

ГЛАВА 4

НАПРЯЖЕННО–ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ТЕЛА§ 4.1. Напряженное состояние в окрестности
точки тела и его виды

Под действием внешних сил, приложенных к телу, в нем возникают внутренние силы, которые определяются величинами нормальных и касательных напряжений в каждой точке тела. Совокупность напряжений, действующих на различных площадках, проведенных через точку тела, характеризует *напряженное состояние* в окрестности данной точки.

Вырежем мысленно в окрестности произвольной точки тела (рис.4.1) элементарный параллелепипед с размерами dx , dy , dz (рис.4.2). Вектор полного напряжения на каждой грани можно разложить на три составляющих по координатным осям. Например, на грани, перпендикулярной к оси Ox , этими составляющими являются нормальное напряжение σ_x и касательные напряжения τ_{yx} и τ_{zx} . Индекс y нормального напряжения указывает нормаль к площадке, на которой оно действует. Первый индекс y касательного напряжения обозначает ось, параллельно которой оно направлено, а второй – нормаль к площадке, на которой оно действует.

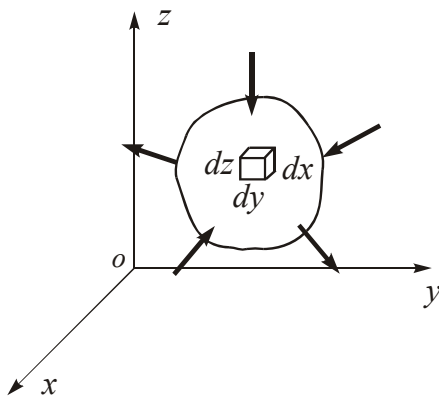


Рис.4.1

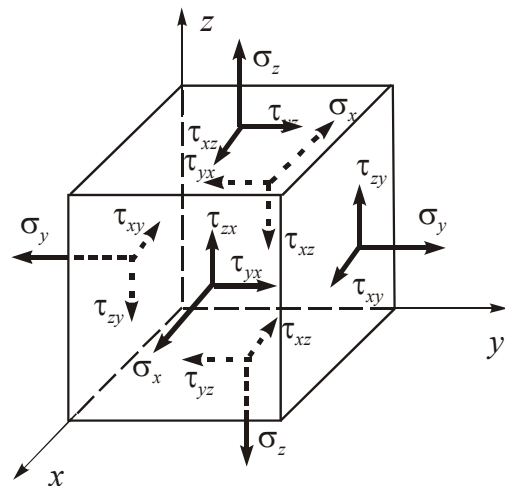


Рис.4.2

Напряжения являются непрерывными функциями координат точек тела. Вследствие малости элементарного параллелепипеда можно считать, что напряжения на его параллельных гранях одинаковы по величине и равномерно распределены по площадкам граней.

Нормальное напряжение считается положительным, если оно направлено в сторону внешней нормали к площадке. В соответствии с этим растягивающее напряжение считается положительным, а сжимающее – отрицательным.

Для касательных напряжений применяется следующее правило знаков. На площадке, внешняя нормаль к которой направлена в положительном (отрицательном) направлении соответствующей оси, касательное напряжение считается положительным, если оно также направлено в положительном (отрицательном) направлении оси. На рис.4.2 показаны положительные напряжения.

Составим уравнения моментов сил, действующих на элементарный параллелепипед, относительно оси, проходящей через центры горизонтальных граней. Для этого нужно равнодействующие касательных напряжений $\tau_{yx}dydz$ и $\tau_{xy}dxdz$, действующих на вертикальных гранях, умножить на расстояния от центров этих граней до указанной оси:

$$2\tau_{yx}dydz \cdot \frac{dx}{2} - 2\tau_{xy}dxdz \cdot \frac{dy}{2} = 0.$$

Из этого равенства получим $\tau_{yx} = \tau_{xy}$. Точно также можно получить еще два аналогичных равенства. В результате будем иметь следующие три соотношения:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} ; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} ; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} . \quad (4.1)$$

Эти равенства выражают *закон парности касательных напряжений*, согласно которому касательные напряжения, действующие на двух взаимно перпендикулярных площадках, равны по величине и направлены либо к линии пересечения этих площадок, либо от этой линии.

В силу закона парности на трех взаимно перпендикулярных площадках, проведенных через точку тела, имеем шесть искомых напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$. Совокупность этих напряжений представим в виде матрицы

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

которая называется *тензором напряжений*.

Можно показать, что указанные шесть напряжений полностью определяют напряженное состояние в окрестности рассматриваемой точки тела. Это означает, что зная эти шесть величин можно найти напряжения на любой наклонной площадке, проходящей через данную точку. Следовательно, напряженное состояние в окрестности точки характеризуется тензором напряжений. Известно понятие числа и понятие вектора, как величины, определяемой тремя числами. Напряженное состояние определяется уже не тремя, а шестью числами и представляет собой тензор. Тензору напряжений в отличие от вектора нельзя дать простое геометрическое толкование.

В теории упругости доказывается, что в любой точке нагруженного тела всегда существуют три взаимно перпендикулярные площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения. Такие площадки называются *главными площадками*, а действующие на них нормальные напряжения, – *главными напряжениями*. Обозначим величины главных напряжений через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. При этом будем считать, что $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Главные напряжения являются экстремальными величинами. Напряжение σ_1 представляет собой наибольшее, а σ_3 – наименьшее среди нормальных напряжений на различных площадках, проходящих через данную точку.

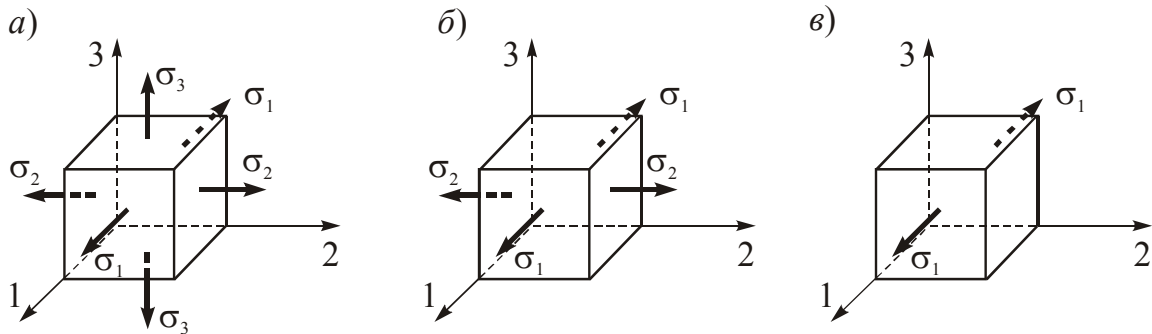


Рис.4.3

На рис.4.3,*а* показан элементарный параллелепипед, грани которого являются главными площадками, а нормали к ним, оси 1, 2, 3 – главными осями напряженного состояния.

При расчете элементов конструкций на прочность необходимо знать в каждой точке вид напряженного состояния, который характеризуется значениями главных напряжений. Существуют три основных вида напряженного состояния: *трехосное*, при котором все три главных напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ отличны от нуля (рис.4.3,*а*); *двухосное*, при котором одно из главных напряжений равно нулю (рис.4.3,*б*), и *одноосное*, при котором только одно из главных напряжений отлично от нуля (рис.4.3,*в*).

Наибольшее по абсолютной величине касательное напряжение действует на площадках, наклоненных под углом 45° к главным осям 1 и 3, и равно

$$\tau_{нб} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (4.3)$$

§ 4.2. Двухосное напряженное состояние

Рассмотрим тонкую пластину, нагруженную по внешнему контуру силами, параллельными плоскости Oxy и равномерно распределенными по толщине h (рис.4.4). На внешних ненагруженных плоскостях пластины нормальные и касательные напряжения равны нулю ($\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$). Так как толщина пластины мала, можно считать, что и во внутренних точках пластины на площадках, параллельных плоскости Oxy , эти напряжения отсут-

вуют и указанные площадки являются главными. Такое напряженное состояние называется *двухосным* или *плоским напряженным состоянием*.

Плоское напряженное состояние возникает в элементах тонкостенных стержней, пластин и оболочек и, в частности, в стеновых панелях зданий, работающих в основном на сжатие в двух направлениях, в стенках резервуаров, в стенках двутавровых и швеллерных балок.

На рис.4.5 показаны нормальные и касательные напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}$, действующие на гранях элементарного параллелепипеда со сторонами dx, dy, h , выделенного в окрестности произвольной точки пластины. При этом $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

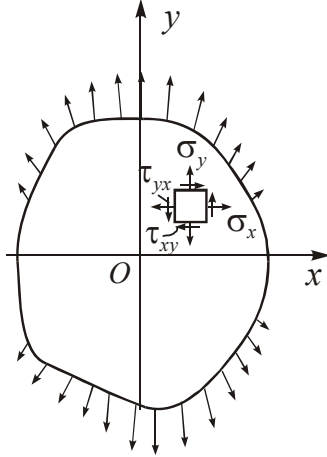


Рис.4.4

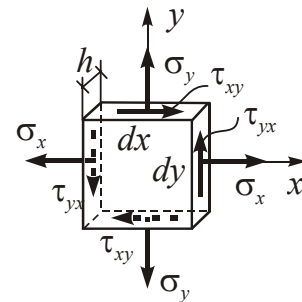
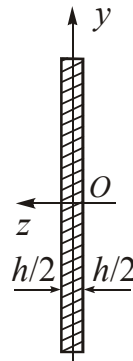


Рис.4.5

В дальнейшем будем рассматривать только площадки, перпендикулярные к плоскости Oxy .

Выделим в окрестности рассматриваемой точки пластины элементарную призму ABC (рис.4.6) и определим нормальные и касательные напряжения σ_v и τ_{tv} на площадке AB , нормаль v к которой наклонена к оси Ox под углом α . Обозначим через dF, dF_x, dF_y , площади наклонной, вертикальной и горизонтальной грани призмы.

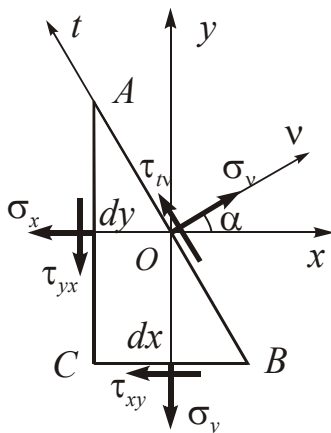


Рис.4.6

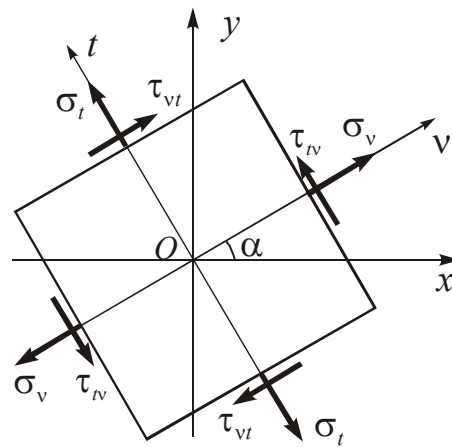


Рис.4.7

Составим уравнение проекций сил на нормаль v к площадке AB .

$$\begin{aligned} \sigma_v dF - \sigma_x dF_x \cos \alpha - \sigma_y dF_y \sin \alpha - \\ - \tau_{yx} dF_x \sin \alpha - \tau_{xy} dF_y \cos \alpha = 0. \end{aligned}$$

Полагая в этом равенстве $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ и учитывая, что $dF_x = dF \cos \alpha$, $dF_y = dF \sin \alpha$, после сокращения на общий множитель dF , получим

$$\sigma_v = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{yx} \sin 2\alpha.$$

Аналогично из уравнения проекций сил на направление t получим

$$\tau_{tv} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha.$$

Точно также можно определить нормальное и касательное напряжения σ_t и τ_{vt} на площадке, перпендикулярной к AB . В результате получим формулы для напряжений на двух взаимно перпендикулярных наклонных площадках (рис.4.7)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_v &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha; \\ \sigma_t &= \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha; \\ \tau_{tv} &= \tau_{vt} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Сложив выражения для σ_v и σ_t , получим

$$\sigma_v + \sigma_t = \sigma_x + \sigma_y. \quad (4.5)$$

Таким образом, при двухосном напряженном состоянии сумма нормальных напряжений, действующих на любых двух взаимно перпендикулярных площадках, является постоянной величиной, не зависящей от выбора системы координат. Такие величины называются *инвариантами*. Заметим, что при трехосном напряженном состоянии сумма нормальных напряжений, действующих на любых трех взаимно перпендикулярных площадках, также постоянна и называется *первым инвариантом* тензора напряжений:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = const. \quad (4.6)$$

Исследуем на экстремум нормальное напряжение σ_v как функцию угла α :

$$\frac{d\sigma_v}{d\alpha} = -2\sigma_x \sin \alpha \cos \alpha + 2\sigma_y \sin \alpha \cos \alpha + 2\tau_{xy} \cos 2\alpha = 2\tau_{tv} = 0.$$

Откуда найдем:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (4.7)$$

Аналогичный результат получим при исследовании на экстремум напряжения σ_t . Отсюда следует, что нормальные напряжения имеют экстре-

мальные значения на двух взаимно перпендикулярных площадках, на которых касательные напряжения равны нулю. Такие площадки, как было отмечено в § 4.1, называются главными площадками, а нормальные напряжения,

действующие на них, – главными напряжениями, при этом $\sigma_1 = \sigma_{max}$, $\sigma_2 = \sigma_{min}$.

Формула (4.7) дает возможность найти углы наклона нормалей 1 и 2 главных площадок к оси Ox (рис.4.8).

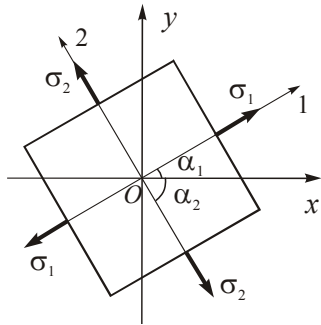


Рис.4.8

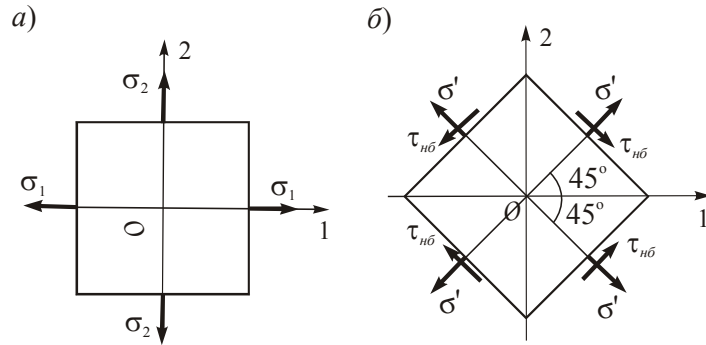


Рис.4.9

Для определения величин главных напряжений необходимо в первых двух формулах (4.4) выразить с помощью известных формул тригонометрии $\sin^2\alpha$, $\cos^2\alpha$, $\sin 2\alpha$ через $\operatorname{tg} 2\alpha$ с использованием выражения (4.7). В результате получим формулы для двух главных напряжений

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (4.8)$$

Формулы для углов, определяющих положение главных площадок, удобнее записать с использованием главных напряжений σ_1 и σ_2 . Приведем эти формулы без вывода:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_y}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_2 - \sigma_y} \quad (4.9)$$

Для определения экстремальных значений касательных напряжений и положения площадок, на которых они действуют, запишем формулы (4.4) для напряжений на наклонной площадке, взяв в качестве исходных главные направления 1 и 2 (рис.4.9,a). Учитывая, что на главных площадках касательные напряжения равны нулю, получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_v &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha; \\ \tau_{iv} &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Из (4.10) следует, что касательные напряжения достигают своих экстремальных значений на площадках, расположенных под углами $\pm 45^\circ$ к главным площадкам. При этом величина наибольшего касательного напряжения равна

$$\tau_{нб} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (4.11)$$

Нормальные напряжения на этих площадках согласно (4.10) равны

$$\sigma' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}. \quad (4.12)$$

Рассмотрим два частных случая.

Чистый сдвиг. Чистым сдвигом называется такое напряженное состояние, при котором на двух взаимно перпендикулярных площадках действуют только касательные напряжения (рис.4.10,а).

Положив в формуле (4.8) $\sigma_x = \sigma_y = 0$, а $\tau_{xy} = \tau$, найдем величины главных напряжений при чистом сдвиге: $\sigma_{1,2} = \pm \tau$. Зная $\sigma_{1,2}$, найдем из (4.9) углы наклона главных площадок :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = -1, \quad \alpha_1 = 45^\circ, \quad \alpha_2 = -45^\circ.$$

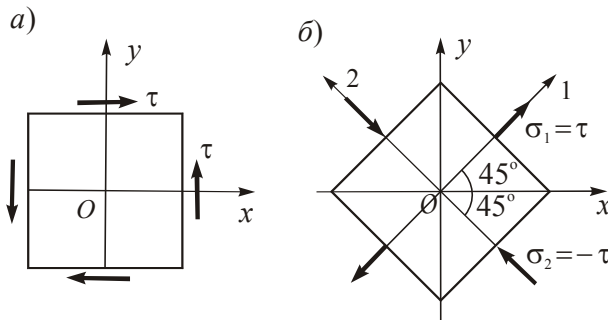


Рис.4.10

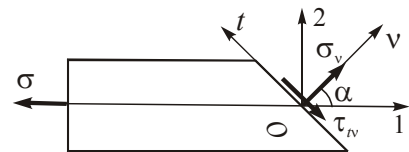


Рис.4.11

Таким образом, чистый сдвиг эквивалентен действию двух равных по величине и противоположных по знаку главных напряжений $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = -\tau$. (рис.4.10,б). Площадки чистого сдвига наклонены по отношению к главным площадкам под углами $\alpha = \pm 45^\circ$.

Одноосное напряженное состояние. Такое напряженное состояние возникает, если только одно из главных напряжений отлично от нуля. Этот случай соответствует, например, задаче центрального растяжения и сжатия, рассмотренной в главе 3 (часть 1). Формулы для напряжений на наклонных площадках (см. формулы (3.8), часть 1) можно получить из формул (4.10) для двухосного напряженного состояния, если положить в них $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = 0$:

$$\sigma_v = \sigma \cos^2 \alpha, \quad \tau_{tv} = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha.$$

В этих формулах α – угол между нормалью v к наклонной площадке и направлением действия напряжения σ (рис.4.11).

§ 4.3. Определение напряжений с помощью круга Мора

Между формулами (4.4) для напряжений на наклонных площадках при двухосном напряженном состоянии и формулами (2.7) (часть 1) для определения моментов инерции при повороте осей существует очевидная аналогия. Переход от одних формул к другим может быть осуществлен с помощью следующих замен:

$$J_x \leftrightarrow \sigma_x, \quad J_y \leftrightarrow \sigma_y, \quad J_{xy} \leftrightarrow -\tau_{xy}. \quad (4.13)$$

Поэтому графический способ определения моментов инерции с помощью круга Мора может быть также использован для исследования напряжений при двухосном напряженном состоянии.

Круг Мора для напряжений (рис.4.13) строится аналогично кругу Мора для моментов инерции (рис.2.19, часть 1) с той разницей, что при выбранном на рис.4.12 направлении осей координат Ox и Oy положительные значения касательных напряжений откладываются вниз от горизонтальной оси. Заметим также, что в отличие от осевых моментов инерции нормальные напряжения могут быть как положительными, так и отрицательными величинами. Поэтому центр круга Мора для напряжений может быть расположен как справа, так и слева от вертикальной оси.

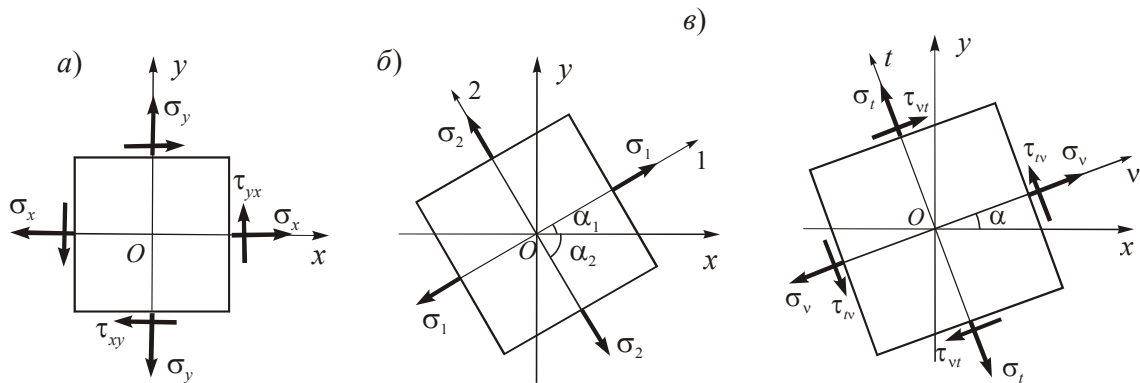


Рис.4.12

На рис.4.13 с помощью круга Мора определены главные напряжения σ_1 и σ_2 , действующие на площадках с нормальными, составляющими с осью Ox углы α_1 и α_2 (рис.4.12,б), а также нормальные и касательные напряжения, действующие на произвольных площадках с нормальными v и t (рис.4.12,в).

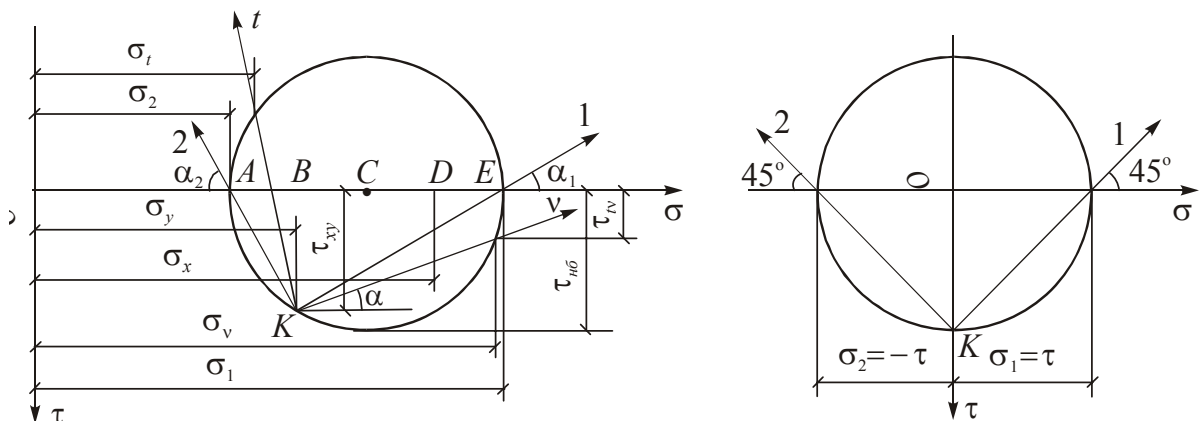


Рис.4.13

Рис.4.14

В качестве примера определения напряжений с помощью круга Мора рассмотрим задачу о чистом сдвиге, изображенную на рис.4.10,а. Поскольку в этом случае $\sigma_x = \sigma_y = 0$, то точка K лежит на оси τ_{xy} , а центр круга C совпадает с началом координат O (рис.4.14). Очевидно, что главные напряжения при чистом сдвиге равны $\pm \tau$, а главные площадки расположены под углами $\pm 45^\circ$ к исходным площадкам.

§ 4.4. Перемещения и деформации

Под действием внешних сил происходит деформирование тела и перемещение его точек в пространстве. При этом возможны перемещения двух видов: перемещение тела как абсолютно твердого без изменения его формы и размеров и перемещения, связанные с деформированием тела. Перемещения первого вида изучаются в теоретической механике. Поэтому в дальнейшем рассматриваются только перемещения, связанные с деформированием тела.

Пусть в результате деформирования тела точка A переместилась в новое положение A' (рис.4.15). Обозначим составляющие вектора полного перемещения AA' по осям Ox , Oy , Oz соответственно через u , v , w . Перемещения u , v , w считаются положительными, если они происходят в положительном направлении осей координат.

Будем полагать, что перемещения малы по сравнению со всеми характерными размерами тела. Например, прогибы балок, применяемых в строительных конструкциях, обычно малы по сравнению с длиной балки и размерами поперечного сечения.

Перемещения различных точек тела различны и являются непрерывными функциями координат x , y , z :

$$u = u(x, y, z); \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z).$$

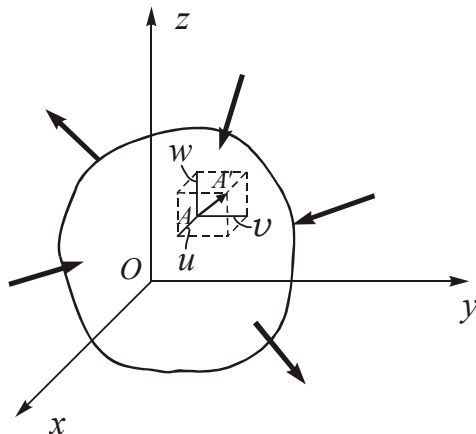


Рис.4.15

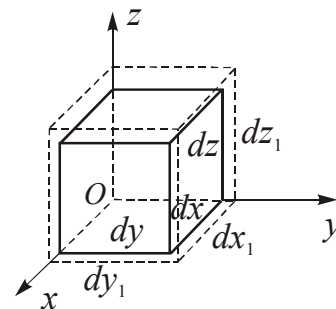


Рис.4.16

Для исследования деформаций вырежем мысленно вблизи произвольной точки тела элементарный параллелепипед с ребрами dx , dy , dz . В результате различия перемещений точек параллелепипеда его ребра удлиняются или укорачиваются а первоначальные углы между ребрами искажаются. В соответствии с этим различают два основных вида деформаций – *линейные* и *угловые*.

Линейные деформации ε_x , ε_y , ε_z представляют собой относительные удлинения ребер dx , dy , dz элементарного параллелепипеда (рис.4.16).

$$\varepsilon_x = \frac{dx_1 - dx}{dx}; \quad \varepsilon_y = \frac{dy_1 - dy}{dy}; \quad \varepsilon_z = \frac{dz_1 - dz}{dz}.$$

Деформации удлинения считаются положительными, а укорочения – отрицательными. Используя эти соотношения, можно найти длины ребер dx_1 , dy_1 , dz_1 после деформации:

$$dx_1 = (1 + \varepsilon_x)dx, \quad dy_1 = (1 + \varepsilon_y)dy, \quad dz_1 = (1 + \varepsilon_z)dz. \quad (4.14)$$

Угловые деформации или деформации сдвига γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} представляют собой искажения прямых углов между ребрами элементарного параллелепипеда (рис. 4.17). При этом индексы указывают, в какой плоскости происходит угловая деформация. Заметим, что напряженное и деформированное состояния элементарного параллелепипеда для трех случаев, изображенных на рис.4.18,*а,б,в* (показаны проекции параллелепипеда на плоскость Oxy), одинаковы, так как эти три случая отличаются друг от друга только величинами жесткого вращения вокруг оси Oz , не вызывающего дополнительных напряжений.

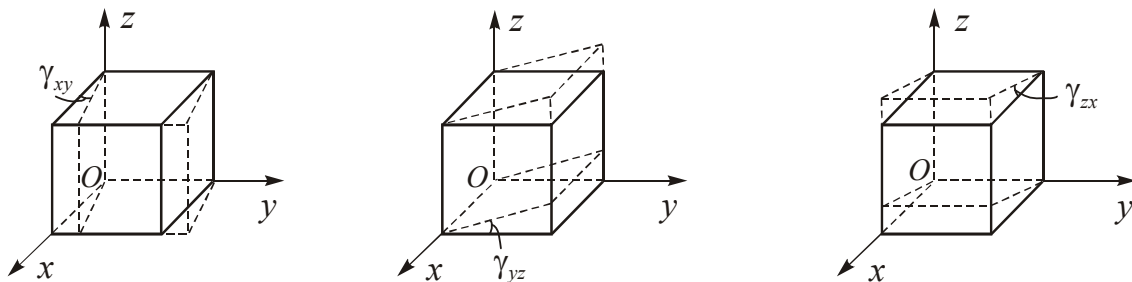


Рис.4.17

Деформации сдвига так же, как касательные напряжения, обладают свойством взаимности, то есть

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz}.$$

В дальнейшем будем считать, что линейные и угловые деформации по абсолютной величине существенно малы по сравнению с единицей, то есть

$$|\varepsilon_i| \ll 1, \quad |\gamma_{ij}| \ll 1, \quad (i, j = x, y, z).$$

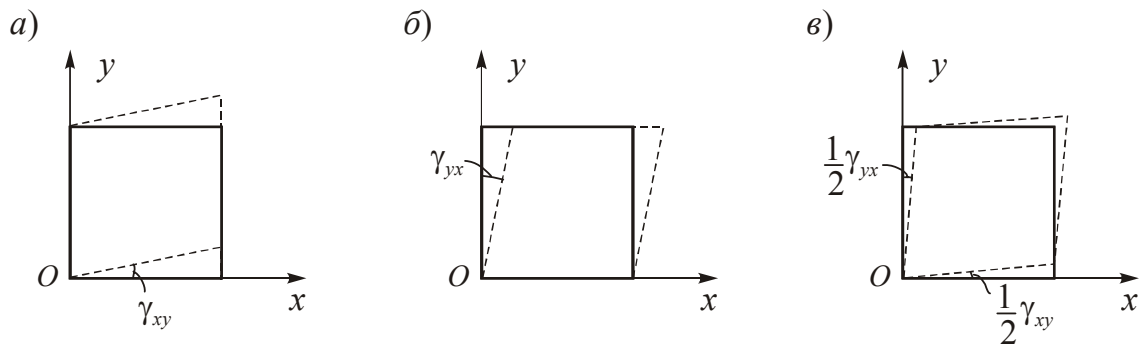


Рис.4.18

Деформации, связанные с искривлением граней и ребер элементарного параллелепипеда, являются величинами более высокого порядка малости по сравнению с рассмотренными основными деформациями и их можно не учитывать.

Кроме линейных и угловых деформаций представляет также интерес объемная деформация, равная относительному изменению объема элементарного параллелепипеда (рис.4.16)

$$e = \frac{dV_1 - dV}{dV}, \quad (4.15)$$

где $dV = dx dy dz$ и $dV_1 = dx_1 dy_1 dz_1$ – объемы параллелепипеда до и после деформации.

Учитывая формулы (4.14), найдем

$$dV_1 = dx dy dz (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) = dV(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z).$$

Отбрасывая в этом выражении произведения деформаций, как величины второго и третьего порядков малости, по формуле (4.15) окончательно получим

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (4.16)$$

Таким образом, объемная деформация равна сумме трех линейных деформаций.

Рассмотренные выше шесть составляющих деформации полностью определяют *деформированное состояние* в окрестности рассматриваемой точки тела. Зная эти шесть величин, можно определить линейную и угловую деформации по произвольному направлению и в произвольной плоскости, проходящей через данную точку.

Аналогично тензору напряжений (4.2) введем понятие тензора деформаций

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Тензоры напряжений и деформаций имеют аналогичную структуру и могут быть получены один из другого с помощью следующих формальных замен:

$$\sigma_i \leftrightarrow \varepsilon_i, \quad \tau_{ij} \leftrightarrow \frac{1}{2}\gamma_{ij}, \quad (i, j = x, y, z). \quad (4.18)$$

Соответствующие формулы для напряжений и деформаций также имеют аналогичную структуру.

Среди множества осей, проведенных через точку тела, существуют три взаимно перпендикулярные оси, в системе которых отсутствуют угловые деформации. Эти оси называются *главными осями деформированного состояния*, а соответствующие им линейные деформации – *главными деформациями*.

Главные деформации обозначаются через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, при этом принимается, что $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$.

В изотропном теле, свойства которого не зависят от направлений, главные оси напряженного и деформированного состояний совпадают.

§ 4.5. Обобщенный закон Гука

Для получения полной системы уравнений, описывающих напряженное и деформированное состояния тела, необходимо иметь равенства, связывающие между собой напряжения и деформации. В эти равенства должны входить величины, характеризующие физические свойства материала.

В общем случае трехосного напряженного состояния на всех гранях элементарного параллелепипеда, выделенного в окрестности произвольной точки тела, действуют нормальные и касательные напряжения (на рис.4.19 показаны напряжения только на видимых гранях).

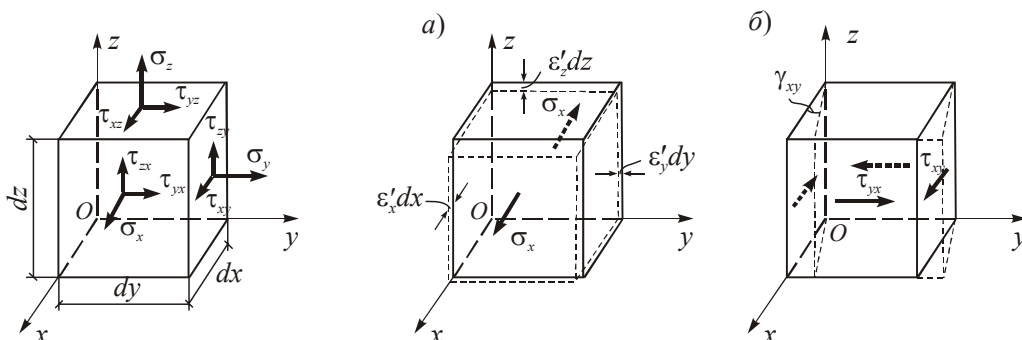


Рис.4.19

Рис.4.20

Будем предполагать, что напряжения и деформации связаны между собой линейными зависимостями и любая деформация, вызванная одновременным действием нескольких напряжений, на основании принципа независимости действия сил может быть найдена как сумма деформаций от действия каждого из напряжений в отдельности.

В изотропном теле нормальные напряжения вызывают только линейные деформации удлинения или укорочения ребер элементарного параллелепипеда и не вызывают угловых деформаций. Касательные напряжения вызывают только угловые деформации и не вызывают линейных деформаций.

На рис.4.20,а,б показано деформированное состояние элементарного параллелепипеда от действия нормального напряжения σ_x и касательного напряжения τ_{xy} .

Элемент, изображенный на рис.4.20,а, испытывает одноосное напряженное состояние. Под действием напряжения σ_x возникают деформации удлинения ε'_x ребер параллелепипеда, параллельных оси Ox , и деформации укорочения ε'_y и ε'_z ребер, параллельных осям Oy и Oz . Эти деформации согласно закону Гука при одноосном напряженном состоянии и зависимости между поперечными и продольными деформациями будут равны (см. § 3.2, часть 1)

$$\varepsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon'_y = \varepsilon'_z = -\nu\varepsilon'_x = -\nu\frac{\sigma_x}{E}.$$

Здесь ν – коэффициент Пуассона.

Аналогично под действием напряжений σ_y и σ_z возникают деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon''_y = \frac{\sigma_y}{E}, \quad \varepsilon''_z = \varepsilon''_x = -\nu\varepsilon''_y = -\nu\frac{\sigma_y}{E}; \\ \varepsilon'''_z = \frac{\sigma_z}{E}, \quad \varepsilon'''_x = \varepsilon'''_y = -\nu\varepsilon'''_z = -\nu\frac{\sigma_z}{E}. \end{aligned}$$

Полную относительную деформацию ребер параллелепипеда, параллельных оси Ox , находим как сумму деформаций от действия каждого из напряжений

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)].$$

Аналогично можно найти относительные деформации ребер, параллельных осям Oy и Oz .

Таким образом, линейные деформации связаны с нормальными напряжениями тремя формулами закона Гука

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] ; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] ; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] . \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

В главных осях формулы (4.19) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] ; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)] ; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] . \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

Элемент, изображенный на рис.4.20,б, испытывает напряженное состояние, называемое чистым сдвигом (см. § 4.2). Рассмотрим проекцию элемента на координатную плоскость Oxy (рис.4.21). Главные оси напряженного и деформированного состояний наклонены по отношению к площадкам чистого сдвига под углом 45° . Главные напряжения по абсолютной величине равны касательным напряжениям и имеют противоположные знаки

$$\sigma_1 = \tau_{xy} , \quad \sigma_2 = -\tau_{xy} . \quad (4.21)$$

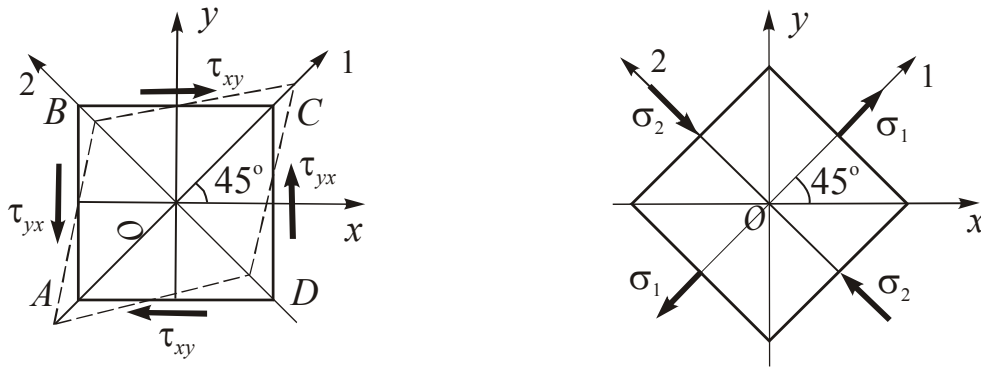


Рис.4.21

Для нахождения величин главных деформаций ε_1 и ε_2 , которые в рассматриваемом случае представляют собой соответственно относительное удлинение диагонали AC и относительное укорочение диагонали BD , воспользуемся аналогией между формулами напряженного и деформированного состояний. Заменяя в соответствии с (4.18) в формулах (4.21) $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{xy}$ на $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{xy}/2$, получим

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \gamma_{xy} , \quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} \gamma_{xy} . \quad (4.22)$$

Чистый сдвиг представляет собой частный случай двухосного напряженного состояния. Поэтому положим в первой из формул (4.20) $\sigma_3 = 0$ и подставим вместо σ_1 и σ_2 их выражения из (4.21), а вместо ε_1 – выражение из первой формулы (4.22). Тем самым мы свяжем деформации сдвига с касательными напряжениями:

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{E}(\tau_{xy} + \nu\tau_{xy}).$$

Вводя в этом выражении обозначение

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (4.23)$$

получим одну из формул закона Гука при сдвиге

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}. \quad (4.24)$$

Аналогично можно получить еще две формулы, связывающие деформации сдвига γ_{yz} и γ_{zx} с касательными напряжениями τ_{yz} и τ_{zx}

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}.$$

Величина G называется *модулем сдвига*.

Формула (4.23) устанавливает связь между тремя постоянными упругости для изотропного материала: модулем упругости E , модулем сдвига G и коэффициентом Пуассона ν . Из (4.23) следует, что независимыми являются только любые две из этих постоянных.

Таким образом, в общем случае трехосного напряженного состояния имеем шесть формул, устанавливающих связь между напряжениями и деформациями в окрестности точки тела, которые называются *обобщенным законом Гука*.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

Сложим почленно первые три формулы (4.25)

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (4.26)$$

Используем обозначения для объемной деформации e , средней деформации ε_0 , суммы нормальных напряжений s и среднего напряжения σ_0

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \quad \varepsilon_0 = \frac{e}{3}, \quad s = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \quad \sigma_0 = \frac{s}{3} \quad (4.27)$$

и введем понятие *модуля объемной деформации*

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (4.28)$$

Тогда равенство (4.26) можно записать в виде

$$e = \frac{s}{3K} = \frac{\sigma_0}{K}; \quad \varepsilon_0 = \frac{s}{9K} = \frac{\sigma_0}{3K}. \quad (4.29)$$

Эти соотношения называют *законом упругого изменения объема*. Как показывают лабораторные исследования, этот закон справедлив и при высоких значениях среднего напряжения σ_0 , значительно превышающих предел упругости материала. С помощью (4.28) и (4.29) покажем, что для изотропного материала коэффициент Пуассона не может превышать значение $\nu = 0,5$. Пусть ко всем граням элементарного параллелепипеда приложены сжимающие напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. Если при этом предположить, что $\nu > 0,5$, то из формул (4.28) и (4.29) следует, что $K < 0$ и $e > 0$, то есть при всестороннем сжатии объем параллелепипеда увеличивается, что противоречит физическому смыслу.

Как видно из (4.28) и (4.29), при $\nu \rightarrow 0,5$, $K \rightarrow \infty$, $e \rightarrow 0$. То есть изменения объема не происходит. *Материал, обладающий этим свойством, называется несжимаемым.*

В случаях двухосного напряженного состояния в формулах (4.25) необходимо положить $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$. В результате получим

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x); \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

Деформация ε_z может быть найдена из третьего равенства (4.25)

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y). \quad (4.31)$$

Деформации сдвига $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$.

Таким образом, при двухосном напряженном состоянии имеем три формулы (4.30) обобщенного закона Гука.

В главных осях угловые деформации отсутствуют и формулы (4.30) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2); \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1). \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

Если равенства (4.30) решить относительно напряжений, то получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y); \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x); \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

§ 4.6. Потенциальная энергия деформации

Внешние силы, приложенные к телу, совершают работу на вызываемых ими перемещениях. В результате этого происходит накопление *потенциальной энергии деформации*, которая при удалении внешних сил расходуется на восстановление первоначального недеформированного состояния тела. Если тело при нагружении испытывает только упругие деформации, то потенциальная энергия деформации численно равна работе сил, затраченных на деформацию тела. Энергия, накапливаемая в единице объема тела, называется *удельной энергией*.

При одноосном напряженном состоянии удельная потенциальная энергия деформации определяется по формуле (3.23) (часть 1)

$$U_0 = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon.$$

В общем случае трехмерной задачи выражение для U_0 можно записать в виде

$$U_0 = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}). \quad (4.34)$$

Это выражение называется *формулой Клапейрона*.

Удельную потенциальную энергию можно выразить через напряжения, если в (4.34) подставить значения деформаций из закона Гука (4.25). После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{2E}[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x)] + \\ &\quad + \frac{1+\nu}{E}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Для нахождения полной потенциальной энергии, накапливаемой в теле, необходимо произвести интегрирование по всему объему V тела

$$U = \iiint_V U_0 dV. \quad (4.36)$$

В дальнейшем при рассмотрении вопросов прочности при трехосном и двухосном напряженных состояниях потребуется представление удельной потенциальной энергии в виде двух слагаемых: энергии изменения объема $U_0^{o\delta}$ и энергии изменения формы U_0^ϕ .

$$U_0 = U_0^{o\delta} + U_0^\phi. \quad (4.37)$$

Такое разделение энергии на две части необходимо, поскольку, прочность материалов в основном определяется энергией формоизменения. Энергия изменения объема на прочность существенно не влияет.

Величина $U_0^{o\delta}$ находится аналогично выражению (4.34) как половина суммы произведений средних напряжений σ_0 , действующих на трех взаимно перпендикулярных площадках, и средних деформаций ε_0 , определяемых по формулам (4.27), (4.29)

$$U_0^{o\delta} = 3 \cdot \frac{1}{2} \sigma_0 \varepsilon_0. \quad (4.38)$$

На основании (4.28) и (4.29) получим

$$U_0^{o\delta} = 3 \frac{(1-2\nu)}{2E} \sigma_0^2. \quad (4.39)$$

Величина U_0^ϕ может быть найдена путем вычитания выражения (4.39) из (4.35)

$$U_0^\phi = U_0 - U_0^{o\delta} = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \frac{1+\nu}{E} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2). \quad (4.40)$$

Выражения (4.35) и (4.40) более просто записываются через главные напряжения

$$U_0 = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]; \quad (4.41)$$

$$U_0^\phi = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (4.42)$$

Для двухосновного напряженного состояния формулы (4.35), (4.39), (4.40) преобразуются к виду

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y + 2(1+\nu)\tau_{xy}^2]; \\ U_0^{ob} &= \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_x + \sigma_y)^2; \\ U_0^\phi &= \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2). \end{aligned} \right\} \quad (4.43)$$

Пример 4.1. В точке тела известны напряжения на площадках, перпендикулярных к координатным осям (рис.4.22,а) $\sigma_x = -40$ МПа , $\sigma_y = 160$ МПа , $\tau_{xy} = 60$ МПа , $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$. Материал – сталь. Модуль упругости и коэффициент Пуассона равны $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа , $\nu = 0,3$.

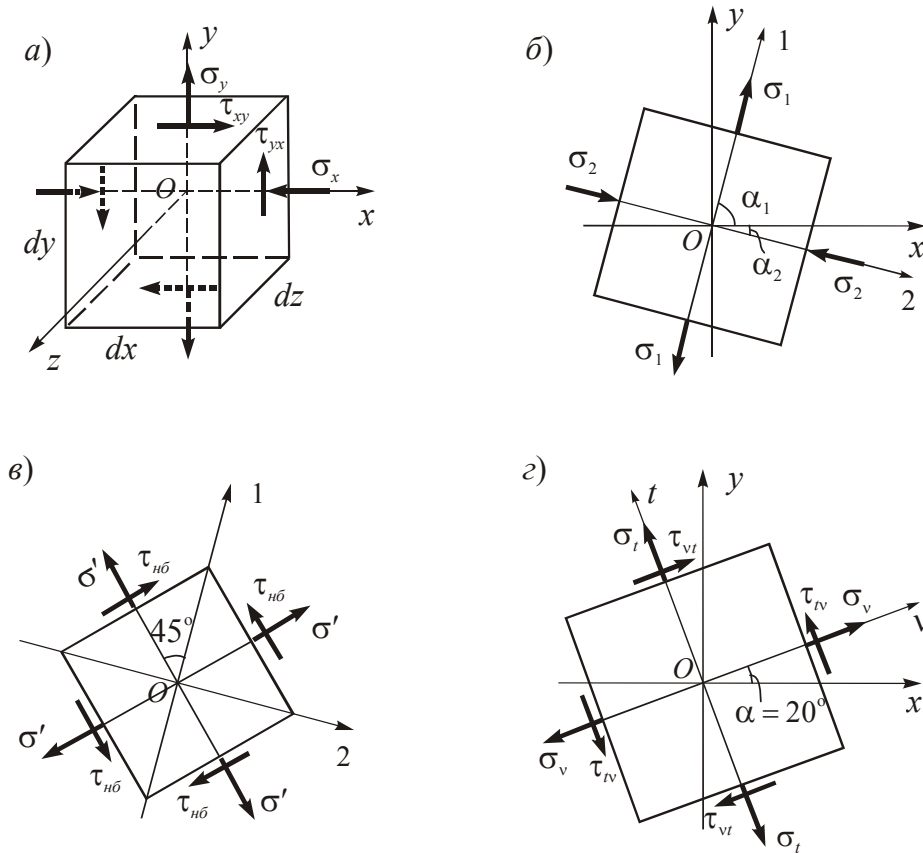


Рис.4.22

Установим вид напряженного состояния, который определяется значениями главных напряжений (см. § 4.1). Так как на площадке, перпендикулярной к оси Oz , касательные напряжения равны нулю ($\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$), эта площадка является главной. При этом главное напряжение $\sigma_3 = \sigma_z = 0$. Величины других главных напряжений и углы наклона нормалей к главным площадкам определим по формулам (4.8) и (4.9).

$$\begin{aligned}\sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \\ &= \frac{-40 + 160}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-40 - 160}{2}\right)^2 + 60^2}; \\ \sigma_1 &= 176,6 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = -56,6 \text{ МПа}; \\ \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{\tau}{\sigma_1 - \sigma_y} = \frac{60}{176,6 - 160} = 3,61, \quad \alpha_1 = 74^\circ 32'; \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{\tau}{\sigma_2 - \sigma_y} = \frac{60}{-56,6 - 160} = -0,277, \quad \alpha_2 = -15^\circ 28' .\end{aligned}$$

Поскольку отличными от нуля являются два главных напряжения, напряженное состояние в данной точке тела является двухосным. Положение главных площадок показано на рис.4.22,б.

Для контроля правильности вычислений сделаем проверку.

$$\begin{aligned}\sigma_1 + \sigma_2 &= \sigma_x + \sigma_y = 176,6 + (-56,6) = -40 + 160 = 120 \text{ МПа}; \\ |\alpha_1| + |\alpha_2| &= 74^\circ 32' + 15^\circ 28' = 90^\circ .\end{aligned}$$

Таким образом, сумма нормальных напряжений на двух взаимно перпендикулярных площадках является постоянной величиной и главные оси напряженного состояния взаимно перпендикулярны.

Определим по формуле (4.11) величины наибольших касательных напряжений, которые действуют на площадках с углами наклона $\pm 45^\circ$ к главным площадкам (рис.4.22,в).

$$\tau_{нб} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{176,6 - (-56,6)}{2} = 116 \text{ МПа} .$$

Нормальные напряжения на этих площадках согласно формуле (4.12) равны:

$$\sigma' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{176,6 + (-56,6)}{2} = 60 \text{ МПа} .$$

Определим по формулам (4.4) напряжения на взаимно перпендикулярных площадках с нормалью v и t . Угол наклона нормали v к оси Ox $\alpha = 20^\circ$ (рис.4.22,г).

$$\begin{aligned}\sigma_v &= -40 \cos^2 20^\circ + 160 \sin^2 20^\circ + 60 \sin 40^\circ = 21,96 \text{ МПа}; \\ \sigma_t &= (-40) \sin^2 20^\circ + 160 \cos^2 20^\circ - 60 \sin 40^\circ = 98,04 \text{ МПа}; \\ \tau_{tv} &= -\frac{-40 - 60}{2} \sin 40^\circ + 60 \cos 40^\circ = 110,2 \text{ МПа} .\end{aligned}$$

На рис.4.23 построен круг Мора, с помощью которого можно графически определить найденные выше напряжения и углы наклона нормалей к площадкам, на которых они действуют. Величины напряжений измеряются с

помощью принятого масштаба, а углы наклона нормалей – по транспортиру. Результаты аналитического и графического расчетов совпадают.

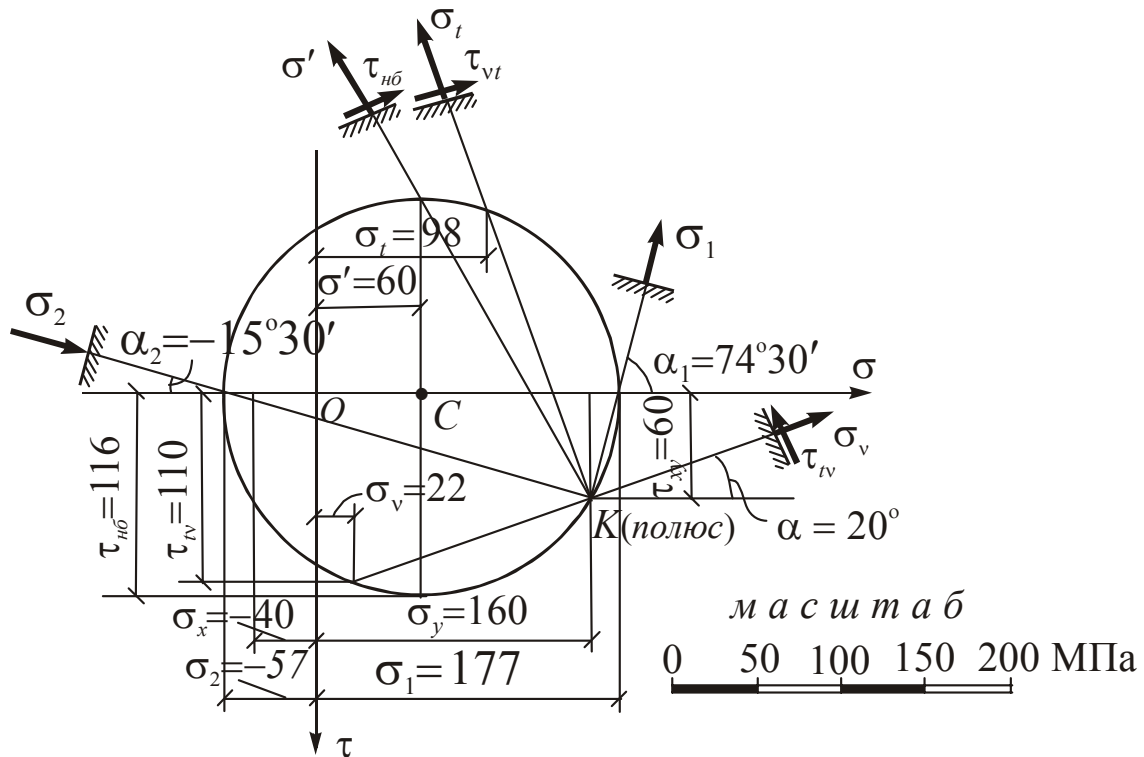


Рис.4.23

Исследуем деформированное состояние тела в окрестности рассматриваемой точки. Определим с помощью закона Гука линейные, угловые и объемную деформации.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) = \frac{1}{2,1 \cdot 10^5}(-40 - 0,3 \cdot 160) = -4,19 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) = \frac{1}{2,1 \cdot 10^5}(160 - 0,3 \cdot (-40)) = 8,19 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{0,3}{2,1 \cdot 10^5}(-40 + 160) = -1,71 \cdot 10^{-4},$$

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 2,29 \cdot 10^{-4},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} = \frac{1}{0,808 \cdot 10^5} \cdot 60 = 7,43 \cdot 10^{-4},$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0.$$

Здесь $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2,1 \cdot 10^5}{2(1+0,3)} = 0,808 \cdot 10^5$ – модуль сдвига.

Характер деформаций элементарного параллелепипеда показан на рис.4.24,а,б. Ребра параллелепипеда, параллельные осям Ox и Oz испытывают деформацию укорочения, ребра, параллельные оси Oy – деформацию удлинения. В плоскостях, параллельных плоскости Oxy , происходит искаже-

ние прямого угла на величину γ_{xy} . Объем бесконечно малого параллелепипеда увеличивается.

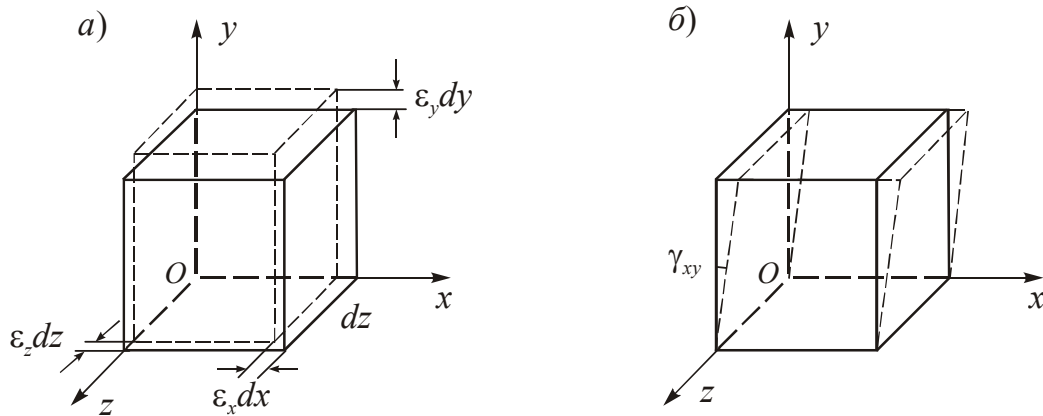


Рис.4.24

В заключение определим полную удельную потенциальную энергию деформации, энергию изменения объема и энергию изменения формы в окрестности рассматриваемой точки.

$$U_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2) = \frac{1}{2 \cdot 2,1 \cdot 10^5} [176,6^2 + (-56,6)^2 - 2 \cdot 0,3(176,6(-56,6))] = 0,0962 \text{ МПа};$$

$$U_0^{o\phi} = \frac{3(1-2\nu)}{2E} \sigma_0^2 = \frac{3(1-2 \cdot 0,3)}{2 \cdot 2,1 \cdot 10^5} \left[\frac{176,6 + (-56,6)}{3} \right]^2 = 0,00457 \text{ МПа};$$

$$U_0^\phi = \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2) = \frac{1+0,3}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^5} [176,6^2 + (-56,6)^2 - 176,6(-56,6)] = 0,0918 \text{ МПа} .$$