ГЛАВА 7

ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ И НАПРЯЖЕНИЯ В СТЕРЖНЯХ ПРИ ИЗГИБЕ

§ 7.1. Основные понятия

Стержень испытывает изгиб в том случае, когда приложенные нагрузки направлены перпендикулярно к его оси. Такие нагрузки называются *поперечными нагрузками.* На практике в качестве элементов, работающих на изгиб, чаще всего встречаются прямые стержни, имеющие одну или две плоскости симметрии. Эти плоскости являются главными плоскостями инерции.

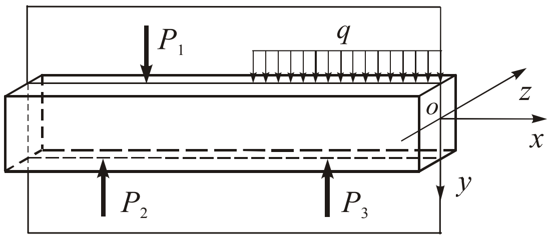

Рис.7.1

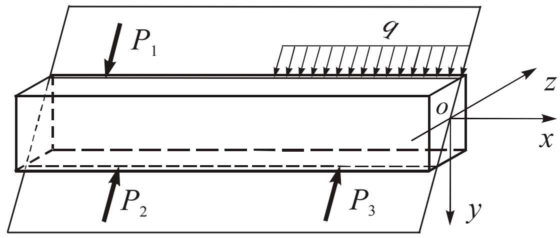

Рис.7.2

Если внешние нагрузки расположены в одной плоскости, проходящей через ось стержня, то изгиб называется *плоским* (рис.7.1 и 7.2). В этом случае *изогнутая ось* стержня является плоской кривой.

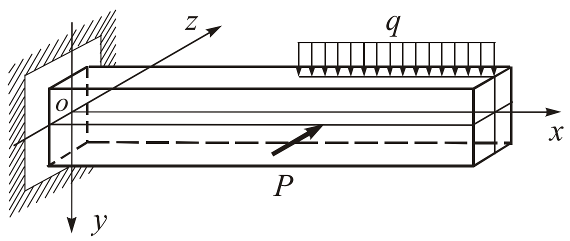

Рис.7.3

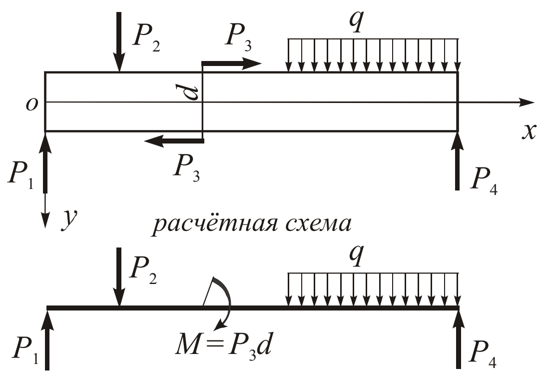

Рис.7.4

Плоскость, в которой действуют нагрузки, называется *силовой плоскостью*.

В общем случае, когда нагрузки расположены в разных плоскостях (рис.7.3), изгиб называется *пространственным*. Изогнутая ось стержня в этом случае является пространственной кривой.

Если внешние нагрузки расположены в одной из главных плоскостей инерции (рис.7.1), имеет место *плоский прямой изгиб*. Если же силовая плоскость не совпадает ни с одной из главных плоскостей инерции (рис.7.2), то изгиб называется *плоским косым изгибом*. В настоящей главе рассматривается наиболее простой вид изгиба – плоский прямой изгиб.

При построении расчетных схем поперечные нагрузки относят к оси стержня. Эти нагрузки могут быть приведены к трем типам: сосредоточенным силам, сосредоточенным моментам (парам сил) и распределенным нагрузкам (рис.7.4).

Стержень, работающий на изгиб, обычно называют *балкой*. Для того, чтобы балка могла воспринимать приложенную к ней нагрузку, она должна иметь соответствующие опорные закрепления (или *опоры*). На рис.7.5 приведены три основных типа опор.

Шарнирно подвижная опора (рис.7.5,*а*) может быть схематически изображена в виде одного короткого стержня с шарнирами на концах (*опорная связь*). Такая опорная связь препятствует перемещению закрепленного сечения в направлении связи, например, в вертикальном направлении (рис.7.5,*а*).

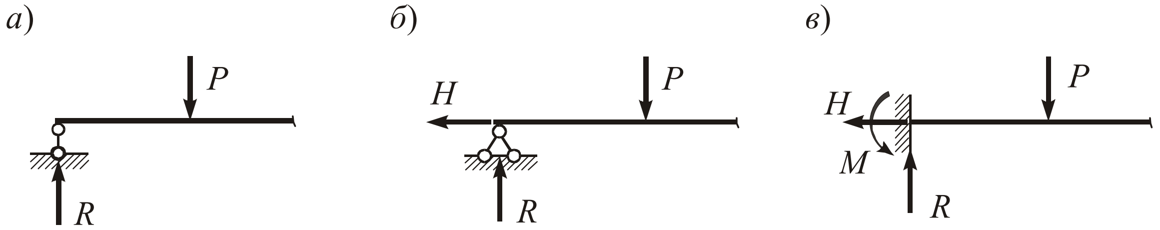

Рис.7.5

Перемещение этого сечения в направлении, перпендикулярном к опорной связи, например, в горизонтальном направлении (рис.7.5,*а*), и поворот балки относительно опоры могут происходить свободно. В соответствии с этим на шарнирно подвижной опоре возникает только одна опорная реакция в направлении опорной связи.

Шарнирно неподвижная опора (рис.7.5,*б*) обычно изображается с помощью двух опорных связей, поставленных под разными углами относительно оси балки. Такая опора допускает поворот балки относительно опоры и не допускает линейных перемещений. На шарнирно неподвижной опоре могут возникнуть две реакции, например, вертикальная R и горизонтальная H.

Жесткая заделка (рис.7.5,*в*) не допускает поворота и линейных перемещений закрепленного конца балки. В жесткой заделке могут возникнуть три опорных реакции, например, вертикальная R, горизонтальная H и реактивный момент M.

Опорные реакции определяются из уравнений статики. Как известно из курса теоретической механики, для плоской системы сил можно составить три независимых уравнения в трех основных вариантах. Если число опорных реакций в балке равно числу уравнений статики, которые можно составить для их определения, то такая балка называется *статически определимой*. На рис.7.6 приведены основные типы статически определимых балок.

Балка, имеющая жесткую заделку и свободный конец (рис.7.6,*а)*, называется *консольной балкой* или *консолью*.

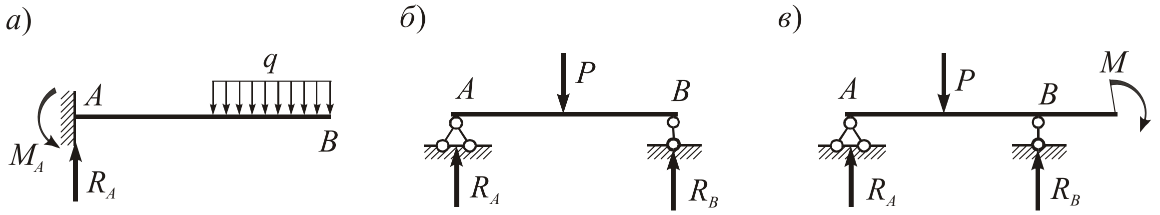

Рис.7.6

Балка, имеющая по концам шарнирные опоры (рис.7.6,*б*), называется *однопролетной балкой* (пролетом балки называется расстояние между ее опорами). Если один или оба конца выступают за опоры (рис.7.6,*в*), то такая балка называется *шарнирно опертой балкой с консолью (консолями)*.

Если число искомых опорных реакций превышает число независимых уравнений статики, которые можно составить для их определения, то такая балка называется *статически неопределимой*. Пример статически неопределимой балки приведен на рис.7.7. Для расчета статически неопределимых балок необходимо составлять дополнительные уравнения исходя из условий деформации балки.

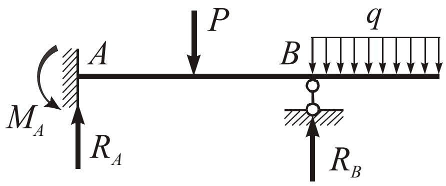

Рис.7.7

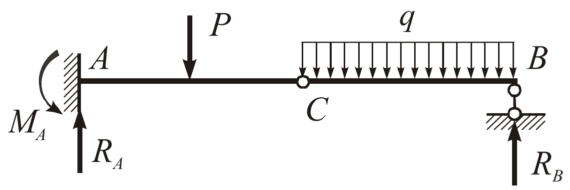

Рис.7.8

Особый случай представляют балки с промежуточными шарнирами. В этом случае наряду с двумя уравнениями равновесия для всей балки в целом можно составить дополнительное уравнение равновесия (уравнение моментов) для части балки, расположенной слева или справа от шарнира. Так, для балки, показанной на рис.7.8, таким дополнительным уравнением будет

$$\sum M_C^{лев} = 0 \qquad \text{или} \qquad \sum M_C^{прав} = 0 \; . \tag{7.1}$$

Таким образом, данная балка является статически определимой, так как для определения трех опорных реакций R_A, R_B, M_A, имеются три уравнения равновесия: к двум обычным, записанным для всей балки, добавляется одно из уравнений (7.1).

§ 7.2. **Внутренние усилия при изгибе. Дифференциальные соотношения**

При плоском прямом изгибе в плоскости Oxy в поперечных сечениях балки возникают два внутренних усилия: поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_z (рис.7.9). Эти усилия являются равнодействующими сил взаимодействия между частями балки, то есть напряжений в проведенном сечении. Продольная сила N равна нулю.

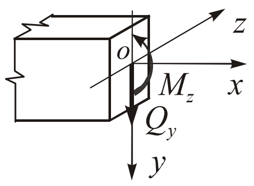

Рис.7.9

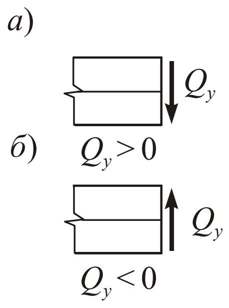

Рис.7.10

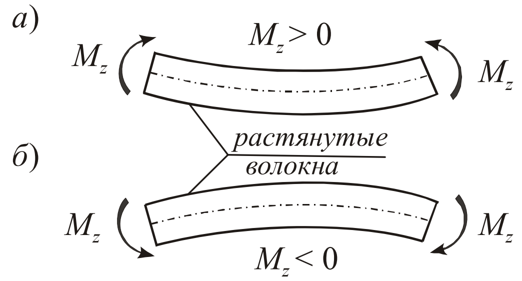

Рис.7.11

Поперечная сила считается положительной, если она стремится повернуть оставшуюся часть балки по ходу часовой стрелки (рис.7.10). Действие изгибающего момента приводит к растяжению волокон одной части балки и сжатию волокон другой части. Изгибающий момент считается положительным, если он вызывает растяжение нижних волокон балки (рис.7.11).

Для определения внутренних усилий используется метод сечений. Определим, например, поперечную силу и изгибающий момент в сечении m – m балки (рис.7.12,*а*), находящейся в равновесии под действием произвольных поперечных нагрузок.

Для этого мысленно разрежем балку плоскостью, перпендикулярной к ее
оси, отбросим одну из частей (например, правую часть). Влияние отброшенной части заменим действием в этом сечении двух внутренних усилий – поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_z (рис.7.12,*б*).

Рассматривая равновесие левой части балки, получим

$$\Sigma Y = 0\ , \quad -P_1 + P_2 + Q_y = 0\ ,$$

$$Q_y = P_1 - P_2\ . \qquad (7.2)$$

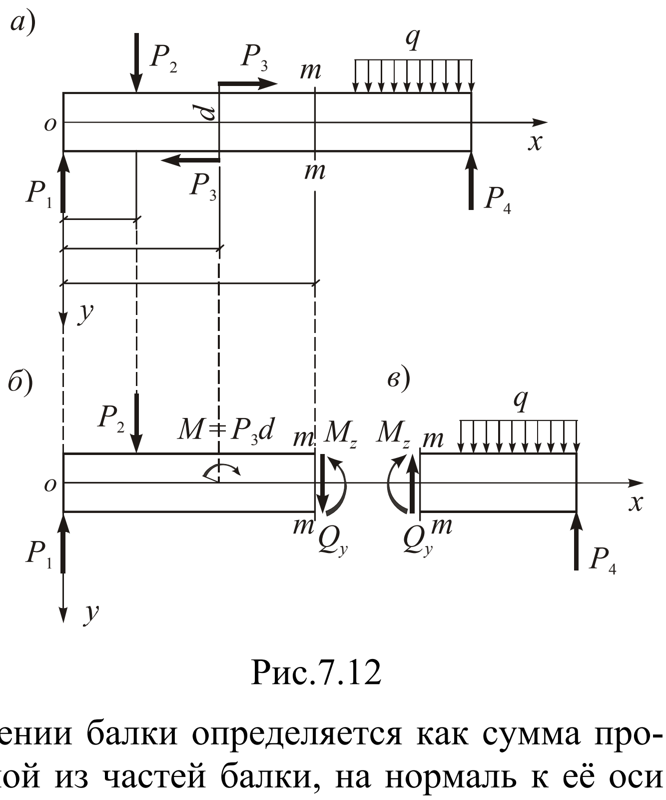

Рис.7.12

Поперечная сила в любом сечении балки определяется как сумма проекций всех сил, приложенных к одной из частей балки, на нормаль к её оси (ось Oy на рис.7.12,*б*).

Приравнивая к нулю сумму моментов всех сил, приложенных к левой части балки относительно центра тяжести поперечного сечения, получим

$$\sum M_C = 0\,, \qquad -\;P_1 x + P_2(x-a) - \;M + M_z = 0\,,$$

$$M_z = P_1 x - P_2(x-a) + M\,. \qquad (7.3)$$

Изгибающий момент в любом сечении балки определяется как сумма моментов всех сил, приложенных к одной из частей балки, относительно центра тяжести данного сечения.

Поперечная сила имеет размерность силы (кН, Н), а изгибающий момент – размерность пары сил, например, кНм.

Величины внутренних усилий в сечении $m - m$ можно также получить, рассмотрев равновесие правой части балки (рис.7.12,*в*). Для упрощения расчета желательно рассматривать ту часть балки, к которой приложено меньше нагрузок.

Внутренние усилия в общем случае изменяются по длине балки. Законы их изменения графически изображаются с помощью *эпюр* Q_y и M_z.

Для правильного определения знака того или иного слагаемого в выражениях для поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_z, например, в равенствах (7.2) и (7.3), следует мысленно закрепить рассматриваемую часть балки (левую или правую) в сечении $m - m$ (рис.7.12,*б* или 7.12,*в*). Тогда в соответствии с правилом знаков для Q_y, если силовой фактор (в данном примере P_1) стремится повернуть рассматриваемую часть балки по ходу часовой стрелки, то соответствующее слагаемое в (7.2) берется с положительным знаком. Сила P_2 стремится повернуть левую часть балки против хода часовой стрелки, поэтому слагаемое с P_2 берется с отрицательным знаком.

При определении знаков слагаемых в выражении (7.3) следует пользоваться правилом знаков для изгибающего момента. В рассматриваемом примере слагаемые с силовыми факторами P_1 и M, вызывающие растяжение нижних волокон балки, взяты со знаком плюс, а слагаемое с силой P_2, вызывающей растяжение верхних волокон, – со знаком минус.

Для установления зависимостей между изгибающим моментом M_z, поперечной силой Q_y и распределенной нагрузкой $q(x)$, вырежем из балки элемент длиной dx (рис.7.13). В силу малости dx распределенную в его пределах нагрузку $q(x)$ будем считать постоянной. Влияние отброшенных частей балки заменим внутренними усилиями Q_y и M_z, которые на длине dx получают приращения dQ_y и dM_z. Из условий равновесия этого элемента получим

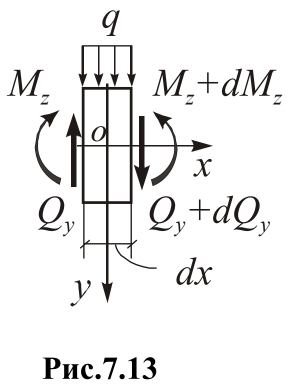

Рис.7.13

$$\sum Y \;=\; 0\,, \qquad q dx - Q_y + (Q_y + dQ_y) = 0\;;$$

$$\sum M_O = 0\,, \quad -M_z - Q_{\_}\frac{dx}{2} - (Q_y + dQ_y)\frac{dx}{2} +$$

$$+\left(M_z + dM_z\right) = 0\,.$$

Отбрасывая слагаемое $dQ_y dx$, имеющее более высокий порядок малости по сравнению с остальными слагаемыми, получим

$$\frac{dQ_y}{dx} = - \ q \ ; \qquad \frac{dM_z}{dx} = Q_y \ . \tag{7.4}$$

Из этих двух зависимостей следует третья зависимость

$$\frac{d^2 M_z}{dx^2} = - \ q \ . \tag{7.5}$$

Формулы (7.4) и (7.5) используются при построении и проверке эпюр Q_y и M_z в балках и рамах при изгибе.