

ГЛАВА 3

ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ СТЕРЖНЯ

§ 3.1. Определение продольных сил

Центральное растяжение и сжатие прямого стержня вызывается действием осевых нагрузок. В их состав входят сосредоточенные силы и нагрузки, распределенные по длине всего стержня или его некоторого участка (рис.3.1). При постоянной интенсивности $q = const$ нагрузка называется равномерно распределенной, равнодействующая которой равна qa , где a – длина участка распределения.

В качестве распределенной осевой нагрузки часто рассматривается собственный вес стержня $q = \gamma F$, где γ – объемный вес материала стержня и F – площадь его поперечного сечения.

В местах закрепления стержня при нагружении возникают опорные реакции, подлежащие определению из уравнения равновесия $\sum X = 0$.

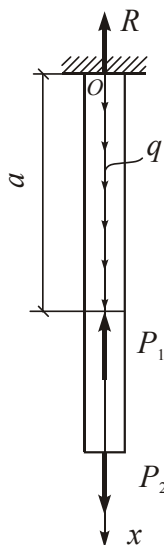


Рис.3.1

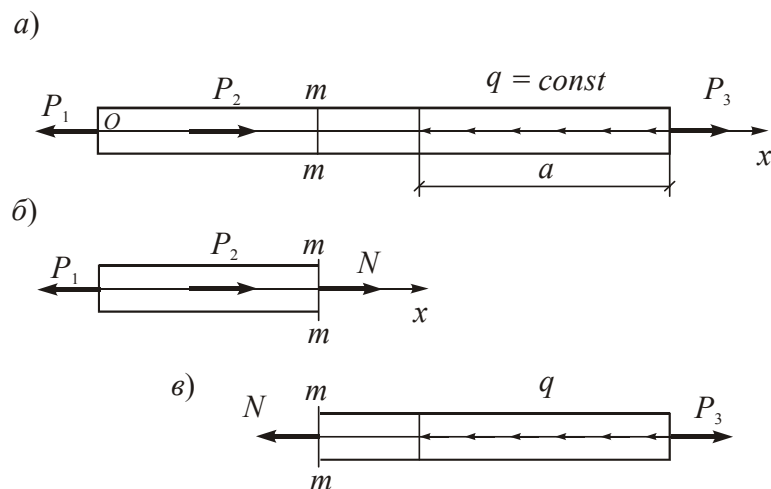


Рис.3.2

При центральном растяжении и сжатии прямого стержня в его поперечных сечениях действует только одно внутреннее усилие – продольная сила N , определяемая с помощью метода сечений.

Определим, например, продольную силу в поперечном сечении произвольно нагруженного стержня (рис.3.2,а). Для этого надо отбросить мысленно любую часть стержня, а ее влияние на оставшуюся часть заменить действием продольной силы N (рис.3.2,б,в).

Из уравнения равновесия левой части находим

$$\sum X = 0, \quad -P_1 + P_2 + N = 0, \quad N = P_1 - P_2.$$

Для правой части имеем:

$$-qa + P_3 - N = 0, \quad N = P_3 - qa.$$

Поскольку стержень находится в равновесии, значения N , вычисленные для левой и правой частей должны совпадать.

Таким образом, продольная сила равна сумме осевых нагрузок, приложенных к одной из частей стержня. Она считается положительной, если направлена от сечения и вызывает растяжение (рис.3.3,*а*). В противном случае продольная сила является сжимающей и считается отрицательной (рис.3.3,*б*). Продольная сила имеет размерность сосредоточенной силы (Н, кН и т.п.).

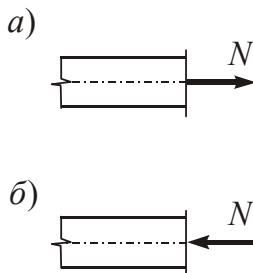


Рис.3.3

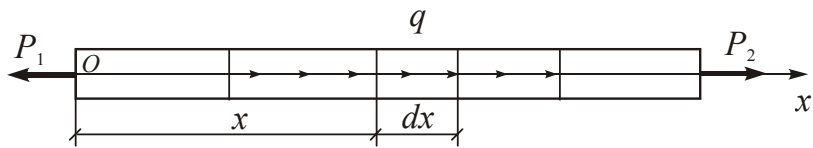


Рис.3.4

В общем случае продольная сила изменяется по длине стержня. Ее график, построенный в соответствующем масштабе на оси стержня, называется эпюрой продольных сил.

При построении эпюры N удобно использовать дифференциальное соотношение между N и интенсивностью распределенной осевой нагрузки q . Для вывода этого соотношения рассмотрим равновесие бесконечно малого элемента стержня dx , выделенного на участке с распределенной нагрузкой (рис.3.4). На участке dx продольная сила получает приращение dN . Величину q можно в пределах элемента считать постоянной.

Составив уравнение равновесия, получим

$$-N + qdx + (N + dN) = 0; \quad \frac{dN}{dx} = -q. \quad (3.1)$$

Из соотношения (3.1) следует, например, что на участках стержня, где $q = 0$, продольная сила имеет постоянное значение, а на участках, где $q = const$, N изменяется по линейному закону.

Пример 3.1. Построим эпюру N для стержня, изображенного на рис.3.5,*а*.

Установим с помощью метода сечений законы изменения N в пределах каждого из двух характерных участков стержня. Для этого проведем сечения в пределах этих участков, отбросим мысленно одну из частей стержня и заменим ее влияние продольной силой N . Составим уравнение равновесия $\sum X = 0$ оставшейся части.

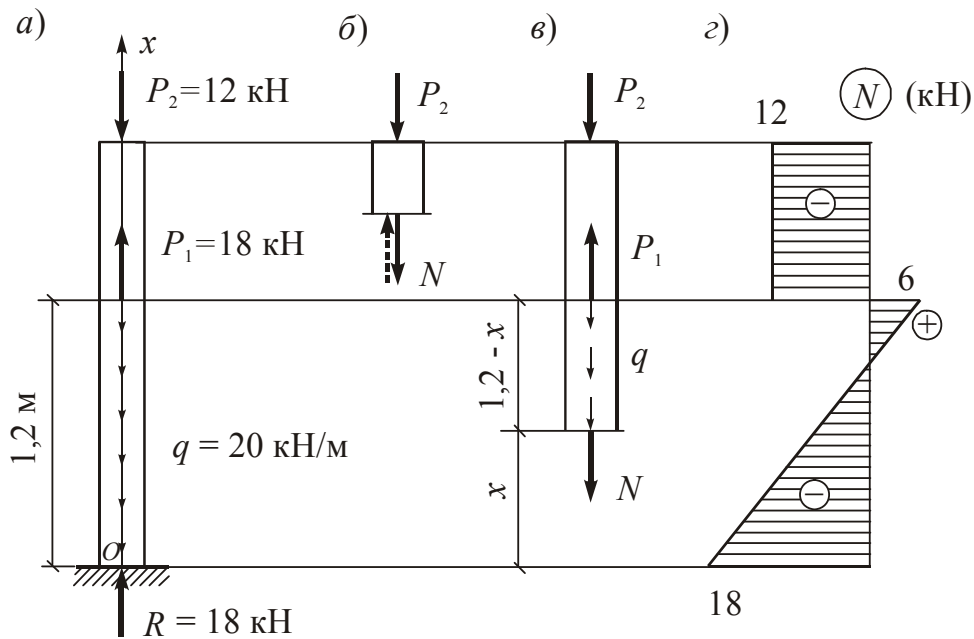


Рис.3.5

Участок $x \geq 1,2$ м

$$-12 - N = 0, \quad N = -12 \text{ кН}.$$

Истинное направление N показано пунктиром (рис.3.5,б). В пределах рассматриваемого участка продольная сила является сжимающей и имеет постоянное значение.

Участок $0 \leq x \leq 1,2$ м

$$-12 + 18 - 20(1,2 - x) - N = 0, \quad N = 6 - 20(1,2 - x).$$

Определим величину N в начале и в конце участка (рис.3.5,в).

$$\begin{aligned} x = 0, & \quad N = -18 \text{ кН (сжатие);} \\ x = 1,2 \text{ м,} & \quad N = 6 \text{ кН (растяжение).} \end{aligned}$$

В пределах данного участка продольная сила изменяется по линейному закону. Опорная реакция в месте закрепления стержня равна значению N в этом сечении: $R = 18$ кН.

Отложив в соответствующем масштабе ординаты N на прямой, параллельной оси стержня, построим эпюру N рис.3.5,г). Отметим ее особенность – в сечении, где приложена сосредоточенная сила $P_1 = 18$ кН, на эпюре N имеется разрыв (скачок), равный по величине этой силы.

§ 3.2. Деформации и напряжения

Характер деформации прямого стержня при центральном растяжении и сжатии можно исследовать с помощью опыта на резиновой модели прямоугольного сечения с нанесенной на боковой поверхности, в средней части, прямоугольной сеткой (рис.3.6,а). После приложения растягивающих

сил сетка растягивается в осевом направлении и сжимается в поперечном направлении (рис.3.6,б). При этом поперечные линии остаются прямыми и перпендикулярными к оси стержня.

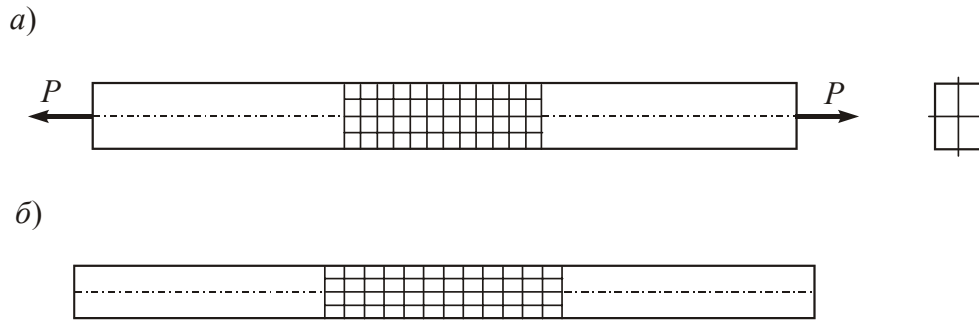


Рис.3.6

Данный опыт позволяет считать, что поперечные сечения стержня остаются плоскими и перпендикулярными к оси, что соответствует гипотезе плоских сечений.

Таким образом, при растяжении и сжатии стержня изменяются его длина и размеры поперечного сечения.

Рассмотрим деформированное состояние стержня, закрепленного на левом торце и находящегося под действием растягивающей силы P (рис.3.7,а).

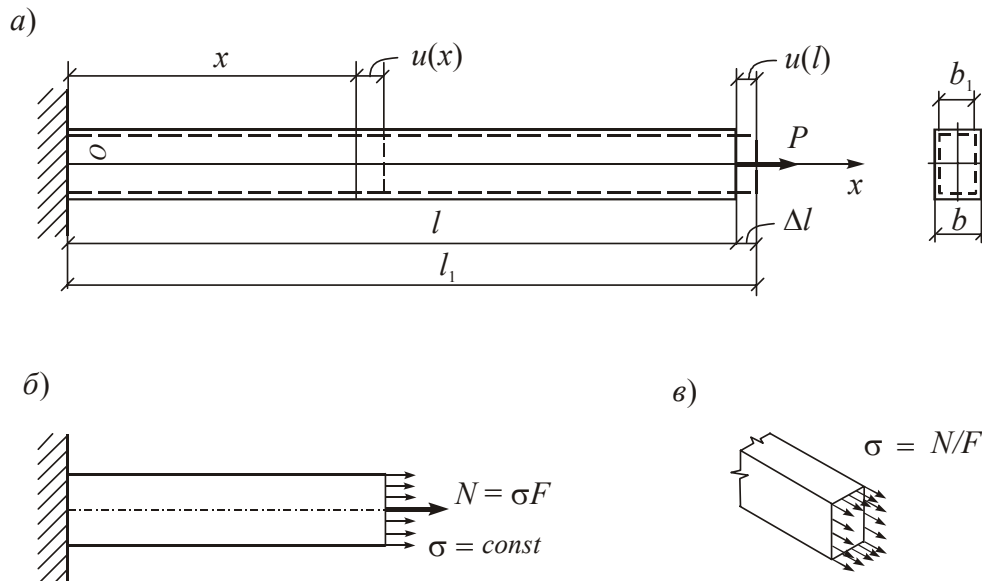


Рис.3.7

Величина удлинения стержня составляет $\Delta l = l_1 - l$, а уменьшение поперечного размера равно $\Delta b = b - b_1$.

Определим относительные линейные деформации в продольном и поперечном направлениях, которые равны отношениям Δl и Δb к первоначальным размерам:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad \varepsilon' = -\frac{\Delta b}{b}. \quad (3.2)$$

Отметим, что продольные и поперечные деформации всегда имеют разные знаки, причем деформации удлинения считаются положительными, а деформации укорочения – отрицательными.

Поперечные и продольные деформации связаны между собой соотношением

$$\varepsilon' = -\nu\varepsilon. \quad (3.3)$$

Входящая в это соотношение величина ν называется коэффициентом Пуассона. Он определяется экспериментально из опытов на растяжение и сжатие по формуле

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (3.4)$$

В пределах упругих деформаций коэффициент Пуассона может принимать значения от 0 до 0,5.

В силу гипотезы плоских сечений продольные деформации всех волокон стержня при центральном растяжении и сжатии являются одинаковыми. Из этого можно сделать вывод, что в поперечных сечениях стержня действуют только нормальные напряжения, одинаковые во всех точках сечения (рис.3.7,б,в). Равнодействующей этих напряжений является продольная сила N , которая равна

$$N = \iint_F \sigma dF = \sigma F.$$

Отсюда получаем формулу для определения нормальных напряжений

$$\sigma = \frac{N}{F}, \quad (3.5)$$

где F – площадь поперечного сечения стержня.

Для большинства материалов при малых деформациях справедлива линейная зависимость между напряжениями и деформациями, называемая законом Гука. При растяжении и сжатии стержня закон Гука имеет следующий вид

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (3.6)$$

Величина E называется модулем упругости материала. Он имеет размерность напряжений и определяется экспериментально.

Значения модуля упругости и коэффициента Пуассона для некоторых материалов приведены в таблице 3.1.

Определим напряжения в сечении, проведенном под углом α к оси Ox (рис.3.8,а). Разложив силу N по направлению нормали ν и касательной t , получим:

$$N_\alpha = N \cos \alpha, \quad T_\alpha = -N \sin \alpha. \quad (3.7)$$

Т а б л и ц а 3.1

Наименование материала	Модуль упругости, МПа	Кoeff. Пуассона
Сталь углеродистая	$2,1 \cdot 10^5$	$0,24 \div 0,30$
Сплавы алюминия	$0,72 \cdot 10^5$	$0,26 \div 0,36$
Сплавы титана	$1,12 \cdot 10^5$	—
Медь	$(1,0 \div 1,3) \cdot 10^5$	$0,31 \div 0,34$
Чугун	$(1,15 \div 1,6) \cdot 10^5$	$0,23 \div 0,27$
Сосна:		
вдоль волокон	$(0,1 \div 0,12) \cdot 10^5$	—
поперек волокон	$(0,0005 \div 0,01) \cdot 10^5$	—
Бетон	$(0,097 \div 0,408) \cdot 10^5$	$0,16 \div 0,22$
Гранит	$0,49 \cdot 10^5$	—
Мрамор	$0,56 \cdot 10^5$	—
Кладка из кирпича	$(0,027 \div 0,03) \cdot 10^5$	—
Стекло	$0,1 \cdot 10^5$	$0,25$
Стеклопластик СВМ	$0,35 \cdot 10^5$	$0,43$
Текстолит	$(0,07 \div 0,13) \cdot 10^5$	—
Резина на каучуке	$8,0$	$0,5$

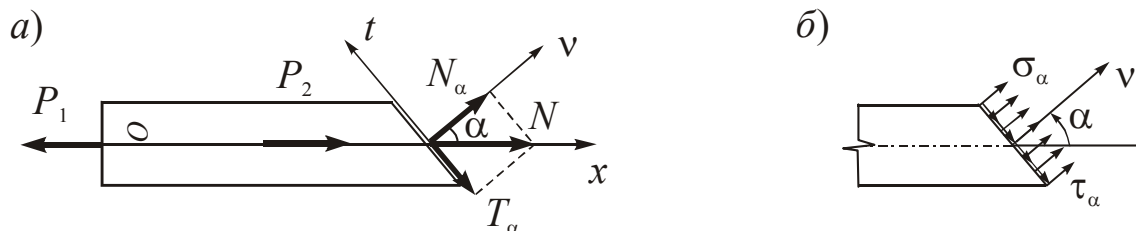


Рис.3.8

Этим составляющим соответствуют нормальные и касательные напряжения в наклонном сечении. Считая, что напряжения распределены по сечению равномерно (рис.3.8,б) и разделив N_α и T_α на площадь наклонного сечения $F_\alpha = F / \cos \alpha$, получим следующие формулы:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{N_\alpha}{F_\alpha} = \frac{N}{F} \cos^2 \alpha = \sigma \cos^2 \alpha; \\ \tau_\alpha &= -\frac{T_\alpha}{F_\alpha} = -\frac{N}{F} \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $\sigma = N/F$ – нормальное напряжение в поперечном сечении.

Из формул (3.8) следует, что при $\alpha = 90^\circ$, то есть в продольных сечениях, напряжения отсутствуют ($\sigma_\alpha = 0$, $\tau_\alpha = 0$). Следовательно, при центральном растяжении и сжатии стержня его продольные слои и волокна не испытывают взаимодействия друг с другом.

В сечениях, наклоненных под углами $\alpha = \pm 45^\circ$ к оси стержня, касательные напряжения достигают наибольших по абсолютной величине значений

$$\tau_{нб} = \frac{\sigma}{2}. \quad (3.9)$$

Сделанное на основании гипотезы плоских сечений предположение о равномерном распределении нормальных напряжений по поперечному сечению справедливо не во всех случаях. В сечениях, близких к местам приложения сосредоточенных сил, при резком или скачкообразном изменении площади или формы поперечного сечения характер распределения напряжений по сечению является более сложным. Например, вблизи нагруженного торца стержня распределение напряжений является существенно неравномерным и зависит от способа приложения нагрузки (рис.3.9,а,б). Однако, на достаточном удалении от торца распределение напряжений становится почти равномерным и одинаковым для обоих случаев. Этот вывод следует из известного в механике принципа Сен-Венана, согласно которому напряженное состояние тела на достаточном удалении от локальной области действия статически эквивалентных нагрузок практически не зависит от детального способа приложения этих нагрузок.

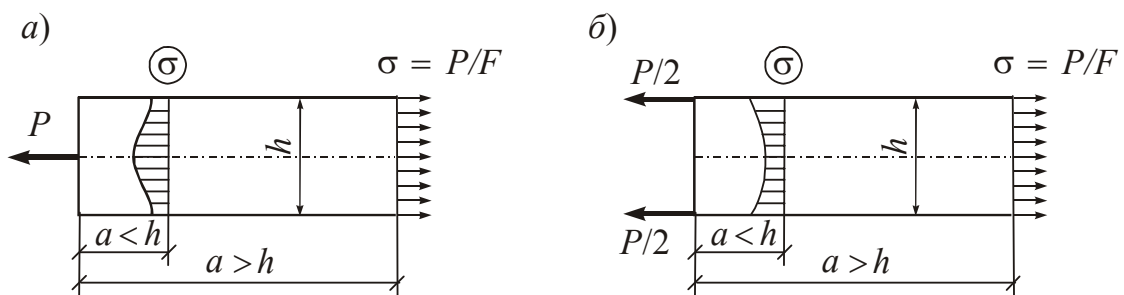


Рис.3.9

Особое значение для инженерной практики представляет определение напряжений вблизи отверстий, выточек и т.п. В этих случаях возникает явление *концентрации напряжений*. Например, в растянутой полосе прямоугольного сечения с круглым отверстием на оси Ox (рис.3.10) наибольшие напряжения при $d \ll h$ в три раза больше, чем по неослабленному сечению.

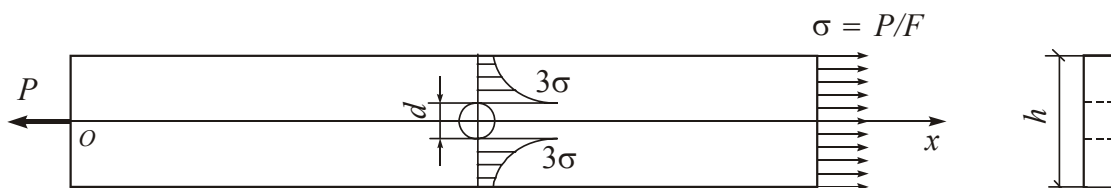


Рис.3.10

Концентрация напряжений особенно опасна для прочности элементов конструкций из хрупких материалов.

§ 3.3. Определение осевых перемещений

При центральном растяжении и сжатии прямого стержня поперечные сечения, оставаясь плоскими, получают осевые перемещения u (рис.3.7). Они считаются положительными, если их направление совпадает с

положительным направлением оси Ox .

Рассмотрим осевые перемещения двух произвольных сечений, отстоящих на расстоянии Δx друг от друга (рис.3.11). После приложения нагрузки эти сечения получают перемещения соответственно u и $u + \Delta u$. Длина отрезка Δx после деформации составляет $\Delta x_1 = \Delta x + (u + \Delta u) - u = \Delta x + \Delta u$, а величина удлинения равна $\Delta x_1 - \Delta x = \Delta u$.

Относительная продольная деформация волокон стержня в сечении x представляет собой предел отношения удлинения Δu к первоначальной длине Δx при стремлении последней к нулю:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} . \tag{3.10}$$

Проинтегрировав это соотношение в пределах от 0 до x , получим формулу для определения осевого перемещения произвольного сечения:

$$u(x) = \int_0^x \varepsilon dx + C .$$

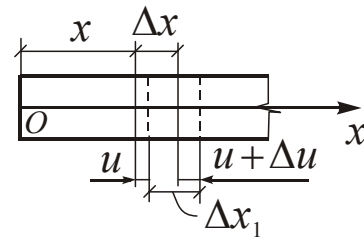


Рис.3.11

Обозначив в начальном сечении $x = 0$ $u(0) = u_0$, получим, что постоянная интегрирования C равна u_0 . В результате имеем

$$u(x) = u_0 + \int_0^x \varepsilon dx .$$

Учитывая, что на основании (3.6) и (3.5) линейная деформация равна

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EF} ,$$

получим следующую формулу :

$$u(x) = u_0 + \int_0^x \frac{N}{EF} dx . \tag{3.11}$$

Величина EF называется жесткостью стержня при растяжении и сжатии.

Формула (3.11) позволяет установить характер изменения $u(x)$. Для частного случая, когда жесткость EF и продольная сила N являются постоянными величинами, осевые перемещения изменяются по линейному закону.

$$u(x) = u_0 + \frac{N x}{EF} .$$

На участке, где $EF = const$, а N является линейной функцией, осевые перемещения изменяются по закону квадратной параболы.

Если начальное сечение $x = 0$ закреплено, то $u_0 = 0$. Из соотношения (3.10) следует, что в сечении, где ε равно нулю ($N = 0$), $u(x)$ может иметь экстремум.

Удлинение или укорочение стержня длиной l (рис.3.7) равно разности осевых перемещений его концов $x = 0$ и $x = l$: $\Delta l = u(l) - u_0$. Согласно формуле (3.11), получим:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N}{EF} dx. \tag{3.12}$$

Для частного случая $EF = const$ и $N = const$, получим

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}. \tag{3.13}$$

Для стержня с постоянной жесткостью EF и линейным законом изменения продольной силы N при определении Δl удобно использовать геометрический смысл определенного интеграла и привести формулу (3.12) к следующему виду:

$$\Delta l = \frac{1}{EF} \int_0^l N dx = \frac{1}{EF} \Omega_N, \tag{3.14}$$

где Ω_N – площадь эпюры N на участке от 0 до l .

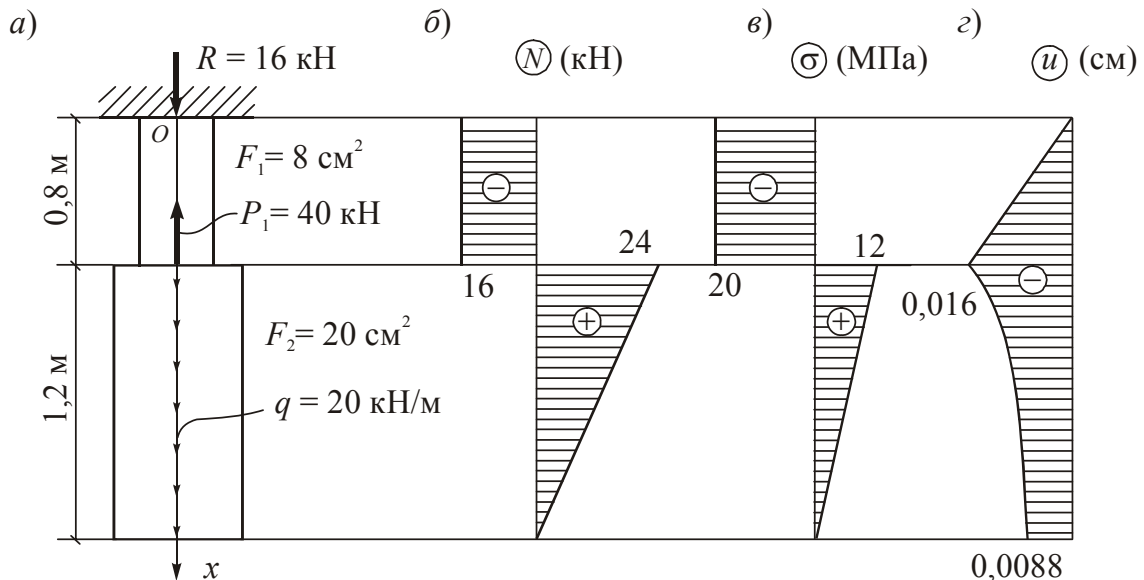


Рис.3.12

Пример 3.2. Для стержня ступенчато постоянного сечения (рис.3.12,а) построим эпюры N , σ и u . В расчетах примем $E = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

В данном примере вычисление значений N и σ производим в характерных сечениях, начиная со свободного конца.

При этом мысленно отбрасывается часть стержня, содержащая закрепленное сечение.

Участок $0,8 \leq x \leq 2 \text{ м}$

Сечение $x = 2 \text{ м}$, $N = 0$, $\sigma = 0$.

Сечение $x = 0,8 \text{ м}$, $N = 20 \cdot 1,2 = 24 \text{ кН}$ (растяжение),

$$\sigma = \frac{24}{20} = 1,2 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 12 \text{ МПа}.$$

Участок $0 \leq x \leq 0,8 \text{ м}$

Сечение $x = 0,8$ м, $N = 24 - 40 = -16$ кН (сжатие),

$$\sigma = -\frac{16}{8} = -2 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -20 \text{ МПа}.$$

Сечение $x = 0$, $N = -16$ кН, $\sigma = -20$ МПа.

Опорная реакция в месте закрепления равна: $R = 16$ кН. Ее направление показано на рис.3.12,а.

В соответствии с соотношением (3.1) продольная сила и нормальные напряжения в пределах первого участка являются постоянными по величине, а в пределах второго участка изменяются по линейному закону. Эпюры N и σ приведены на рис.3.12,б,в.

Определим величины удлинений (укорочений) участков стержня.

$$\Delta l_1 = \frac{Nl}{EF} = -\frac{16 \cdot 80}{1 \cdot 10^5 \cdot 10^{-1} \cdot 8} = -0,016 \text{ см},$$

$$\Delta l_2 = \frac{1}{EF} \Omega_N = \frac{1}{1 \cdot 10^5 \cdot 10^{-1} \cdot 20} \cdot \frac{1}{2} 24 \cdot 120 = 0,0072 \text{ см}.$$

Величина Δl всего стержня равна:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = -0,016 + 0,0072 = -0,0088 \text{ см}.$$

В целом стержень укорачивается. Определим величины осевых перемещений характерных сечений

$$\begin{aligned} x = 0, & & u_0 = u(0) = 0; \\ x = 0,8 \text{ м}, & & u_1 = u_0 + \Delta l_1 = -0,016 \text{ см}; \\ x = 2,0 \text{ м}, & & u_2 = u_1 + \Delta l_2 = \Delta l = -0,0088 \text{ см}. \end{aligned}$$

Все сечения перемещаются в отрицательном направлении оси Ox . В пределах первого участка $u(x)$ изменяется по линейному закону, а в пределах второго участка – по закону квадратной параболы. В сечении вблизи свободного конца касательная к эпюре u параллельна оси стержня, поскольку в этом сечении $N = 0$. Эпюра u приведена на рис.3.12,г.

Пример 3.3. Для стержневой системы, состоящей из жесткой балки AB , поддерживаемой тремя стальными стержнями указанного сечения (рис.3.13) определим усилия и напряжения в стержнях и величины их удлинений. В расчетах примем $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа.

Для определения усилий N_1 , N_2 и N_3 в стержнях системы используем три уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \sum M_D = 0, & & 12 \cdot 2 \cdot 1 - 90 \cdot 1,2 + 2N_3 = 0, & & N_3 = 42 \text{ кН}; \\ \sum X = 0, & & -N_1 \cos 45^\circ + N_2 \cos 45^\circ = 0, & & N_1 = N_2; \\ \sum Y = 0, & & -N_1 \sin 45^\circ - N_2 \sin 45^\circ - N_3 + 12 \cdot 2 + 90 = 0, \\ & & N_1 = N_2 = 50,9 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Все три стержня испытывают растяжение. Определим напряжения в стержнях и величины их удлинений.

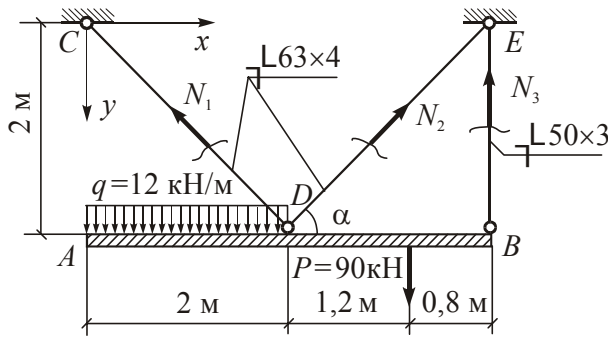


Рис.3.13

Стержни CD и DE (2L63×4)

$$F_1 = F_2 = 2 \cdot 4,96 = 9,92 \text{ см}^2,$$

$$\sigma = \frac{N_1}{F_1} = \frac{N_2}{F_2} = \frac{50,9}{9,92}$$

$$= 5,13 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 51,3 \text{ МПа},$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \frac{N_1 l_1}{EF_1}$$

$$= \frac{50,9 \cdot 283}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^{-1} \cdot 9,92} = 0,0691 \text{ см}.$$

Стержень BE (2L50×3)

$$F_3 = 2 \cdot 2,96 = 5,92 \text{ см}^2,$$

$$\sigma = \frac{N_3}{F_3} = \frac{42}{5,92} = 7,09 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 70,9 \text{ МПа},$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EF_3} = \frac{42 \cdot 200}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^{-1} \cdot 5,92} = 0,0676 \text{ см},$$

где $l_1 = l_2 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2,83 \text{ м}$ и $l_3 = 2 \text{ м}$ – длины стержней.

§ 3.4. Статически неопределимые задачи при растяжении и сжатии

Статически неопределимыми называются такие стержни и стержневые системы, расчет которых не может быть произведен с помощью одних только уравнений статики, поскольку этих уравнений недостаточно для определения всех опорных реакций и внутренних усилий. Для решения таких задач необходимо составить дополнительные уравнения исходя из рассмотрения деформированного состояния стержня или стержневой системы.

Рассмотрим примеры решения статически неопределимых задач.

Пример 3.4. Для стержня ступенчато постоянного поперечного сечения, закрепленного на обоих торцах (рис.3.14,а), построим эпюру N , определим осевые перемещения характерных сечений и построим эпюру u .

Поскольку стержень закреплен с двух сторон, возникают две опорные реакции R_1 и R_2 . Составим уравнение равновесия.

$$\sum X = 0, \quad P + 2P - R_1 - R_2 = 0; \quad R_1 + R_2 = 3P.$$

Из этого уравнения нельзя определить опорные реакции R_1 и R_2 . Поскольку стержень закреплен с двух сторон, его длина после действия нагрузки не изменится. Отсюда следует условие деформации стержня: $\Delta l = 0$.

Раскроем это условие следующим образом. Отбросим мысленно одно из закреплений (например, нижнее) и введем в этом сечении неизвестную силу, равную реакции в отброшенной связи $X = R_2$ (рис.3.14,б).

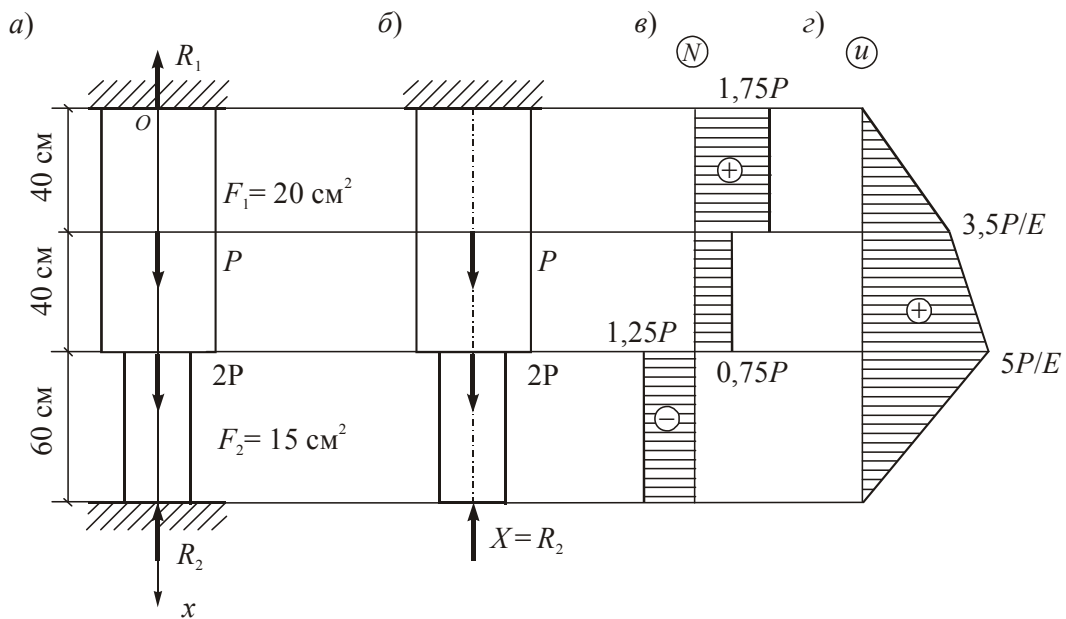


Рис.3.14

Поставим условие, что образованный таким образом статически определимый стержень должен деформироваться так же, как и заданный. Тогда на основании принципа независимости действия сил можно записать:

$$\Delta l = \Delta l_P + \Delta l_X = 0,$$

где Δl_P и Δl_X – величины удлинений (укорочений) стержня (рис.3.14,б) от действия заданной нагрузки и силы X . Эти величины равны:

$$\Delta l_P = \frac{2P \cdot 40}{E \cdot 20} + \frac{3P \cdot 40}{E \cdot 20} = \frac{10P}{E},$$

$$\Delta l_X = -\frac{X \cdot 60}{E \cdot 15} - \frac{X \cdot 80}{E \cdot 20} = -\frac{8X}{E}.$$

Решаем дополнительное уравнение:

$$\Delta l = \frac{10P}{E} - \frac{8X}{E} = 0, \quad X = R_2 = 1,25P.$$

Определяем вторую опорную реакцию из уравнения статики.

$$R_1 = 3P - R_2 = 3P - 1,25P = 1,75P.$$

Направления опорных реакций соответствуют принятым в начале расчета. Эпюра N приведена на рис.3.14,в.

Определим величины удлинений (укорочений) участков стержня и проверим выполнение условия его деформации.

$$\Delta l_1 = \frac{1,75P \cdot 40}{E \cdot 20} = \frac{3,5P}{E},$$

$$\Delta l_2 = \frac{0,75P \cdot 40}{E \cdot 20} = \frac{1,5P}{E},$$

$$\Delta l_3 = -\frac{1,25P \cdot 60}{E \cdot 15} = -\frac{5P}{E},$$

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = \frac{P}{E}(3,5 + 1,5 - 5) = 0.$$

Задача решена правильно. Вычислим осевые перемещения характерных сечений.

$$\begin{aligned} x = 0, & & u_0 = 0; \\ x = 0,4 \text{ м}, & & u_1 = u_0 + \Delta l_1 = \frac{3,5P}{E}; \\ x = 0,8 \text{ м}, & & u_2 = u_1 + \Delta l_2 = \frac{3,5P}{E} + \frac{1,5P}{E} = \frac{5P}{E}; \\ x = 1,4 \text{ м}, & & u_3 = \Delta l = 0. \end{aligned}$$

Эпюра осевых перемещений приведена на рис.3.14,з. Осевые перемещения в пределах всех участков изменяются по линейному закону. Поперечные сечения перемещаются в положительном направлении оси Ox , то есть вниз.

Пример 3.5. Стальная труба, заполненная бетоном, находится под действием сжимающей силы (рис.3.15,а). Определим величины продольных сил и нормальных напряжений в трубе и бетоне при условии их совместной работы. Эффекты, связанные с поперечными деформациями, учитывать не будем.

Суммарная продольная сила в стержне является сжимающей и равна $N = -P$. Она воспринимается одновременно стальной трубой и бетоном. Составим уравнение равновесия:

$$\sum X = 0, \quad N_c + N_6 = P,$$

где N_c и N_6 – сжимающие продольные силы в трубе и бетоне (рис.3.15,б).

Задача является статически неопределимой. Из условия совместной деформации трубы и бетона их укорочения должны быть одинаковыми по величине: $\Delta l_c = \Delta l_6$. Раскроем это условие:

$$\frac{N_c l}{E_c F_c} = \frac{N_6 l}{E_6 F_6},$$

где $E_c F_c$ и $E_6 F_6$ – жесткости стальной трубы и бетона при сжатии.

Решив совместно полученные два уравнения, находим:

$$N_c = \frac{E_c F_c}{E_c F_c + E_6 F_6} P, \quad N_6 = \frac{E_6 F_6}{E_c F_c + E_6 F_6} P.$$

Из этих формул следует, что сила P распределяется между элементами стержня пропорционально их жесткостям.

Выполним числовой расчет, приняв сечение трубы $\varnothing 200 \times 10$ мм, $E_c = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $E_6 = 0,2 \cdot 10^5$ МПа и $P = 500$ кН. Площади поперечных сечений трубы и бетона равны:

$$F_c = \pi R_2^2 - \pi R_1^2 = \pi(10^2 - 9^2) = 59,7 \text{ см}^2,$$

$$F_6 = \pi R_1^2 = \pi \cdot 9^2 = 254,5 \text{ см}^2.$$

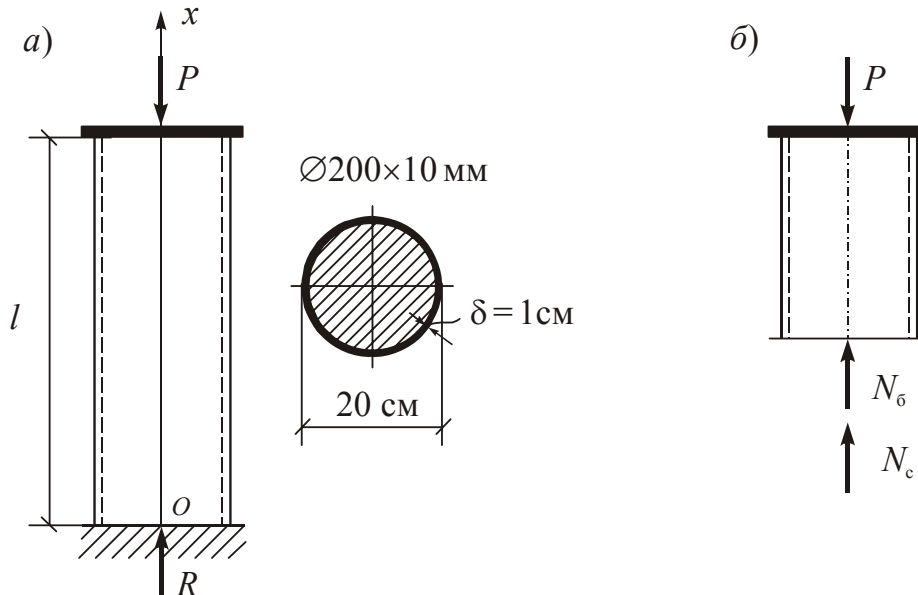


Рис.3.15

Определяем продольные силы и напряжения в элементах стержня.

$$N_c = \frac{500 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 59,7}{(2,1 \cdot 59,7 + 0,2 \cdot 254,5) \cdot 10^5} = 355,6 \text{ кН},$$

$$\sigma_c = \frac{N_c}{F_c} = -\frac{355,6}{59,7} = -5,96 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -59,6 \text{ МПа},$$

$$N_6 = \frac{500 \cdot 0,2 \cdot 10^5 \cdot 254,5}{(2,1 \cdot 59,7 + 0,2 \cdot 254,5) \cdot 10^5} = 144,4 \text{ кН},$$

$$\sigma_6 = \frac{N_6}{F_6} = -\frac{144,4}{254,5} = -0,567 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -5,67 \text{ МПа}.$$

В статически неопределимых системах внутренние усилия и напряжения могут возникнуть не только при силовом, но и при тепловом воздействии (нагреве или охлаждении), а также при монтаже в случае неточного изготовления отдельных элементов и при смещении (осадке) опор.

Рассмотрим, например, закрепленный с двух сторон стержень постоянного поперечного сечения, подвергаемый нагреву на величину T (рис.3.16,а). Закрепления препятствуют свободному удлинению стержня. В силу этого возникают две равные по величине и противоположные по направлению опорные реакции $R_1 = R_2 = R$. Статически неопределимый стержень при нагреве испытывает сжатие силой $N = -R$.

Для определения продольной силы и напряжений в стержне используем условие его деформации: $\Delta l = \Delta l_R + \Delta l_T = 0$, где $\Delta l_R = -Rl/EF$ – возможное

укорочение стержня от действия продольной силы $N = -R$ (рис.3.16,б) и $\Delta l_T = \alpha l T$ – возможное его удлинение при нагреве (рис.3.16,в), где α – коэффициент линейного температурного расширения материала.

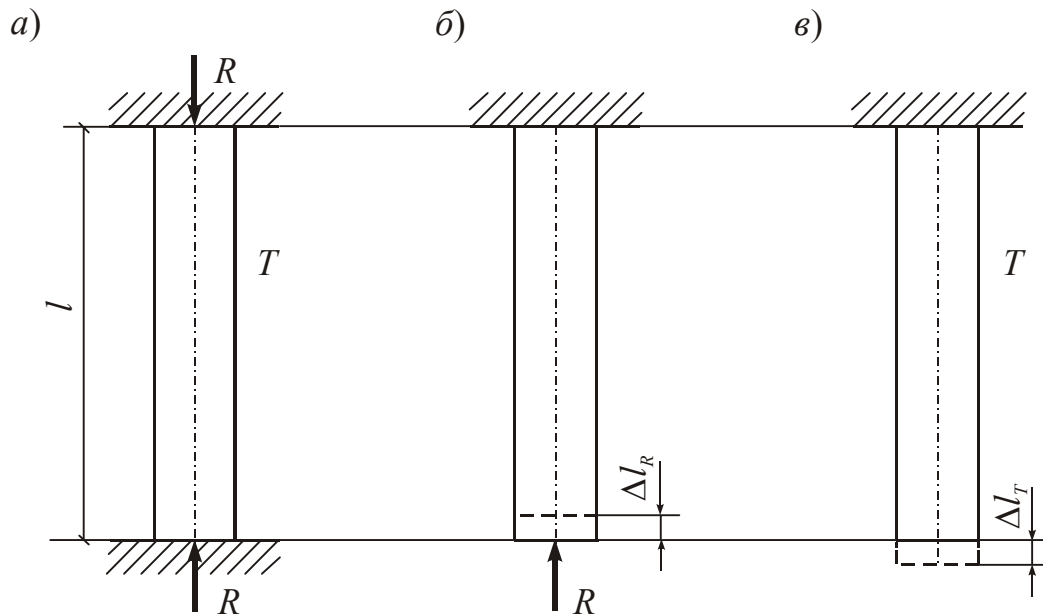


Рис.3.16

Составим уравнение относительно R , решив которое получим:

$$\begin{aligned} \Delta l = -\frac{Rl}{EF} + \alpha l T = 0, & \quad R = \alpha EFT, \\ N = -R = -\alpha EFT, & \quad \sigma = \frac{N}{F} = -\alpha ET. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Напряжения в стержне прямо пропорциональны коэффициенту α , модулю упругости материала E и величине температуры T .

При охлаждении статически неопределимого стержня он будет испытывать растяжение.

Пример 3.6. Латунный цилиндрический стержень ступенчато постоянного сечения закреплен на торцах и находится под действием сосредоточенной силы $P = 40$ кН и температуры $T = 20^\circ \text{C}$ (рис.3.17,а). Построим эпюры N , σ и u . В расчетах примем $E = 1,1 \cdot 10^5$ МПа и $\alpha = 1,65 \cdot 10^{-5}$.

Под действием силы и температуры на закрепленных торцах возникают опорные реакции R_1 и R_2 . Составим уравнение равновесия:

$$\sum X = 0, \quad -R_1 + P - R_2 = 0; \quad R_1 + R_2 = P.$$

Отбросим мысленно нижнее закрепление и заменим его силой $X = R_2$ (рис.3.17,б), для определения которой используем условие деформации стержня: $\Delta l = \Delta l_R + \Delta l_X + \Delta l_T = 0$.

Учитывая, что площади поперечных сечений стержня равны $F_1 = \pi \cdot 3^2/4 = 7,07 \text{ см}^2$ и $F_2 = \pi \cdot 5^2/4 = 19,63 \text{ см}^2$, определим величины Δl_R , Δl_X , и Δl_T :

$$\Delta l_P = \frac{Pl_1}{EF_1} = \frac{40 \cdot 35}{1,1 \cdot 10^5 \cdot 10^{-1} \cdot 7,07} = 0,018 \text{ см} ,$$

$$\Delta l_X = -\frac{Xl_1}{EF_1} - \frac{Xl_2}{EF_2} = -\frac{X}{1,1 \cdot 10^5 \cdot 10^{-1}} \left(\frac{35}{7,07} + \frac{50}{19,63} \right) = -6,82 \cdot 10^{-4} \cdot X ,$$

$$\Delta l_T = \alpha l T = 1,65 \cdot 10^{-5} \cdot 85 \cdot 20 = 0,0281 \text{ см} .$$

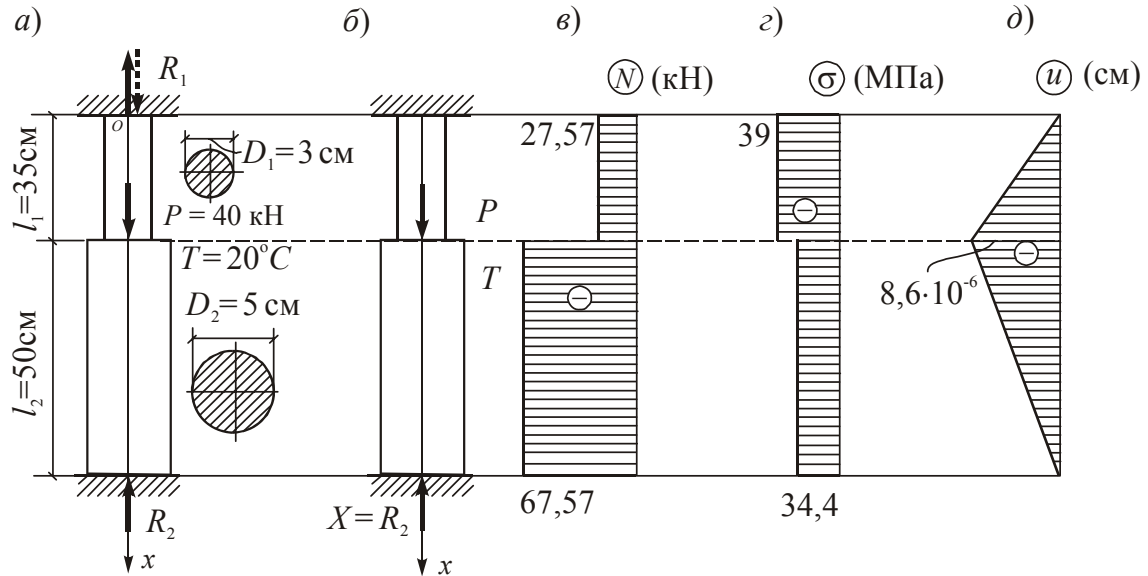


Рис.3.17

Подставив эти величины в условие деформации стержня, решим его относительно X :

$$\Delta l = 0,018 + 0,0281 - 6,82 \cdot 10^{-4} \cdot X = 0 , \quad X = R_2 = 67,57 \text{ кН} .$$

Вторая опорная реакция равна $R_1 = P - R_2 = 40 - 67,57 = -27,57 \text{ кН}$. Истинное направление R_1 показано пунктиром. Эюра N приведена на рис.3.17,в. Оба участка стержня испытывают сжатие. Определим величины напряжений в стержне и укорочений его участков.

Первый участок

$$\sigma = -\frac{27,57}{7,07} = -3,9 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -39,0 \text{ МПа} ,$$

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= \frac{N_1 l_1}{EF_1} + \alpha l_1 T = -\frac{27,57 \cdot 35}{1,1 \cdot 10^5 \cdot 10^{-1} \cdot 7,07} + 1,65 \cdot 10^{-5} \cdot 35 \cdot 20 = \\ &= -0,01241 + 0,01155 = -8,6 \cdot 10^{-4} \text{ см} . \end{aligned}$$

Второй участок

$$\sigma = -\frac{67,57}{19,63} = -3,44 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -34,4 \text{ МПа} ,$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2} + \alpha l_2 T = -\frac{67,57 \cdot 50}{1,1 \cdot 10^5 \cdot 10^{-1} \cdot 19,63} + 1,65 \cdot 10^{-5} \cdot 50 \cdot 20 = -0,01564 + 0,0165 = 8,6 \cdot 10^{-4} \text{ см.}$$

Проверим выполнение условия деформации стержня:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = -8,6 \cdot 10^{-4} + 8,6 \cdot 10^{-4} = 0.$$

Эпюры σ и u приведены на рис.3.17,з,д. Все сечения перемещаются в отрицательном направлении оси Ox , то есть вверх. В пределах обоих участков перемещения изменяются по линейному закону.

Пример 3.7. При монтаже изображенной на рис.3.18,а стержневой системы оказалось, что длина среднего стержня меньше проектной на величину $\delta = 0,2$ см. Определим величины усилий и напряжений в стержнях после монтажа и вертикальное перемещение узла B . В расчетах примем $F_1 = F_3 = 10 \text{ см}^2$, $F_2 = 12 \text{ см}^2$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

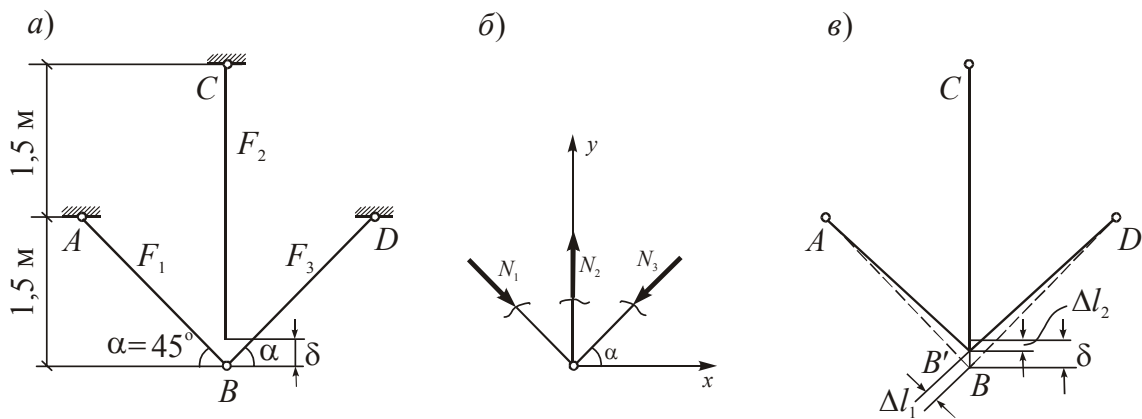


Рис.3.18

При установке среднего стержня его надо подвергнуть предварительному растяжению. Крайние стержни после монтажа системы будут испытывать сжатие.

Вырежем мысленно узел B (рис.3.18,б) и рассмотрим его равновесие под действием усилий N_1, N_2 и N_3 .

$$\begin{aligned} \sum X = 0, & \quad N_1 \cos \alpha - N_3 \cos \alpha = 0, & \quad N_1 = N_3; \\ \sum Y = 0, & \quad N_2 - N_1 \sin \alpha - N_3 \sin \alpha = 0, & \quad N_2 = 2N_1 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Двух уравнений статики недостаточно для определения трех усилий N_1, N_2, N_3 в стержнях. Система является статически неопределимой и для ее расчета необходимо рассмотреть схему деформации системы и составить дополнительное уравнение.

В силу симметрии системы относительно оси Oy узел B после монтажа переместится вертикально вверх на величину $BB' = \delta - \Delta l_2$ (рис.3.18,в), где Δl_2 – величина удлинения среднего стержня. Крайние стержни укоротятся на величины

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 = BB' \sin \alpha = (\delta - \Delta l_2) \sin \alpha.$$

Выразив Δl_1 и Δl_2 через усилия в стержнях, составим дополнительное уравнение:

$$\frac{N_1 l_1}{EF_1} = \left(\delta - \frac{N_2 l_2}{EF_2} \right) \sin \alpha,$$

где $l_1 = \sqrt{1,5^2 + 1,5^2} = 2,12$ м и $l_2 = 3$ м – длины стержней. Длина среднего стержня взята без учета весьма малой величины δ .

Учитывая соотношения между N_1 и N_2 , находим усилия в стержнях.

$$\frac{N_1 \cdot 212}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^{-1} \cdot 10} = \left(0,2 - \frac{1,414 N_1 \cdot 300}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^{-1} \cdot 12} \right) \sin 45^\circ,$$

$$N_1 = N_3 = 64,3 \text{ кН}, \quad N_2 = 2 \cdot 64,3 \sin 45^\circ = 90,9 \text{ кН}.$$

Усилия N_1 и N_3 являются сжимающими, а N_2 – растягивающим. Определим напряжения в стержнях и величины их удлинений (укорочений).

Стержни *AB* и *BD*

$$\sigma = \frac{N_1}{F_1} = -\frac{64,3}{10} = -6,43 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -64,3 \text{ МПа},$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 = -\frac{64,3 \cdot 212}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^{-1} \cdot 10} = -0,0649 \text{ см}.$$

Стержень *CB*

$$\sigma = \frac{N_2}{F_2} = \frac{90,9}{12} = 7,58 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 75,8 \text{ МПа},$$

$$\Delta l_2 = \frac{90,9 \cdot 300}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^{-1} \cdot 12} = 0,108 \text{ см}.$$

Вертикальное перемещение узла *B* равно:

$$BB' = \delta - \Delta l_2 = 0,2 - 0,108 = 0,092 \text{ см}.$$

Пример 3.8. В процессе работы стержневой системы (рис.3.19,*a*) шарнирная опора *A* жесткой балки *AB* получила осадку $\delta = 0,5$ см. Определим усилия и напряжения в поддерживающих балку стержнях *CD* и *BE* и их удлинения (укорочения). В расчетах примем $F_1 = 10 \text{ см}^2$, $F_2 = 15 \text{ см}^2$ и $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

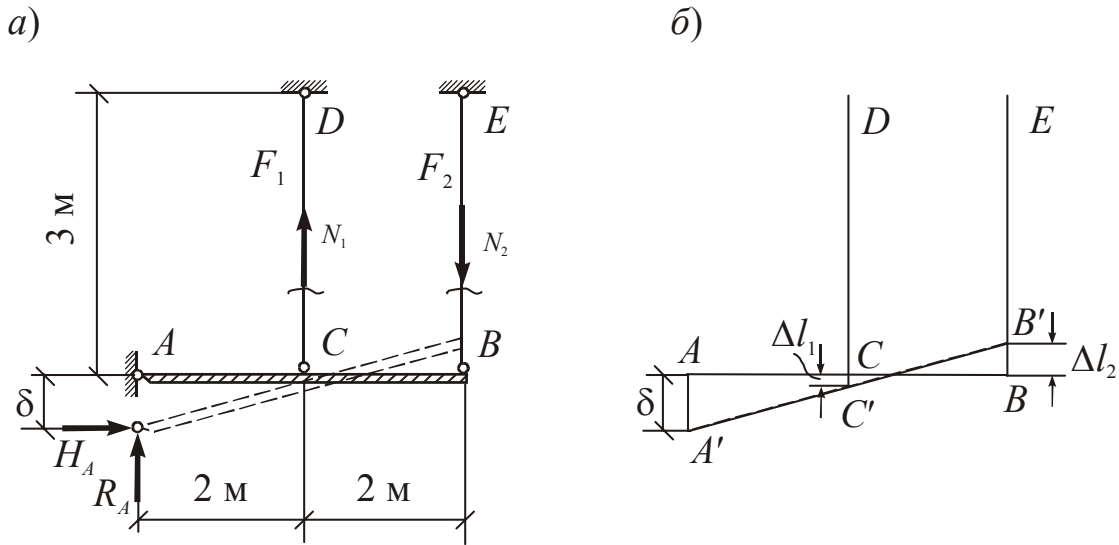


Рис.3.19

При осадке жесткой балки на шарнирной опоре возникают опорные реакции R_A и H_A , а в поддерживающих балку стержнях – усилия N_1 и N_2 (рис.3.19,а). По физическому смыслу задачи, очевидно, что усилие N_1 является растягивающим, а N_2 – сжимающим.

Система является статически неопределимой. Составим уравнение равновесия, не содержащее опорные реакции R_A и H_A .

$$\sum M_A = 0, \quad 2N_1 - 4N_2 = 0, \quad N_2 = 0,5N_1.$$

Схема деформации системы показана на рис.3.19,б. Соотношение между величиной удлинения первого стержня Δl_1 и величиной укорочения второго стержня Δl_2 является следующим:

$$\Delta l_1 = \frac{\delta - \Delta l_2}{2}.$$

Выразив Δl_1 и Δl_2 через усилия в стержнях, получим следующее равенство:

$$\frac{N_1 l_1}{EF_1} = \frac{\delta}{2} - \frac{N_2 l_2}{2EF_2},$$

где $l_1 = l_2 = 3$ м – длины стержней.

Подставив числовые значения E, F_1, F_2, l_1, l_2 и соотношение между N_1 и N_2 и решив полученное уравнение, находим:

$$\frac{300}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^{-1}} \left(\frac{N_1}{10} + \frac{0,5N_1}{2 \cdot 15} \right) = 0,25,$$

$$N_1 = 150 \text{ кН}, \quad N_2 = 0,5 \cdot 150 = 75 \text{ кН}.$$

Определим напряжения в стержнях и величины их удлинений (укорочений).

Первый стержень

$$\sigma = \frac{N_1}{F_1} = \frac{150}{10} = 15 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 150 \text{ МПа} ,$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1} = \frac{150 \cdot 300}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^{-1} \cdot 10} = 0,214 \text{ см} .$$

Второй стержень

$$\sigma = \frac{N_2}{F_2} = -\frac{75}{15} = -5 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -50 \text{ МПа} ,$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2} = -\frac{75 \cdot 300}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^{-1} \cdot 15} = -0,0714 \text{ см} .$$

§ 3.5. Диаграммы растяжения и сжатия. Механические свойства материалов

При расчете элементов конструкций на прочность и жесткость необходимо знать механические характеристики материалов, из которых они изготовлены. Для их определения производятся механические испытания стандартных образцов из исследуемого материала на различные воздействия – растяжение, сжатие, кручение, срез и т.п. Испытания проводятся на испытательных лабораторных установках – прессах, разрывных машинах и др. Испытательные машины имеют специальные устройства, позволяющие фиксировать величины прикладываемых к образцу нагрузок. Величины деформаций образца (например, его удлинения или укорочения) определяются с помощью различных приборов. Для этих целей чаще всего используются различного типа тензометры (механические, оптические, электрические и т.п.).

На некоторых испытательных машинах имеется устройство, с помощью которого в процессе испытания вычерчивается график зависимости между нагрузкой и деформацией.

Для металлов наиболее распространенным является испытание на растяжение, которое проводится на образцах цилиндрической формы (рис.3.20,а) или имеющих форму полосы прямоугольного сечения (рис.3.20,в). Размеры стандартных образцов установлены ГОСТ на проведение испытаний.

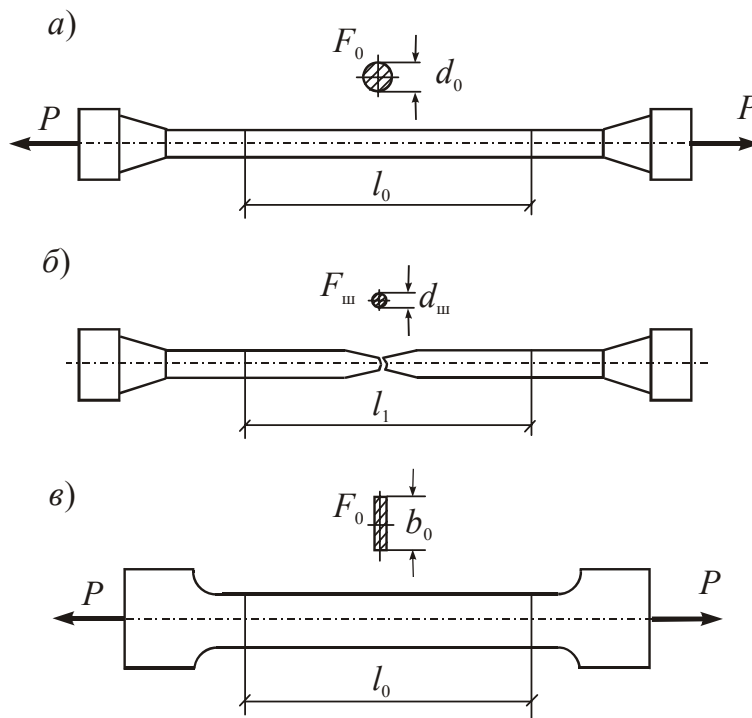


Рис.3.20

Например, для стандартного цилиндрического образца принимаются $l_0 = 200$ мм и $d_0 = 20$ мм (допускаются размеры $l_0 = 100$ мм и $d_0 = 10$ мм), где l_0 – длина рабочего участка. На концах образца имеются утолщения для установки в зажимах машины.

В процессе испытания фиксируются величины растягивающих сил P и определяются деформации в пределах длины рабочего участка. По результатам испытания можно построить график зависимости между силой P и величиной удлинения Δl рабочего участка.

Для практических целей этот график преобразуется в диаграмму зависимости между напряжениями σ и деформациями ε (в диаграмму $\sigma \sim \varepsilon$), где

$$\sigma = \sigma_0 = \frac{P}{F_0}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}.$$

Отметим, что при определении напряжений в поперечном сечении образца его площадь F в процессе испытания принимается постоянной и равной первоначальной площади F_0 , а относительные продольные деформации ε считаются равномерными в пределах длины l_0 .

Рассмотрим диаграмму растяжения одного из основных строительных материалов – малоуглеродистой стали марки ВСт 3 (рис.3.21). Приведем анализ характерных участков и точек этой диаграммы.

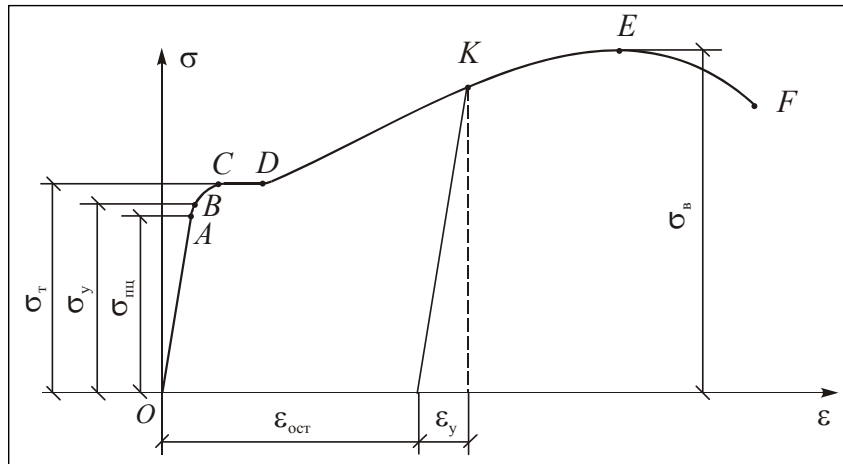


Рис.3.21

Участок OA является участком прямой пропорциональности между σ и ε .

В пределах этого участка справедлив закон Гука $\sigma = E\varepsilon$, где модуль упругости E численно равен тангенсу угла наклона прямой OA к горизонтальной оси. Точка A в конце этого участка соответствует пределу пропорциональности материала $\sigma_{пл}$.

Практически совпадает с точкой A точка B , соответствующая пределу упругости материала σ_y . При нагружении образца до значения напряжений σ_y деформации материала считаются абсолютно упругими.

Точка C соответствует пределу текучести материала σ_t . Если напряжения в образце достигли предела текучести ($\sigma = \sigma_t$), то деформации возрастают при практически постоянной нагрузке. Такое явление характеризуется наличием на диаграмме $\sigma \sim \varepsilon$ горизонтального участка, называемого площадкой текучести (участок CD).

Пологий криволинейный участок диаграммы DE называется участком (стадий) упрочнения. Точка E соответствует наибольшему условному напряжению, которое может выдержать образец. Это напряжение называется временным сопротивлением материала σ_b (или пределом прочности). Оно определяется как отношение максимальной силы к первоначальной площади его поперечного сечения F_0 . Отметим, что истинное напряжение, соответствующее действию наибольшей растягивающей силы, несколько больше σ_b , поскольку площадь поперечного сечения при напряжениях, превышающих предел текучести, уменьшается. Однако, до значения напряжений σ_b это уменьшение незначительно и может не учитываться.

Уменьшение площади поперечного сечения наиболее значительно в определенном месте образца, где образуется его местное сужение или так называемая «шейка» (точка F на диаграмме). В этом месте и происходит разрыв

образца (рис.3.20,б). Истинное напряжение в образце в момент его разрыва можно определить, разделив величину разрушающей силы на площадь $F_{ш}$ поперечного сечения образца в месте образования «шейки».

Предел текучести σ_T и временное сопротивление σ_B являются основными характеристиками прочности материала. С помощью этих величин устанавливаются безопасные с точки зрения прочности напряжения в элементах конструкций при различном характере их работы.

Рассмотрим характер зависимости между σ и ε при снятии нагрузки (при разгрузке). Если напряжения в образце будут выше предела упругости σ_y , то после разгрузки первоначальные размеры образца не восстанавливаются. Для определения остаточных деформаций $\varepsilon_{ост}$ обычно принимается, что диаграмма $\sigma \sim \varepsilon$ при разгрузке является линейной и прямая разгрузки (например, прямая KL на рис.3.21) параллельна начальному участку OA диаграммы. Полная деформация образца при нагружении выше предела упругости равна

$$\varepsilon = \varepsilon_y + \varepsilon_{ост}, \quad (3.16)$$

где ε_y – упругая часть полной деформации, подчиняющаяся закону Гука и полностью исчезающая при разгрузке.

Величина остаточной деформации характеризует пластические свойства материала или его пластичность. Степень пластичности может быть установлена по величине относительного остаточного удлинения δ и относительного сужения ψ образца после разрыва в месте образования «шейки». Эти величины определяются по формулам:

$$\delta = \frac{l_1 - l_0}{l_0} 100\%; \quad \psi = \frac{F_0 - F_{ш}}{F_0} 100\%, \quad (3.17)$$

где l_1 и $F_{ш}$ – длина рабочего участка образца и площадь поперечного сечения «шейки» после разрыва (рис.3.20,б). Для стали марки ВСт 3 величины δ и ψ составляют $\delta = (20 \div 28)\%$ и $\psi = (60 \div 70)\%$.

Испытание на растяжение образцов в виде полосы прямоугольного сечения обычно проводится для определения модуля упругости и коэффициента Пуассона материала. Эти величины определяются по формулам

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}, \quad \nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|,$$

где ε' – поперечная деформация.

Диаграммы растяжения различных материалов существенно отличаются друг от друга, как по характеру, так и по величинам прочностных характеристик. На рис.3.22 показаны диаграммы $\sigma \sim \varepsilon$ для чугуна 1 и медных сплавов 2. Диаграмма 1 характерна тем, что практически до разрушения зависимость между σ и ε является линейной. Площадка текучести отсутствует. Такие материалы называются хрупкими. Помимо чугуна к ним относятся, например, стали с высоким содержанием углерода. Такие стали называются вы-

сокопрочными или инструментальными. Они содержат также различные легирующие добавки (хром, марганец, ванадий и т.п.).

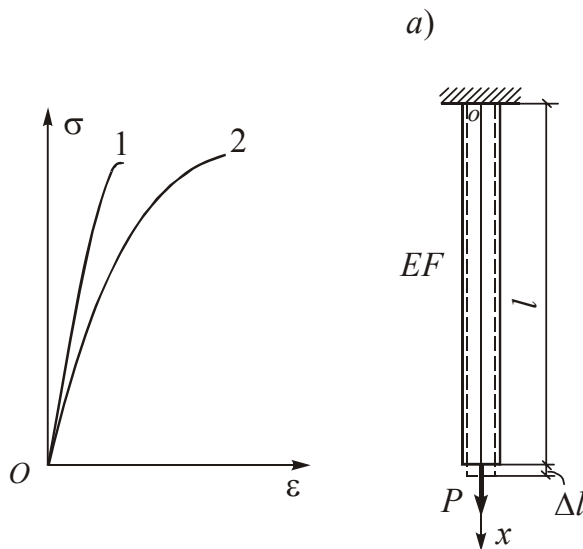


Рис.3.22

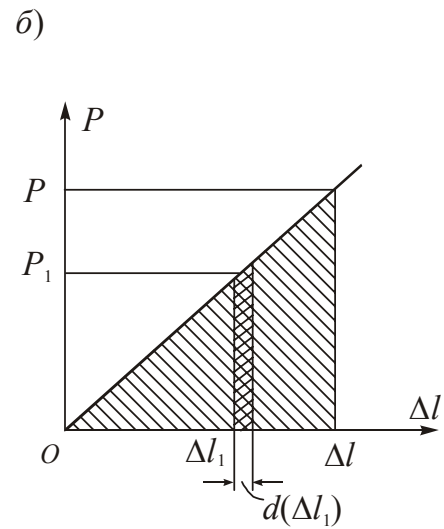


Рис.3.23

Стали с повышенным содержанием углерода обладают более высокими прочностными характеристиками, чем малоуглеродистые стали. Последние являются более пластичными. Достаточно высокая степень пластичности желательна для сталей, применяемых в строительстве.

Диаграмма 2 характерна для медных сплавов и цветных металлов. Эти материалы обладают значительной пластичностью, однако, площадка текучести отсутствует. Зависимость между σ и ϵ на значительном участке диаграммы является нелинейной. Для таких материалов принимается условный предел текучести, соответствующий напряжениям, при которых остаточные деформации составляют 0,2%.

Такие строительные материалы, как гранит, мрамор, кирпич, известняк, бетон плохо сопротивляются растяжению. Для определения прочностных и физико – механических характеристик этих материалов производится их испытание на сжатие с помощью образцов в форме кубиков стандартных размеров. Характер разрушения образца зависит от условий контакта между его поверхностями и плитами испытательного пресса.

Т а б л и ц а 3.2

Наименование материала	Предел текучести σ_T , МПа	Предел прочности σ_B , МПа	
		при растяжении	при сжатии
Прокат стали марок:			
ВСт3кп	185 ÷ 235	360 ÷ 365	
ВСт3пс	235 ÷ 275	370 ÷ 400	
ВСт3сп	235 ÷ 270	370 ÷ 400	
09Г2 (марганцовистая)	295 ÷ 370	430 ÷ 500	
10ХСНД (хромокремниевая)	390	530	
12Г2СМФ (термически уп- рочненная легированная)	590	685	
Титановый сплав ВТ4	550 ÷ 650	700 ÷ 850	
Чугун серый марки СЧ	—	120 ÷ 380	500 ÷ 1500
Гранит	—	3	120 ÷ 260
Кирпич	—	0,7 ÷ 3,0	7 ÷ 30
Бетон	—	0,4 ÷ 2,6	2,8 ÷ 43,8
Сосна, ель:			
вдоль волокон	—	80	40
поперек волокон	—	—	5
Текстолит ПТК	—	100	250
Оргстекло СТ-1	—	78	120
Стеклопластик СВМ 1:1	—	480 ÷ 500	420

Существенное влияние на механические свойства могут оказать такие факторы, как температурное воздействие, радиоактивное облучение, скорость нагружения, длительность действия нагрузки и т.п. Эти вопросы подробно рассмотрены в учебниках по сопротивлению материалов, например, изданных в 1995 г.*

В заключение приведем ориентировочные значения предела текучести и временного сопротивления (предела прочности) некоторых материалов (таблица 3.2).

*) 1. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. Под редакцией Г.С. Варданяна, М., АСВ, 1995.
2. Сопротивление материалов. Под редакцией А.В.Александрова, М., Высшая школа, 1995.

§ 3.6. Потенциальная энергия деформации при растяжении и сжатии

Рассмотрим стержень постоянного сечения, нагруженный на свободном конце сосредоточенной силой P (рис.3.23,а). При постепенном возрастании силы от нуля до некоторого значения P (рис.3.23,б) она совершает работу A на вызванных этой силой перемещениях. Вычислим работу A , учитывая, что в упругой стадии сила пропорциональна удлинению стержня:

$$P = k\Delta l. \quad (3.18)$$

Входящий в это равенство коэффициент k зависит от свойств материала и размеров стержня.

Элементарная работа силы на удлинении $d(\Delta l_1)$ равна произведению среднего значения силы P_1 на этом отрезке на величину $d(\Delta l_1)$ или численному значению заштрихованной на рис.3.23,б площади:

$$dA = P_1 d(\Delta l_1).$$

Полная работа, затраченная на удлинение стержня до величины Δl , с учетом (3.18) равна

$$A = \int_0^{\Delta l} P_1 d(\Delta l_1) = k \int_0^{\Delta l} \Delta l_1 d(\Delta l_1) = k \frac{\Delta l^2}{2}.$$

Производя в полученном выражении обратную замену $\Delta l = P/k$, приходим к следующему выражению:

$$A = \frac{1}{2} P \Delta l. \quad (3.19)$$

Нетрудно заметить, что полученное выражение равно площади под линейной диаграммой $P \sim \Delta l$, приведенной на рис.3.23,б.

Работа, совершаемая силой P , сопровождается накоплением потенциальной энергии деформации стержня U . При упругой деформации материала можно не учитывать работу, связанную с выделением тепла, с преодолением внутреннего трения и т.п. В силу этого можно принять, что работа силы P численно равна потенциальной энергии деформации стержня:

$$A = U = \frac{1}{2} P \Delta l. \quad (3.20)$$

При разгрузке стержня потенциальная энергия деформации расходуется на восстановление его первоначальных формы и размеров.

Подставляя в выражение (3.20) значение Δl из формулы (3.13) и учитывая, что в данном примере $N = P$, представим последнее равенство в следующем виде:

$$U = \frac{N^2 l}{2EF}.$$

Полученную формулу можно обобщить на случай, когда продольная сила, а также жесткость стержня при растяжении и сжатии переменны по длине. В этом случае энергия, накапливаемая в участке стержня длиной dx , равна

$$dU = \frac{N^2 dx}{2EF}, \quad (3.21)$$

а полная энергия вычисляется по формуле

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EF} dx. \quad (3.22)$$

Во многих задачах сопротивления материалов представляет интерес не полная энергия, накопленная в элементе конструкции, а удельная потенциальная энергия U_0 , отнесенная к единице объёма тела. В частном случае стержня, растягиваемого сосредоточенной силой P , разделив выражение (3.20) на объём стержня Fl , получим

$$U_0 = \frac{N\Delta l}{2Fl}.$$

Учитывая, что $N/F = \sigma$, а $\Delta l/l = \varepsilon$, представим это равенство в виде

$$U_0 = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon. \quad (3.23)$$

Используя закон Гука (3.6), можно получить следующие формулы

$$U_0 = \frac{\sigma^2}{2E}, \quad U_0 = \frac{E\varepsilon^2}{2}. \quad (3.24)$$

§ 3.7. Расчёты на прочность при растяжении и сжатии

Расчёты на прочность стержней и других элементов конструкций составляют одну из основных задач сопротивления материалов. Целью этих расчётов является обеспечение надёжной и безопасной работы элементов конструкций и сооружений в течение всего периода эксплуатации при минимальном расходе материала.

Расчёты на прочность производятся на основе определённых методов, позволяющих сформулировать условия прочности элементов конструкций при различных воздействиях.

Основным методом расчета на прочность элементов строительных конструкций является метод предельных состояний. В этом методе значения всех нагрузок, действующих на конструкцию в течение всего периода её эксплуатации, разделяются на нормативные и расчетные. Нормативные значения нагрузок характеризуют их действие на конструкцию при нормальных условиях её эксплуатации. Это собственный вес конструкции, атмосферные воздействия снега, ветра, вес технологического оборудования, людей и т.п. Нормативные значения нагрузок приведены в строительных нормах и правилах (СНиП).

Расчётные значения нагрузок P_p определяются путём умножения нормативных значений P_n на коэффициенты надёжности по нагрузке γ_f :

$$P_p = P_n \gamma_f \quad (3.25)$$

С помощью коэффициентов γ_f производится учёт возможного отклонения нагрузок от их нормативных значений в неблагоприятную для работы конструкции сторону. Значения коэффициентов надёжности по нагрузке устанавливаются нормами проектирования с учётом различных факторов в пределах от 1,05 до 1,4.

В качестве основного параметра, характеризующего сопротивление материала конструкции различным воздействиям, принимается нормативное сопротивление R_n , соответствующее значению предела текучести для пластичных материалов или временного сопротивления для хрупких материалов. Последние определяются с помощью механических испытаний.

При оценке прочности элементов конструкций величина нормативного сопротивления материала должна быть уменьшена за счёт различных неблагоприятных факторов (например, ухудшения качества материала). Для этого вводится расчётное сопротивление, которое определяется по формуле:

$$R = \frac{R_n}{\gamma_m}, \quad (3.26)$$

где γ_m – коэффициент надёжности по материалу, изменяющийся в различных пределах в зависимости от физико-механических свойств материала. Например, для стали он изменяется в пределах от 1,025 до 1,15.

Кроме того в условие прочности вводится коэффициент условий работы γ_c , с помощью которого учитываются конструктивные особенности и виды нагружения сооружений. Коэффициент γ_c может быть больше или меньше единицы.

Величины нормативных и расчётных сопротивлений и значения коэффициентов γ_f , γ_m и γ_c приведены в соответствующих разделах строительных норм и правил (СНиП).

Условие прочности стержня при растяжении и сжатии согласно методу предельных состояний имеет следующий вид:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq R \gamma_c, \quad (3.27)$$

где N – продольная сила в стержне, вычисленная от действия расчётных нагрузок и F – площадь поперечного сечения стержня.

Условие (3.27) обычно ставится для сечения стержня, в котором действуют наибольшие нормальные напряжения. С помощью условия прочности (3.27) можно выполнить подбор сечения стержня, то есть определить размеры поперечного сечения или установить номер прокатного профиля по сорту, а также определить грузоподъёмность стержня или стержневой системы. Подбор сечения стержня выполняется по формуле

$$F \geq \frac{N}{R \gamma_c}. \quad (3.28)$$

При расчете на прочность элементов машиностроительных конструкций используется метод расчета по допускаемым напряжениям. В этом методе внутренние усилия и напряжения в элементах конструкции вычисляются от действия нормативных нагрузок, допускаемых при нормальной эксплуатации данной конструкции. Сопrotивление материала различным воздействиям характеризуется допускаемым напряжением $[\sigma]$, которое определяется по формулам:

для хрупких материалов

$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{n_B}; \quad (3.29)$$

для пластичных материалов

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}, \quad (3.30)$$

где n_B и n_T – коэффициенты запаса прочности по отношению к временному сопротивлению σ_B и пределу текучести σ_T . Коэффициенты запаса принимаются с учетом целого ряда факторов, таких, как физико-механические свойства материала, условия работы конструкции, характер действия нагрузок и т.п.

Величины допускаемых напряжений $[\sigma]$ для различных материалов приведены в соответствующих нормативных документах.

Условие прочности стержня при растяжении и сжатии по методу допускаемых напряжений имеет следующий вид:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma]. \quad (3.31)$$

С помощью условия (3.31) можно также решать задачи подбора сечения стержня и определения грузоподъемности.

Пример 3.9. Жесткая балка AB нагружена сосредоточенной силой и поддерживается с помощью стержня CD (рис.3.24). Подберем сечение стержня в виде двух стальных прокатных равнобоких уголков и в виде двух стальных тяг круглого сечения. В расчетах примем нормативное значение силы $P_n = 100$ кН, $\gamma_f = 1,4$, $\gamma_c = 1,0$, $R = 210$ МПа.

Определим расчетное значение силы:

$$P_p = P_n \gamma_f = 100 \cdot 1,4 = 140 \text{ кН.}$$

Определим с помощью уравнения равновесия расчетное значение продольной силы в стержне CD :

$$\sum M_A = 0, \quad 2N - 3P = 0, \quad N = \frac{3 \cdot 140}{2} = 210 \text{ кН.}$$

Вычислим значение требуемой по условию прочности площади поперечного сечения стержня:

$$F \geq \frac{N}{R \gamma_c} = \frac{210}{210 \cdot 10^{-1} \cdot 1,0} = 10 \text{ см}^2.$$

В первом варианте принимаем по сортаменту сечение стержня в виде двух равнобоких уголков (рис.3.25,а) 2L56×5. Площадь поперечного сечения стержня равна: $F = 2 \cdot 5,41 = 10,82 \text{ см}^2$.

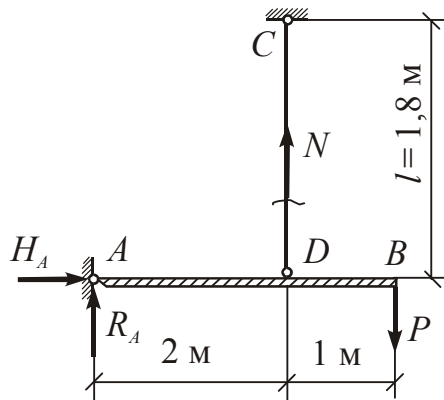


Рис.3.24

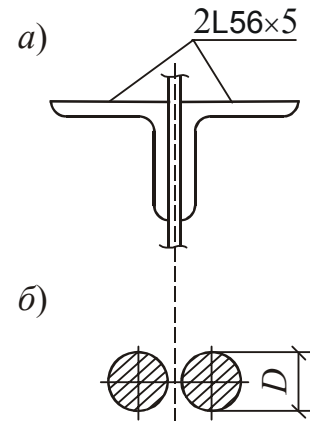


Рис.3.25

Во втором варианте определяем требуемый диаметр сечения каждого стержня (рис.3.25,б) :

$$F = 2 \frac{\pi D^2}{4} \geq 10 \text{ см}^2, \quad D \geq 2,52 \text{ см}.$$

Округлив в большую сторону, примем $D = 2,6 \text{ см}$.

Определим для первого варианта сечения значения напряжений в поперечном сечении стержня:

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{210}{10,82} = 19,41 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 194,1 \text{ МПа} < R_{\gamma_c} = 210 \text{ МПа}.$$

Прочность стержня обеспечена с небольшим запасом.

Пример 3.10. Стержневая система состоит из жесткой балки AB , имеющей шарнирно неподвижную опору C , и двух стержней BD и AE , поддерживающих балку (рис.3.26). К балке приложена сила P , нормативное значение которой равно 300 кН . Определим усилия в стержнях и подберем их сечения в виде двух стальных прокатных равнобоких уголков. В расчетах примем соотношение между площадями поперечных сечений стержней $F_2/F_1 = 1,3$, $\gamma_f = 1,2$, $\gamma_c = 1,0$, $R = 210 \text{ МПа}$.

Расчетное значение силы P равно: $P_p = 300 \cdot 1,2 = 360 \text{ кН}$.

Данная стержневая система является статически неопределимой, поскольку для определения четырех неизвестных величин N_1 , N_2 , R_C и H_C можно составить только три независимых уравнения статики. Используем

уравнение равновесия, не содержащее опорные реакции R_C и H_C . Учитывая, что $r_1 = 3\sin 30^\circ = 1,5$ м, получим

$$\sum M_C = 0, \quad 1,5N_1 + 1,2N_2 - 360 \cdot 3 = 0.$$

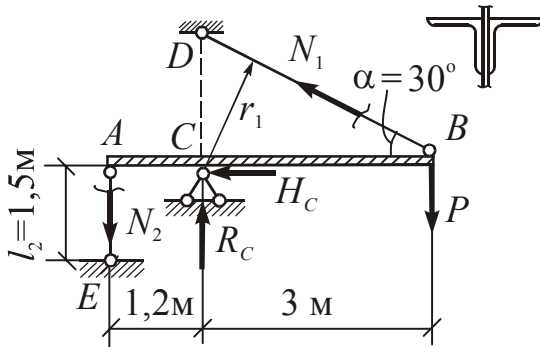


Рис.3.26

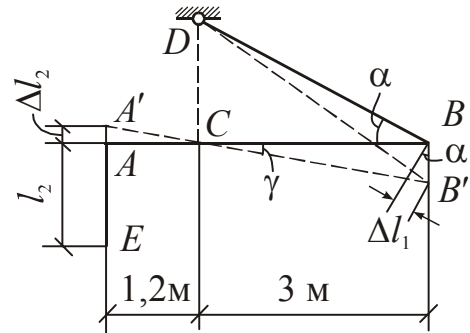


Рис.3.27

Для получения дополнительного уравнения относительно N_1 и N_2 рассмотрим схему деформации системы. При повороте жесткой балки AB на малый угол γ (рис.3.27) удлинения стержней составят:

$$\Delta l_1 = BB' \sin \alpha, \quad \Delta l_2 = AA'.$$

Определим из подобия треугольников $AA'C$ и $BB'C$ соотношение между величинами Δl_1 и Δl_2 .

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{BB' \sin \alpha}{AA'} = \frac{CB}{AC} \sin \alpha = \frac{3}{1,2} \sin 30^\circ = 1,25.$$

Выражаем величины удлинений стержней через действующие в них усилия и составляем дополнительное уравнение относительно N_1 и N_2 :

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{N_1 l_1}{EF_1} \cdot \frac{EF_2}{N_2 l_2} = \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{3,46}{1,5} \cdot 1,3 = 1,25,$$

$$N_1 = 0,416N_2,$$

где $l_1 = 3/\cos 30^\circ = 3,46$ м и $l_2 = 1,5$ м – длины стержней.

Подставляем соотношение между усилиями в уравнение равновесия и определяем величины усилий в стержнях

$$1,5 \cdot 0,416N_2 + 1,2N_2 = 1080,$$

$$N_2 = 592 \text{ кН}, \quad N_1 = 0,416 \cdot 592 = 246 \text{ кН}.$$

Определяем требуемые по условию прочности площади поперечных сечений стержней:

$$F_1 \geq \frac{N_1}{R\gamma_c} = \frac{246}{210 \cdot 10^{-1} \cdot 1,0} = 11,71 \text{ см}^2,$$

$$F_2 \geq \frac{N_2}{R\gamma_c} = \frac{592}{210 \cdot 10^{-1} \cdot 1,0} = 28,2 \text{ см}^2.$$

Проверим выполнение принятого в начале расчета соотношения между площадями F_1 и F_2 :

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{28,2}{11,71} = 2,41 \neq 1,3.$$

Поскольку принятое соотношение не выполняется, при подборе сечений стержней надо увеличить требуемую площадь поперечного сечения первого стержня и принять её равной

$$F_1 = \frac{F_2}{1,3} = \frac{28,2}{1,3} = 21,69 \text{ см}^2.$$

Принимаем по сортаменту сечения стержней в виде двух стальных прокатных равнобоких уголков, определяем действующие в стержнях напряжения и проверяем их прочность.

Стержень BD 2L75×8,

$$F_1 = 2 \cdot 11,5 = 23 \text{ см}^2,$$

$$\sigma = \frac{N_1}{F_1} = \frac{246}{23} = 10,7 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 107 \text{ МПа} < R\gamma_c = 210 \text{ МПа}.$$

Стержень AE 2L110×7,

$$F_2 = 2 \cdot 15,2 = 30,4 \text{ см}^2,$$

$$\sigma = \frac{N_2}{F_2} = \frac{592}{30,4} = 19,47 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 194,7 \text{ МПа} < R\gamma_c = 210 \text{ МПа}.$$

Прочность стержней обеспечена.

Пример 3.11. Для данной системы (рис.3.28) определим величину допустимой силы P из условий прочности стержней AB и BC . Определим усилия и напряжения в стержнях. В расчетах примем $R = 210 \text{ МПа}$ и $\gamma_c = 0,9$.

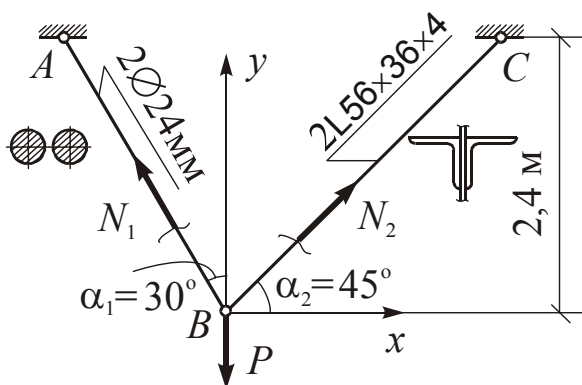


Рис.3.2

Составим уравнения равновесия .

$$\sum X = 0, \quad -N_1 \sin 30^\circ + N_2 \sin 45^\circ = 0,$$

$$N_1 = 1,414 N_2;$$

$$\sum Y = 0, \quad N_1 \cos 30^\circ + N_2 \cos 45^\circ - P = 0,$$

$$N_1 = 0,73P, \quad N_2 = 0,518P.$$

Определим площади поперечных сечений стержней и выразим действующие в них напряжения через силу P .

$$F_1 = 2 \frac{\pi \cdot 2,4^2}{4} = 9,05 \text{ см}^2, \quad \sigma = \frac{N_1}{F_1} = \frac{0,73P}{9,05} = 0,0807P;$$

$$F_2 = 2 \cdot 3,58 = 7,16 \text{ см}^2, \quad \sigma = \frac{N_2}{F_2} = \frac{0,518P}{7,16} = 0,0723P.$$

Напряжения в стержне *AB* являются большими по величине. Определим из условия прочности этого стержня величину силы *P*.

$$\sigma = 0,0807P \leq R_{\gamma c}, \quad P \leq \frac{220 \cdot 10^{-1} \cdot 0,9}{0,0807} = 245,4 \text{ кН}.$$

Примем *P* = 245 кН и вычислим значения усилий и напряжений в стержнях.

$$N_1 = 0,73 \cdot 245 = 179 \text{ кН},$$

$$\sigma = \frac{N_1}{F_1} = \frac{179}{9,05} = 19,7 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 197 \text{ МПа} < R_{\gamma c} = 198 \text{ МПа};$$

$$N_2 = 0,518 \cdot 245 = 127 \text{ кН},$$

$$\sigma = \frac{N_2}{F_2} = \frac{127}{7,16} = 17,7 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 177 \text{ МПа} < R_{\gamma c} = 198 \text{ МПа}.$$

Прочность стержней обеспечена.

Пример 3.12. Для латунного стержня ступенчато постоянного сечения (рис.3.29,*a*) определим величину силы *P* из условия прочности стержня. Определим напряжения в пределах каждого участка стержня. В расчетах используем метод допускаемых напряжений, приняв $[\sigma] = 80 \text{ МПа}$.

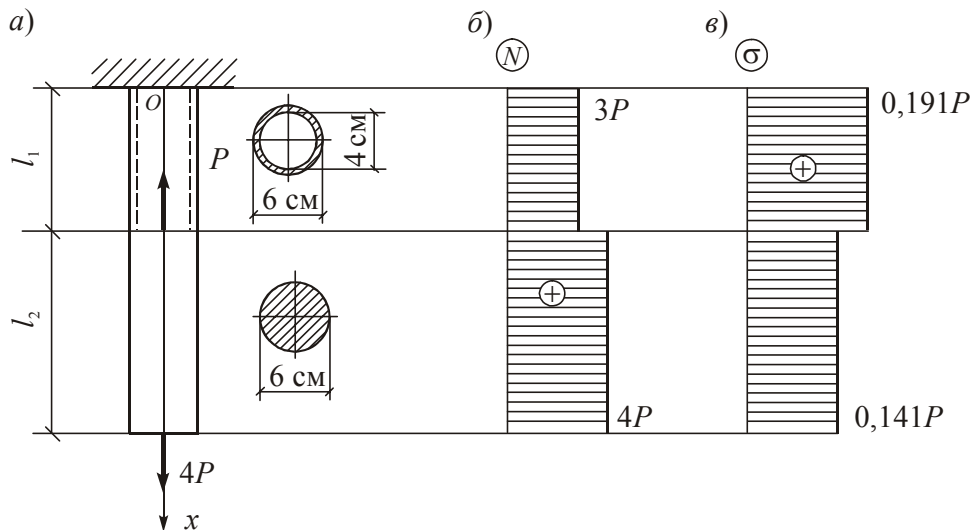


Рис.3.29

Площади поперечных сечений стержня равны :

$$F_1 = \frac{\pi}{4}(6^2 - 4^2) = 15,7 \text{ см}^2, \quad F_2 = \frac{\pi \cdot 6^2}{4} = 28,3 \text{ см}^2.$$

Строим эпюру продольных сил (рис.3.29,*б*). Определяем нормальные напряжения в пределах участков стержня и выражаем их через силу *P*.

$$\text{Первый участок: } \sigma = \frac{3P}{15,7} = 0,191P;$$

$$\text{Второй участок: } \sigma = \frac{4P}{28,3} = 0,141P.$$

Эпюра σ приведена на рис.3.29,в. Ставим условие прочности по напряжениям на первом участке и определяем величину P :

$$\sigma = 0,191P \leq [\sigma], \quad P \leq \frac{80 \cdot 10^{-1}}{0,191} = 41,9 \text{ кН.}$$

Примем $P = 40$ кН и определим усилия и напряжения в стержне:

$$N_1 = 3P = 3 \cdot 40 = 120 \text{ кН}, \quad \sigma = \frac{120}{15,7} = 7,64 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 76,4 \text{ МПа};$$

$$N_2 = 4P = 4 \cdot 40 = 160 \text{ кН}, \quad \sigma = \frac{160}{28,3} = 5,65 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 56,5 \text{ МПа}.$$

§ 3.8. Расчет стержней с учетом пластических свойств материала

При расчете стержней и стержневых систем из материалов, обладающих свойствами пластичными, может быть использована упрощенная диаграмма $\sigma \sim \varepsilon$, диаграмма Прандтля (рис.3.30). Эта диаграмма состоит из двух прямолинейных участков – наклонного и горизонтального. Горизонтальный участок, соответствующий площадке текучести, считается бесконечно протяженным. Согласно диаграмме Прандтля при достижении напряжениями предела текучести σ_T деформации неограниченно возрастают, что принимается за начало разрушения стержня. При этом продольная сила в стержне (разрушающая сила) равна

$$N_{\text{разр}} = \sigma_T F. \quad (3.32)$$

В стержневых системах, стержни которых работают на растяжение и сжатие, началом разрушения может считаться момент, когда напряжения в одном или нескольких стержнях достигнут предела текучести σ_T . При этом можно по формуле (3.32) определить усилия в стержнях, а затем с помощью уравнений равновесия установить величину разрушающей нагрузки $P_{\text{разр}}$. Допускаемая нагрузка на конструкцию $[P]$ определяется из условия

$$P \leq [P] = \frac{P_{\text{разр}}}{n}, \quad (3.33)$$

где n – коэффициент запаса прочности, принимаемый на основании тех же соображений, которые учитываются при расчете по методу допускаемых напряжений.

При определении разрушающей нагрузки в статически неопределимых системах надо учесть, что возникновение пластических деформаций ($\sigma = \sigma_T$) только в одном или в нескольких элементах (стержнях) не всегда приводит систему к разрушению.

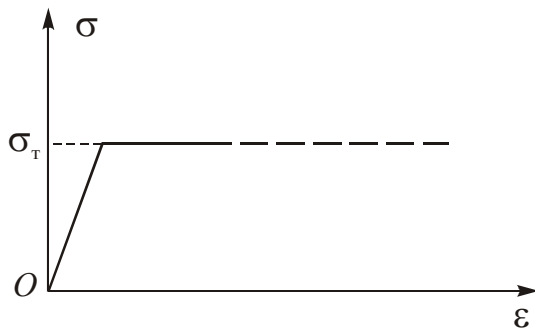


Рис.3.30

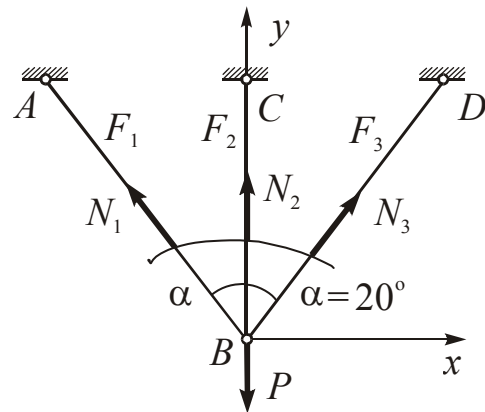


Рис.3.31

Пример 3.13. Для стержневой системы (рис.3.31) определим значения разрушающей и допускаемой силы P . В расчетах примем $\sigma_T = 240$ МПа, $n = 1,5$, $F_1 = F_3 = 10$ см², $F_2 = 15$ см².

Составим два уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum X = 0, & \quad -N_1 \sin \alpha + N_3 \sin \alpha = 0, & \quad N_1 = N_3; \\ \sum Y = 0, & \quad N_1 \cos \alpha + N_2 + N_3 \cos \alpha - P = 0, \\ & \quad P = 2N_1 \cos \alpha + N_2. \end{aligned}$$

При постепенном увеличении силы P наступит момент, когда напряжения во всех трех стержнях достигнут предела текучести σ_T . Этот момент согласно диаграмме Прандтля соответствует началу разрушения системы, поскольку деформации стержней при этом неограниченно возрастают. Определим значения усилий в стержнях в момент начала разрушения системы.

$$\begin{aligned} N_{\text{разр}}^{(1)} = N_{\text{разр}}^{(3)} &= \sigma_T F_1 = 240 \cdot 10^{-1} \cdot 10 = 240 \text{ кН}; \\ N_{\text{разр}}^{(2)} &= \sigma_T F_2 = 240 \cdot 10^{-1} \cdot 15 = 360 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Находим из уравнения равновесия величину разрушающей силы:

$$P_{\text{разр}} = 2 N_{\text{разр}}^{(1)} \cos \alpha + N_{\text{разр}}^{(2)} = 2 \cdot 240 \cdot \cos 20^\circ + 360 = 811 \text{ кН}.$$

Величина допускаемой силы равна

$$[P] = \frac{P_{\text{разр}}}{n} = \frac{811}{1,5} = 541 \text{ кН}.$$