

§ 7.5. Нормальные и касательные напряжения при поперечном изгибе

Рассмотрим балку, находящуюся в условиях плоского прямого изгиба под действием произвольных поперечных нагрузок в главной плоскости Oxy (рис.7.36,а). Расsectем балку на расстоянии x от ее левого конца и рассмотрим равновесие левой части. Влияние правой части в этом случае нужно заменить действием изгибающего момента M_z и поперечной силы Q_y в проведенном сечении (рис.7.36). Изгибающий момент M_z в общем случае не является постоянным по величине, как это имело место при чистом изгибе, а изменяется по длине балки. При этом в поперечном сечении балки действуют не только нормальные, но и касательные напряжения τ_{yx} (рис.7.36,в), равнодействующей которых является поперечная сила Q_y :

$$Q_y = \iint_F \tau_{yx} dF . \quad (7.23)$$

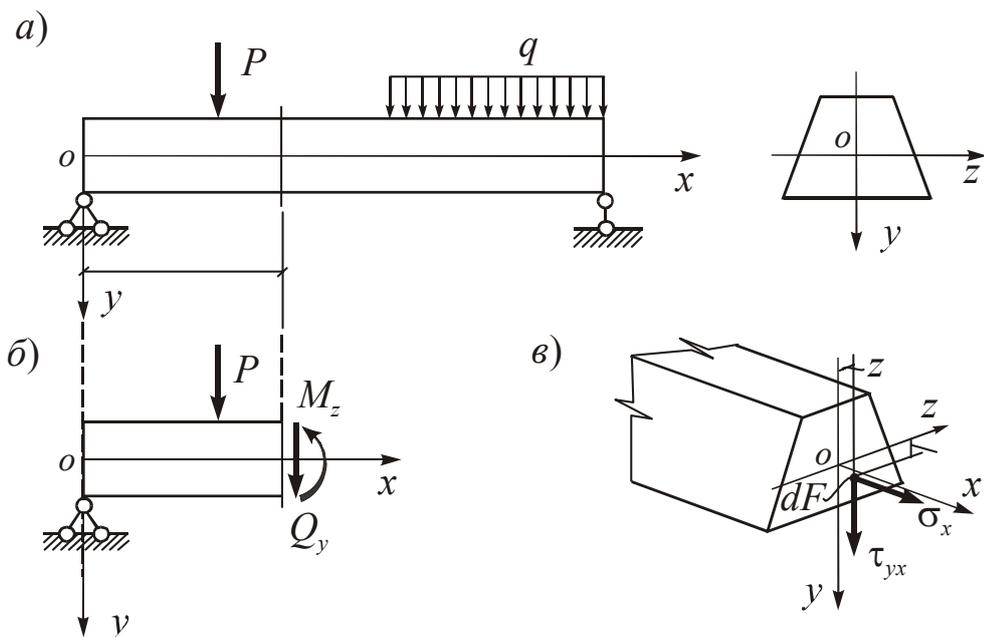


Рис.7.36

При поперечном изгибе в отличие от чистого изгиба сечения балки не остаются плоскими (нарушается гипотеза Я. Бернулли).

Искривление поперечных сечений можно наглядно продемонстрировать на примере изгиба резиновой модели консольной балки прямоугольного сечения, вызванного действием приложенной на конце сосредоточенной силы (рис.7.37). Если предварительно на боковые грани нанести прямые линии, перпендикулярные к оси балки, то после изгиба эти линии не остаются прямыми. Наибольшее искривление имеет место на уровне нейтрального слоя.

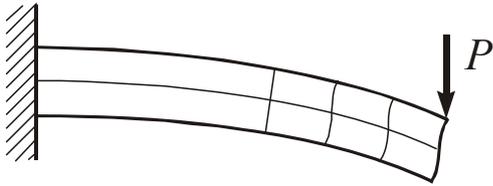


Рис.7.37

Более точными исследованиями установлено, что влияние искажения поперечных сечений на величину нормальных напряжений незначительно. Оно зависит от отношения высоты сечения h к длине балки l и при $h/l \leq 1/5$ является несущественным. В силу этого для определения нормальных

напряжений σ_x при поперечном изгибе обычно используется формула (7.13), выведенная для случая чистого изгиба.

Второй особенностью поперечного изгиба является наличие нормальных напряжений σ_y , действующих в продольных сечениях балки и характеризующих взаимное давление между продольными слоями. Эти напряжения возникают на участках, где имеется распределенная нагрузка q и в местах приложения сосредоточенных сил. Обычно эти напряжения имеют весьма малую величину по сравнению с нормальными напряжениями σ_x и, как правило, не учитываются. Особый случай представляет собой действие сосредоточенной силы, в области приложения которой могут возникнуть значительные местные напряжения σ_y .

При определении касательных напряжений τ_{yx} предположим, что сечение имеет вертикальную ось симметрии, и касательные напряжения τ_{yx} равномерно распределены по его ширине. Исследования показывают, что это предположение практически точно соответствует действительному характеру распределения касательных напряжений в балках узкого прямоугольного сечения ($b \ll h$).

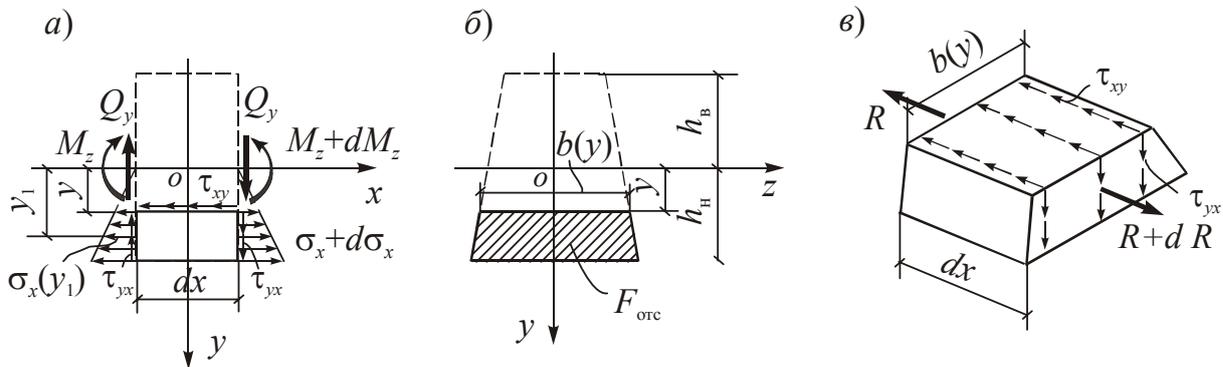


Рис.7.38

Вырежем из нижней части балки с помощью продольного сечения, параллельного плоскости Oxz и проходящего от нее на расстоянии y , и двух поперечных сечений x и $x + dx$ бесконечно малый элемент длиной dx (рис.7.38,а).

Предположим, что изгибающий момент M_z изменяется в пределах длины dx рассматриваемого элемента балки, а поперечная сила Q_y имеет постоянное значение. Тогда в поперечных сечениях x и $x + dx$ будут дейст-

воват одинаковые по величине касательные напряжения τ_{yx} , а нормальные напряжения, возникающие от действия изгибающих моментов M_z и $M_z + dM_z$, соответственно равны σ_x и $\sigma_x + d\sigma_x$. По горизонтальной грани выделенного элемента (на рис.7.38,б он показан в аксонометрии) согласно закону парности касательных напряжений будут действовать напряжения $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

Равнодействующие R и $R + dR$ нормальных напряжений σ_x и $\sigma_x + d\sigma_x$, действующих на торцах элемента, с учетом формулы (7.13) равны

$$R = \iint_{F_{omc}} \sigma_x(y_1) dF = \iint_{F_{omc}} \frac{M_z}{J} y_1 dF = \frac{M_z}{J} S_{omc} ;$$

$$R + dR = \frac{M_z + dM_z}{J} S_{omc} ,$$

где

$$S_{omc} = \iint_{F_{omc}} y_1 dF . \quad (7.24)$$

Величина S_{omc} является статическим моментом отсеченной площади F_{omc} (на рис.7.38,б она заштрихована) относительно нейтральной оси Oz , y_1 – вспомогательная переменная, изменяющаяся в пределах $y \leq y_1 \leq h_n$.

Равнодействующая касательных напряжений τ_{xy} , приложенных к горизонтальной грани элемента, с учетом введенного предположения о равномерном распределении этих напряжений по ширине сечения $b(y)$ может быть определена по формуле

$$dT = \tau_{xy} b(y) dx .$$

Запишем уравнение равновесия элемента

$$\Sigma X = 0 , \quad (R + dR) - R - dT = 0 .$$

Подставляя значения равнодействующих сил, получим

$$\frac{dM_z}{J} S_{omc} - \tau_{xy} b(y) dx = 0 .$$

Отсюда с учетом (7.4) получим формулу для определения касательных напряжений

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{Q_y S_{omc}(y)}{J b(y)} . \quad (7.25)$$

Эта формула в отечественной литературе называется *формулой Д.И.Журавского*.

В соответствии с формулой (7.25) распределение касательных напряжений τ_{yx} по высоте сечения зависит от изменения ширины сечения $b(y)$ и статического момента отсеченной части сечения $S_{omc}(y)$.

С помощью формулы (7.25) касательные напряжения наиболее просто определяются в случае прямоугольного сечения (рис.7.39). Статический момент отсеченной площади F_{omc} равен (рис.7.39,а)

$$S_{отс}(y) = y_c F_{omc} = \left[y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) \right] \cdot b \left(\frac{h}{2} - y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Подставив $S_{omc}(y)$ в (7.25), получим

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{Q_y}{2J} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right). \tag{7.26}$$

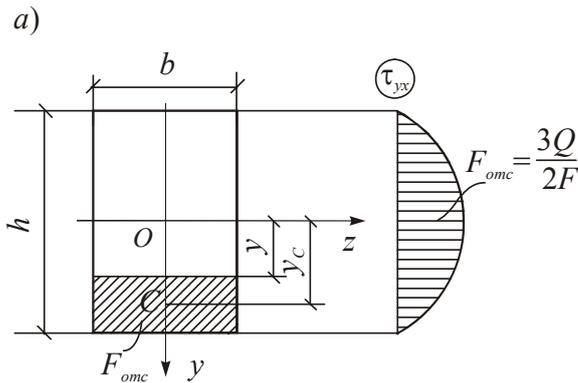


Рис.7.39

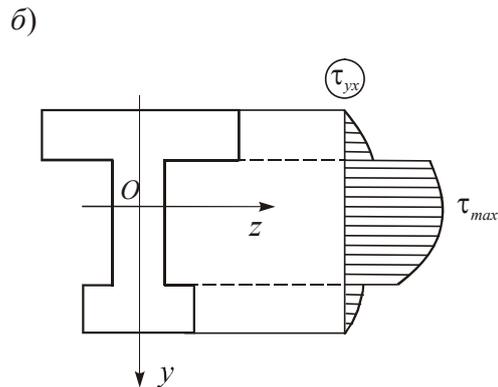


Рис.7.40

Из этой формулы видно, что касательные напряжения изменяются по высоте поперечного сечения балки по закону квадратной параболы. Наибольшее значение касательные напряжения имеют в точках на уровне нейтральной оси при $y = 0$, а при $y = \pm h/2$ они равны нулю. Используя формулу (7.20) для момента инерции прямоугольного сечения, получим

$$\tau_{max} = \frac{Q_y h^2}{8 J} = \frac{3Q_y}{2F}, \tag{7.27}$$

где $F = bh$ – площадь поперечного сечения балки.

Эпюра τ_{yx} приведена на рис.7.39,б.

Формула (7.25) может использоваться при определении касательных напряжений в балках со ступенчато постоянной шириной сечения. В пределах каждого участка касательные напряжения изменяются по высоте сечения по закону квадратной параболы. В местах скачкообразного изменения ширины касательные напряжения также имеют скачки или разрывы. Характер эпюры τ_{yx} для такого сечения приведен на рис.7.40.

Рассмотрим распределение касательных напряжений в двутавровом сечении (рис.7.41,а) при изгибе в плоскости Oxy . Двутавровое сечение состоит из трех прямоугольных элементов – стенки и двух полок.

При вычислении τ_{yx} в стенке в формуле (7.25) нужно принять $b(y) = d$. В результате получим

$$\tau_{yx} = \frac{Q_y S_{omc}}{J d}, \quad (7.28)$$

где S_{omc} вычисляется как сумма статических моментов относительно оси Oz площади сечения полки F_{II} и части стенки F_c , заштрихованных на рис.7.41,*a*.

$$S_{omc} = F_{II} y_1 + F_c y_2.$$

Наибольшее значение касательные напряжения τ_{yx} имеют на уровне нейтральной оси при $y = 0$:

$$\tau_{max} = \frac{Q_y S_{1/2}}{J d},$$

где $S_{1/2}$ – статический момент площади половины сечения относительно нейтральной оси

$$S_{1/2} = bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) + \left(\frac{h}{2} - t \right) d \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - t \right).$$

Для прокатных двутавров и швеллеров величина статического момента половины сечения приведена в сортаменте.

На уровне примыкания стенки к полкам касательные напряжения τ_{yx} равны

$$\tau_{yx} = \frac{Q_y S_{II}}{J d},$$

где S_{II} – статический момент площади сечения полки относительно нейтральной оси

$$S_{II} = bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right).$$

Вертикальные касательные напряжения τ_{yx} в полках двутавра не могут быть найдены по формуле (7.25), так как вследствие того, что $b \gg t$, предположение об их равномерном распределении по ширине полки становится неприемлемым. Напряжения τ_{yx} в полках весьма малы и не представляют практического интереса. Значительно больший интерес представляют горизонтальные касательные напряжения τ_{zx} , для определения которых рассмотрим равновесие бесконечно малого элемента длиной dx и площадью F_1^{omc} , выделенного из нижней части полки (на рис.7.41,*a* этот элемент показан двойной штриховкой).

Согласно закону парности касательных напряжений на продольной грани этого элемента, параллельной плоскости Oxy , действуют напряжения

τ_{xz} , равные по величине напряжениям τ_{zx} , действующим в поперечном сечении (рис.7.41,б). Вследствие малой толщины полки двутавра эти напряжения можно считать равномерно распределенными по толщине.

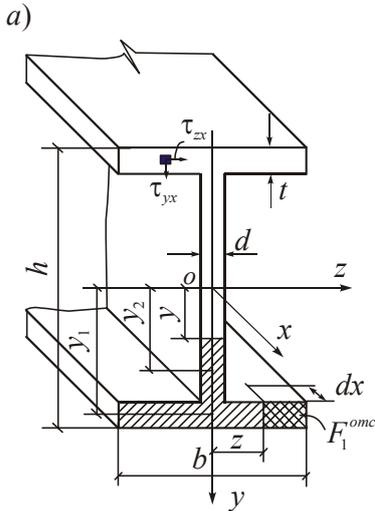


Рис.7.41

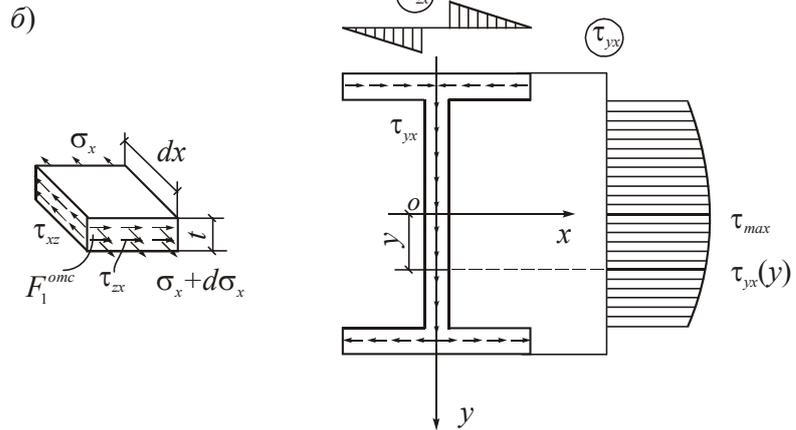


Рис.7.42

Нормальные напряжения σ_x и $\sigma_x + d\sigma_x$, действующие на гранях, перпендикулярных к оси стержня (рис.7.41,б), дают равнодействующую dR , которая уравнивается равнодействующей dT касательных напряжений τ_{xz} . Аналогичная схема имела место при выводе формулы (7.25) (рис.7.38). Поэтому оставляем в силе формулу (7.25), заменив в ней ширину сечения b на толщину полки t . При этом получим

$$\tau_{zx} = \frac{Q_y S_1^{omc}}{J t} . \tag{7.29}$$

Здесь S_1^{omc} – статический момент отсеченной площади полки F_1^{omc} относительно оси Oz

$$S_1^{omc} = \iint_{F_1^{omc}} y dF .$$

В соответствии с рис.7.41,а имеем

$$S_1^{omc} = t \left(\frac{b}{2} - z \right) \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) .$$

Подставляя найденное значение S_1^{omc} в формулу (7.29), получим

$$\tau_{zx} = \frac{Q_y}{4J} (h - t)(b - 2z) .$$

Отсюда видно, что горизонтальные касательные напряжения τ_{zx} изменяются по оси Oz по линейному закону и принимают наибольшее значение при $z = d/2$.

$$\tau_{нб} = \frac{Q_y}{4J}(h-t)(b-d) .$$

На рис.7.42 показаны эпюры касательных напряжений τ_{yx} и τ_{zx} , а также направления этих напряжений в полках и стенке двутавра при действии в сечении балки положительной поперечной силы Q_y . Касательные напряжения образуют в сечении двутавра непрерывный поток вдоль контура сечения.

Пример 7.14. Для однопролетной балки сечением 2L200×125×14 (рис.7.43,а) построим эпюры σ_x и τ_{yx} в сечениях с наибольшими M_z и Q_y . Совместную работу уголков будем считать обеспеченной соединениями, показанными на рис.7.43,б пунктиром.

Поскольку нагрузка симметрична относительно середины балки, опорные реакции равны по величине:

$$R_A = R_B = 30 \text{ кН} .$$

На участках AC и DB поперечные силы равны по величине и противоположны по знаку:

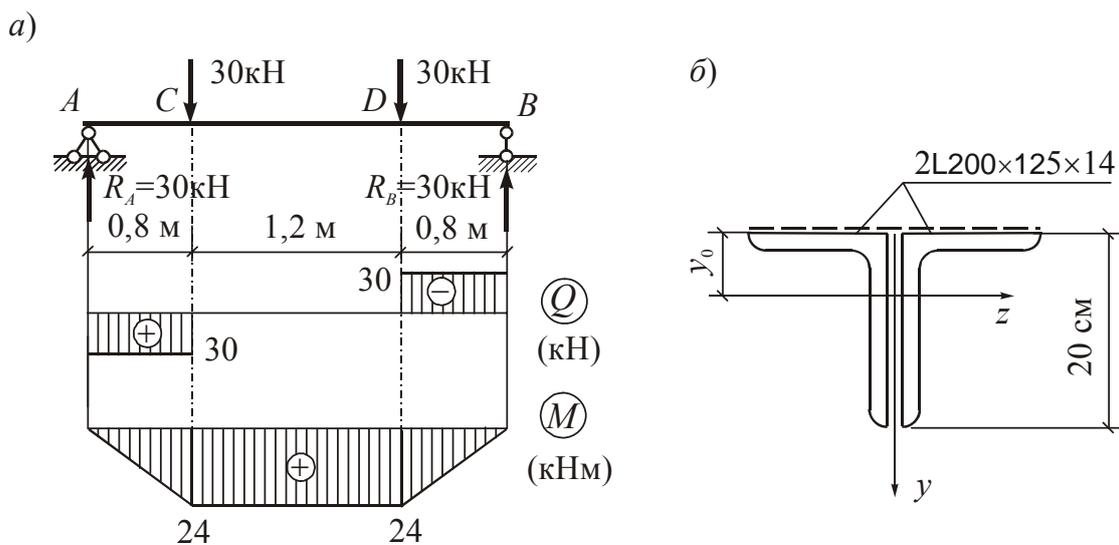


Рис.7.43

$$Q_A = Q_C = R_A = 30 \text{ кН (слева)} ; \quad Q_B = Q_D = -R_B = -30 \text{ кН (справа)} .$$

На участке CD между силами $Q_y = 0$ (участок чистого изгиба), а изгибающий момент имеет постоянное значение и равен

$$M_C = M_D = 30 \cdot 0,8 = 24 \text{ кНм (растянуты нижние волокна)} .$$

Эпюры Q_y и M_z приведены на рис.7.43,в.

Поперечное сечение балки не симметрично относительно нейтральной оси. Пользуясь данными сортамента, определим моменты сопротивления сечения. Последовательно находим:

$$h_n = 20 - y_0 = 20 - 6,62 = 13,38 \text{ см} ; \quad h_b = y_0 = 6,62 \text{ см} ;$$

$$J = 2 \cdot 1801 = 3602 \text{ см}^4 ;$$

$$W_H = \frac{J}{h_H} = \frac{3602}{13,38} = 269 \text{ см}^3 ;$$

$$W_B = \frac{J}{h_B} = \frac{3602}{6,62} = 544 \text{ см}^3 .$$

Вычислим значения нормальных напряжений в нижних и верхних волокнах балки в сечении с наибольшим изгибающим моментом $M_z = 24 \text{ кНм} = 24 \cdot 10^2 \text{ кНсм}$.

$$\sigma_H = \frac{M_z}{W_H} = \frac{24 \cdot 10^2}{269} = 8,92 \text{ кН/см}^2 = 89,2 \text{ МПа} ;$$

$$\sigma_B = -\frac{M_z}{W_B} = -\frac{24 \cdot 10^2}{544} = -4,41 \text{ кН/см}^2 = -44,1 \text{ МПа} .$$

Эпюра σ_x приведена рис.7.44,б.

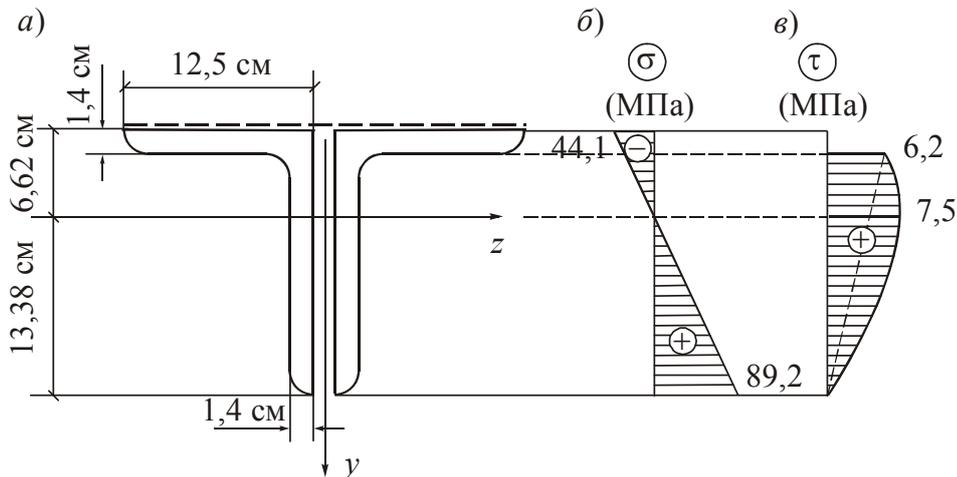


Рис.7.44

Для определения касательных напряжений τ_{yx} в вертикальных полках уголков необходимо вычислить значения статического момента полусечения и статического момента площади сечения горизонтальных полок относительно нейтральной оси Oz . Поперечные сечения полок приближенно считаем прямоугольными. Все необходимые размеры показаны на рис.7.44,а. Последовательно находим:

$$y_{II} = y_0 - \frac{t}{2} = 6,62 - \frac{1,4}{2} = 5,92 \text{ см} ;$$

$$F_{II} = 2 \cdot 12,5 \cdot 1,4 = 35 \text{ см}^2 ;$$

$$S_{II} = y_{II} F_{II} = 5,92 \cdot 35 = 207,2 \text{ см}^3 ;$$

$$S_{1/2} = 2 \cdot 13,38 \cdot 1,4 \cdot 13,38 \cdot 0,5 = 250,6 \text{ см}^3 .$$

Вычислим значения касательных напряжений в сечениях с $Q_y = 30 \text{ кН}$ на уровне нейтральной оси и на уровне сопряжения полок:

$$\tau_{max} = \frac{Q_y S_{1/2}}{J \cdot 2d} = \frac{30 \cdot 250,6}{3602 \cdot 2 \cdot 1,4} = 0,75 \text{ кН/см}^2 = 7,5 \text{ МПа} ;$$
$$\tau_1 = \frac{Q_y S_{II}}{J \cdot 2d} = \frac{30 \cdot 207,2}{3602 \cdot 2 \cdot 1,4} = 0,62 \text{ кН/см}^2 = 6,2 \text{ МПа} .$$

По высоте вертикальных полок касательные напряжения изменяются по закону квадратной параболы. Эпюра τ_{yx} приведена на рис.7.44,в.