{m_e}$ − электронның массасы, қарапайым түрлендірулерден кейін төмендегідей өрнек пайда болады:

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1+2(\varepsilon/m_e)\sin^2\vartheta/2}\ .$$

8.6. **Қарсы шоқтар әдісі**. Екі протон бір-біріне қарама-қарсы бірдей K кинетикалық энергиямен қозғалады *(К*-санақ жүйесінде). Бір протонның екінші тыныштықта жатқан протонға қатысты K'-кинетикалық энергиясын табу керек.

Шығару жолы. $(E^2 - p^2)$ −шамасының инварианттылығын пайдаланып, оны *К-жүйе*де (ол бірмезгілде *Ц-жүйе*де де болып табылады) және протондардың бірімен байланысқан K'-санақ жүйесінде де жазамыз:

$$[2(K + m_0)]^2 = (K' + 2m_0)^2 - K'(K' + 2m_0),$$

мұндағы, m_0 − протонның тыныштық массасы. Осыдан

$$K' = 2K(K + 2m_0)/m_0.$$

мысалға, егер $K = 50$ГэВ болса, онда протондар үшін ($m_0 \approx 1$ГэВ) $K' = 5 \cdot 10^3$ГэВ тең болады. Энергиядан осындай үлкен ұтыс алу *қарсы шоктар әдісінің* негізіне жатады.

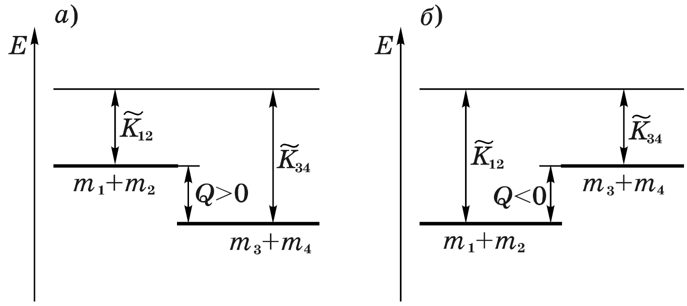
8.7. Ядролық реакцияның энергетикалық схемасы. Кинетикалық энергиясы$-K_1$ болатын $A_1 -$ бөлшек тыныштықта жатқан A_2 $-$ядроға келіп соқтығады *(К* жүйеде). Реакция нәтижесінде A_3 және A_4 ядролары пайда болады:

$$A_1 + A_2 \longrightarrow A_3 + A_4.$$

Бөлшектердің тыныштық массалары сәйкес түрде тең: m_1, m_2, m_3, m_4. Төмендегі екі жағдай үшін ядролық реакцияның энергетикалық схемасы келесі түрде өрнектеледі:
а) $(m_1 + m_2) > (m_3 + m_4)$, б) $(m_1 + m_2) < (m_3 + m_4)$,

Екінші жағдай үшін соқтығатын бөлшектердің $K_{1таб}$ $-$табалдырық кинетикалық энергиясын *К* санақ жүйесінде табу керек.
Шығару жолы. Толық энергияның сақталу заңына сай *Ц-жүйе*де келесі теңдік орын алады:

$$\widetilde{K}_{12} + m_1 + m_2 = \widetilde{K}_{34} + m_3 + m_4,$$



8.10-сурет

мұндағы, $\widetilde{K}_{12}$ пен $\widetilde{K}_{12}$ $-$реакцияға дейінгі және реакциядан кейінгі бөлшектердің кинетикалық энергиясының қосындысы. Кинетикалық энергияның өсімшесін $\widetilde{K}_{12} - \widetilde{K}_{12} = Q$ деп белгілеп, алдындағы өрнекті қайта жазамыз:

$$Q = (m_1 + m_2) - (m_3 + m_4).$$

мұндағы, Q – *ядролық реакцияның энергетикалық шығымы* немесе *реакцияның энергиясы* деп аталады.

Реакциялардың екі жағдайы үшін де олардың энергетикалық схемалары 8.10-суретте көрсетілген а) жағдайда эффект оң болады, $Q > 0$: жүйе бөлшектерінің тыныштық массаларының қосындысының азаюы есебінен кинетикалық энергияның қосындысы артады; б) жағдайда – керісінше.
8.10, б-суреттен б) жағдайы үшін ядролық реакция тек келесі шартта ғана орындала алады: $\widetilde{K}_{12} \geq |Q|$. Мұндағы теңдік белгісі $\widetilde{K}_{12}$ $-$табалдырық кинетикалық энергияға жататынын көрсетеді. Релятивистік емес жылдамдықтар үшін (4.16) формулаға сәйкес $\widetilde{K}_{12} = \mu v_{сал}^2/2$, немесе

$$\widetilde{K}_{12} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}K_1$$

$\widetilde{K}_{12} \geq |Q|$ мен $K_1 = K_{1таб}$ шарттарын еске ала отырып, келесі теңдеуді аламыз:

$$K_{1таб} = \frac{m_1 + m_2}{m_2}|Q|$$

8.8. Табалдырықтық энергия (Берілген процесті мүмкін ететін минимал энергия). 1. Тыныштық массасы $m_0 -$ тең релятивистік бөлшек тыныштық массасы $M -$ге тең қозғалмайтын бөлшекке келіп соқтығады. Соқтығысу нәтижесінде тыныштық массалары $m_1, m_2, \ldots -$ге тең жаңа бөлшектер келесі үлгімен пайда болады:

$$m + M \longrightarrow m_1 + m_2 + \cdots$$

Осы процесс жүру үшін соқтығысушы бөлшектің $K_{таб} -$ табалдырықтық (минималды) кинетикалық энергиясын табу керек.

Шығару жолы. Ең алдымен қандай шарттарда табалдырықтық кинетикалық энергия қажет екенін шешіп алу керек. Ол үшін пайда болатын бөлшектердің тыныштық массаларының қосындысы бастапқы бөлшектердің тыныштық массаларының қосындысынан артық болу шарты орындалуы керек. Енді $K_{таб}$ шамасын табу үшін $E^2 - p^2 -$айырымының инварианттылығын пайдаланамыз. Бөлшектердің соқтығысуға дейін, яғни $K = K_{таб}$ болғанда $M -$ бөлшек тыныштықта болатын жүйеде, соқтығысудан кейін Ц-жүйеде осы шаманы жазамыз:

$$(K_{таб} + m + M)^2 - K_{таб}(K_{таб} + 2m) = (m_1 + m_2 + \cdots)^2.$$

Бұл жерде *Ц-жүйе*де реакция басталарда пайда болатын бөлшектердің кинетикалық энергиясының нөлге тең болатындығы ескерілген, сондықтан олардың толық энергиясы жеке бөлшектердің тыныштық массаларының қосындысына тең болады . Соңғы теңдеуден:

$$K_{таб} = \frac{(m_1 + m_2 + \cdots)^2 - (m + M)^2}{2M}.$$

8.9. Протон тыныштықта болатын жүйеде электрон-позитрон жұбы пайда болу үшін қажетті фотонның табалдырықтық энергиясын табу керек. Мұнда электронның тыныштық массасы m_0,позитронның тыныштық массасы$-M_0$.

Шығару жолы. $E^2 - p^2 -$ шамасының инварианттылығымен үйлесімді болатындығын көрсету үшін соқтығысуға дейін протон тыныштықта болатын жүйе үшін соңынан өзара соқтығысқаннан кейін Ц-жүйеде жазамыз. Соқтығушы фотонның $\varepsilon -$табалдырықтық энергиясының мәні үшін келесі өрнекті жазамыз:

$$(\varepsilon_{таб} + M_0)^2 - \varepsilon_{таб}^2 = (M_0 + 2m_0)^2.$$

Осыдан

$$\varepsilon_{таб} = 2m_0(1 + m_0/M_0).$$

Электрон-позитрон жұбы пайда болуы үшін импульстің сақталу заңына сай фотонның энергиясы $2m_0$ $-$шамасынан артық болуы керек.

8.10. Лабораториялық санақ жүйесінде тыныштық массасы m_0тең қозғалмайтын A бөлшекке энергиясы $\varepsilon -$тең фотон келіп соқтығады.

1) осы екі бөлшектің *Ц-жүйе*сінің жылдамдығын;

2) *Ц-жүйе*де фотонның және A бөлшектің энергиясын табу керек.

Шығару жолы. 1. (8.32) формула бойынша *Ц-жүйе*нің жылдамдығы:

$$\beta_c = p/E = \varepsilon/(m_0 + \varepsilon).$$

2. (8.26) Лоренц түрлендіруінен фотонның *Ц-жүйе*дегі энергиясын табамыз:

$$\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon - \beta_C p)/\sqrt{1-\beta_C^2}\,,$$

Мұндағы β_C −*Ц-жүйе*нің жылдамдығы (өлшем бірлігі с). $p = \varepsilon$ және алдыңғы өрнектен алынған β_C −нің мәндерін осы өрнекке келіп қойғаннан кейін төмендегі өрнек шығады:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + 2\varepsilon/m_0}}.$$

А бөлшегі *Ц-жүйе*де $\beta = \beta_\mathrm{C}$ жылдамдықпен қозғалатындықтан оның осы жүйедегі толық энергиясы:

$$\tilde{E}_A = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta_C^2}} = \frac{m_0 + \varepsilon}{\sqrt{1 + 2\varepsilon/m_0}}.$$

Алынған формулалардың дұрыстығына $E^2 - p^2$ өрнектің лабораториялық жүйеден *Ц-жүйе*ге өткен кезде инварианттылығымен үйлесімді болатындығын көрсету үшін көз жеткізуге болады:

$$(\varepsilon + m_0)^2 - \varepsilon^2 = \left(2\tilde{\varepsilon} + \tilde{E}_A\right)^2.$$

8.11. Қозғалыстағы бөлшектің ыдырауы. Тыныштық массасы m_0 релятивистік π −мезон ұшып келе жатып, энергиялары ε_1 және ε_2 болатын екі γ −фотонға ыдырайды *(К*-санақ жүйесінде). Осы екі γ −фотондардың ұшып шығу бағыттарының арасындағы θ −бұрышты табу керек.

Шығару жолы. $E^2 - p^2 -$ шамасының инварианттығын пайдаланамыз, ол үшін оны ыдырауға дейін *Ц* - жүйеде, ал ыдырағаннан кейін *К-жүйе*де жазамыз:

$$m_0^2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2,$$

$\mathbf{p}_1$ және $\mathbf{p}_2$ −фотондардың импульстері. Осы өрнектің оң жағын түрлендірейік, ол үшін $p_1 = \varepsilon_1$ мен $p_2 = \varepsilon_2$ ескерсек болғаны. Сонда:

$$m_0^2 = 2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 = 2\varepsilon_1\varepsilon_2(1 - \cos\theta),$$

Осыдан:

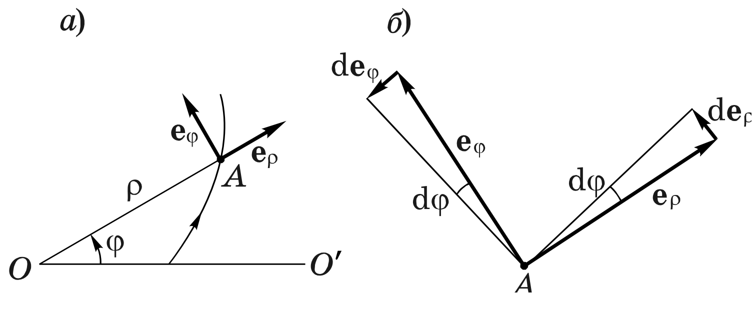
$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{m_0}{2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}.$$

Қосымшалар

1. Нүктенің полярлық координаттардағы қозғалысы

ρ, φ полярлық координаттарымен алынған жазықтықтағы A нүктесінің орны, егер оның O санақ басынан ρ қашықтығы және нүктенің $\boldsymbol{\rho}$ радиус-векторы мен таңдап алынған OO' бағыттың арасындағы φ бұрышы берілген болса, анықталған болып есептеледі.

Қозғалыстағы A нүктемен байланысқан және 1 а) суретте көрсетілгендей сәйкес түрде ρ және φ координаттардың арту бағытында бағытталған бірлік векторларды - e_{ρ} және e_{φ} орттарды кіргіземіз. e_{ρ} және e_{φ} орттардың декарт жүйесі координаттарының орттарынан айырмашылығы – бұлар *жылжымалы*. (A нүктенің қозғалысы кезінде олар өздерінің бағытын өзгертіп отырады). Олардың уақыт бойынша туындыларын табайық. A нүктенің қозғалысы кезінде $\mathrm{d}t$ уақыт аралағында екі орт та бір бағытта бір ғана $d\varphi$ бұрышқа бұрылады да,



1-сурет

$$de_{\rho} = 1d\varphi \cdot e_{\varphi} \qquad\qquad de_{\varphi} = 1d\varphi \cdot \left(-\mathbf{e}_{\rho}\right).$$

өсімшелерін алады (К1, б-сурет). Осы екі өрнекті де dt уақытқа бөлеміз, сонда

$$\dot{e}_{\rho} = \varphi e^{\cdot}_{\varphi} \qquad\qquad \dot{e}_{\varphi} = -\dot{\varphi} \cdot \dot{e}_{\rho}.$$

мұндағы символдардың үстіндегі нүкте уақыт бойынша дифференциалдауды білдіреді.

Енді A нүктесінің жылдамдығы мен үдеуін табуға болады, егер оның ρ - радиус-векторын келесі түрде жазатын болсақ

$$\boldsymbol{\rho} = \rho \mathbf{e}_{\rho}. \tag{2}$$

Нүктенің жылдамдығы v. (1) өрнекті ескере отырып, (2)-өрнекті уақыт бойынша дифференциалаймыз

$$\mathrm{v} = \rho \mathbf{e}_{\rho} + \rho\varphi \mathbf{e}_{\varphi}. \tag{3}$$

яғни ρ вектордың жылжымалы $\mathbf{e}_{\rho}$ және $\mathbf{e}_{\varphi}$ орттарға проекциялары тең болады:

$$\mathrm{v}_{\rho} = \dot{\rho} \quad v_{\varphi} = \rho\varphi^{\cdot}, \tag{4}$$

ал жылдамдық векторының модулі:

$$v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \varphi^{\cdot 2}}\,.$$

Нүктенің үдеуі a. (3)-теңдеуді тағы уақыт бойынша дифференциалап, келесі өрнекті табамыз:

$$\mathbf{a} = \ddot{\rho}\mathbf{e}_{\rho} + \rho\dot{\mathbf{e}}_{\rho} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\dot{\varphi})\mathbf{e}_{\varphi} + \rho\dot{\varphi}\dot{\mathbf{e}}_{\varphi}\ .$$

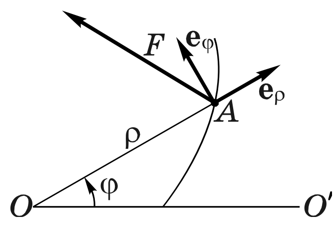
(1) ді ескере отырып, осы теңдеуді түрлендіреміз, сонда

$$\mathbf{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right)\mathbf{e}_{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\mathbf{e}_{\varphi}\,, \tag{5}$$

яғни, **a** вектордың $\mathbf{e}_{\rho}$ және $\mathbf{e}_{\varphi}$ орттарындағы проекциялары:

$$\boldsymbol{a}_{\rho} = \dot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 \qquad \boldsymbol{a}_{\varphi} = 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} = \frac{\mathbf{1}}{\rho}\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}(\rho^2\dot{\varphi}). \tag{6}$$

Полярлық координаттардағы динамиканың негізгі теңдеуі. Динамиканың $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ негізгі теңдеуінің жылжымалы $\mathbf{e}_{\rho}$ және $\mathbf{e}_{\varphi}$ орттарындағы проекцияларын (6) формулаларды пайдалана отырып жеңіл табуға болады:



2-сурет

$$m\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right) = F_{\rho},$$

$$\mathrm{m}\frac{\mathbf{1}}{\rho}\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}(\rho^2\dot{\varphi}) = F_{\varphi}\ , \tag{7}$$

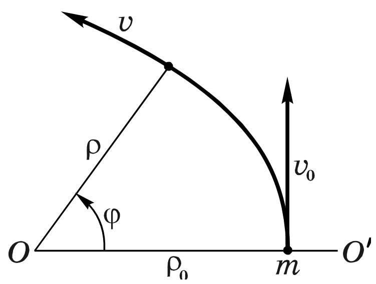
мұндағы F_{ρ} және F_{φ} вектордың $\boldsymbol{e}_{\rho}$ және $\boldsymbol{e}_{\varphi}$ орттарындағы проекциялары (2-сурет)

Бұл суретте $F_{\rho} < 0,\ \mathrm{a}F_{\varphi} > 0$.

2. Кеплер есебі

Кеплер есебі деп бөлшектің өріс центріне дейінгі қашықтықтың квадратына кері пропорционал өшіп отыратын күштердің центрлік өрісіндегі қозғалысы жайлы есепті айтады. Бұл заңға нүктелік массалардың немесе сфералық симметриясы бар денелердің арасындағы ньютондық тартылыс күштері және нүктелік зарядтың арасындағы кулондық күштер бағынады.

Мұндай өрістегі бөлшектің потенциалдық энергиясы $U = -\alpha/\rho$, мұндағы $\alpha -$ тұрақты; ρ – күш центрінен қашықтық. $a > 0$ болатын жағдайды, яғни массасы m бөлшекке әсер ететін күштің өріс центріне бағытталатын жағдайды (тартылыс) қарастырамыз. Егер $\varphi = 0$ кезінде $\rho(0) = \rho_0$ ал жылдамдық радиус векторға перпендикуляр және v_0 болатын кезде бөлшектің полярлық координаттардағы $\rho(\varphi)$ траекториясы қандай болады?



3-сурет

Бұл есепті шешу үшін көбіне энергияның және импульс моментінің сақталу заңдарын пайдаланады. Полярлық координаттарда бұл сақталу заңдары мына түрге келеді:

$$\frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{\alpha}{\rho} = E; \qquad m\rho^2\dot{\varphi} = L$$

мұндағы, E және L бөлшектің толық механикалық энергиясы және бөлшектің өріс центрі – O нүктесіне қатысты анықталған импульс моменті. Бұл екі шаманы да бастапқы шарттардан жеңіл табуға болады.

Бұл теңдеулердің шешу жолы келесі түрде іске асады. Әуелі бірінші теңдеуді уақыт бойынша дифференциалданудан φ бойынша дифференциалдауға көшеді, мұны екінші теңдеудің көмегімен орындайды. $\mathrm{dt} = (m\rho^2/L)d\varphi$ содан кейін ρ, φ айнымалаларын ажыратады, яғни алынған өрнекті $d\varphi = f(\rho)d\rho$ түріне келтіреді. Сосын барып, бұл теңдеуді бастапқы шарттарды ескере отырып, интегралдайды. Интегралдау нәтижесінде іздеп отырған $\rho(\varphi)$ шешімді береді.

Бұл теңдеудің толық шешімі теориялық механиканың кез келген курсында келтіріледі. Сондықтан біз бұл жерде ең маңызды - алынған шешімнің физикалық мағынасын талдаумен шектелеміз. Шешімінің түрі:

$$\rho(\varphi) = \rho_0/[a + (1 - a)cos\varphi]\ .$$

мұндағы, $a = \alpha/m\rho_0\mathbf{v}_0^2$

Математикалық (1)-түрдегі теңдеу екінші ретті қисықты сипаттайды. Параметрдің мәніне тәуелді бұл теңдеу эллипсті (шеңберді), параболаны немесе гиперболаны береді.

1. $a = 1$ кезінде ρ шамасы φ бұрышқа тәуелсіз, яғни траектория шеңбер болып табылады.

Мұндай траектория бөлшектің жылдамдығы болатын кезде болады.

$$\mathbf{v}_1 = \sqrt{\alpha/m\rho_0}\ .$$

2. ρ – қашықтық $\varphi = \pi$ мәніне дейін шектеулі болып қалатын a параметрдің мәндері кезінде траекторияның түрі эллипс болады. $\varphi = \pi$ кезінде (1)-ден болатындығы шығады.

$$\rho(\pi) = \rho_0/(2a - 1)\ .$$

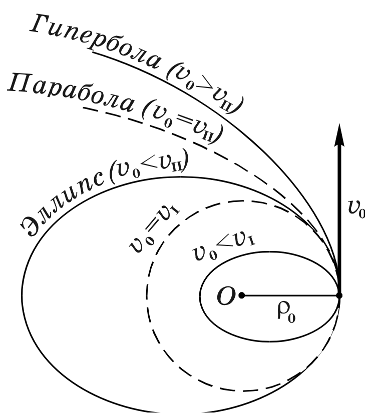
Осыдан көріп отырғанымыздай $\rho(\pi)$ тек $2a > 1$ кезінде ғана, яғни $\mathrm{v}_0 < \mathrm{v}_{\text{п}}$ болатын кезде ғана шектеулі болады екен, мұндағы

$$\mathrm{v}_{\text{п}} = \sqrt{2\alpha/m\rho_0}. \tag{3}$$

3. Егер $2a = 1$, яғни $\mathrm{v}_0 = \mathrm{v}_{\text{п}}$ болса, онда эллипс параболаға айналады, бөлшек қайтып оралмайды.

4. $\mathrm{v}_0 > 0$ кезінде траектория түрі гипербола болады.

Бұл жағдайлардың барлығы да 4-суретте көрсетілген. Эллипстік орбиталар үшін өріс центрі элипстің фокустарының біреуімен бірдей түседі: $\mathrm{v}_0 < \mathrm{v}_1$ кезінде – артқы фокуспен, ал $\mathrm{v}_0 > \mathrm{v}_1$ кезінде – алдыңғы фокуспен ρ .



4-сурет

3. Штейнер теоремасы

Т е о р е м а: Еркін *O* өсіне қатысты қатты дененің инерция моменті – мәлім С өске параллель және дене массасының центрінен өтуші өске қатысты I_C –ингерция моменті мен дененің m массасының өстер аралық a қашықтығы квадратының көбейтінділерін қосқандағы шамаға тең.

$$I = I_C + ma^2\ .$$

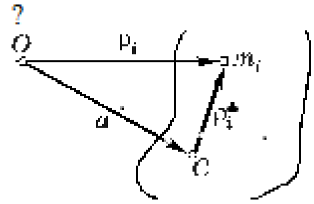
Д э л е л д е у. Қатты дененің $i-$ші элементті O мен C өстеріне қатысты $\boldsymbol{\rho}_i$ мен $\boldsymbol{\rho}_i'$ векторларымен, ал C өсінің орны O өсіне қатысты $\mathbf{a}-$векторымен сипатталады. O өсіне қатысты дененің инерциялық моментінің өрнегін осы векторлар арасындағы байланыс $\boldsymbol{\rho}_i = \boldsymbol{\rho}_i' + \mathbf{a}$ арқылы келесі формуламен түрлендіреміз:

$$I = \sum m_i \boldsymbol{\rho}_i^2 = \sum m_i (\boldsymbol{\rho}_i' + \mathbf{a})^2$$

Немесе

$$I = \sum m_i \rho_i^2 = 2a \sum m_i (\boldsymbol{\rho}_i' + \mathbf{a})^2$$

Оң жақтағы 1-ші қосынды C өсіне қатысты I_C дененің инерция моментіне сай, ал соңғы қосынды жай ғана ma^2 тең.



5-сурет

$\mathbf{r}_i'$ масса ценріне қатысты дененің $i-$ші элементінің радиус-векторы. Осыдан векторлардың қосындысы (3.8) теңдеуге сай $\sum m_i r_i' = 0$. Бірақ $\boldsymbol{\rho}_i' - O$ мен C өстеріне перпендикуляр $\mathbf{r}_i'$ векторының құраушысы. Осыдан векторлардың қорытынды қосындысы нөлге тең болғанда O мен C өстеріне перпендикуляр болған олардың құраушыларының қосындысы да нөлге тең, яғни $\sum m_i \boldsymbol{\rho}_i' = 0$. Теорема осымен дәлелденген болып табылады.

4. Грек алфавиті

$\boldsymbol{A}, \alpha -$ альфа	$\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\iota} -$ **иота**	$\mathrm{P}, \rho -$ ро
$\boldsymbol{B}, \beta -$ бета	$\boldsymbol{K}, \boldsymbol{\varkappa} -$ **каппа**	$\Sigma, \sigma -$ сигма
$\boldsymbol{\Gamma}, \gamma -$ гамма	$\boldsymbol{\Lambda}, -$ **лямда**	$\mathrm{T}, \tau -$ тау
$\boldsymbol{\Delta}, \delta -$ дельта	$\boldsymbol{M}, \mu -$ мю	$\Upsilon, \upsilon -$ имсилон
$\mathbf{E}, \varepsilon -$ эпсилон	$\boldsymbol{N}, \boldsymbol{\nu} -$ **ню**	$\Phi, \varphi -$фи
$\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{\zeta} -$ **дзета**	$\Xi, \boldsymbol{\xi} -$ **кси**	$X, \chi -$ хи
$\boldsymbol{H}, \boldsymbol{\eta} -$ **эта**	$\mathrm{O}, \mathrm{o} -$ омикрон	$\Psi, y -$ пси
$\boldsymbol{\Theta}, \vartheta, \theta -$ тета	$\Pi, \pi -$ пи	$\Omega, \omega -$ омега

5. Негізгі СИ жүйесіндегі өлшем бірліктер

Секунда - **Секунд** - (лат. *secunda divisio* — екінші бөліну) (бастапқыда градустың, одан кейін сағаттың) уақыттың жүйелік бірлігі; СИ жүйесіндегі өлшем бірлігі. Белгіленуі – С; 1 с — Cs атомының (өлшемдер мен салмақтар бойынша 13-Бас конференцияның резолюциясы бойынша, 1967) аса жұқа екі деңгейінің арасынан өткен сәуле шығаруының 9 192 631 770 периодына тең. 2) Жұлдыздық секунд — жұлдыздық тәуліктің – бөлігіне немесе 0,997 269 566 секундқа тең уақыт; 3) Бұрыштық секунд – жазық бұрыштың жүйеден тыс бірлігі. Белгіленуі 1″=(1/360)°4,848137·10–6 радиан.

Метр (фр. *metre*, гр. *metron* – өлшем) – бірліктердің халықаралық жүйесіндегі (СИ) ұзындықтың негізгі өлшем бірлігі. 1960 жылға дейін Метрдің эталоны – ұзындықтың штрихты өлшемі платина-иридий қоспасынан жасалып, Севр қаласындағы (Париж қаласының жанындағы) **Өлшеуіштер мен таразылар** жөніндегі халықаралық бюрода сақталған білеуше (брусок) болған. Өлшеуіштер мен таразылар жөніндегі 11-Бас конференция (1960) Метрдің жаңа анықтамасын қабылдады: “*Метр – Криптон-86 атомының 2p10 және 5d5 деңгейлерінің аралығындағы ауысуы сәйкес келетін сәуле шығаруының вакуумдағы 1650763,73 толқын ұзындығына тең ұзындық*”. КСРО-да алғашқы эталоны ұзындық бірлігі – метрді қайта жаңғыртуға және оның өлшемін ұзындықтың басқа өлшемдеріне таратуда құрамында ұзындықты дәл өлшеуге арналған интерферометр бар аппаратуралар кешенін қолданды. Метр – жуықтап алғанда жер меридианасы ұзындығының 1/40000000 бөлігіне тең.

Килограмм – платина-иридий эталонының массасы, салмақ пен өлшемнің халықаралық бюросысында сақталатын Париждің маңындағы Севр қаласында. Эталонның массасы 4^0С дағы 1 дм^3 таза судың массасына жақын.

6. Алгебра мен тригонометрияның формулалары

Квадрат теңдеулердің түбірлері $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Кейбір жуықталған формулалар . Егер $\alpha \ll 1$, болса онда

$$(1+\alpha)^n \approx 1 + n\alpha \qquad \sin\alpha \approx \alpha$$

$e^{\alpha} \approx 1 + \alpha$ $\qquad$ $\cos\alpha \approx 1 - \alpha^2/2$

$ln(1 + \alpha) \approx \alpha$ $\qquad$ $tg\alpha \approx \alpha$

Негізгі тригонометриялық формулалар:

$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ $\qquad$ $tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$\sin\alpha = 1/\sqrt{1 + ctg^2\alpha}$ $\qquad$ $sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-cos\alpha}{2}$

$\cos\alpha = 1/\sqrt{1 + tg^2\alpha}$ $\qquad$ $cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+cos\alpha}{2}$

$sin2\alpha = 2sin\,\alpha\,cos\,\alpha$ $\qquad$ $cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$

$$sin(\alpha \mp \beta) = sin\,\alpha\,cos\,\beta \mp cos\,\alpha\,sin\,\beta$$

$$cos(\alpha \mp \beta) = cos\,\alpha\,cos\,\beta \mp sin\,\alpha\,sin\,\beta$$

7. Интегралдар туындылар таблицалары

Функциялар	Туындылар	Функциялар	Туындылар
$1/x$	$-1/x^2$	$\sin x$	$\cos x$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$	$\cos x$	$-\sin x$
x^n	x^{n-1}	tgx	$1/cos^2x$
e^{nx}	ne^{nx}	$ctgx$	$-1/sin^2x$
a^x	$a^x lna$	$\arcsin x$	$1/\sqrt{1 - x^2}$
lnx	$1/x$	$\arccos x$	$-1/\sqrt{1 - x^2}$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{vu'_x - v'_x u}{v^2}$	$\mathrm{arctg}\, x$	$1/1 + x^2$
		$\mathrm{arcctg}\, x$	$-1/1 + x^2$

8. Векторлар туралы кейбір мәліметтер

Векторлардың скаляр көбейтінділері:

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba} = abcos\alpha \qquad \mathbf{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac}$$

Векторлардың векторлық көбейтіндісі:

$$[\mathbf{ab}] = -[\mathbf{ba}] \qquad |[\mathbf{ab}]| = \mathrm{absin}\alpha$$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}] = [\boldsymbol{ab}] + [\boldsymbol{ac}]$$

Үш векторлардың аралас немесе векторлық-скалярлық көбейтіндісі скаляр болып табылады және сан мәні осы векторларда тұрғызылған паралелепипедтің көлеміне тең болады:

$$\left[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]\right] = \left[\mathbf{b}[\mathbf{ca}]\right] = \left[\mathbf{c}[\mathbf{ab}]\right]$$

$$\left[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]\right] = -\left[\mathbf{b}[\mathbf{ac}]\right] = -\left[\mathbf{a}[\mathbf{cb}]\right]$$

Векторлық қос көбейтінді:

$$\left[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]\right] = \left[\mathbf{b}[\mathbf{ac}]\right] = -\boldsymbol{c}(\boldsymbol{ab})$$

Векторлардың координаттық өрнектелуіндегі көбейтіндісі: егер

$$\mathbf{a} = \mathbf{a_1e_1} + \mathbf{a_2e_2} + \mathbf{b} = \mathbf{b_1e_1} + \mathbf{b_2e_2} + \mathbf{b_3e_3}$$

болса, мұндағы $\mathbf{e_1}$,$\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_3}$ – координат орттары (өзара перпендикуляр және оң үштік түзеді), онда

$$\mathbf{ab} = \mathrm{a_1b_1} + \mathrm{a_2b_2} + \mathrm{a_3b_3}$$

$$[\mathbf{ab}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ \mathrm{a_1} & \mathrm{a_2} & \mathrm{a_3} \\ \mathrm{b_1} & \mathrm{b_2} & \mathrm{b_3} \end{vmatrix} =$$

$$\big((a_2b_3 - a_3b_2)\big)\boldsymbol{e_1} + (a_3b_1 - a_1b_3)e_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{e_3}$$

Қайсыбір t скаляр айнымалыға тәуелді векторлардың дифференциалдау ережелері:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{dt}} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t}; \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{ab}) = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha\boldsymbol{a}) = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{a} + \alpha\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}; \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{ab}] = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{b}\right] + \left[\boldsymbol{a}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}\right]$$

9. Механикалық шамалардың СИ және СГС жүйелеріндегі өлшем бірліктері

Шамалар	Бірлік		Қатынас $\frac{\text{СИ өлшем бірліктері}}{\text{СГС өлшем бірліктері}}$
	СИ	СГС	
Ұзындық	м	см	10^2
Уақыт	с	с	1
Бұрыш	рад	рад	1
Аудан	$м^2$	$см^2$	10^4
Көлем	$м^3$	$см^3$	10^6
Жылдамдық	м/с	см/с	10^2
Үдеу	$м/с^2$	$см/с^2$	10^2
Тербеліс жиілігі	Гц	Гц	1
Тербелістің шеңбер жиілігі	$с^{-1}$	$с^{-1}$	1
Бұрыштық жылдамдық	Рад/с	Рад/с	1
Бұрыштық үдеу	$Рад/с^2$	$Рад/с^2$	1
Масса	кг	г	10^3
Тығыздық	$кг/м^3$	$г/м^3$	10^{-3}
Күш	Н	дин	10^5
Қысым	Па	$дин/см^3$	10
Жұмыс, энергия	Дж	эрг	10^7
Қуат	Вт	эрг/с	10^7
Импульс	Кг·м/с	г · см/с	10^5
Импульс күші	Н· м	дин· см	10^7
Импульс моменті	$кг\cdot м^2/с$	$г\cdot см^2/с$	10^7
Инерция моменті	$кг/м^2$	$г\cdot см^2$	10^7
Күш моментінің импульсі	Н· м · с	дин · см · с	10^7

10. Бірліктің ондық үстемелері

Т –	тера (10^{12})	с –	санти (10^{-2})
Г –	гига (10^{9})	м –	милли (10^{-3})
М –	мега (10^{6})	мк –	микро (10^{-6})
к –	кило (10^{3})	н –	нано (10^{-9})
г –	гекто (10^{2})	п –	пико (10^{-12})
да –	дека (10^{1})	ф –	фемто (10^{-15})
д –	деци (10^{-1})	а –	атто (10^{-18})

Мысалы: нм – нанометр (10^{-9}м),
кН – килоньютон (10^{3}Н),
Мэв – мегаэлектроновольт(10^{6} эВ),
мкВт – микроватт (10^{-6} вт).

11. Кейбір жүйеден тыс бірліктер

Ұзындық	1 А(ангстрем)=10^{-10}м
	1 а.б.(астрономиялық бірлік)≈1,5· 10^{11} м
	1 ж. ж. (жарық жылы) ≈ 0,95· 10^{16} м
	1 пк (парсек) ≈3,1·10^{16} м
Уақыт	1тәу. (тәулік)= 86400с
	1 ж. (жыл)=3,11· 10^{7} с
Масса	1 м.а.б.(массаның атомдық бірлігі)=1,66· 10^{27} кг
	1 т. (тонна)= 10^{3}кг
Күш	1кгс(килограмм-сила)=9.81 Н
Қысым	1 бар = 10^{5} Па
	1 атм = 1,013· 10^{5} Па
	1 мм.сын.бағ. = 133 Па
Энергия	1 эВ = 1,60· 10^{-19}Дж
	1Вт·сағ=3,6· 10^{3}Дж
Қуат	1 а.к.(ат күші) =736 Вт

12. Астрономиялық шамалар

Аттары	Масса кг	Орташа радиус, м	Орбитаның орташа радиусы, м
Күн	$1{,}9710^{30}$	$6{,}9510^{8}$	-
Жер	$5{,}9610^{34}$	$6{,}3710^{6}$	$1{,}5010^{11}$
Ай	$7{,}3410^{22}$	$1{,}7410^{6}$	$3{,}8410^{8}$

13. Физикалық тұрақтылар

Жарықтың вакуумдегі жылдамдығы	$c=\begin{cases}2.998\cdot10^{8}\\2.998\cdot10^{10}\end{cases}$ м/с
Гравитациялық тұрақтылық	$\gamma=6.67\cdot10^{-11}$ (кг· с^2)
Еркін түсу (стандарттық)	G=9.807 м/с^2
Авагадро тұрақтысы	$N_A=6.025\cdot10^{26}$моль$^{-1}$
Элементар заряды	e=1.602$\cdot10^{-19}$ Кл
Электронның тыныштық массасы	$m_e=0.911\cdot10^{-30}$ кг
Электронның меншікті заряды	$\frac{e}{m_e}=1.76\cdot10^{11}$ Кл/кг
Протонның тыныштық массасы	$m_p=1.672\cdot10^{-27}$ кг
Массаның атомдық бірлігі	$1=\begin{cases}1.660\cdot10^{-27}\\931.5\end{cases}$ кг

ПӘНДІК КӨРСЕТКІШ