

ГЛАВА 2

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЕЙ

§ 2.1. Статические моменты и моменты инерции

Рассмотрим произвольную плоскую фигуру (поперечное сечение стержня) площадью F в прямоугольной системе координат Oxy (рис.2.1). Выделим в плоскости фигуры элемент площади dF с координатами x, y и определим основные геометрические характеристики поперечных сечений, используемые при расчете стержней на прочность и жесткость.

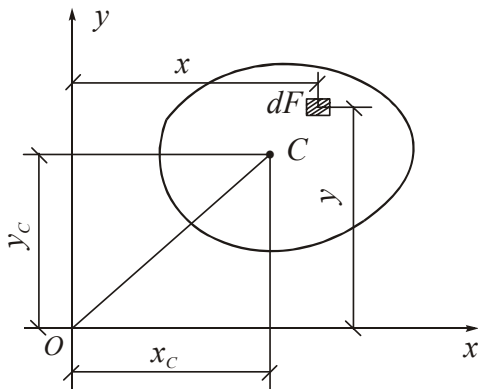


Рис.2.1

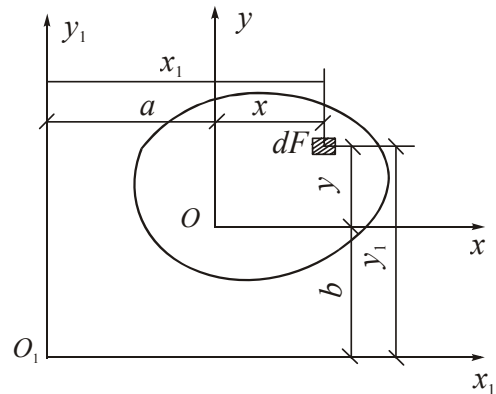


Рис.2.2

Статические моменты сечения относительно осей Ox и Oy :

$$S_x = \iint_F y dF ; \quad S_y = \iint_F x dF . \quad (2.1)$$

Осевые моменты инерции:

$$J_x = \iint_F y^2 dF ; \quad J_y = \iint_F x^2 dF . \quad (2.2)$$

Центробежный момент инерции:

$$J_{xy} = \iint_F xy dF . \quad (2.3)$$

Полярный момент инерции:

$$J_p = \iint_F r^2 dF = \iint_F (x^2 + y^2) dF = J_x + J_y . \quad (2.4)$$

Статические моменты имеют размерность единицы длины в третьей степени (например, см^3), а осевые, центробежный и полярный моменты

инерции – единицы длины в четвертой степени (см⁴).

В зависимости от выбора системы координат статические и центробежный моменты могут быть положительными, отрицательными и равными нулю. Осевые и полярный моменты инерции всегда положительны. Статические моменты используются для определения положения центра тяжести сечения.

На основании известной из теоретической механики теоремы о моменте равнодействующей имеем:

$$S_x = \iint_F y dF = F y_c; \quad S_y = \iint_F x dF = F x_c,$$

где F – площадь всего сечения. Из этих равенств определяются координаты центра тяжести сечения (рис.2.1):

$$x_c = \frac{S_y}{F}; \quad y_c = \frac{S_x}{F}. \quad (2.5)$$

Оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются *центрально-ными осями*. Из (2.5) следует, что статический момент всего сечения относительно любой центральной оси равен нулю.

§ 2.2. Зависимости между моментами инерции относительно параллельных осей

Пусть известны моменты инерции J_x, J_y, J_{xy} сечения относительно центральных осей Ox, Oy (рис.2.2). Определим моменты инерции $J_{x_1}, J_{y_1}, J_{x_1y_1}$ относительно осей O_1x_1, O_1y_1 , параллельных осям Ox, Oy . Обозначим через a и b координаты точки O в системе координат $O_1x_1y_1$. В соответствии с (рис.2.2) $x_1 = x + a, y_1 = y + b$. С учетом этого получим

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= \iint_F y_1^2 dF = \iint_F (y + b)^2 dF = \iint_F y^2 dF + \\ &+ 2b \iint_F y dF + b^2 \iint_F dF = J_x + 2bS_x + b^2F. \end{aligned}$$

Так как ось Ox проходит через центр тяжести сечения, то $S_x = 0$. Формулы для J_{y_1} и $J_{x_1y_1}$ выводятся аналогично. В результате будем иметь следующие три соотношения:

$$J_{x_1} = J_x + b^2F; \quad J_{y_1} = J_y + a^2F; \quad J_{x_1y_1} = J_{xy} + abF. \quad (2.6)$$

§ 2.3. Изменение моментов инерции при

повороте координатных осей

Пусть известны моменты инерции J_x, J_y, J_{xy} сечения относительно осей Ox, Oy (рис.2.3). Определим моменты инерции $J_{x_1}, J_{y_1}, J_{x_1y_1}$ относительно осей Ox_1, Oy_1 , повернутых по отношению к осям Ox, Oy на угол α . В соответствии с рис.2.3 имеем:

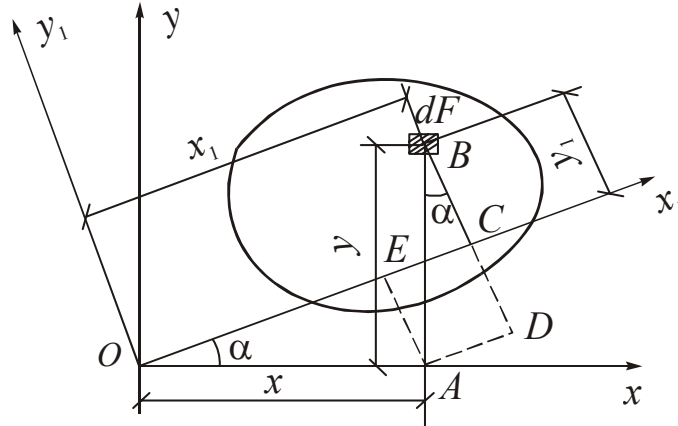


Рис.2.3

$$x_1 = OC = OE + AD = x \cos \alpha - y \sin \alpha ;$$

$$y_1 = BC = BD - EA = y \cos \alpha - x \sin \alpha .$$

Учитывая эти равенства, получим

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= \iint_F y_1^2 dF = \iint_F (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dF = \\ &= \cos^2 \alpha \iint_F y^2 dF + \sin^2 \alpha \iint_F x^2 dF - \sin 2\alpha \iint_F xy dF = \\ &= J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha . \end{aligned}$$

Формулы для J_{y_1} и $J_{x_1y_1}$ выводятся аналогично. В результате будем иметь следующие три соотношения:

$$J_{x_1} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha ;$$

$$J_{y_1} = J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha ; \quad (2.7)$$

$$J_{x_1y_1} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha .$$

Используя формулы

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha), \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha),$$

можно преобразовать соотношения (2.7) к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 J_{x_1} &= \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\delta - J_{xy} \sin 2\delta ; \\
 J_{y_1} &= \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\delta + J_{xy} \sin 2\delta ; \\
 J_{x_1 y_1} &= \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\delta + J_{xy} \cos 2\delta .
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Складывая почленно первые две формулы (2.8), получим

$$J_{x_1} + J_{y_1} = J_x + J_y = J_p . \tag{2.9}$$

Таким образом, сумма двух осевых моментов инерции относительно взаимно перпендикулярных осей не изменяется при повороте осей и равна полярному моменту инерции J_p .

§ 2.4. Главные оси и главные моменты инерции

Исследуем на экстремум момент инерции J_{x_1} как функцию угла α

$$\frac{dJ_{x_1}}{d\delta} = -2 \left(\frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\delta + J_{xy} \cos 2\delta \right) = -2 J_{x_1 y_1} = 0 .$$

Отсюда находим

$$\operatorname{tg} 2\delta = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y} . \tag{2.10}$$

Аналогичный результат получим при исследовании на экстремум момента инерции J_{y_1} . Отсюда следует, что осевые моменты инерции имеют экстремальные значения относительно осей, для которых центробежный момент инерции равен нулю.

Такие две взаимно перпендикулярные оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются *главными осями инерции* сечения. Осевые моменты инерции относительно таких осей имеют экстремальные значения – один J_{max} , другой J_{min} ; они называются *главными моментами инерции*.

В дальнейшем для главных осей инерции используются цифровые обозначения 1 и 2 и, соответственно, для главных моментов инерции – обозначения $J_1 = J_{max}$ и $J_2 = J_{min}$.

Если главные оси проходят через центр тяжести сечения, то они называются *главными центральными осями*. Определение положения этих осей имеет наибольшее практическое значение.

Формулы для углов, определяющих положение главных осей, удобнее записать с использованием главных моментов инерции J_1, J_2 (приведем эти формулы без вывода):

$$\operatorname{tg} 2\beta_1 = -\frac{2J_{xy}}{J_y - J_1}; \quad \operatorname{tg} 2\beta_2 = -\frac{2J_{xy}}{J_y - J_2}. \quad (2.11)$$

Для определения главных моментов инерции необходимо в (2.8) с помощью известных формул тригонометрии выразить $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ через $\operatorname{tg} 2\alpha$ с использованием выражения (2.10). В результате получим формулы для главных моментов инерции

$$J_{1,2} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}. \quad (2.12)$$

Приведем без доказательства основные свойства моментов инерции.

1. При повороте двух взаимно перпендикулярных осей на 90° или при изменении направления одной из осей на противоположное центробежный момент инерции меняет знак.

2. Ось симметрии сечения и любая ось, ей перпендикулярная, составляют пару главных осей.

3. Главная центральная ось сечения и любая ось, ей перпендикулярная, составляют пару главных осей.

4. Если моменты инерции относительно двух взаимно перпендикулярных главных осей, проходящих через некоторую точку сечения, равны по величине, то все оси, проходящие через эту точку, также являются главными и моменты инерции относительно всех этих осей одинаковы. Действительно, если в формулах (2.8) положить $J_x = J_y$ и $J_{xy} = 0$, то есть принять, что оси Ox и Oy являются главными осями, то при произвольном значении угла будем иметь

$$J_{x_1} = J_{y_1} = J_x = J_y, \quad J_{x_1 y_1} = J_{xy} = 0.$$

Указанным свойством обладают сечения, имеющие более двух осей симметрии, у которых все центральные оси являются главными. К таким относятся, например, изображенные на рис.2.4 сечения в виде круга, равносностороннего треугольника, квадрата, правильного многоугольника. Осевые моменты инерции у таких сечений относительно всех центральных осей одинаковы.

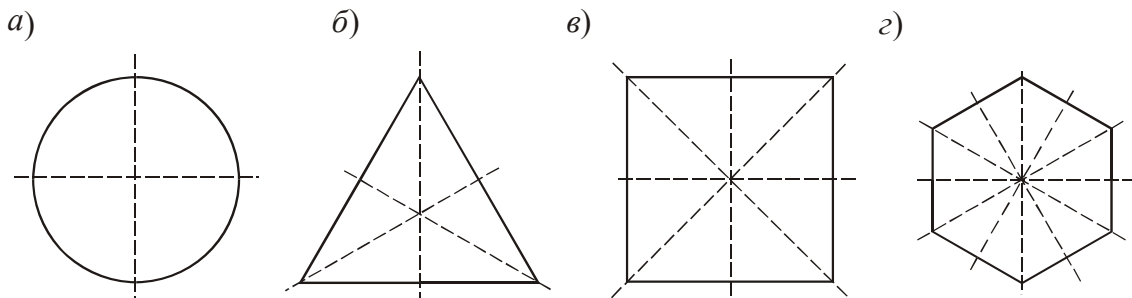


Рис.2.4

§ 2.5. Моменты инерции простых сечений

Прямоугольник. Найдем моменты инерции относительно главных центральных осей, которые в соответствии со свойством 2 совпадают с осями симметрии прямоугольника (рис.2.5). Приняв в качестве элемента площади элементарную полоску $dF = bdy$, получим

$$J_x = \iint_F y^2 dF = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = \frac{bh^3}{12}.$$

Момент инерции относительно оси Ox_1 определим по первой из формул (2.6):

$$J_{x_1} = \frac{bh^2}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{3}.$$

Моменты инерции J_y и J_{y_1} находятся аналогично.

Приведем формулы для осевых моментов инерции прямоугольника:

$$J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad J_y = \frac{hb^3}{12}; \quad J_{x_1} = \frac{bh^3}{3}; \quad J_{y_1} = \frac{hb^3}{3}. \quad (2.13)$$

Произвольный треугольник. Вначале найдем моменты инерции относительно оси O_2x_2 , проходящей через вершину треугольника (рис.2.6). Приняв в качестве элемента площади элементарную полоску

$$dF = b(y_2)dy_2 = \frac{by_2}{h} dy_2,$$

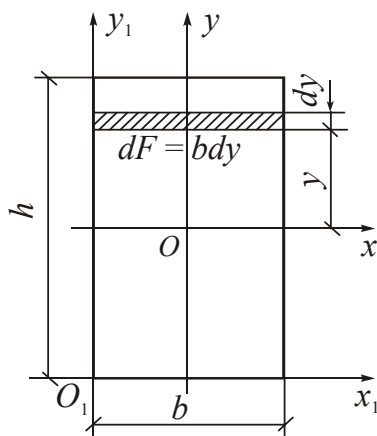


Рис.2.5

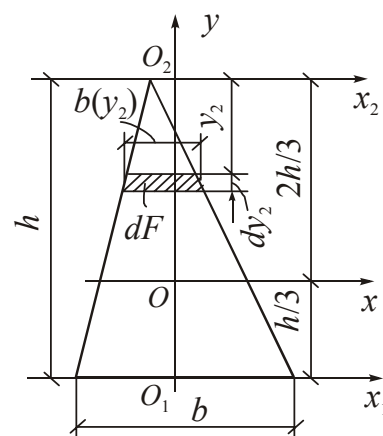


Рис.2.6

получим

$$J_{x_2} = \iint_F y_2^2 dF = \frac{b}{h} \int_0^h y_2^3 dy_2 = \frac{bh^3}{4} .$$

Моменты относительно осей Ox и O_1x_1 , параллельных O_2x_2 и проходящих соответственно через центр тяжести и по основанию треугольника, находим с помощью формулы (2.6):

$$J_x = J_{x_2} - b_1^2 F = \frac{bh^3}{4} - \left(\frac{2h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36} ;$$

$$J_{x_1} = J_x + b_2^2 F = \frac{bh^3}{36} + \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{12} .$$

Приведем формулы для осевых моментов инерции треугольника относительно осей, параллельных основанию:

$$J_x = \frac{bh^3}{36} ; \quad J_{x_1} = \frac{bh^3}{12} ; \quad J_{x_2} = \frac{bh^3}{4} . \quad (2.14)$$

Прямоугольный и равнобедренный треугольники. Для прямоугольного треугольника (рис.2.7) определим центробежный момент инерции J_{xy} относительно центральных осей Ox и Oy , параллельных катетам. Это можно сделать, воспользовавшись формулой (2.3). Однако, решение задачи можно упростить, если применить следующий прием. С помощью медианы AO_1 разделим заданный треугольник на два равнобедренных треугольника AO_1B и AO_1C . Оси O_1x_1 и O_1y_1 являются осями симметрии для этих треугольников и на основании

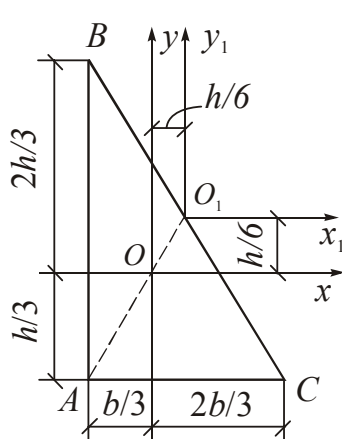


Рис.2.7

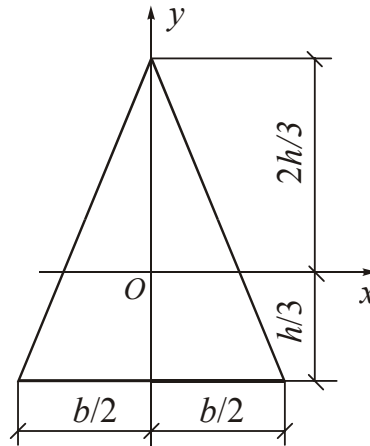


Рис.2.8

свойства 2 (§ 2.4) будут главными осями каждого из них по отдельности, а следовательно, и всего треугольника ABC . Поэтому центробежный момент инерции $J_{x_1y_1} = 0$. Центробежный момент треугольника относительно осей Ox и Oy найдем с помощью последней из формул (2.6):

$$J_{xy} = J_{x_1y_1} - a_1 b_1 F = -\left(-\frac{h}{6}\right)\left(-\frac{b}{6}\right) \frac{bh}{2} = -\frac{b^2 h^2}{72} . \quad (2.15)$$

Момент инерции равнобедренного треугольника относительно оси симметрии Oy (рис.2.8) определим, используя вторую из формул (2.14), как удвоенный момент инерции прямоугольного треугольника с основанием h и высотой $b/2$:

$$J_y = \frac{2h(0,5b)^3}{12} = \frac{hb^3}{48}. \quad (2.16)$$

Круг. Вначале удобно вычислить полярный момент инерции круга по формуле (2.4), воспользовавшись полярной системой координат (рис.2.9).

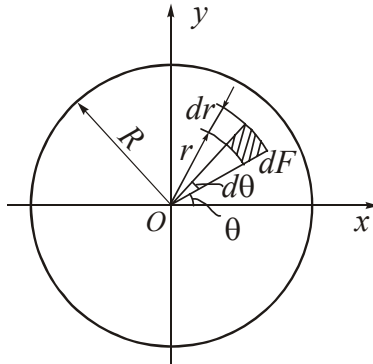


Рис.2.9

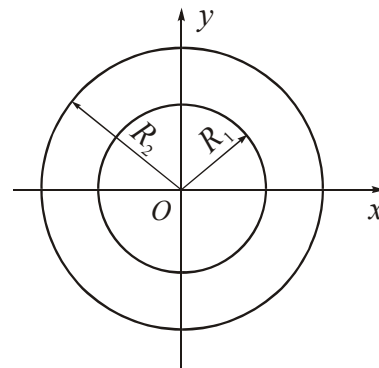


Рис.2.10

Учитывая, что $dF = r dr d\theta$, найдем

$$J_p = \iint_F r^2 dF = \int_0^{2\pi} du \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi R^4}{2}. \quad (2.17)$$

Учитывая, что для круга $J_x = J_y$ и полярный момент согласно (2.4) равен сумме двух осевых моментов, получим

$$J_x = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}. \quad (2.18)$$

Кольцевое сечение. Моменты инерции кольца (рис.2.10) находятся как разность моментов инерции двух кругов с радиусами R_2 и R_1 :

$$J_p = \frac{\pi}{2}(R_2^4 - R_1^4) = \frac{\pi}{32}(D_2^4 - D_1^4). \quad (2.19)$$

Полукруг. Выделим элемент площади dF с полярными координатами r, θ и декартовыми координатами x_1, y_1 , для которых в соответствии с рис.2.11 имеем:

$$x_1 = r \cos\theta; \quad y_1 = r \sin\theta; \quad dF = r dr d\theta.$$

По формулам (2.1) и (2.5) найдем соответственно статический момент полукруга относительно оси O_1x_1 и ординату y_0 центра тяжести O в системе координат $O_1x_1y_1$:

$$S_{x_1} = \iint_F y_1 dF = \int_0^{\pi} \sin u du \int_0^R r^2 dr = \frac{2R^3}{3};$$

$$y_0 = \frac{S_{x_1}}{F} = \frac{4R^3}{3\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi} \approx 0,424R. \quad (2.20)$$

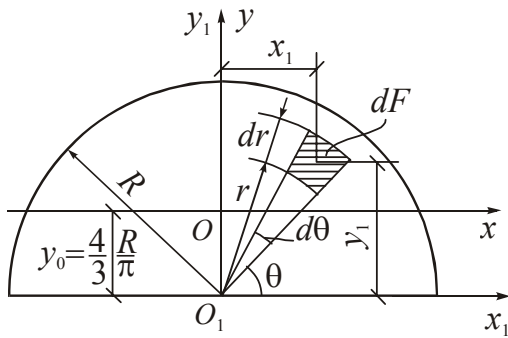


Рис.2.11

Относительно осей O_1x_1 и O_1y_1 , которые являются главными осями для полукруга, осевые моменты инерции равны половине момента инерции круга

$$J_{x_1} = J_{y_1} = \frac{\pi R^4}{8}. \quad (2.21)$$

Момент инерции относительно главной центральной оси определяется с помощью первой формулы (2.6):

$$J_x = J_{x_1} - b^2 F = \frac{\pi R^4}{8} - \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 \frac{\pi R^2}{2} \approx 0,11R^4. \quad (2.22)$$

Геометрические характеристики сечений прокатных профилей (двутавры, швеллеры, уголки) приведены в таблицах сортамента прокатной стали (см. приложение).

§ 2.6. Моменты инерции составных сечений

При определении моментов инерции составного сечения последнее разбивают на простые фигуры, у которых известны положения центров тяжести и моменты инерции относительно собственных центральных осей. По формулам (2.5) находят координаты центра тяжести всего сечения в системе произвольно выбранных вспомогательных осей. Параллельно этим осям проводят центральные оси, относительно которых определяют осевые и центробежный моменты инерции по формулам (2.6). Моменты инерции относительно главных центральных осей определяются по формуле (2.12), а положение главных центральных осей – по формулам (2.11).

Пример 2.1. Определим моменты инерции относительно главных центральных осей поперечного сечения двутавровой балки **I30**, усиленной двумя стальными листами сечением 200×20 мм (рис.2.12).

Оси симметрии Ox , Oy являются главными центральными осями всего сечения. Выпишем из сортамента (см. приложение) площадь и моменты инерции сечения двутавра относительно осей Ox , Oy :

$$J_x^{(1)} = 7080 \text{ см}^4; \quad J_y^{(1)} = 337 \text{ см}^4; \quad F_1 = 46,5 \text{ см}^2.$$

Моменты инерции сечений листов относительно собственных центральных осей O_1x_1 , O_2x_2 , Oy определим по формулам (2.14)

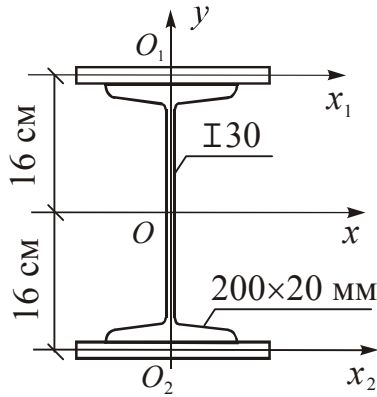


Рис.2.12

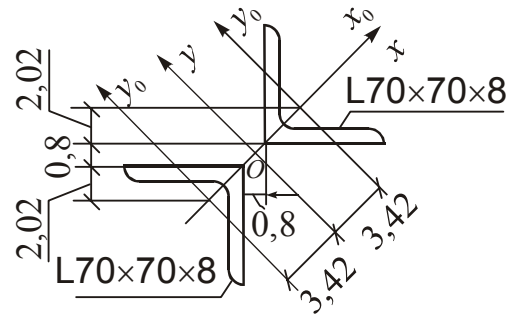


Рис.2.13

$$J_{x_1}^{(2)} = J_{x_2}^{(2)} = \frac{20 \cdot 2^3}{12} = 13,3 \text{ см}^4; \quad J_y^{(2)} = \frac{2 \cdot 20^3}{12} = 1333 \text{ см}^4; \quad F_2 = 40 \text{ см}^2.$$

Площадь всего сечения равна $F = 46,5 + 2 \cdot 40 = 126,5 \text{ см}^2$.

Моменты инерции сечения относительно главных центральных осей Ox , Oy определяются по формулам (2.6):

$$J_x = J_x^{(1)} + 2(J_x^{(2)} + F_2 b^2) = 7080 + 2(13,3 + 40 \cdot 16^2) = 27587 \text{ см}^4;$$

$$J_y = J_y^{(1)} + 2 J_y^{(2)} = 337 + 2 \cdot 1333 = 3003 \text{ см}^4.$$

Пример 2.2. Определим моменты инерции относительно главных центральных осей поперечного сечения стойки стропильной фермы из двух равнобоких уголков $L 70 \times 70 \times 8$, составленных крестообразно (рис.2.13). Совместная работа уголков обеспечивается соединительными планками.

Координаты центра тяжести сечения уголка, площадь и моменты инерции относительно собственных центральных осей Ox_0 и Oy_0 приведены в сортаменте:

$$J_{x_0} = 76,4 \text{ см}^4; \quad J_{y_0} = 20 \text{ см}^4; \quad F = 10,7 \text{ см}^2.$$

Расстояние от центра тяжести O всего сечения до центра тяжести уголка равно $a = (2,02 + 0,4)\sqrt{2} = 3,42 \text{ см}$.

Площадь всего сечения равна $F = 2 \cdot 10,7 = 21,4 \text{ см}^2$.

Моменты инерции относительно главных центральных осей, которыми являются оси симметрии Ox , Oy определяются по формулам (2.6):

$$J_x = 2J_{x_0} = 76,4 \cdot 2 = 152,8 \text{ см}^4;$$

$$J_y = 2(J_{y_0} + F a^2) = 2(20 + 10,7 \cdot 3,42^2) = 290,3 \text{ см}^4.$$

Пример 2.3. Определим положение центра тяжести и моменты инерции относительно главных центральных осей поперечного сечения балки, составленной из двух швеллеров $I 33$ и стального листа сечением $480 \times 12 \text{ мм}$ (рис.2.14).

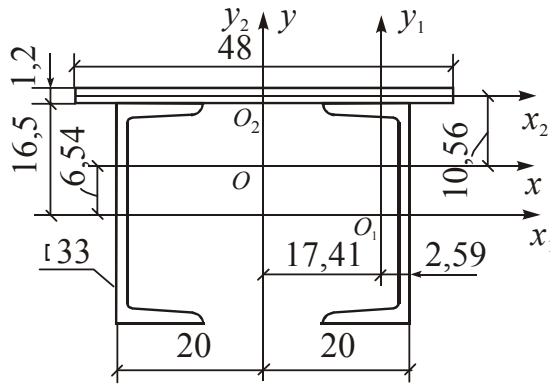


Рис.2.14

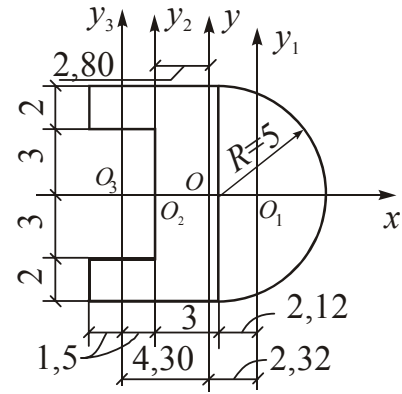


Рис.2.15

Площадь сечения моменты инерции швеллера и листа относительно собственных центральных осей соответственно равны:

$$F_1 = 46,5 \text{ см}^2; \quad J_{x_1} = 7980 \text{ см}^4; \quad J_{y_1} = 410 \text{ см}^4;$$

$$F_2 = 48 \cdot 1,2 = 57,6 \text{ см}^2; \quad J_{x_2} = \frac{48 \cdot 1,2^3}{12} = 6,9 \text{ см}^4; \quad J_{y_2} = \frac{1,2 \cdot 48^3}{12} = 11059 \text{ см}^2.$$

Площадь всего сечения равна $F = 2 \cdot 46,5 + 57,6 = 150,6 \text{ см}^2$.

Сечение имеет вертикальную ось симметрии, поэтому необходимо определить только ординату y_o центра тяжести. Выберем в качестве вспомогательной оси центральную ось швеллера O_1x_1 и найдем статический момент всего сечения относительно этой оси

$$S_{x_1} = F_2 y_2 = 57,6 \cdot 17,1 = 985 \text{ см}^3.$$

По второй из формул (2.5) получим

$$y_o = \frac{S_{x_1}}{F} = \frac{985}{150,6} = 6,54 \text{ см}.$$

Отложим эту величину от оси O_1x_1 в положительном направлении оси O_1y_1 и проведем ось Ox , которая вместе с Oy составляет пару главных центральных осей сечения. Определив координаты центров тяжести швеллера и листа в системе координат Oxy (рис.2.14) $a_1 = 17,41 \text{ см}$, $b_1 = -6,54 \text{ см}$, $a_2 = 0$, $b_2 = 10,56 \text{ см}$, по формулам (2.6) найдем моменты инерции сечения относительно осей Ox и Oy :

$$\begin{aligned} J_x &= 2(J_{x_1} + F_1 b_1^2) + J_{x_2} + F_2 b_2^2 = \\ &= 2(7980 + 46,5(-6,54)^2) + 6,9 + 57,6 \cdot 10,56^2 = 26368 \text{ см}^4; \\ J_y &= 2(J_{y_1} + F_1 a_1^2) + J_{y_2} = 2(410 + 46,5 \cdot 17,41^2) + 11059 = 40068 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Пример 2.4. Определим положение центра тяжести и моменты инерции относительно главных центральных осей сечения, состоящего из полукруга и

прямоугольника с вырезом (рис.2.15). Размеры сечения на рисунке даны в сантиметрах.

Разобьем сечение на три простые фигуры: полукруг с радиусом $R = 5$ см, прямоугольник с размерами сторон 6×10 см, прямоугольный вырез с размерами 3×6 см и определим площади и моменты инерции этих фигур относительно собственных центральных осей.

Для полукруга по формулам (2.21) и (2.22) имеем

$$J_x^{(1)} = \frac{3,14 \cdot 5^4}{8} = 245,3 \text{ см}^4, \quad J_y^{(1)} = 0,11 \cdot 5^4 = 68,7 \text{ см}^4;$$

$$F_1 = \frac{3,14 \cdot 5^2}{2} = 39,2 \text{ см}^2.$$

Положение центра тяжести O_1 полукруга определяется по формуле (2.20) и равно $0,424 \cdot 5 = 2,12$ см (рис.2.15).

Для прямоугольника и прямоугольного выреза по формулам (2.13) получим

$$J_x^{(2)} = \frac{6 \cdot 10^3}{12} = 500 \text{ см}^4, \quad J_y^{(2)} = \frac{10 \cdot 6^3}{12} = 180 \text{ см}^4, \quad F_2 = 6 \cdot 10 = 60 \text{ см}^2;$$

$$J_x^{(3)} = \frac{3 \cdot 6^3}{12} = 54 \text{ см}^4, \quad J_y^{(3)} = \frac{6 \cdot 3^3}{12} = 13,5 \text{ см}^4, \quad F_3 = 3 \cdot 6 = 18 \text{ см}^2.$$

Площадь всего сечения равна $F = 39,2 + 60 - 18 = 81,2 \text{ см}^2$.

Центр тяжести O сечения лежит на горизонтальной оси симметрии. Для определения его положения выберем в качестве вспомогательной оси центральную ось прямоугольника O_2y_2 . Тогда получим

$$x_0 = \frac{S_{y_2}}{F} = \frac{F_1 x_1 - F_3 x_3}{F} = \frac{39,2 \cdot 5,12 - 18(-1,5)}{81,2} = 2,80 \text{ см}.$$

Отложим эту величину от оси O_2y_2 вправо и проведем ось Oy , которая вместе с осью Ox составит пару главных центральных осей всего сечения. Определим координаты центров тяжести отдельных фигур в системе координат Oxy : $a_1 = 2,32$ см, $a_2 = -2,80$ см, $a_3 = -4,30$ см (рис.2.15).

По формулам (2.6) найдем моменты инерции сечения относительно осей Ox и Oy :

$$J_x = J_x^{(1)} + J_x^{(2)} - J_x^{(3)} = 245,3 + 500 - 54 = 691,3 \text{ см}^4;$$

$$J_y = J_{y_1}^{(1)} + F_1 a_1^2 + J_{y_2}^{(2)} + F_2 a_2^2 - J_{y_3}^{(3)} - F_3 a_3^2 = 68,7 + 39,2 \cdot 2,32^2 +$$

$$+ 180 + 60(-2,80)^2 - 13,5 - 18(-4,30)^2 = 583,8 \text{ см}^4.$$

Пример 2.5. Для стержня несимметричного сечения, составленного из швеллера I 30 и неравнобокого уголка L180×110×12 (рис.2.16), определим центр тяжести сечения, моменты инерции относительно главных центральных осей и положение этих осей. На рисунке размеры даны в сантиметрах.

Выпишем геометрические характеристики сечения швеллера

$$F_1 = 40,5 \text{ см}^2, \quad J_{x_1} = 5810 \text{ см}^4, \quad J_{y_1} = 327 \text{ см}^4, \quad J_{x_1 y_1} = 0.$$

Геометрические характеристики сечения неравнобокого уголка (рис.2.17)

$$F_2 = 33,7 \text{ см}^2, \quad J_{x_2} = 324 \text{ см}^4, \quad J_{y_2} = 1123 \text{ см}^4, \quad J_u = J_{\min} = 194 \text{ см}^4.$$

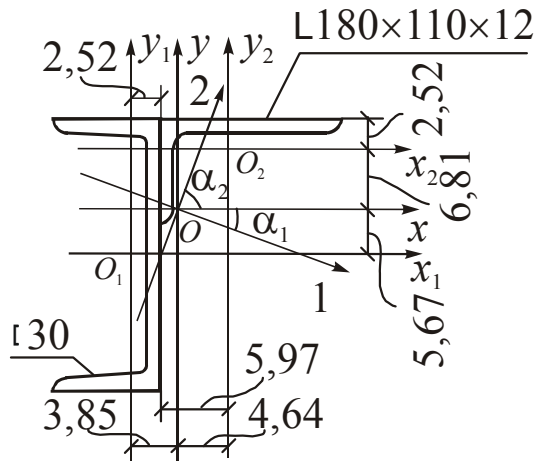


Рис.2.16

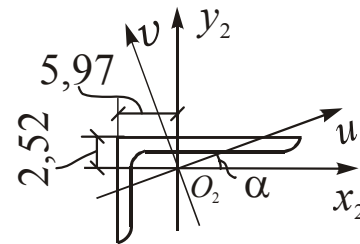


Рис.2.17

Величину центробежного момента инерции уголка $J_{x_2 y_2}$ (в сортаменте она не приведена) определим по второй из формул (2.11):

$$J_{x_2 y_2} = (J_{y_2} - J_u) \operatorname{tg} \alpha = (1123 - 194) 0,374 = 347 \text{ см}^4,$$

где $\operatorname{tg} \alpha = 0,374$ – тангенс угла наклона главной оси u к оси Ox_2 , величина которого приведена в сортаменте.

Площадь всего сечения равна $F = 40,5 + 33,7 = 74,2 \text{ см}^2$.

Для определения положения центра тяжести выберем в качестве вспомогательных осей оси швеллера $O_1 x_1$ и $O_1 y_1$. Тогда по формулам (2.5) получим

$$x_o = \frac{S_{y_1}}{F} = \frac{F_2 x_2}{F} = \frac{33,7(2,52 + 5,97)}{74,2} = 3,85 \text{ см};$$

$$y_o = \frac{S_{x_1}}{F} = \frac{F_2 y_2}{F} = \frac{33,7(15 - 2,52)}{74,2} = 5,67 \text{ см}.$$

Эти величины и координаты центров тяжести швеллера и уголка в системе координат Oxy показаны на рис.2.16 и соответственно равны:

$$a_1 = -3,85 \text{ см}, \quad b_1 = -5,67 \text{ см}, \quad a_2 = 4,64 \text{ см}, \quad b_2 = 6,81 \text{ см}.$$

Определим по формулам (2.6) моменты инерции сечения относительно центральных осей Ox и Oy .

$$J_x = J_{x_1} + F_1 b_1^2 + J_{x_2} + F_2 b_2^2 =$$

$$= 5810 + 40,5(-5,67)^2 + 324 + 33,7 \cdot 6,81^2 = 8999 \text{ см}^4;$$

$$\begin{aligned}
 J_y &= J_{y_1} + F_1 a_1^2 + J_{y_2} + F_2 a_2^2 = \\
 &= 327 + 40,5(-3,85)^2 + 1123 + 33,7 \cdot 4,64^2 = 2776 \text{ см}^4 ; \\
 J_{xy} &= J_{x_1 y_1} + F_1 a_1 b_1 + J_{x_2 y_2} + F_2 a_2 b_2 = \\
 &= 40,5(-3,85)(-5,67) + 347 + 33,7 \cdot 4,64 \cdot 6,81 = 2296 \text{ см}^4 .
 \end{aligned}$$

По формулам (2.12) и (2.11) найдем величины главных моментов инерции и углы наклона главных осей 1 и 2 к оси Ox :

$$\begin{aligned}
 J_{1,2} &= \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} = \frac{8999 + 2776}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8999 - 2776}{2}\right)^2 + 2296^2} ; \\
 J_1 &= 5888 + 3867 = 9755 \text{ см}^4, \quad J_2 = 5888 - 3867 = 2021 \text{ см}^4 ; \\
 \operatorname{tg} \beta_1 &= \frac{J_{xy}}{J_y - J_1} = \frac{2296}{2776 - 9755} = -0,329, \quad \alpha_1 = -18^\circ 12' ; \\
 \operatorname{tg} \beta_2 &= \frac{J_{xy}}{J_y - J_2} = \frac{2296}{2776 - 2021} = 3,037, \quad \alpha_2 = 71^\circ 48' .
 \end{aligned}$$

§ 2.7. Определение моментов инерции с помощью круга инерции

Если в формулах (2.8) в качестве исходных осей принять главные оси 1 и 2, а повернутыми считать оси Ox и Oy , то после введения обозначений

$$a = \frac{J_1 + J_2}{2}, \quad R = \frac{J_1 - J_2}{2},$$

указанные формулы примут вид

$$J_x = a + R \cos 2\beta; \quad J_y = a - R \cos 2\beta; \quad J_{xy} = R \sin 2\beta. \quad (2.23)$$

Из этих формул видно, что момент инерции J_y может быть получен из выражения для J_x заменой α на $\alpha + 90^\circ$.

Первая и третья из формул (2.23) представляют собой параметрические уравнения окружности в осях J_x и J_{xy} с радиусом R и центром на оси J_x на расстоянии a от начала координат (рис.2.18). Абсцисса произвольной точки K_1 этой окружности равна осевому моменту инерции J_x относительно оси Ox , которая составляет угол α с главной осью 1. Ордината точки K_1 равна центробежному моменту инерции J_{xy} относительно осей Ox, Oy .

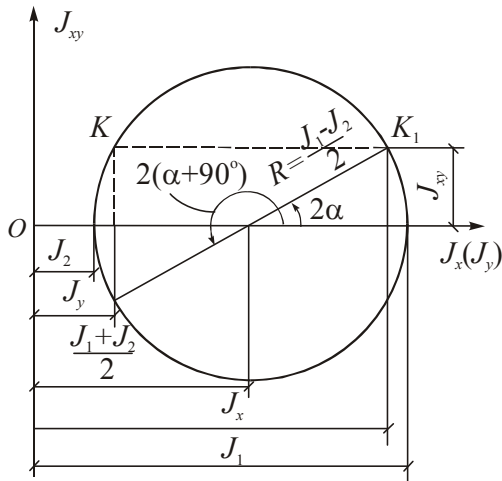


Рис.2.18

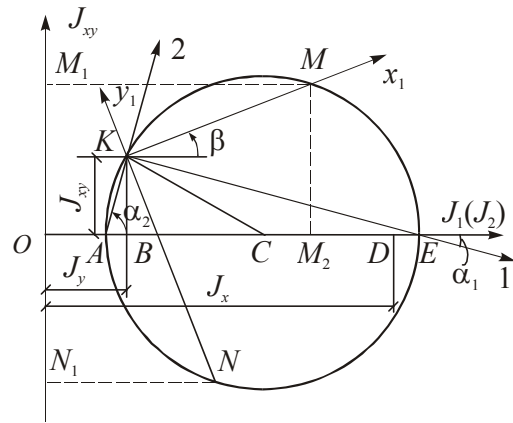


Рис.2.19

Координаты точки K , называемой полюсом, равны соответственно J_y и J_{xy} .

Круг, изображенный на рис.2.18, называется кругом инерции. С помощью круга инерции можно графически определить моменты инерции относительно произвольных осей. При этом обычно строят круг инерции по известным моментам инерции J_x, J_y, J_{xy} , вычисленным относительно произвольных осей Ox и Oy . Приведем это построение (рис.2.19).

На горизонтальной оси отложим $OD = J_x$ и $OB = J_y$. Поделив отрезок BD пополам, получим центр круга Мора C , причем $OC = (J_x + J_y)/2$. Отложив из конца отрезка $OB = J_y$ величину $J_{xy} = BK$ со своим знаком, получим полюс K круга инерции. Проводя радиусом CK окружность и далее через полюс K лучи KE и KA , найдем величины главных моментов инерции $J_1 = OE, J_2 = OA$ и углы наклона α_1 и α_2 главных осей 1 и 2 к оси Ox .

С помощью приведенных на рис.2.19 построений можно получить формулы для величин главных моментов инерции (2.12) и углов наклона главных осей (2.11). Действительно, определив из прямоугольного треугольника BCK радиус круга Мора

$$R = KC = \sqrt{BC^2 + BK^2} = \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2},$$

получим

$$J_{1,2} = OC \pm R = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}.$$

Тангенсы углов наклона главных осей 1 и 2 к оси Ox определяются из прямоугольных треугольников $BЕК$ и $ВАК$.

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = -\frac{BK}{BE} = \frac{J_{xy}}{J_y - J_1}; \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{BK}{AB} = \frac{J_{xy}}{J_y - J_2}.$$

Знак минус в первой формуле объясняется тем, что угол является отрицательным.

Для определения величин моментов инерции J_{x_1} , J_{y_1} , $J_{x_1y_1}$ относительно произвольных взаимно перпендикулярных осей Ox_1 и Oy_1 , наклоненных к оси Ox на угол β , необходимо через полюс K провести под углом β к горизонтали ось Ox_1 и перпендикулярно к ней ось Oy_1 до пересечения этих осей с окружностью в точках M и N . Можно показать, что искомые величины моментов инерции соответственно равны $J_{x_1} = MM_1$, $J_{y_1} = NN_1$, $J_{x_1y_1} = MM_2$.

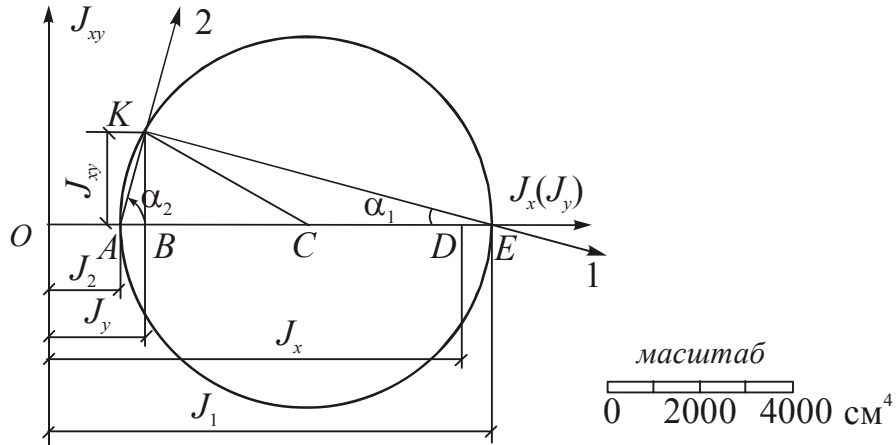


Рис.2.20

В качестве иллюстрации на рис. 2.20 приведено построение круга Мора для числового примера 2.5, рассмотренного в § 2.6.