

### § 7.3. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

Для расчета балки на прочность при изгибе, необходимо знать наибольшие значения поперечной силы  $Q_y$  и изгибающего момента  $M_z$  и положение сечений, в которых они действуют. В связи с этим возникает необходимость определения законов изменения  $Q_y$  и  $M_z$  по длине балки. Для этой цели обычно строят *эпюры поперечных сил и изгибающих моментов*, которые представляют собой графическое изображение функций  $Q_y(x)$  и  $M_z(x)$ .

Примем положительное направление оси  $Oy$  вниз. При этом на эпюре  $Q_y$  положительные ординаты будем откладывать вниз, а отрицательные – вверх. Ординаты эпюры  $M_z$  будем откладывать со стороны растянутых волокон балки. Согласно этому правилу для балок положительные значения изгибающих моментов откладываются вниз, так как эти моменты вызывают растяжение нижних волокон.

Рассмотрим примеры построения эпюр  $Q_y$  и  $M_z$ .

**Пример 7.1.** Построим эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  для шарнирно опертой балки, показанной на рис.7.14.

Из уравнений статики найдем опорные реакции:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0, \quad R_B l - Pa = 0, \quad R_B = \frac{Pa}{l}; \\ \sum M_B = 0, \quad -R_A l + Pb = 0, \quad R_A = \frac{Pb}{l}. \end{aligned}$$

Установим законы изменения  $Q_y$  и  $M_z$  на участках  $AC$  и  $CB$  балки. На участке  $AC$  ( $0 \leq x \leq a$ )

$$Q_y = R_A = \frac{Pb}{l}; \quad M_z = R_A x = \frac{Pbx}{l}.$$

На участке  $CB$  ( $a \leq x \leq l$ )

$$Q_y = -R_B = -\frac{Pa}{l}; \quad M_z = R_B(l-x) = \frac{Pa(l-x)}{l}.$$

Из полученных выражений видно, что поперечная сила на участках  $AC$  и  $CB$  имеет постоянное значение, а в точке  $C$  имеет скачок, равный  $P$ . Изгибающие моменты изменяются по линейным законам, при этом в точках  $A$  и  $B$   $M_z = 0$ , а в точке  $C$   $M_z = Pab/l$ . Эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  показаны на рис.7.14.

**Пример 7.2.** Построим эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  для балки, нагруженной сосредоточенным моментом  $M$  (рис.7.15).

Независимо от места приложения момента опорные реакции будут равны по величине и противоположны по направлению:

$$\sum M_A = 0, \quad R_B l - M = 0, \quad R_B = \frac{M}{l};$$

$$\sum M_B = 0, \quad R_A l - M = 0, \quad R_A = \frac{M}{l}.$$

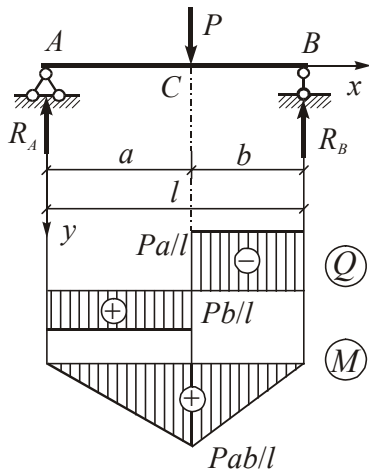


Рис.7.14

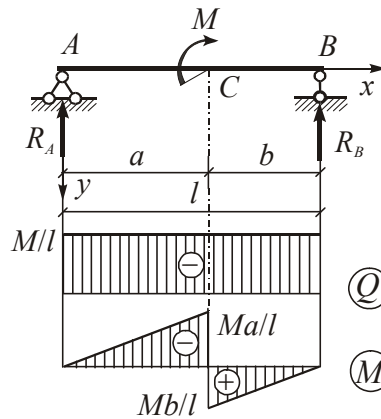


Рис.7.15

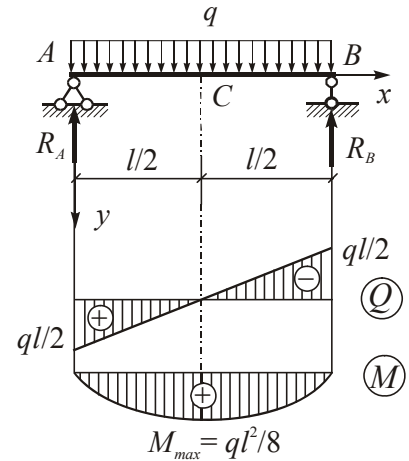


Рис.7.16

На участке  $AC$  ( $0 \leq x \leq a$ ) имеем

$$Q_y = -R_A = -\frac{M}{l}; \quad M_z = -R_A x = -\frac{Mx}{l}.$$

На участке  $CB$  ( $a \leq x \leq l$ ) имеем

$$Q_y = -R_B = -\frac{M}{l}; \quad M_z = R_B(l-x) = \frac{M(l-x)}{l}.$$

Из полученных выражений видно, что поперечная сила на обоих участках имеет одно и то же постоянное значение, а изгибающие моменты изменяются по линейным законам, при этом в точках  $A$  и  $B$   $M_z = 0$ . В точке  $C$  изгибающий момент имеет различные значения слева и справа:

$$M_z = -\frac{Ma}{l} \text{ (слева)}, \quad M_z = \frac{Mb}{l} \text{ (справа)}.$$

При этом на эпюре  $M_z$  имеется скачок, равный величине приложенного момента  $M$ . Эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  показаны на рис.7.15.

**Пример 7.3.** Построим эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  для балки, показанной на рис.7.16. В виду симметрии опорные реакции равны между собой

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}.$$

Выражения для поперечной силы и изгибающего момента в произвольном сечении  $x$  балки имеют следующий вид

$$Q_y = R_A - qx = \frac{ql}{2} - qx; \quad M_z = R_A x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qx(l-x)}{2}.$$

Таким образом, поперечная сила изменяется по длине балки по линейному закону, а изгибающий момент – по закону квадратной параболы.

На опоре  $A$  балки  $Q_y = ql/2$ ,  $M_z = 0$ , а на опоре  $B$   $Q_y = -ql/2$ ,  $M_z = 0$ .

В середине пролета при  $x = l/2$  имеем

$$Q_y = 0 ; \quad M_z = M_{max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ql}{2} \left( l - \frac{l}{2} \right) = \frac{ql^2}{8} .$$

Эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  показаны на рис.7.16.

Приведем общие выводы, которые можно сделать на основе дифференциальных соотношений (7.4) и рассмотренных выше примеров.

1. На участках балки, где отсутствует распределенная нагрузка  $q$  (участки  $AC$  и  $CB$  на рис.7.14 и 7.15), поперечная сила  $Q_y$  имеет постоянное значение, а изгибающий момент  $M_z$  изменяется по линейному закону.

2. На участках балки, где приложена равномерно распределенная нагрузка  $q$  (рис.7.16), поперечная сила  $Q_y$  изменяется по линейному закону, а изгибающий момент  $M_z$  – по закону квадратной параболы, обращенной выпуклостью в сторону действия нагрузки  $q$ .

3. В сечениях балки, где поперечная сила  $Q_y$  равна нулю (рис.7.16), изгибающий момент  $M_z$  может иметь экстремум.

4. В точке приложения сосредоточенной силы (рис.7.14) эпюра  $Q_y$  имеет скачок, равный по величине приложенной в этой точке силе, а эпюра  $M_z$  имеет излом в сторону действия силы.

5. В точке приложения сосредоточенного момента  $M$  (рис.7.15) эпюра  $M_z$  имеет скачок, равный по величине приложенному моменту.

Эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  можно построить двумя способами.

**Первый способ.** Составляют аналитические выражения  $Q_y(x)$  и  $M_z(x)$  для каждого участка балки, где они являются непрерывными функциями. Далее строят графики этих функции по участкам.

**Второй способ.** Вычисляют значения  $Q_y$  и  $M_z$  в характерных сечениях балки, являющихся границами участков непрерывности внутренних усилий.

Если в каких либо сечениях внутренние усилия имеют скачок, то определяют значения усилий слева и справа от этих сечений. Вычисленные значения ординат откладывают перпендикулярно к оси балки и полученные точки соединяют соответствующими линиями, используя дифференциальные зависимости (7.4) и (7.5) и сделанные выше выводы.

Эпюры заштриховываются прямыми линиями, перпендикулярными к оси балки и указываются знаки.

Рассмотрим примеры построения эпюр  $Q_y$  и  $M_z$  для более сложных случаев нагружения.

**Пример 7.4.** Установим законы изменения  $Q_y$  и  $M_z$  по длине консольной балки, изображенной на рис.7.17, *a*, и построим эпюры этих величин.

Определим опорные реакции в жесткой заделке.

$$\begin{aligned} \Sigma Y = 0, \quad 12 - R_A = 0, \quad R_A = 12 \text{ кН}; \\ \Sigma M_A = 0, \quad 14 - 12 \cdot 2 + M_A = 0, \quad M_A = 10 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Балка имеет два участка с различными законами изменения внутренних усилий. Определим законы изменения  $Q_y(x)$  и  $M_z(x)$  в пределах каждого из участков.

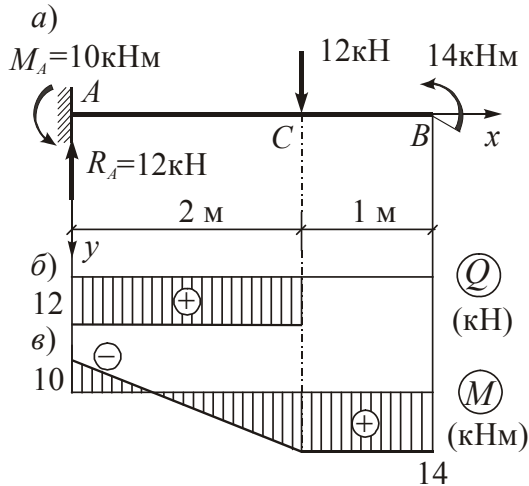


Рис.7.17

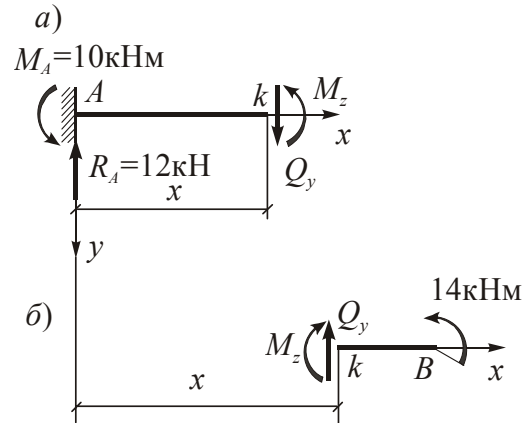


Рис.7.18

**Участок AC** ( $0 \leq x \leq 2 \text{ м}$ )

Проведем сечение в пределах первого участка на расстоянии  $x$  от левого конца, отбросим мысленно правую часть балки и рассмотрим равновесие левой части под действием нагрузок и внутренних усилий в сечении (рис.7.18,а). Уравнения равновесия дают

$$\begin{aligned} \Sigma Y = 0, \quad -12 + Q_y = 0, \quad Q_y = 12 \text{ кН}. \\ \Sigma M_k = 0, \quad 10 - 12x + M_z = 0, \quad M_z = 12x - 10. \end{aligned}$$

Определим значения  $M_z$  в начале и в конце участка.

$$\begin{aligned} x = 0, \quad M_z = -10 \text{ кНм (растянуты верхние волокна балки)}. \\ x = 2 \text{ м}, \quad M_z = 14 \text{ кНм (растянуты нижние волокна балки)}. \end{aligned}$$

В пределах первого участка поперечная сила имеет постоянное значение, а изгибающий момент изменяется по линейному закону.

**Участок CB** ( $2 \text{ м} \leq x \leq 3 \text{ м}$ )

Проведем сечение в пределах второго участка (рис.7.18,б), отбросим левую часть балки и рассмотрим равновесие правой части.

$$\begin{aligned} \Sigma Y = 0, \quad Q_y = 0; \\ \Sigma M_k = 0, \quad 14 - M_z = 0, \quad M_z = 14 \text{ кНм (растянуты нижние волокна)}. \end{aligned}$$

Отложим ординаты  $Q_y$  и  $M_z$ , соответствующие началу и концу участков балки, перпендикулярно к ее оси и соединим полученные точки прямыми линиями. На втором участке поперечная сила отсутствует, а изгибающий момент имеет постоянное значение. Эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  приведены на рис.7.17,б,в.

**Пример 7.5.** Для консольной балки, изображенной на рис.7.19,а, установим законы изменения  $Q_y(x)$  и  $M_z(x)$  по длине балки и построим эпюры этих величин.

Определим опорные реакции в заделке B.

$$\begin{aligned} \Sigma Y = 0, \quad -9 + 12 \cdot 3 - R_B = 0, \quad R_B = 27 \text{ кН}; \\ \Sigma M_B = 0, \quad -9 \cdot 4 - 5 + 12 \cdot 3 \cdot 1,5 - M_B = 0, \quad M_B = 13 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

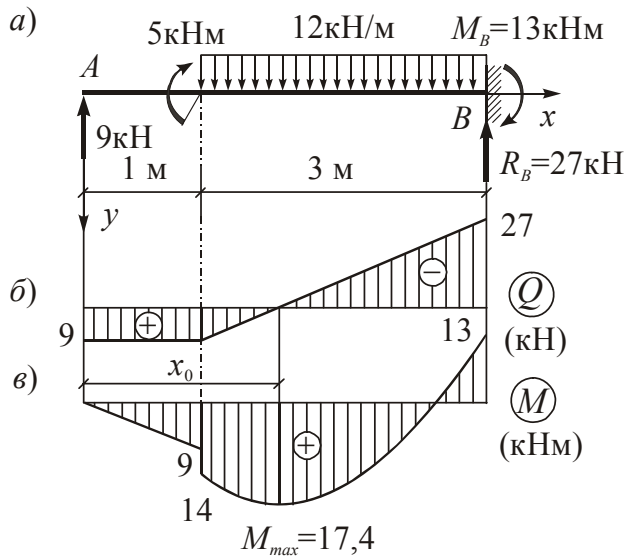


Рис.7.19

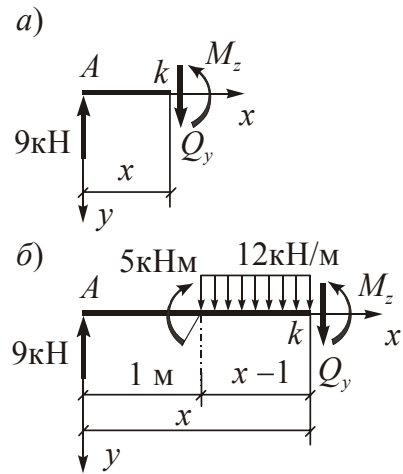


Рис.7.20

Отметим, что предварительное определение опорных реакций в заделке не обязательно. Определим законы изменения поперечной силы и изгибающего момента в пределах каждого из двух участков. **Участок AC** ( $0 \leq x \leq 1$  м) Рассмотрим равновесие левой части балки длиной  $x$  (рис.7.20,а).

$$\begin{aligned} \Sigma Y = 0, \quad -9 + Q_y = 0, \quad Q_y = 9 \text{ кН}; \\ \Sigma M_K = 0, \quad -9x + M_z = 0, \quad M_z = 9x. \\ x = 0, \quad M_z = 0; \\ x = 1 \text{ м}, \quad M_z = 9 \text{ кНм (растянуты нижние волокна)}. \end{aligned}$$

**Участок CB** ( $1 \text{ м} \leq x \leq 4 \text{ м}$ )

Отбросим правую часть балки вместе с заделкой и рассмотрим равновесие оставшейся левой части (рис.7.20,б).

$$\begin{aligned} \Sigma Y = 0, \quad -9 + 12(x-1) + Q_y = 0, \quad Q_y = 9 - 12(x-1); \\ \Sigma M_K = 0, \quad -9x - 5 + \frac{12(x-1)^2}{2} + M_z = 0, \quad M_z = 9x + 5 - \frac{12(x-1)^2}{2}. \end{aligned}$$

Вычислим значения  $Q_y$  и  $M_z$  в начале и в конце участка.

$$\begin{aligned} x = 1 \text{ м}, \quad Q_y = 9 \text{ кН}; \quad M_z = 14 \text{ кНм}; \\ x = 4 \text{ м}, \quad Q_y = -27 \text{ кН}; \quad M_z = -13 \text{ кНм (растянуты верхние волокна)}. \end{aligned}$$

В пределах первого участка поперечная сила имеет постоянное значение, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. В пределах второго участка  $Q_y$  изменяется по линейному закону, а  $M_z$  – по закону квадратной параболы.

В пределах второго участка поперечная сила обращается в нуль. Определим координату сечения, где  $Q_y = 0$  и вычислим экстремальное значение момента  $M_{max}$ .

$$9 - 12(x_0 - 1) = 0, \quad x_0 = 1,75 \text{ м};$$

$$M_{max} = 9 \cdot 1,75 + 5 - \frac{12 \cdot 0,75^2}{2} = 17,4 \text{ кНм}.$$

Эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  приведены на рис.7.19,б,в.

В сечении, где приложен сосредоточенный момент  $M$ , на эпюре  $M_z$  имеет место скачок, равный по величине приложенному моменту  $5 \text{ кНм}$ . Значения  $Q_y$  и  $M_z$  в заделке равны по величине вычисленным ранее опорным реакциям.

**Пример 7.6.** Для однопролетной балки, изображенной на рис.7.21, построим эпюры  $Q_y$  и  $M_z$ .

Расчет шарнирно опертых балок надо начинать с определения опорных реакций.

$$\begin{aligned} \Sigma M_A = 0, \quad -24 \cdot 2 + 20 + 4R_B = 0, \quad R_B = 7 \text{ кН}; \\ \Sigma M_B = 0, \quad 24 \cdot 2 + 20 - 4R_A = 0, \quad R_A = 17 \text{ кН}; \\ \Sigma Y = 0 \text{ (проверка)}, \quad 24 - 17 - 7 = 0. \end{aligned}$$

Вычислим значения  $Q_y$  и  $M_z$  в характерных сечениях балки.

$$\begin{aligned} x = 0, \quad Q_y = R_A = 17 \text{ кН}, \quad M_z = 0; \\ x = 2 \text{ м (слева)}, \quad Q_y = R_A = 17 \text{ кН}, \quad M_z = 17 \cdot 2 = 34 \text{ кНм} \\ \text{(растянуты нижние волокна);} \\ x = 2 \text{ м (справа)}, \quad Q_y = 17 - 24 = -7 \text{ кН}, \quad M_z = 34 \text{ кНм}; \\ x = 4 \text{ м}, \quad Q_y = R_B = -7 \text{ кН}, \quad M_z = 20 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  приведены на рис.7.21,б,в.

**Пример 7.7.** Для шарнирно опертой балки с консолью (рис.7.22,а) определим значения  $Q_y$  и  $M_z$  в характерных сечениях и построим эпюры этих величин.

Определим опорные реакции.

$$\begin{aligned} \Sigma M_A = 0, \quad -20 \cdot 3 \cdot 1,5 - 12 \cdot 6 + 4R_B = 0, \quad R_B = 40,5 \text{ кН}; \\ \Sigma M_B = 0, \quad 20 \cdot 3 \cdot 2,5 - 12 \cdot 2 - 4R_A = 0, \quad R_A = 31,5 \text{ кН}; \\ \Sigma Y = 0 \text{ (проверка)}, \quad 20 \cdot 3 + 12 - 31,5 - 40,5 = 72 - 72 = 0. \end{aligned}$$

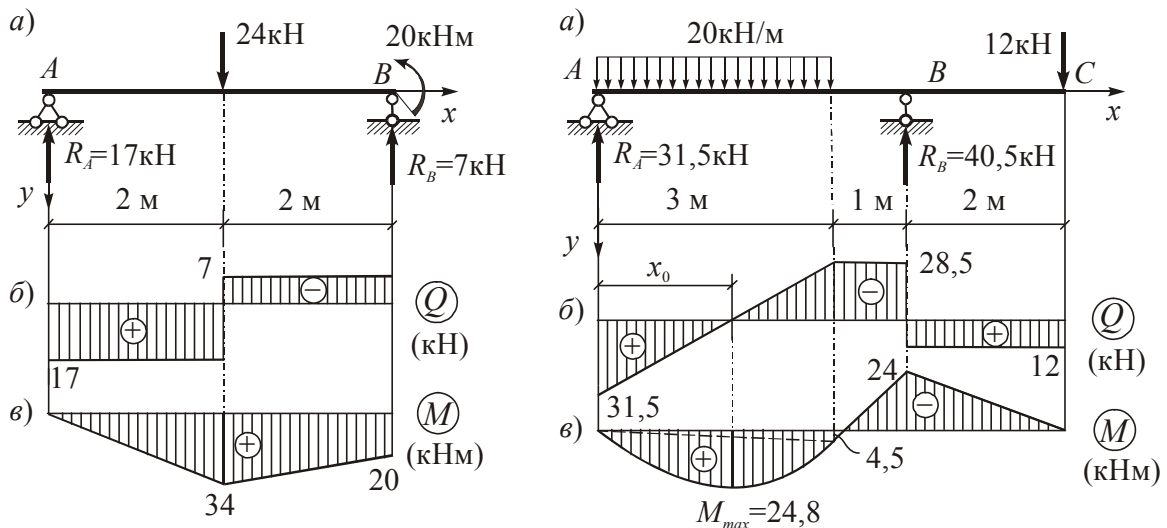


Рис.7.21

Вычислим значения  $Q_y$  и  $M_z$  в характерных сечениях балки.

$$\begin{aligned}
 x = 0, & \quad Q_y = R_A = 31,5 \text{ кН}, \quad M_z = 0; \\
 x = 3 \text{ м}, & \quad Q_y = R_A - 20 \cdot 3 = -28,5 \text{ кН}; \\
 & \quad M_z = R_A \cdot 3 - 20 \cdot 3 \cdot 1,5 = 4,5 \text{ кНм} \\
 & \quad \text{(растянуты нижние волокна)}; \\
 x = 4 \text{ м (слева)}, & \quad Q_y = -28,5 \text{ кН}, \quad M_z = -12 \cdot 2 = -24 \text{ кНм} \\
 & \quad \text{(растянуты верхние волокна)}; \\
 x = 4 \text{ м (справа)}, & \quad Q_y = 12 \text{ кН}, \quad M_z = -24 \text{ кНм}; \\
 x = 6 \text{ м}, & \quad Q_y = 12 \text{ кН}, \quad M_z = 0.
 \end{aligned}$$

Рис.7.22

Отложим ординаты  $Q_y$  и  $M_z$  перпендикулярно к оси балки. Для правильного проведения соответствующих линий соединим полученные точки, используя особенности эпюр в пределах рассматриваемых участков. Напомним, что на участке с распределенной нагрузкой  $q$  поперечная сила изменяется по линейному закону, а изгибающий момент – по закону квадратной параболы, обращенной выпуклостью в сторону действия нагрузки.

В пределах второго и третьего участков поперечная сила имеет постоянное значение, а в сечении  $B$  имеет скачок на величину опорной реакции  $R_B$ . Изгибающий момент изменяется по линейному закону.

В пределах участка с распределенной нагрузкой знак поперечной силы изменяется с плюса на минус. Установим положение сечения, где поперечная сила обращается в нуль и вычислим экстремальное значение момента  $M_{max}$ .

Из подобия треугольников на эпюре  $Q_y$  получим

$$\begin{aligned}
 \frac{x_0}{3 - x_0} &= \frac{31,5}{28,5}, \quad x_0 = 1,57 \text{ м}; \\
 M_{max} &= R_A x_0 - \frac{q x_0^2}{2} = 31,5 \cdot 1,57 - 20 \cdot \frac{1,57^2}{2} = 24,8 \text{ кНм}.
 \end{aligned}$$

Эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  приведены на рис.7.22,б,в.

**Пример 7.8.** Для консольной балки, изображенной на рис.7.23,а, вычислим значения  $Q_y$  и  $M_z$  в характерных сечениях и построим их эпюры.

Определение  $Q_y$  и  $M_z$  начнем со свободного конца балки.

$$x = 5 \text{ м}, \quad Q_y = M_z = 0.$$

Внутренние усилия равны нулю, поскольку на свободном конце отсутствуют сосредоточенные нагрузки.

$$\begin{aligned}
 x = 2 \text{ м}, & \quad Q_y = 10 \cdot 3 = 30 \text{ кН}; \\
 & \quad M_z = -10 \cdot 3 \cdot 1,5 = -45 \text{ кНм} \\
 & \quad \text{(растянуты верхние волокна)}. \\
 x = 0, & \quad Q_y = 10 \cdot 3 - 20 \cdot 2 = -10 \text{ кН}; \\
 & \quad M_z = -10 \cdot 3 \cdot 3,5 + 20 \cdot 2 \cdot 1 = -65 \text{ кНм}
 \end{aligned}$$

(растянуты верхние волокна).

Поперечная сила в пределах обоих участков балки изменяется по линейному закону, а изгибающий момент – по закону квадратной параболы. На свободном конце  $Q_y = 0$  и касательная к эпюре  $M_z$  должна быть параллельна оси балки (поскольку  $M_z = 0$ , она совпадает с осью балки).

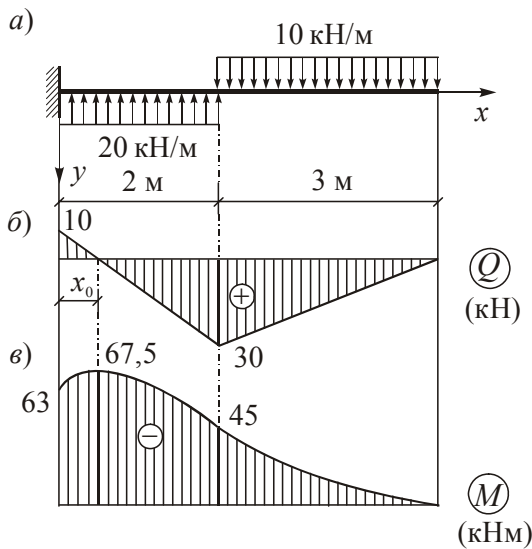


Рис.7.23

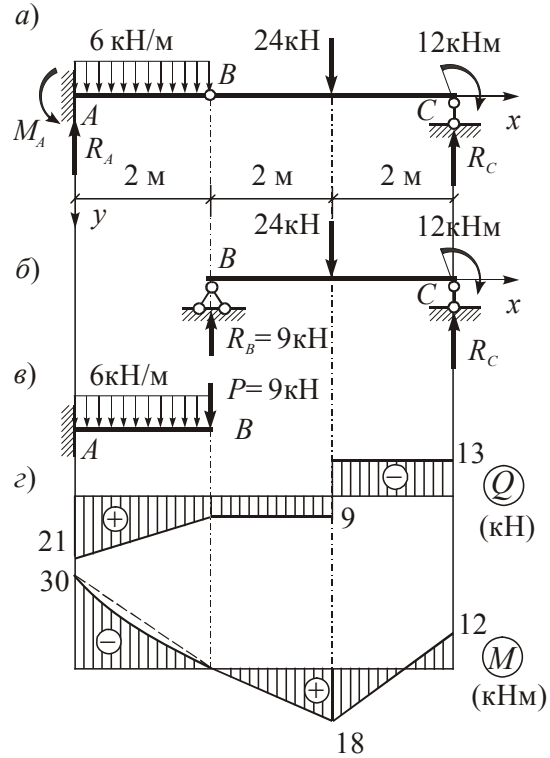


Рис.7.24

В пределах первого участка поперечная сила обращается в нуль. Из подобия треугольников на эпюре  $Q_y$  определим координату сечения  $x_0$ , где поперечная сила обращается в нуль, и для этого сечения определим величину экстремального изгибающего момента  $M_{min}$ .

$$\frac{x_0}{2 - x_0} = \frac{10}{30}, \quad x_0 = 0,5 \text{ м};$$

$$M_{min} = -10 \cdot 3(1,5 + 1,5) + 20 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = -67,5 \text{ кНм}.$$

Эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  приведены на рис.7.23,б,в.

**Пример 7.9.** Для балки с промежуточным шарниром (рис.7.24,а) построим эпюры  $Q_y$  и  $M_z$ .

Данная балка является статически определимой, поскольку для определения трех опорных реакций  $R_A$ ,  $M_A$  и  $R_C$  можно составить два обычных уравнения равновесия и дополнительное уравнение  $\sum M_B = 0$  для левой или правой части балки.

Более удобным является расчет с помощью так называемой поэтажной схемы. Разрежем мысленно балку по промежуточному шарниру  $B$ . При этом



выявляется характер взаимодействия балок  $AB$  и  $BC$ . Балка  $BC$  не может работать самостоятельно и опирается на *несущую балку*  $AB$ .

Вначале производится расчет *несомой балки*  $BC$ , имеющей условную шарнирную опору в сечении  $B$  (рис.7.24,б). Определяем опорные реакции.

$$\Sigma M_B = 0, \quad -24 \cdot 2 - 12 + 4R_C = 0, \quad R_C = 15 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_C = 0, \quad 24 \cdot 2 - 12 - 4R_B = 0, \quad R_B = 9 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = 0 \text{ (проверка)}, \quad 24 - 15 - 9 = 24 - 24 = 0.$$

Внутренние усилия в характерных сечениях балки  $BC$  равны:

$$\begin{aligned} x = 2 \text{ м (справа)}, & \quad Q_y = R_B = 9 \text{ кН}, & \quad M_z = 0; \\ x = 4 \text{ м (слева)}, & \quad Q_y = 9 \text{ кН}, & \quad M_z = 9 \cdot 2 = 18 \text{ кНм}; \\ x = 4 \text{ м (справа)}, & \quad Q_y = -R_C = -15 \text{ кН}, & \quad M_z = 18 \text{ кНм}; \\ x = 6 \text{ м}, & \quad Q_y = -15 \text{ кН}, & \quad M_z = -12 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Расчет несущей балки  $AB$  надо произвести на действие приложенной к ней распределенной нагрузки и силы, равной по величине условной опорной реакции  $R_B$  и направленной в противоположную сторону (рис.7.24,в). Внутренние усилия равны:

$$\begin{aligned} x = 2 \text{ м (слева)}, & \quad Q_y = 9 \text{ кН}, \quad M_z = 0; \\ x = 0, & \quad Q_y = 9 + 6 \cdot 2 = 21 \text{ кН}, \quad M_z = -9 \cdot 2 - 6 \cdot 2 \cdot 1 = -30 \text{ кНм} \\ & \quad \text{(растянуты верхние волокна)}. \end{aligned}$$

Эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  приведены на рис.7.24,г. Поскольку в шарнире  $B$  не приложено сосредоточенных сил, на эпюре  $Q_y$  нет скачка, а на эпюре  $M_z$  сопряжение линий является плавным.

**Пример 7.10.** Для консольного ломаного стержня (рис.7.25,а) построим эпюры внутренних усилий  $N$ ,  $Q$ ,  $M$ .

Вычисление усилий для консольных балок и ломаных стержней удобно начинать со свободного конца. При этом не требуется предварительно определять опорные реакции.

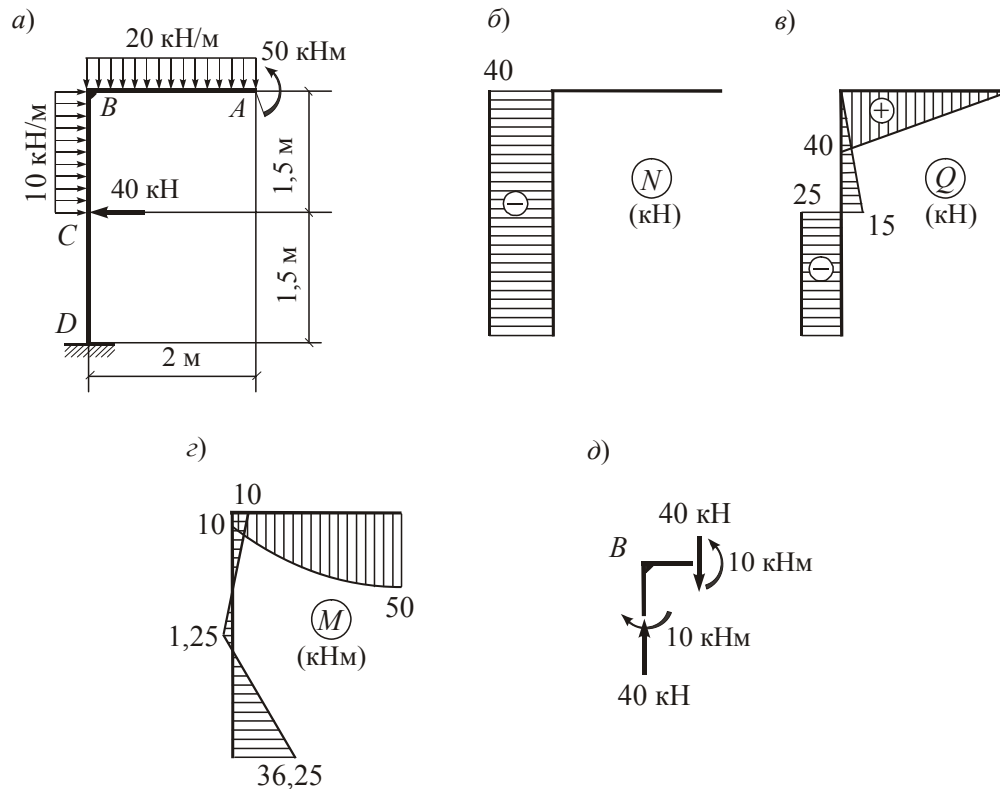


Рис.7.25

Вычислим значения  $N$ ,  $Q$  и  $M$  в характерных сечениях стержня.

#### Участок $AB$

Сечение  $A$ :  $N = 0$ ,  $Q = 0$ ,  $M = 50$  кНм  
(растянуты нижние волокна).

Сечение  $B$ :  $N = 0$ ,  $Q = 20 \cdot 2 = 40$  кН,  $M = 50 - 20 \cdot 2 \cdot 1 = 10$  кНм  
(растянуты нижние волокна).

#### Участок $BC$

Сечение  $B$ :  $N = -20 \cdot 2 = -40$  кН (сжатие),  $Q = 0$ ,  $M = 10$  кНм  
(растянуты внутренние волокна).

Сечение  $C$ :  $N = -40$  кН,  $Q = 10 \cdot 1,5 = 15$  кН,  $M = 10 - 10 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = -1,25$  кНм (растянуты внешние волокна)

#### Участок $CD$

Сечение  $C$ :  $N = -40$  кН,  $Q = 10 \cdot 1,5 - 40 = -25$  кН,  
 $M = -1,25$  кНм (растянуты внешние волокна).

Сечение  $D$ :  $N = -40$  кН,  $Q = -25$  кН,  $M = 10 - 10 \cdot 1,5 \cdot 2,25 + 40 \cdot 1,5 = 36,25$  кНм (растянуты внутренние волокна).

В пределах участков  $AB$  и  $BC$  поперечная сила изменяется по линейному закону, а изгибающий момент – по закону квадратной параболы, обращенной выпуклостью в сторону действия распределенной нагрузки. В пределах участка  $CD$  поперечная сила имеет постоянное значение, а изгибающий момент изменяется по линейному закону.

Эпюры  $N$ ,  $Q$  и  $M$  приведены на рис.7.25, б, в, г

Проверим равновесие жесткого узла  $B$ . Для этого мысленно вырежем этот узел и приложим к нему внутренние усилия, действующие в поперечных сечениях горизонтального и вертикального стержней (рис.7.25,д). Очевидно, что уравнения статики  $\Sigma X = 0$ ,  $\Sigma Y = 0$  и  $\Sigma M_B = 0$  выполняются. Следовательно, узел  $B$  находится в равновесии.

**Пример 7.11.** Для стержня с криволинейным участком в виде четверти окружности (рис.7.26,а) построим эпюры внутренних усилий  $N$ ,  $Q$  и  $M$ .  
 Определим опорные реакции.

$$\begin{aligned} \Sigma M_A = 0, \quad 6R_B - 18 \cdot 4 \cdot 2 = 0, \quad R_B = 24 \text{ кН}; \\ \Sigma M_B = 0, \quad -6R_A + 18 \cdot 4 \cdot 4 = 0, \quad R_A = 48 \text{ кН}; \\ \Sigma Y = 0 \text{ (проверка)}, \quad -48 + 18 \cdot 4 - 24 = -72 + 72 = 0. \end{aligned}$$

Определим с помощью метода сечений законы изменения внутренних усилий на криволинейном участке (рис.7.26,б). Приравнивая к нулю сумму проекций всех сил по направлению нормали и касательной к сечению, а также сумму моментов относительно центра тяжести сечения, получим

$$\begin{aligned} \Sigma n = 0, \quad -24 \sin \varphi + N = 0, \quad N = 24 \cos \varphi; \\ \Sigma t = 0, \quad 24 \cos \varphi + Q = 0, \quad Q = -24 \sin \varphi; \\ \Sigma M_c = 0, \quad 24R \sin \varphi - M = 0, \quad M = 24R \sin \varphi. \end{aligned}$$

Последовательно вычисляем:

$$\begin{aligned} \varphi = 0, \quad N = 0, \quad Q = -24 \text{ кН}, \quad M = 0; \\ \varphi = 30^\circ, \quad N = 12 \text{ кН}, \quad Q = -20,78 \text{ кН}, \quad M = 24 \text{ кНм}; \\ \varphi = 60^\circ, \quad N = 20,78 \text{ кН}, \quad Q = -12 \text{ кН}, \quad M = 41,57 \text{ кНм}; \\ \varphi = 90^\circ, \quad N = 24 \text{ кН}, \quad Q = 0, \quad M = 48 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

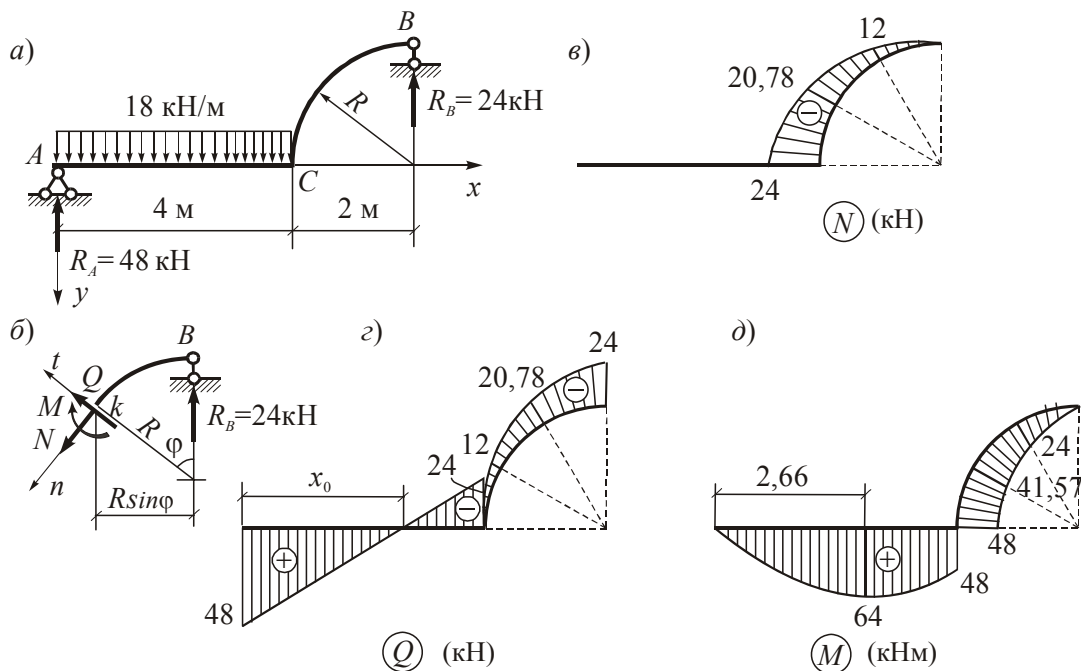


Рис.7.26

Вычислим значения внутренних усилий в характерных сечениях горизонтального участка  $AC$ .

$$\text{Сечение } A: \quad Q = R_A = 48 \text{ кН}, \quad M = 0.$$

$$\text{Сечение } C: \quad Q = 48 - 18 \cdot 4 = -24 \text{ кН}, \quad M = 48 \cdot 4 - 18 \cdot 4 \cdot 2 = 48 \text{ кНм}.$$

Откладывая вычисленные значения в рассмотренных сечениях перпендикулярно к оси стержня и соединяя полученные точки, построим эпюры внутренних усилий  $N$ ,  $Q$  и  $M$ . Эти эпюры приведены на рис.7.26,в,г,д.

Поперечная сила  $Q$  на прямолинейном участке  $AC$  обращается в нуль в сечении на расстоянии  $x_0$  от точки  $A$ . В этом сечении изгибающий момент принимает экстремальное значение. Из подобия треугольников на эпюре  $Q$  определим  $x_0$ .

$$\frac{x_0}{4 - x_0} = \frac{48}{24}, \quad x_0 = 2,66 \text{ м}.$$

Вычислим экстремальное значение изгибающего момента.

$$M_{\max} = 48 \cdot 2,66 - 18 \cdot 2,66 \cdot 1,33 = 64 \text{ кНм (растянуты нижние волокна)}.$$

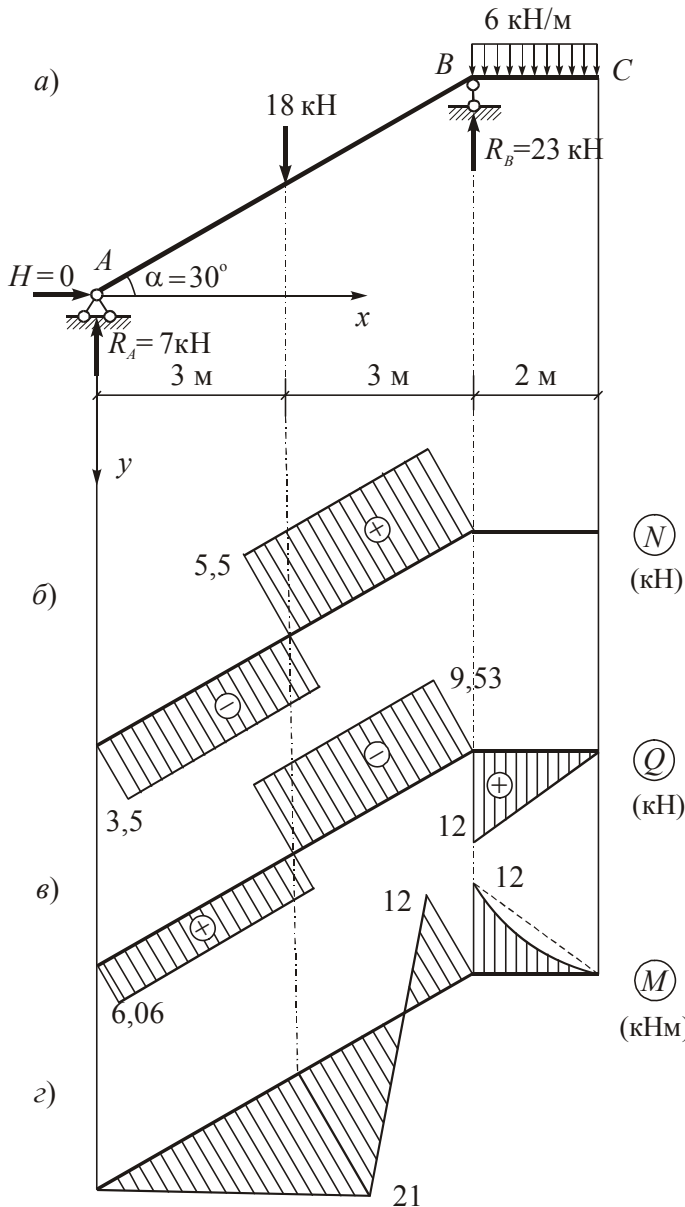
**Пример 7.12.** Для балки с наклонным участком (рис.7.27,а) построим эпюры  $N$ ,  $Q$  и  $M$ .

Определим опорные реакции.

$$\Sigma X = 0, \quad H_A = 0;$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad - 18 \cdot 3 - 6 \cdot 2 \cdot 7 + 6R_B = 0, \quad R_B = 23 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = 0, \quad 18 \cdot 3 - 6 \cdot 2 \cdot 1 - 6R_A = 0, \quad R_A = 7 \text{ кН};$$



$$\Sigma Y = 0 \text{ (проверка)},$$

$$18 + 6 \cdot 2 - 23 - 7 = 30 - 30 = 0.$$

При определении продольной и поперечной сил в пределах наклонного участка надо нагрузку и опорные реакции проектировать на ось стержня и на нормаль к оси. Равновесие левой части стержня в пределах  $0 \leq x \leq 3 \text{ м}$  приведено на рис.7.28,а. Составив уравнения равновесия, находим

$$\Sigma n = 0, \quad R_A \sin \alpha + N = 0,$$

$$N = -7 \sin 30^\circ = -3,5 \text{ кН};$$

$$\Sigma t = 0, \quad -R_A \cos \alpha + Q = 0,$$

$$Q = 7 \cos 30^\circ = 6,06 \text{ кН}.$$

Определение  $N$  и  $Q$  в пределах участка  $3 \text{ м} \leq x \leq 6 \text{ м}$  (рис.7.28,б) производится аналогично:

$$\Sigma n = 0, \quad (-R_B + 6 \cdot 2) \sin \alpha + N = 0,$$

$$N = (23 - 12) \sin 30^\circ = 5,5 \text{ кН};$$

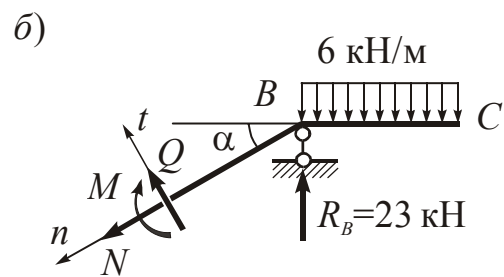
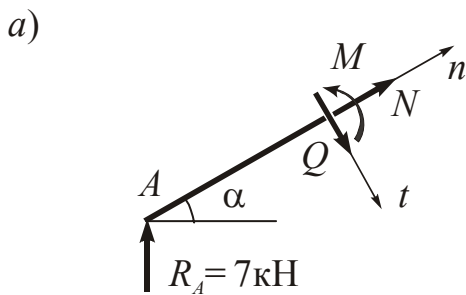
$$\Sigma t = 0, \quad (R_B - 6 \cdot 2) \cos \alpha + Q = 0,$$

$$Q = -(23 - 12) \cos 30^\circ =$$

$$= -9,53 \text{ кН}.$$

Определение изгибающих моментов производится так же, как и для балок с горизонтальной осью.

**Рис.7.27** Эпюры  $N$ ,  $Q$ , и  $M$  приведены на рис.7.27,б,в,г.

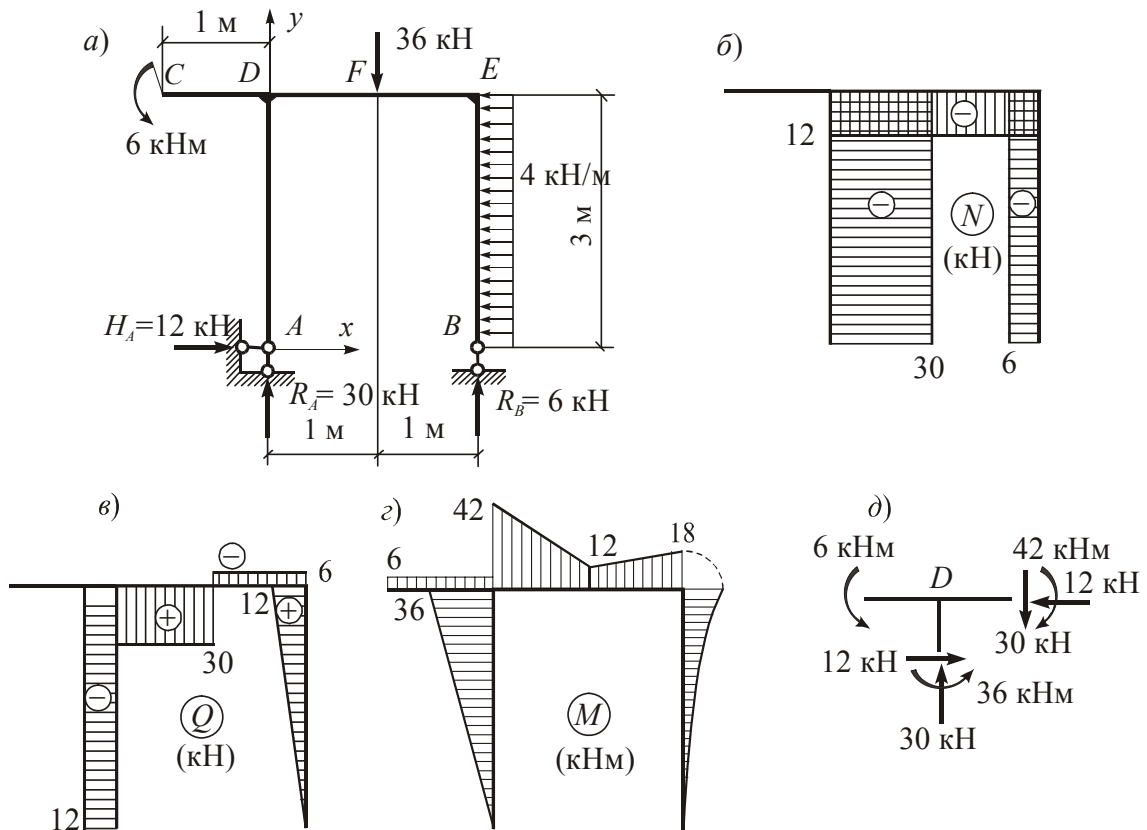


**Рис.7.28**

**Пример 7.13.** Для рамы с шарнирными опорами (рис.7.29,а) построим эпюры  $N$ ,  $Q$ , и  $M$ .

Определяем величины опорных реакций.

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0, \quad -4 \cdot 3 + H_A &= 0, & H_A &= 12 \text{ кН}; \\ \Sigma M_A = 0 \quad 6 - 36 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 + 2R_B &= 0, & R_B &= 6 \text{ кН}; \\ \Sigma M_B = 0, \quad 6 + 36 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 - 2R_A &= 0, & R_A &= 30 \text{ кН}; \\ \Sigma Y = 0 \text{ (проверка)}, \quad -36 + 30 + 6 &= -36 + 36 = 0. \end{aligned}$$



**Рис.7.29**

Определяем внутренние усилия в характерных сечениях каждого участка рамы.

**Участок AD**

Сечение A:  $N = -R_A = -30 \text{ кН}$  (сжатие),  $Q = -H_A = -12 \text{ кН}$ ,  $M = 0$ .

Сечение D:  $N = -30 \text{ кН}$ ,  $Q = -12 \text{ кН}$ ,  $M = -12 \cdot 3 = -36 \text{ кНм}$   
(растянуты левые волокна).

**Участок BE**

Сечение B:  $N = -R_B = -6 \text{ кН}$ ,  $Q = 0$ ,  $M = 0$ ,

Сечение E:  $N = -6 \text{ кН}$ ,  $Q = 4 \cdot 3 = 12 \text{ кН}$ ,  $M = -4 \cdot 3 \cdot 1,5 = -18 \text{ кНм}$

(растянуты правые волокна).

**Участок  $CE$**

Сечение  $C$ :  $N = 0$ ,  $Q = 0$ ,  $M = -6$  кНм  
(растянуты верхние волокна).

Сечение  $D$  (слева):  $N = 0$ ,  $Q = 0$ ,  $M = -6$  кНм.

Сечение  $D$  (справа):  $N = -H_A = -12$  кН,  $Q = R_A = 30$  кН,  
 $M = -6 - 12 \cdot 3 = -42$  кНм.

Сечение  $F$  (слева):  $N = -12$  кН,  $Q = 30$  кН,

$$M = -42 + 30 \cdot 1 = -12 \text{ кНм}.$$

Сечение  $F$  (справа):  $N = -12$  кН,  $Q = 30 - 36 = -6$  кН,  $M = -12$  кНм.

Сечение  $E$ :  $N = -12$  кН,  $Q = -R_B = -6$  кН,  $M = -18$  кНм.

Эпюры  $N$ ,  $Q$ , и  $M$  приведены на рис.7.29,б,в,г.

Вырежем мысленно узел  $D$  и покажем его равновесие под действием внутренних усилий в стержнях, сходящихся в узле (рис.7.29,д). Нетрудно видеть, что узел находится в равновесии.