

## § 7.4. Нормальные напряжения при чистом изгибе

Рассмотрим участки балки, в пределах которых изгибающий момент имеет постоянное значение ( $M_z = const$ ), а поперечная сила отсутствует ( $Q_y = 0$ ). Такой изгиб принято называть *чистым изгибом*. Для балки, показанной на рис.7.30,а, это имеет место в пределах всей ее длины, а для балки, показанной на рис.7.30,б, – в пределах участка  $CD$ .

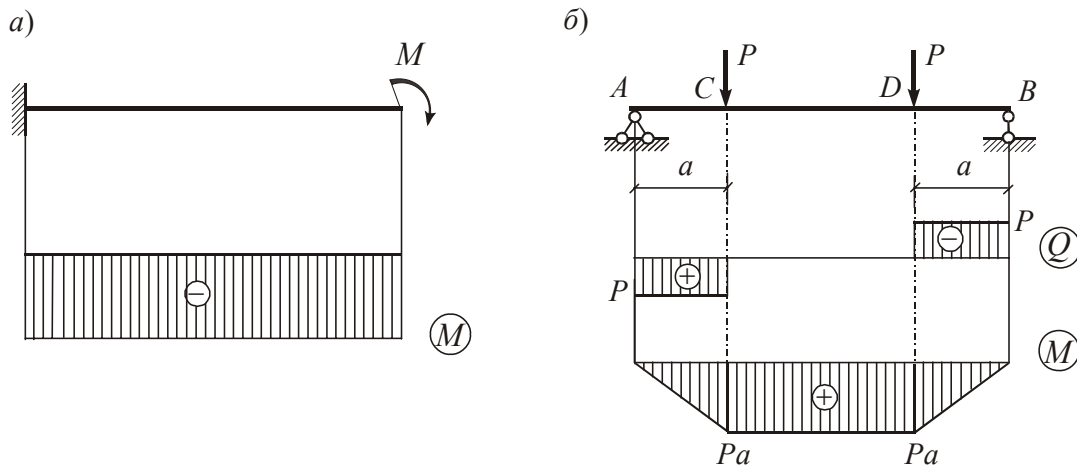


Рис.7.30

Установим закон распределения напряжений в поперечном сечении балки при чистом изгибе. Характер деформации балки можно исследовать с помощью опыта на резиновой модели прямоугольного сечения с нанесенной на боковых гранях ортогональной сеткой в виде продольных и поперечных прямых линий (рис.7.31,а). После деформирования на участке чистого изгиба продольные прямые принимают криволинейное очертание, а поперечные – остаются прямыми (рис.7.31,б). При этом сетка остается ортогональной. Отсюда можно сделать вывод, что угловые деформации в плоскости изгиба отсутствуют и поперечные сечения балки при деформации не искривляются, а остаются плоскими.

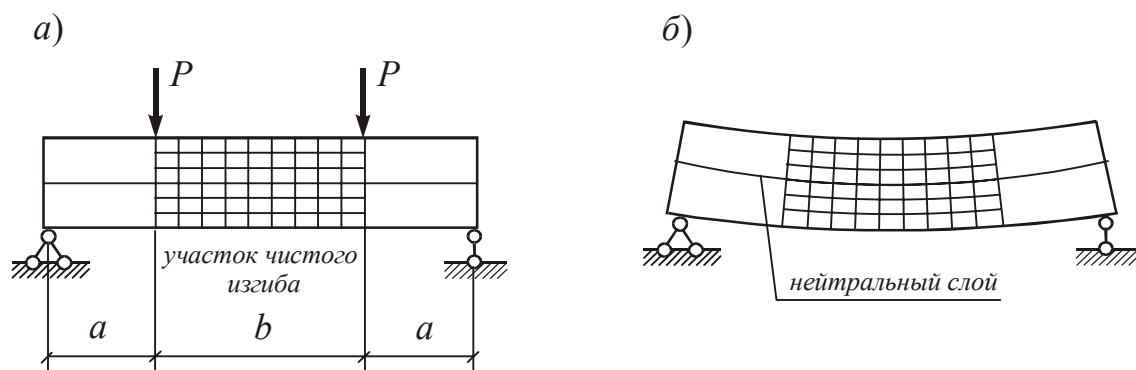


Рис.7.31

Из рис.7.31,б видно, что продольные волокна балки, расположенные ниже некоторого слоя, испытывают растяжение, а выше этого слоя – сжатие.

Такой слой называется *нейтральным слоем*. Волокна этого слоя не удлиняются и не укорачиваются. Следовательно, ниже нейтрального слоя в поперечных сечениях действуют растягивающие нормальные напряжения, а выше этого слоя – сжимающие напряжения. Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения называется *нейтральной осью* (нулевой линией) сечения.

Экспериментальные и теоретические исследования чистого изгиба балок дают основание принять следующие гипотезы.

1. *Поперечные сечения балки, плоские до деформации, остаются плоскими и ортогональными к нейтральному слою после деформации* (гипотеза Я. Бернулли). Эта гипотеза равносильна предположению о том, что при изгибе происходит поворот поперечных сечений на некоторый угол относительно нейтральной оси и что угловые деформации в продольных сечениях балки отсутствуют.

2. *Взаимное давление между продольными слоями отсутствует*. Из этого следует, что продольные волокна находятся в условиях одноосного растяжения или сжатия.

Рассмотрим чистый изгиб стержня произвольного поперечного сечения. Поместим начало координат в произвольной точке  $O$  поперечного сечения (рис.7.32), направив ось  $Ox$  параллельно оси стержня, а ось  $Oy$  вертикально вниз.

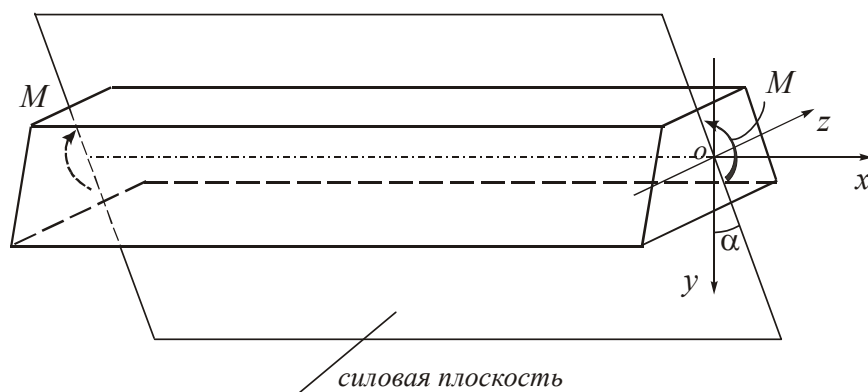


Рис.7.32

Предположим, что силовая плоскость, в которой действует изгибающий момент  $M$ , не совпадает с координатными плоскостями  $Oxy$  и  $Oxz$ .

Из гипотезы плоских сечений (гипотеза 1) следует, что перемещение  $u$  произвольной точки  $K$  поперечного сечения вдоль оси  $Ox$  является линейной функцией координат  $y$  и  $z$  точек поперечного сечения и может быть представлено в виде

$$u = \varphi_z y + \varphi_y z, \quad (7.6)$$

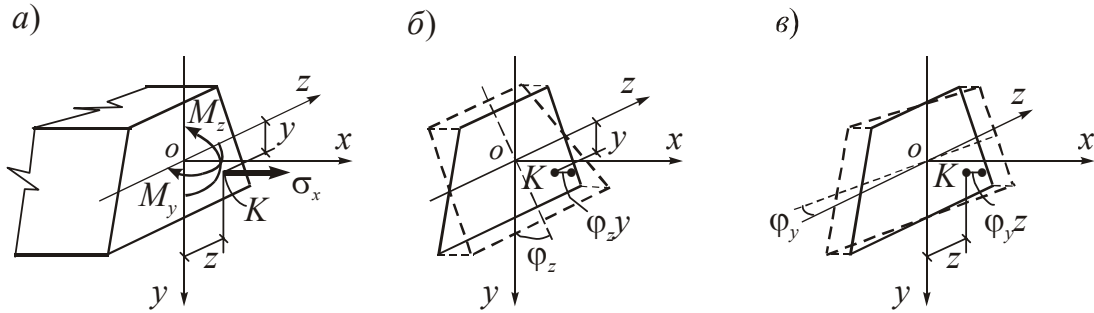


Рис.7.33

где  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$  – углы поворота сечения относительно взаимно перпендикулярных осей  $Oy$  и  $Oz$  (рис.7.33,б,в). Эти величины являются функциями переменной  $x$ . Поступательное перемещение плоскости поперечного сечения в направлении оси  $Ox$  отсутствует.

Продольные волокна стержня испытывают одноосное растяжение или сжатие (гипотеза 2). Используя формулу (3.10) (часть 1), определим относительное удлинение продольного волокна, проходящего через произвольную точку  $K$  поперечного сечения.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'_z y + \varphi'_y z \quad (7.7)$$

Здесь линейная деформация определяется как частная производная перемещения  $u$ , так как оно является функцией трех переменных  $x, y$  и  $z$ .

Из закона Гука при одноосном растяжении или сжатии получим

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E(\varphi'_z y + \varphi'_y z) \quad (7.8)$$

Изгибающий момент  $M$ , действующий в силовой плоскости, можно разложить на два момента  $M_z = M \cos \alpha$  и  $M_y = M \sin \alpha$ , действующие в плоскостях  $Oxy$  и  $Oxz$  (рис.7.33,а).

Внутренние усилия в сечении стержня связаны с напряжениями  $\sigma_x$  соотношениями (1.4) (часть 1).

$$N = \iint_F \sigma_x dF ; \quad M_y = \iint_F \sigma_x z dF ; \quad M_z = \iint_F \sigma_x y dF \quad (7.9)$$

Подставляя в эти соотношения выражение  $\sigma_x$  из (7.8) и учитывая, что при изгибе продольная сила  $N = 0$ , получим следующую систему уравнений относительно неизвестных  $\varphi'_y$  и  $\varphi'_z$ :

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_z S_z + \varphi'_y S_y &= 0 ; \\ \varphi'_z J_{yz} + \varphi'_y J_y &= M_y / E ; \\ \varphi'_z J_z + \varphi'_y J_{yz} &= M_z / E , \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

где  $S_y, S_z$  – статические моменты площади относительно осей  $Oy$  и  $Oz$ :

$$S_y = \iint_F z dF ; \quad S_z = \iint_F y dF .$$

$J_y, J_z, J_{yz}$  – осевые и центробежный моменты инерции:

$$J_y = \iint_F z^2 dF ; \quad J_z = \iint_F y^2 dF ; \quad J_{yz} = \iint_F yz dF .$$

Если оси  $Oy$  и  $Oz$  являются главными центральными осями поперечного сечения, то  $S_y = S_z = J_{yz} = 0$ , и из (7.10) находим

$$\varphi'_y = \frac{M_y}{EJ_y} ; \quad \varphi'_z = \frac{M_z}{EJ_z} . \quad (7.11)$$

Подставив эти величины в (7.8), получим

$$\sigma_x = \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z . \quad (7.12)$$

Если силовая плоскость совпадает с главной плоскостью  $Oxy$  (прямой изгиб), то  $M_y = 0$ , и формула (7.12) принимает вид

$$\sigma_x = \frac{M_z}{J_z} y . \quad (7.13)$$

Таким образом, при чистом изгибе стержня в плоскости  $Oxy$  нормальные напряжения  $\sigma_x$  в поперечном сечении стержня изменяются по линейному закону. Переменная  $y$  отсчитывается от главной оси  $Oz$ , которая является нейтральной осью (нулевой линией).

Из формулы (7.13) видно, что в точках нейтральной оси напряжения  $\sigma_x$  равны нулю, а наибольшие и наименьшие значения они принимают в нижних ( $y = h_n$ ) и в верхних ( $y = -h_b$ ) волокнах, наиболее удаленных от нейтральной оси

$$\sigma_{нб} = \sigma_n = \frac{M_z h_n}{J_z} ; \quad \sigma_{нм} = \sigma_b = -\frac{M_z h_b}{J_z} . \quad (7.14)$$

Эти формулы удобнее представить в виде

$$\sigma_{нб} = \frac{M_z}{W_{zn}} ; \quad \sigma_{нм} = -\frac{M_z}{W_{zb}} , \quad (7.15)$$

где

$$W_{zn} = \frac{J_z}{h_n} ; \quad W_{zb} = \frac{J_z}{h_b} . \quad (7.16)$$

Величины  $W_{zn}$  и  $W_{zb}$  называются *моментами сопротивления сечения для нижних и верхних волокон*. Они являются положительными величинами.

Характер эпюр нормальных напряжений для сечений, не симметричных относительно нейтральной оси (например, таврового сечения при  $M_z > 0$  и треугольного сечения при  $M_z < 0$ ), изображен на рис.7.34.

Из приведенных на рис.7.34 эпюр видно, что в балках с несимметричным относительно нейтральной оси сечением наибольшие по абсолютной величине напряжения возникают в волокнах, наиболее удаленных от нейтральной оси. Они могут быть определены по формуле

$$\sigma_{н\bar{o}} = \frac{|M_z|}{W_{нм}}, \tag{7.17}$$

где  $W_{нм}$  – меньший из моментов сопротивления  $W_{zn}$  или  $W_{zb}$ . В дальнейшем индекс  $z$  у геометрических характеристик сечения для упрощения записи будем опускать.

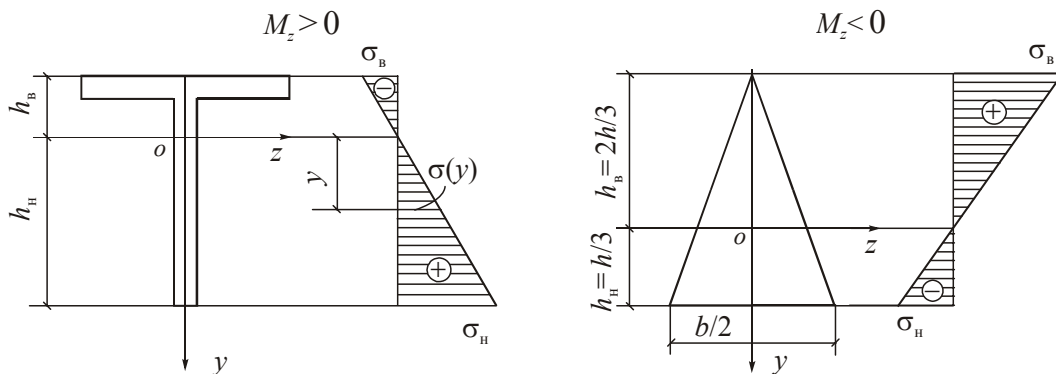


Рис.7.34

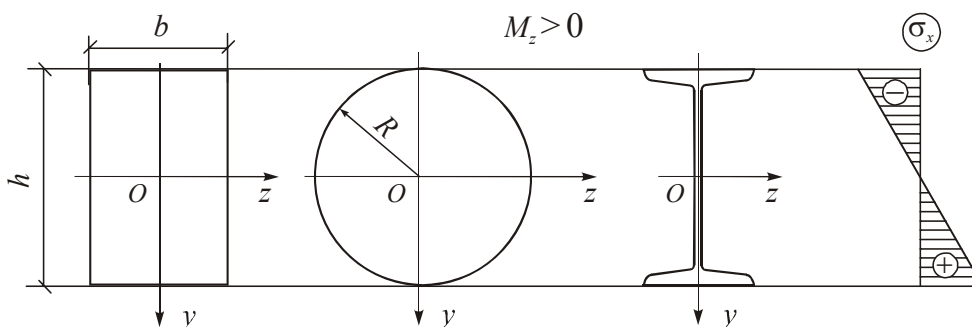
Для сечений, симметричных относительно нейтральной оси,  $h_n = h_b = h/2$ , и момент сопротивления определяется по формуле

$$W = \frac{J}{h/2}. \tag{7.18}$$

Напряжения в крайних волокнах в этом случае равны по величине и определяются по формуле

$$\sigma_{н\bar{o}} = |\sigma_{нм}| = \frac{M_z}{W}. \tag{7.19}$$

На рис.7.35 изображен характер эпюры  $\sigma_x$  для прямоугольного, круглого и двутаврового сечений при  $M_z > 0$ .



**Рис.7.35**

Моменты инерции и моменты сопротивления прямоугольного, круглого сплошного и кольцевого сечений определяются по следующим формулам:

для прямоугольного сечения

$$J = \frac{bh^3}{12}, \quad W = \frac{J}{h/2} = \frac{bh^2}{6}; \quad (7.20)$$

для круглого сечения

$$J = \frac{\pi R^4}{4}, \quad W = \frac{J}{R} = \frac{\pi R^3}{4}; \quad (7.21)$$

для кольцевого сечения с внутренним и внешним радиусами  $R_1$  и  $R_2$ .

$$J = \frac{\pi R_2^4}{4} - \frac{\pi R_1^4}{4}, \quad W = \frac{J}{R_2} = \frac{\pi(R_2^4 - R_1^4)}{4R_2}. \quad (7.22)$$

Для прокатных двутавров и швеллеров величины моментов инерции и моментов сопротивления приведены в сортаменте.