

## ГЛАВА 6

### КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ

#### § 6.1. Внутренние усилия при кручении. Эпюры крутящих моментов

Кручение стержня вызывается действием пар сил, расположенных в плоскостях, перпендикулярных к его оси. В поперечных сечениях стержня возникает при этом только один внутренний силовой фактор – крутящий момент.

Кручение стержней в инженерной практике встречается довольно часто, особенно в машиностроении. На кручение работают валы двигателей и станков, оси моторных вагонов и локомотивов, винтовые пружины и т.д.

Задача общей теории кручения стержней произвольного поперечного сечения в элементарной постановке не решается и изучается в курсе теории упругости. Поэтому в настоящем пособии рассматривается кручение стержней только круглого сплошного или кольцевого поперечного сечения и приводятся без вывода некоторые результаты расчета на кручение стержней прямоугольного поперечного сечения.

Рассмотрим прямой стержень круглого поперечного сечения, левый конец которого жестко заделан, а к свободному правому концу приложен скручивающий момент  $M$  (рис.6.1,*а*). В заделке возникает реактивный момент противоположного направления.

Для определения крутящего момента используем метод сечений (рис.6.1,*б*). Под действием скручивающего момента  $M$  в произвольном сечении возникает крутящий момент  $M_k$ , постоянный по длине стержня. Крутящий момент будем считать положительным, если при взгляде на сечение со стороны его внешней нормали он направлен против хода часовой стрелки. Закон изменения крутящих моментов по длине стержня изображается графически с помощью эпюры крутящих моментов. В данном случае крутящий момент постоянен по длине стержня (рис.6.1,*в*).

К стержню может быть приложено несколько скручивающих моментов (рис.6.2,*а*). Так как стержень и любая его часть находятся в равновесии, то алгебраическая сумма скручивающих моментов, приложенных к каждой части стержня, должна быть равна нулю. Из уравнения равновесия всего стержня определим реактивный момент  $M_A$  в заделке.

$$\sum M_x = 0, \quad M_A - M_1 + M_2 + M_3 = 0 ;$$

$$M_A = M_1 - M_2 + M_3 = 6 - 1 - 3 = 2 \text{ кНм.}$$

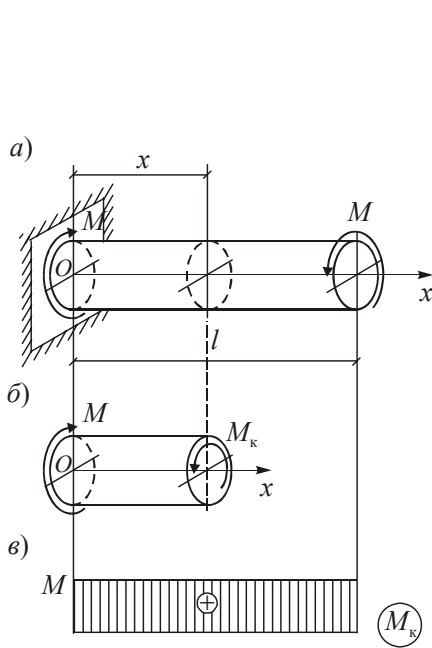


Рис.6.1

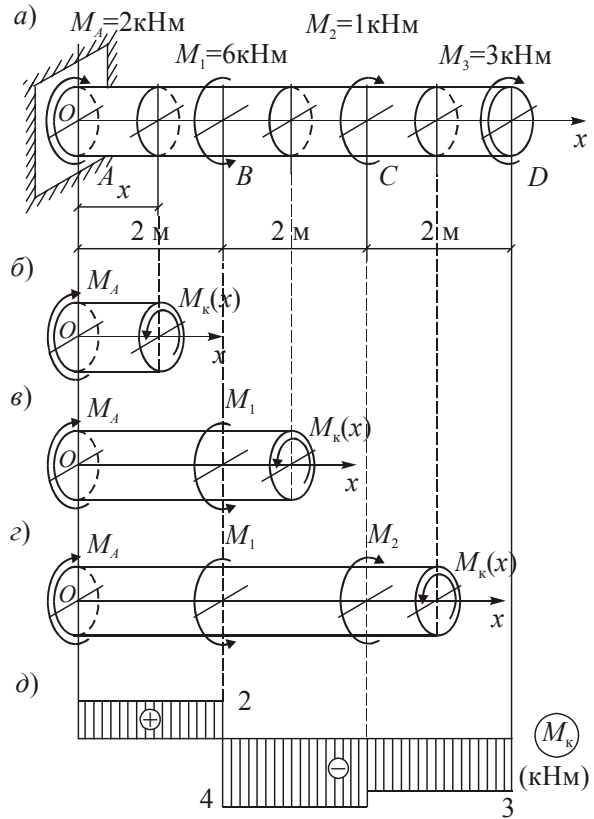
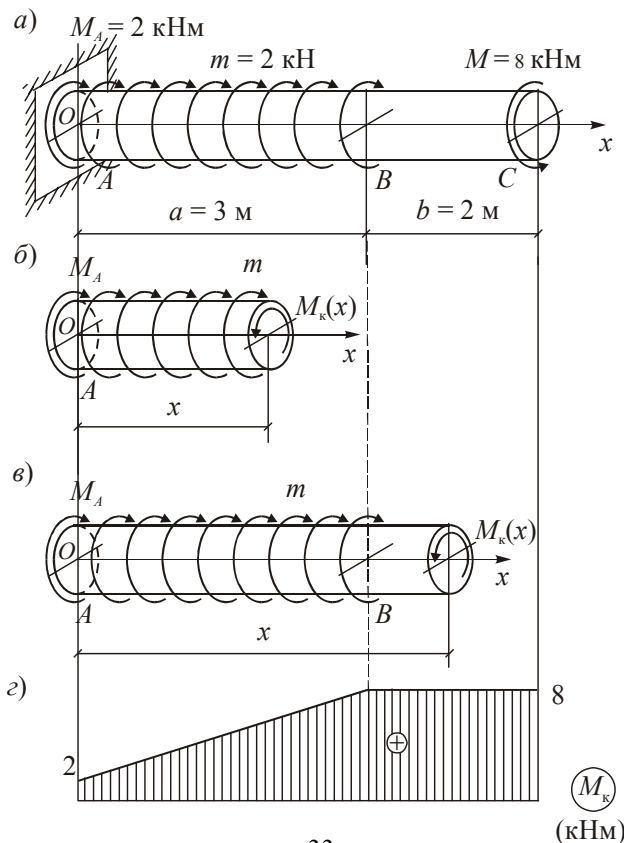


Рис.6.2

Определим крутящие моменты в сечениях трех участков стержня. При составлении уравнений равновесия определяемые крутящие моменты  $M_k$  будем считать положительными (рис.6.2.б,в,г).



**Рис.6.3**

Участок  $AB$  ( $0 \leq x \leq 2$  м):  $M_K - M_A = 0, \quad M_K = M_A = 2$  кНм .

Участок  $BC$  ( $2 \text{ м} \leq x \leq 4$  м):  $M_K - M_A + M_1 = 0,$   
 $M_K = M_A - M_1 = 2 - 6 = -4$  кНм.

Участок  $CD$  ( $4 \text{ м} \leq x \leq 6$  м):  $M_K - M_A + M_1 - M_2 = 0,$   
 $M_K = M_A - M_1 + M_2 = 2 - 6 + 1 = -3$  кНм.

Эпюра крутящих моментов показана на рис.6.2,д.

Скручивающие нагрузки могут быть распределенными по длине стержня. Рассмотрим, например, стержень, нагруженный на части длины равномерно распределенной скручивающей нагрузкой  $m = 2$  кНм/м = 2 кН и моментом  $M = 8$  кНм на правом конце (рис.6.3).

Из уравнения равновесия всего стержня определим реактивный момент  $M_A$  в заделке.

$$\sum M_x = 0, \quad M_A + ma - M = 0, \\ M_A = -ma + M = -2 \cdot 3 + 8 = 2 \text{ кНм} .$$

Определим крутящие моменты в сечениях двух участков стержня.

Участок  $AB$  ( $0 \leq x \leq 3$  м):  $M_K - M_A - mx = 0,$   
 $M_K = M_A + mx = 2 + 2x ;$   
 $x = 0, M_K = 2$  кНм,  $x = 3$  м,  $M_K = 8$  кНм .

Участок  $BC$  ( $3 \text{ м} \leq x \leq 5$  м):  $M_K - M_A - ma = 0,$   
 $M_K = M_A + ma = 2 + 2 \cdot 3 = 8$  кНм .

Эпюра крутящих моментов показана на рис.6.3,з.

## § 6.2. Напряжения в стержне круглого поперечного сечения при кручении

Рассмотрим стержень круглого поперечного сечения, заземленный левым концом и нагруженный на правом конце скручивающим моментом  $M$  (рис.6.4). При кручении образующая  $AB$ , на боковой поверхности стержня превратится в винтовую линию  $AB_1$ . Поперечное сечение стержня, находящееся на расстоянии  $x$  от заделки повернется на угол  $\varphi$ , а соседнее с ним сечение – на угол  $\varphi + d\varphi$ . Угол  $\varphi$  называется *углом закручивания*, а производная от  $\varphi$  по  $x$  – *относительным углом закручивания*

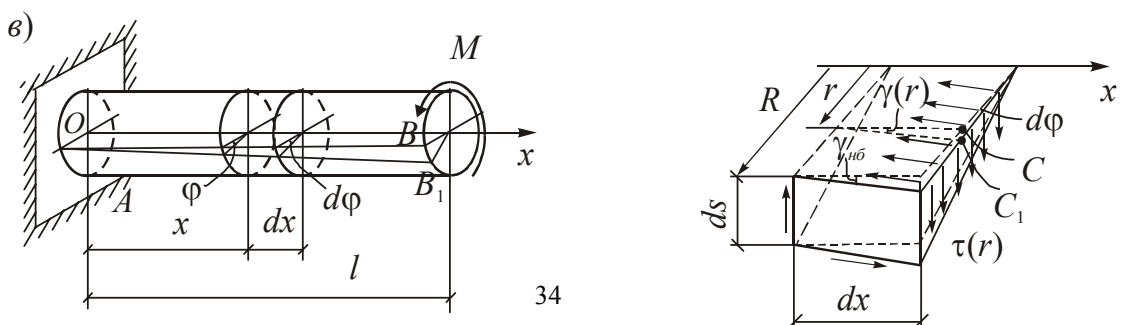


Рис.6.4

Рис.6.5

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dx}. \quad (6.1)$$

Экспериментальные и теоретические исследования кручения круглых стержней дают основание принять следующие гипотезы:

1. *Поперечные сечения стержня, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации.*

2. *Радиусы поперечных сечений в процессе кручения не искривляются и сохраняют свою длину.*

Рассмотрим деформированное состояние стержня. Выделим из стержня двумя бесконечно близкими сечениями элемент длиной  $dx$  (рис.6.4). Из этого элемента в свою очередь вырежем двумя плоскостями, проведенными через ось  $Ox$  стержня бесконечно малый элемент, изображенный на рис.6.5. При кручении правое сечение этого элемента повернется относительно левого сечения на угол  $d\varphi$ . В соответствии с принятыми гипотезами оба сечения остаются плоскими, радиусы прямыми, а расстояние  $dx$  между сечениями не изменяется.

В результате взаимного поворота поперечных сечений происходит перекос прямых углов элемента, то есть возникают угловые деформации  $\gamma$ . При этом, как видно на рис.6.5, величина  $\gamma$  изменяется в зависимости от переменного радиуса  $r$  по линейному закону и имеет наибольшее значение  $\gamma_{нб}$  в точках боковой поверхности.

Перемещение  $CC_1$  произвольной точки  $C$  по окружности вследствие малости углов  $\gamma(r)$  и  $d\varphi$  равно  $CC_1 = \gamma(r)dx = r d\varphi$ . Из этого равенства выразим угловую деформацию через относительный угол закручивания

$$\gamma = r \frac{d\varphi}{dx} = r \varphi'. \quad (6.2)$$

Деформации сдвига возникают от действия касательных напряжений  $\tau$  (согласно закону парности) в поперечных и продольных сечениях стержня. На рис.6.5 эти напряжения показаны на правой и верхней площадках рассматриваемого элемента. При этом, очевидно, что в соответствии с рассмотренной схемой деформаций касательные напряжения в каждой точке сечения должны быть направлены перпендикулярно к радиусу поперечного сечения.

Рассмотрим напряженное состояние стержня. Согласно закону Гука при сдвиге с учетом формулы (6.2) получим

$$\tau = G\gamma = G\varphi' r. \quad (6.3)$$

Касательные напряжения, действующие в поперечных сечениях стержня, приводятся к крутящему моменту  $M_k$ . Момент элементарной силы, действующей на площадке  $dF$  (рис.6.6), равен

$$\tau r dF = G\varphi' r^2 dF .$$

Интегрируя это выражение по всей площади поперечного сечения и учитывая, что величина  $G\varphi'$  не зависит от  $r$ , получим

$$M_{\kappa} = G\varphi' \iint_F r^2 dF .$$

Величина

$$J_p = \iint_F r^2 dF$$

представляет собой полярный момент инерции сечения. Для сплошного круглого сечения (§ 2.5, часть 1) он равен

$$J_p = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} . \quad (6.4)$$

С учетом этого выразим относительный угол закручивания через крутящий момент

$$\varphi' = \frac{M_{\kappa}}{GJ_p} . \quad (6.5)$$

Величина  $GJ_p$ , входящая в эту формулу, называется жесткостью круглого стержня при кручении.

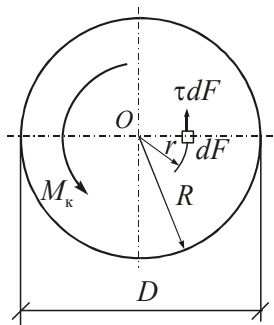


Рис.6.6

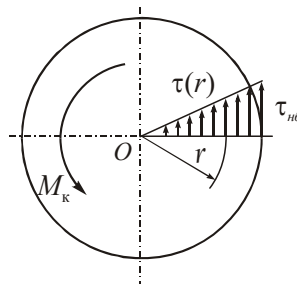


Рис.6.7

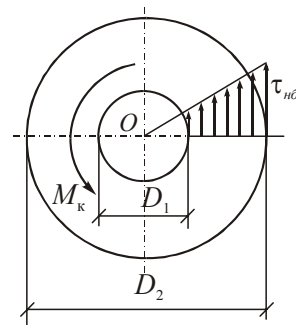


Рис.6.8

Подставляя найденную величину  $\varphi'$  в равенство (6.3), получим формулу для определения касательных напряжений в поперечных сечениях круглого стержня при кручении

$$\tau = \frac{M_{\kappa}}{J_p} r . \quad (6.6)$$

Из этой формулы видно, что касательные напряжения в поперечном сечении изменяются в радиальном направлении по линейному закону (рис.6.7). Наибольшее значение они принимают на контуре сечения при  $r = R$

$$\tau_{nb} = \frac{M_{\kappa}}{W_p} , \quad (6.7)$$

где  $W_p$  – полярный момент сопротивления, равный

$$W_p = \frac{J_p}{R} = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16}. \quad (6.8)$$

Формулы (6.5) – (6.7) справедливы также для трубчатого стержня (рис.6.8). При этом полярный момент инерции и полярный момент сопротивления будут равны

$$J_p = \frac{\pi D_2^4}{32} - \frac{\pi D_1^4}{32} = \frac{\pi D_2^4}{32} (1 - k^4);$$

$$W_p = \frac{J_p}{R_2} = \frac{\pi D_2^3}{16} (1 - k^4), \quad k = \frac{D_1}{D_2}. \quad (6.9)$$

### § 6.3. Определение углов закручивания стержней круглого сечения

Интегрируя равенство (6.5) по длине стержня в пределах от 0 до  $x$ , получим выражение для угла закручивания

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \int_0^x \frac{M_\kappa dx}{GJ_p}, \quad (6.10)$$

где  $\varphi_0$  – угол закручивания начального сечения. Если начальное сечение закреплено, то  $\varphi_0 = 0$ . В частном случае, когда  $M_\kappa = const$ ,  $GJ_p = const$  и левый конец закреплен (рис.6.9), получим

$$\varphi(x) = \frac{M_\kappa x}{GJ_p}; \quad \varphi(l) = \frac{M_\kappa l}{GJ_p}.$$

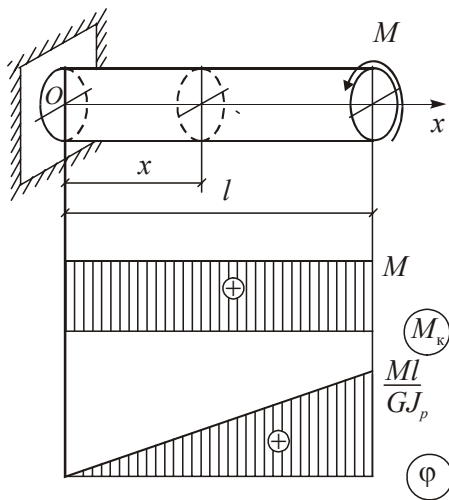


Рис.6.9

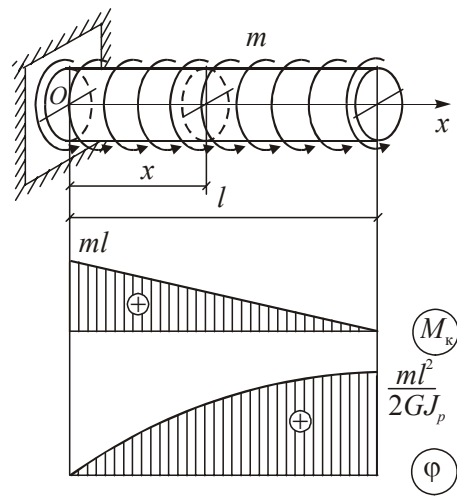


Рис.6.10

Эпюры  $M_\kappa$  и  $\varphi$  для этого случая приведены на рис.6.9.

При нагружении стержня равномерно распределенным скручивающим моментом  $m$  (рис.6.10) крутящий момент в произвольном сечении  $x$  равен  $M_\kappa = ml - mx$ , где  $M_0 = ml$  – реактивный момент в заделке.

Для определения углов закручивания подставим это выражение в формулу (6.10), принимая  $\varphi_0 = 0$ . После интегрирования получим

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{(ml - mx)dx}{GJ_p} = \frac{mlx}{GJ_p} - \frac{mx^2}{2GJ_p}.$$

Эпюры  $M_k$  и  $\varphi$  приведены на рис.6.10. Угол закручивания изменяется по закону квадратной параболы.

### § 6.4 Расчет стержней круглого сечения на прочность и жесткость

Кручение как основной вид деформации характерно для элементов машиностроительных конструкций. При их расчете на прочность используется метод допускаемых напряжений. Условие прочности при кручении круглых стержней имеет вид

$$\tau_{н\bar{o}} = \frac{M_k^{н\bar{o}}}{W_p} \leq [\tau], \quad (6.11)$$

где  $M_k^{н\bar{o}}$  – наибольший крутящий момент в стержне от действия нормативных нагрузок;  $W_p$  – полярный момент сопротивления;  $[\tau]$  – допускаемое касательное напряжение.

Из условия прочности (6.11) получим формулу для подбора сечения

$$W_p \geq \frac{M_k^{н\bar{o}}}{[\tau]}.$$

Отсюда находим требуемые размеры сечения стержня.

Для стержня сплошного круглого сечения с учетом (6.8) имеем

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16M_k^{н\bar{o}}}{\pi[\tau]}}. \quad (6.12)$$

Для трубчатого стержня с учетом (6.9)

$$D_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_k^{н\bar{o}}}{\pi(1-k^4)[\tau]}}. \quad (6.13)$$

Стержни, работающие на кручение, должны обладать достаточной жесткостью. Условие жесткости при кручении имеет вид

$$\varphi'_{н\bar{o}} = \frac{M_k^{н\bar{o}}}{GJ_p} \leq [\varphi'], \quad (6.14)$$

где  $[\varphi']$  – допускаемый относительный угол закручивания, обычно принимаемый в пределах  $0,15 \div 2$  град/м.

Из условия жесткости (6.14) имеем

$$J_p \geq \frac{M_k^{н\bar{o}}}{G[\varphi']}$$

Отсюда находим требуемые размеры поперечного сечения стержня.

Для стержня сплошного круглого сечения с учетом (6.4) имеем

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{\kappa}^{нб}}{G\pi[\varphi']}}. \quad (6.15)$$

Для трубчатого стержня с учетом (6.9) получим

$$D_2 \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{\kappa}^{нб}}{G\pi(1-k^4)[\varphi']}}. \quad (6.16)$$

При расчете стержня на прочность и жесткость из двух требуемых значений диаметра надо принять большее.

**Пример 6.1.** Стальной стержень сплошного круглого сечения, защемленный на левом конце, нагружен двумя скручивающими моментами (рис.6.11,а). Заданы допустимое касательное напряжение  $[\tau] = 30 \text{ МПа} = 3 \text{ кН/см}^2$  и допустимый относительный угол закручивания  $[\varphi'] = 1 \text{ град/м}$ . Модуль сдвига материала стержня  $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 0,8 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$ .

На участке  $BC$   $M_{\kappa} = M_2 = 0,8 \text{ кНм}$ . На участке  $AB$   $M_{\kappa} = 0,8 - 1,4 = -0,6 \text{ кНм}$ . Эпюра  $M_{\kappa}$  приведена на рис.6.11,б.

Определим необходимый диаметр стержня. Наибольший крутящий момент  $M_{\kappa}^{нб} = 0,8 \text{ кНм}$ .

Из условия прочности (6.12) имеем

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0,8 \cdot 10^2}{3,14 \cdot 3}} = 5,14 \text{ см}.$$

Учитывая, что  $[\varphi'] = 1 \text{ град/м} = (\pi/180) \text{ рад/м} = 0,1745 \cdot 10^{-3} \text{ рад/см}$ , из условия жесткости (6.15) найдем

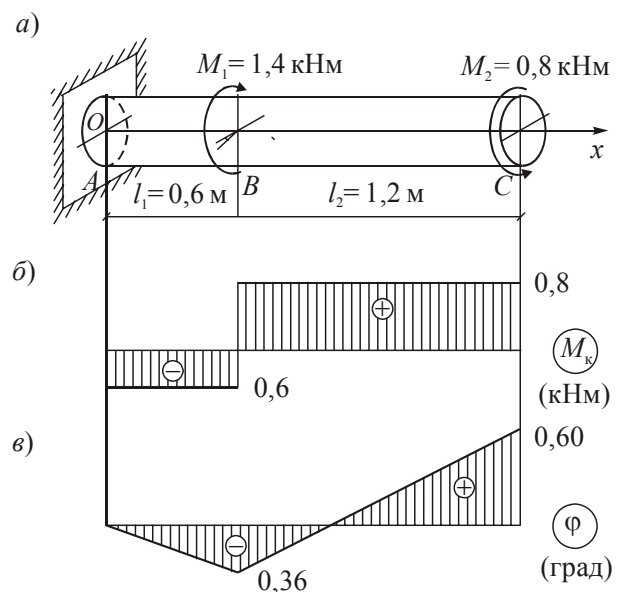
$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 0,8 \cdot 10^2}{0,8 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 0,1745 \cdot 10^{-3}}} = 4,92 \text{ см}.$$

Из двух найденных значений диаметра принимаем  $D = 52 \text{ мм}$ .

Для определения углов закручивания стержня необходимо вычислить полярный момент инерции сечения по формуле (6.4):

$$J_p = \frac{3,14 \cdot 5,2^4}{32} = 71,75 \text{ см}^4.$$

Поскольку в пределах каждого из двух участков стержня крутящие моменты имеют постоянное значение, то углы закручивания в сечениях  $B$  и  $C$  стержня равны:





**Рис.6.11**

$$\varphi_B = \frac{M_{к1} l_1}{GJ_p} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{-0,6 \cdot 10^2 \cdot 60 \cdot 180}{0,8 \cdot 10^4 \cdot 71,75 \cdot 3,14} = -0,36^\circ;$$

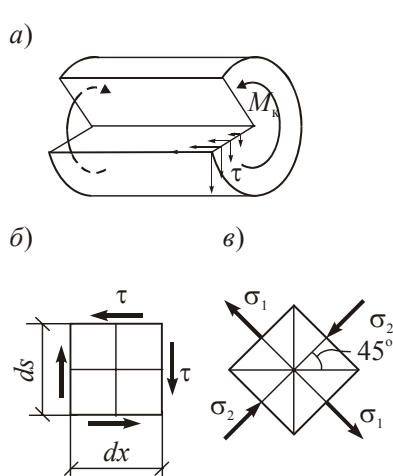
$$\varphi_C = \varphi_B + \frac{M_{к2} l_2}{GJ_p} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -0,36^\circ + \frac{0,8 \cdot 10^2 \cdot 120 \cdot 180}{0,8 \cdot 10^4 \cdot 71,75 \cdot 3,14} = 0,60^\circ .$$

Эпюра углов закручивания приведена на рис.6.11,в.

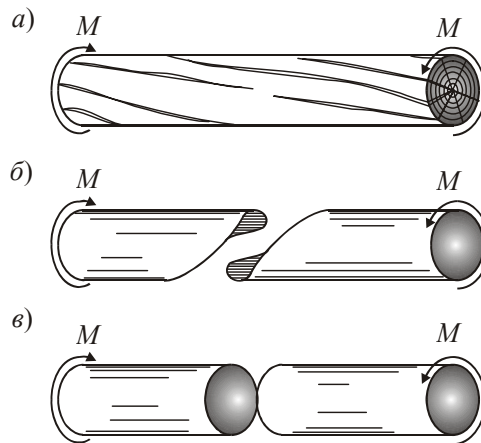
### § 6.5. Анализ напряженного состояния при кручении

В поперечных сечениях круглого стержня возникают только касательные напряжения, направленные перпендикулярно к радиусам. В силу закона парности касательных напряжений в продольных сечениях стержня должны действовать такие же по величине касательные напряжения (рис.6.12,а).

Нормальные напряжения как в поперечных, так и в продольных сечениях равны нулю. Таким образом, на двух взаимно перпендикулярных площадках, находящихся в плоскостях поперечного и продольного сечений действуют только касательные напряжения (рис.6.12,б). Такое напряженное состояние называется чистым сдвигом, который подробно рассмотрен в главе 4. Главные напряжения действуют на площадках, наклоненных под углом  $45^\circ$  к площадкам чистого сдвига (рис.6.12,в). Они равны по величине касательным напряжениям и имеют противоположные знаки:  $\sigma_1 = \tau$ ,  $\sigma_2 = -\tau$ .



**Рис.6.12**



**Рис.6.13**

Экспериментальные исследования подтверждают правильность полученных результатов. Так, например, при скручивании деревянного стержня образуются продольные трещины от действия касательных напряжений

вследствие малой прочности древесины при скалывании вдоль волокон (рис.6.13,а).

Стержень из хрупкого материала, например чугуна, разрушается от действия главных растягивающих напряжений по винтовой поверхности, наклоненной к оси стержня под углом  $45^\circ$  (рис.6.13,б).

Стержень, изготовленный из пластичной стали, разрушается в виде среза от действия касательных напряжений в поперечном сечении (рис.6.13,в).

### § 6.6 Статически неопределимые задачи при кручении

Статически неопределимыми называются задачи, для решения которых уравнений статики недостаточно. Недостающие уравнения получаются из условия деформации. Решение статически неопределимой задачи рассмотрим на примере круглого стержня с жесткими заделками по концам, нагруженного скручивающим моментом  $M$  (рис.6.14,а).

Для определения двух опорных моментов  $M_A$  и  $M_B$  имеем лишь одно уравнение статики

$$\sum M_x = 0, \quad M_A + M_B - M = 0 .$$

Для решения задачи отбросим одну из заделок, например, правую и примем за основное неизвестное момент  $M_B$  (рис. 6.14,б).

Дополнительное уравнение получим, приравняв к нулю угол закручивания в сечении  $B$  от совместного действия заданного момента  $M$  и неизвестного момента  $M_B$ .

$$\varphi_B = -\frac{Ma}{GJ_p} + \frac{M_B l}{GJ_p} = 0 .$$

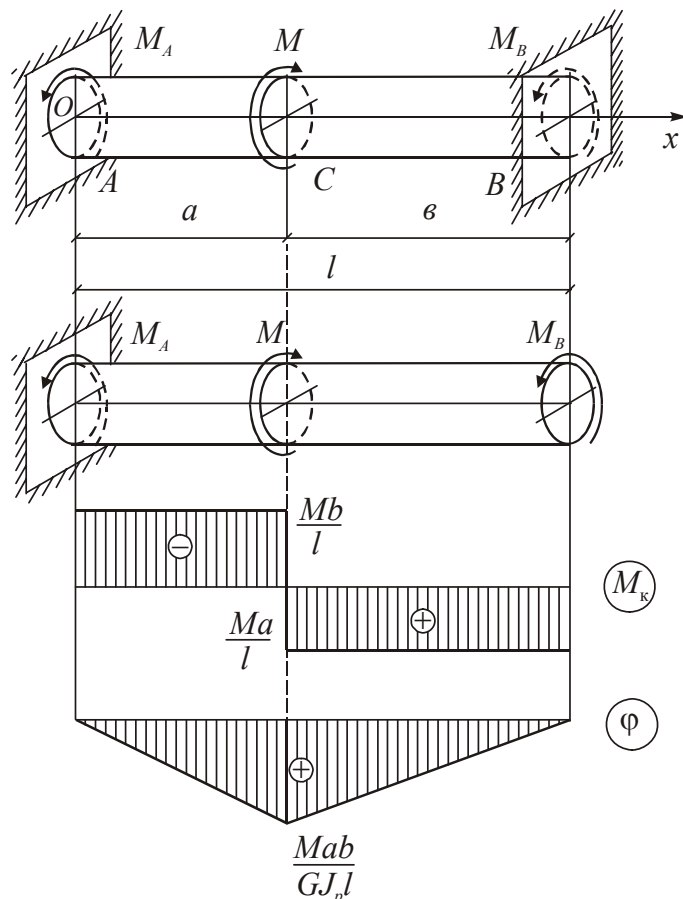
Из этого равенства получим

$$M_B = \frac{Ma}{l} .$$

Используя уравнения статики, найдем  $M_A$

$$M_A = M - M_B = \frac{M b}{l} .$$

Эпюра крутящих моментов показана на рис.6.14,в. Углы закручивания на концах стержня равны нулю. Определим угол закручивания в сечении  $C$ :



$$\varphi_C = -\frac{M_A a}{GJ_p} = -\frac{Mab}{GJ_p l}.$$

Эпюра углов закручивания показана на рис.6.14, з

Рис.6.14

### § 6.7. Кручение стержня прямоугольного сечения

Определение напряжений и деформаций при кручении стержней некруглого сечения представляет собой достаточно сложную задачу, которая решается методами теории упругости. При кручении таких стержней плоские поперечные сечения искривляются. Происходит так называемая *депланация* сечения. Для прямоугольного сечения это показано на рис.6.15.

Рассмотрим основные результаты исследования напряженно-деформированного состояния при кручении стержней прямоугольного сечения. Точное решение задачи кручения стержня прямоугольного сечения показывает, что наибольшие касательные напряжения возникают в серединах длинных сторон прямоугольника в точках *A* и *B* (рис.6.16).

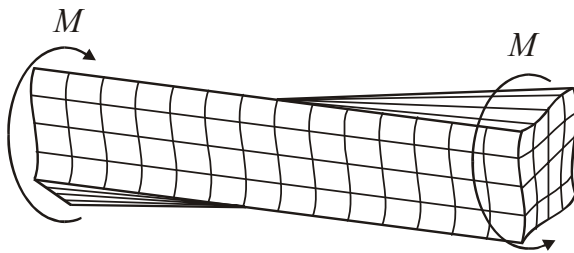


Рис.6.15

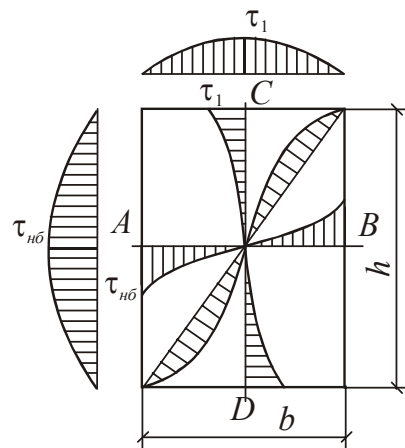


Рис.6.16

Наибольшие касательные напряжения и угол закручивания определяются по формулам

$$\tau_{нб} = \frac{M_K}{W_K}; \quad \varphi = \frac{M_K l}{GJ_K},$$

где  $W_K$  и  $J_K$  – момент сопротивления и момент инерции при кручении, которые определяются по формулам

$$W_K = \alpha hb^2; \quad J_K = \beta hb^3.$$

Касательные напряжения в серединах коротких сторон (точки *C* и *D*) равны

$$\tau_1 = \eta \tau_{нб}.$$

Таблица 6.1

$h/b$	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0	6,0	10,0	$\infty$
$\alpha$	0,208	0,231	0,246	0,267	0,282	0,299	0,313	0,333
$\beta$	0,141	0,196	0,229	0,263	0,281	0,299	0,313	0,333
$\eta$	1,000	0,859	0,795	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742

В этих формулах  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\eta$  – коэффициенты, зависящие от отношения  $h/b$ , где  $h$  и  $b$  – длины большей и меньшей сторон прямоугольника. Значения этих коэффициентов приведены в таблице 6.1.

По мере увеличения  $h/b$  наибольшее касательное напряжение  $\tau_{нб}$  возрастает, а  $\tau_1$  убывает.

На рис.6.16 показан характер распределения касательных напряжений по осям симметрии и по диагонали, а так же вдоль длинных и коротких сторон прямоугольника.