

§ 7.10. Понятие о центре изгиба тонкостенных стержней

Как было отмечено в § 7.5, касательные напряжения в поперечных сечениях тонкостенных стержней образуют поток, параллельный контурным линиям каждого элемента сечения. В некоторых случаях этот поток может создавать момент относительно оси стержня, вызывающий его закручивание.

Рассмотрим, например, изгиб в плоскости Oxy консольной балки швеллерного сечения (рис.7.58,*а*). Характер распределения касательных напряжений в поперечном сечении швеллера имеет примерно такой же вид, как и в двутавре (рис.7.42). В стенке швеллера действуют касательные напряжения τ_{yx} , а в полках – касательные напряжения τ_{zx} . Характер эпюр этих напряжений показан на рис.7.58,*б*.

Равнодействующей касательных напряжений в стенке является сила T_1 (рис.7.59,*а*), которая практически равна поперечной силе Q_y ($T_1 \approx Q_y$). Касательные напряжения в полках приводятся к равнодействующим силам T_2 .

Нетрудно видеть, что поток касательных напряжений дает момент относительно центра тяжести сечения, вызывающий закручивание стержня. Таким образом, если линия действия силы P проходит через центр тяжести сечения O , то балка будет испытывать изгиб с кручением, что является нежелательным.

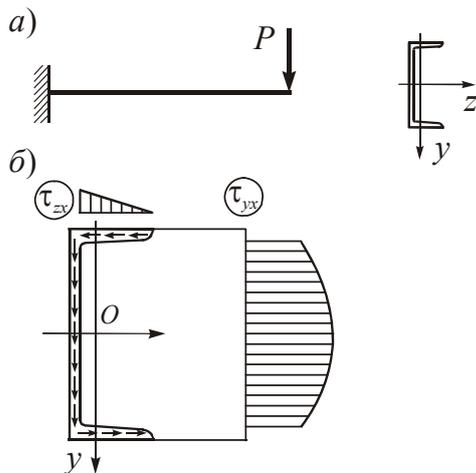


Рис.7.58

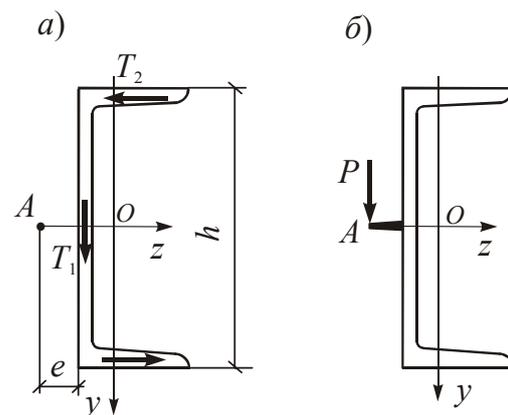


Рис.7.59

Установим положение точки, при прохождении через которую линии действия силы P поток касательных напряжений не будет вызывать закручивание стержня. Очевидно, что такая точка A расположена на оси Oz левее стенки швеллера (рис.7.59), поскольку при этом равнодействующие касательных напряжений T_1 и T_2 будут давать моменты разных знаков относительно точки A . Условие равенства нулю момента относительно этой точки дает

$$\Sigma M_A = 0, \quad -T_1 e + T_2 h = 0.$$

Отсюда находим координату точки A :

$$e = \frac{T_2 h}{T_1}.$$

Если линия действия силы P будет проходить через точку A (рис.7.59,б), то стержень будет испытывать только изгиб. Поэтому точка A называется *центром изгиба*. В общем случае центр изгиба не совпадает с центром тяжести сечения и его положение подлежит определению.

Как видно из рис.7.59,б, центр изгиба может находиться вне контура сечения и для устранения кручения при изгибе должны быть конструктивно обеспечены условия приложения внешней силы таким образом, чтобы линия ее действия проходила через центр изгиба.

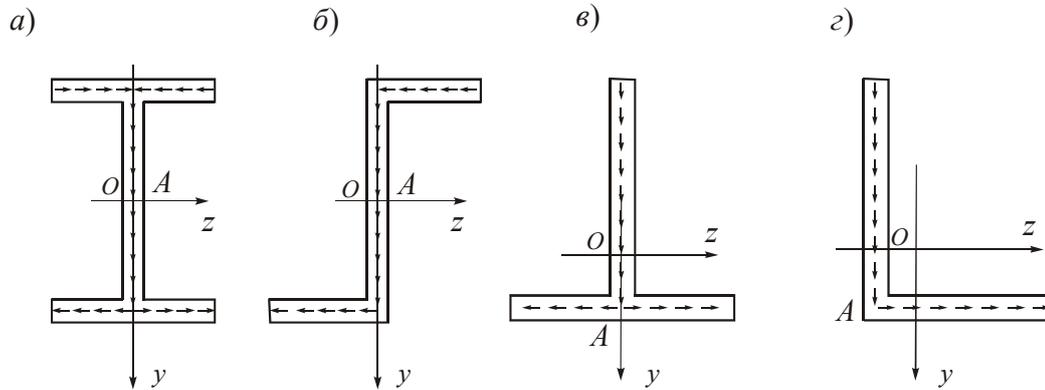


Рис.7.60

В некоторых случаях положение центра изгиба устанавливается без предварительных вычислений. Для сечений с двумя осями симметрии (например, для двутавра на рис.7.60,а) центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения. Это имеет место также для так называемых кососимметричных сечений (например, для показанного на рис.7.60,б "зетового" сечения). Для сечений в виде тавра и уголка (рис.7.60,в,г) центр изгиба находится в точке пересечения средних линий элементов сечения. Момент касательных сил относительно этой точки равен нулю.

§ 7.11. Изгиб кривых стержней

Рассмотрим изгиб плоского кривого стержня в плоскости его кривизны. При расчете кривых стержней на изгиб принято различать стержни малой и большой кривизны. Если отношение высоты сечения h к радиусу кривизны оси ρ_0 стержня существенно меньше единицы ($h/\rho_0 \ll 1$), то считается, что стержень имеет малую кривизну. Теоретические и экспериментальные исследования показали, что формулы для напряжений, выведенные ранее для прямых стержней, применимы и для стержней малой кривизны.

Для стержней большой кривизны отношение h/ρ_0 соизмеримо с единицей. К стержням большой кривизны можно отнести различные кольца, являющиеся элементами машин и аппаратов, обода колес, крюки и звенья цепей подъемных устройств (рис.7.61).

Рассмотрим плоский кривой стержень, нагруженный на концах сосредоточенными моментами M в плоскости кривизны (рис.7.62). Стержень при такой нагрузке работает в условиях чистого изгиба, так как в любом его попе-

речном сечении момент имеет постоянное значение, а продольная и поперечная силы равны нулю.

Изгибающий момент будем считать положительным, если он увеличивает кривизну стержня.

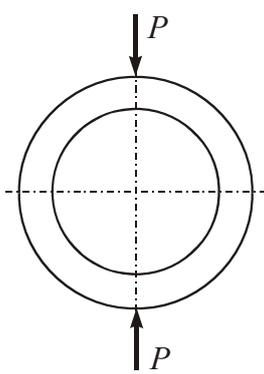


Рис.7.61

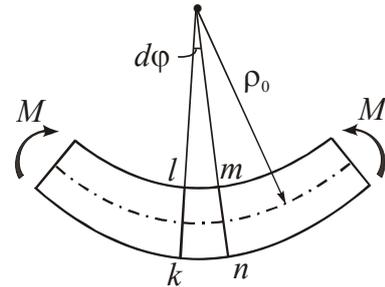
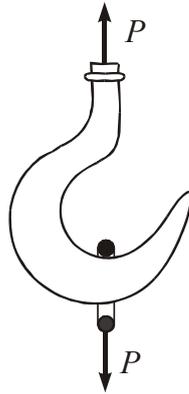


Рис.7.62

Исследования показывают, что для криволинейного стержня также можно принять гипотезу плоских сечений.

Вырежем из стержня двумя плоскостями, ортогональными к его оси, бесконечно малый элемент *lmnk* (рис.7.62). На торцах этого элемента действуют одинаковые изгибающие моменты *M*. Каждое из сечений *lk* и *mn* повернется на угол $d(\Delta\varphi)/2$, относительно нейтральной оси *Oz*, положение которой будем считать пока неизвестным (рис.7.63).

Обозначим через ρ_0 радиус кривизны оси стержня (линии центров тяжести сечений), а через r_0 – радиус кривизны нейтрального слоя.

Относительная деформация волокон слоя *ab* (рис.7.63), находящегося на расстоянии *y* от нейтрального слоя, равна

$$\varepsilon = \frac{a_1 b_1 - ab}{ab}, \tag{7.43}$$

где

$$ab = r d\varphi, \quad a_1 b_1 = ab + a_1 a + b b_1 = r d\varphi + 2y \frac{d(\Delta\varphi)}{2}.$$

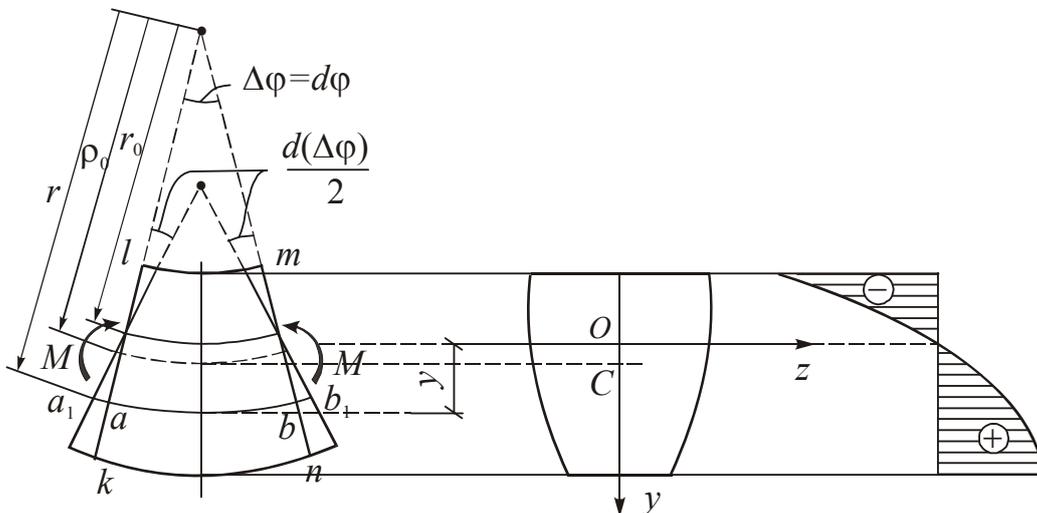


Рис.7.63

Подставляя эти значения в (7.43), получим

$$\varepsilon = \frac{y d(\Delta\varphi)}{r d\varphi} = \frac{y}{r_0 + y} \cdot \frac{d(\Delta\varphi)}{d\varphi}.$$

Согласно закону Гука при одноосном напряженном состоянии имеем

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E y}{r_0 + y} \cdot \frac{d(\Delta\varphi)}{d\varphi}. \quad (7.44)$$

Предположим, что поперечное сечение стержня симметрично относительно плоскости кривизны. Тогда ось Oy является осью симметрии сечения (рис.7.63) и нормальные напряжения σ должны удовлетворить условиям

$$N = \iint_F \sigma dF = 0; \quad M = \iint_F \sigma y dF. \quad (7.45)$$

Подставляя в (7.45) значение σ из (7.44), получим следующие равенства

$$\iint_F \frac{y dF}{r_0 + y} = 0; \quad M = E \frac{d(\Delta\varphi)}{d\varphi} \iint_F \frac{y^2 dF}{r_0 + y}. \quad (7.46)$$

Представим интеграл, входящий в последнее выражение, в виде суммы двух интегралов:

$$\iint_F \frac{y^2 dF}{r_0 + y} = \iint_F \frac{y(y + r_0 - r_0) dF}{r_0 + y} = \iint_F y dF - r_0 \iint_F \frac{y dF}{r_0 + y}.$$

Последний интеграл в силу первого условия (7.46) равен нулю, а первый представляет собой статический момент площади сечения кривого стержня относительно нейтральной линии Oz . Обозначая его через S , запишем

$$S = \iint_F y dF = \iint_F \frac{y^2 dF}{r_0 + y}. \quad (7.47)$$

Заменив во второй формуле (7.46) интеграл через статический момент, получим

$$M = E S \frac{d(\Delta\varphi)}{d\varphi}.$$

Исключая из выражения (7.44) при помощи полученного соотношения производную $d(\Delta\varphi)/d\varphi$, получим следующую окончательную формулу для определения нормальных напряжений

$$\sigma = \frac{M}{S} \cdot \frac{y}{r_0 + y}. \quad (7.48)$$

Как видно из этой формулы, напряжения изменяются по высоте сечения по закону гиперболы. Наибольшие по абсолютной величине напряжения действуют в крайних волокнах стержня, расположенных со стороны центра кривизны.

Для определения величины r_0 рассмотрим первое равенство (7.46) и преобразуем его следующим образом

$$\iint_F \frac{y dF}{r_0 + y} = \iint_F \frac{y + r_0 - r_0}{r_0 + y} dF = F - r_0 \iint_F \frac{dF}{r_0 + y} = 0.$$

Отсюда найдем радиус кривизны нейтрального слоя

$$r_0 = \frac{F}{\iint_F \frac{dF}{r_0 + y}} = \frac{F}{\iint_F \frac{dF}{r}}, \tag{7.49}$$

где $r = r_0 + y$ – новая переменная.

Для сечения прямоугольной формы (рис.7.64,а) с размерами $b \times h$, имеем

$$\iint_F \frac{dF}{r} = b \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = b \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

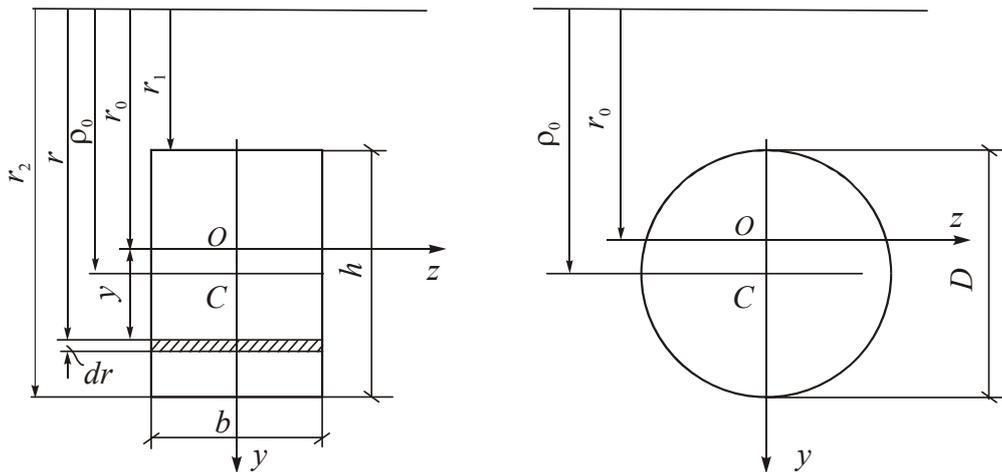


Рис.7.64

По формуле (7.49) найдем

$$r_0 = \frac{h}{\ln(r_2/r_1)}.$$

Для сечения в виде круга диаметром D (рис.7.64,б) с помощью аналогичных вычислений получим

$$r_0 = \frac{D^2}{4(2\rho_0 - \sqrt{4\rho_0^2 - D^2})}.$$

При произвольных нагрузках в поперечных сечениях криво́го стержня могут действовать не только изгибающий момент M , но и продольная сила N и поперечная сила Q . Продольная сила N связана с дополнительными нормальными напряжениями σ , а поперечная сила Q – с касательными напряжениями τ .

Пользуясь принципом независимости действия сил, можно определить напряжения от каждого внутреннего усилия в отдельности.

Нормальные напряжения σ , связанные только с изгибающим моментом M , определяются по формуле (7.48).

Можно показать, что нормальные напряжения σ от действия продольных сил N определяются по формуле, полученной при изучении растяжения и сжатия прямого стержня, то есть

$$\sigma = \frac{N}{F} \quad (7.50)$$

а касательные напряжения τ от действия поперечных сил Q – как при поперечном изгибе прямого стержня:

$$\tau = \frac{Q S_{omc}}{J b} \quad (7.51)$$

Суммарные нормальные напряжения от действия продольной силы и изгибающего момента определяются по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{S} \cdot \frac{y}{r_0 + y} \quad (7.52)$$

Пример 7.21. Плоский кривой стержень в виде полукольца (рис.7.65) с прямоугольным поперечным сечением находится под действием сил $P = 10$ кН, приложенных на его концах. Радиус кривизны оси стержня $\rho_0 = 7$ см, размеры сечения: $b = 2$ см, $h = 6$ см. Построим эпюру нормальных напряжений в опасном сечении.

Опасным является сечение mn , где действуют наибольшая продольная сила и наибольший изгибающий момент, которые равны $N = 10$ кН; $M = -10 \cdot 7 = -70$ кНсм.

Вначале произведем расчет стержня на действие изгибающего момента. Определяем радиус кривизны нейтрального слоя при $r_1 = 4$ см и $r_2 = 10$ см.

$$r_0 = \frac{h}{\ln(r_2/r_1)} = \frac{6}{\ln 2,5} = 6,55 \text{ см}.$$

Расстояние от нейтральной оси до оси, проходящей через центр тяжести сечения, равно

$$y_0 = \rho_0 - r_0 = 7 - 6,55 = 0,45 \text{ см}.$$

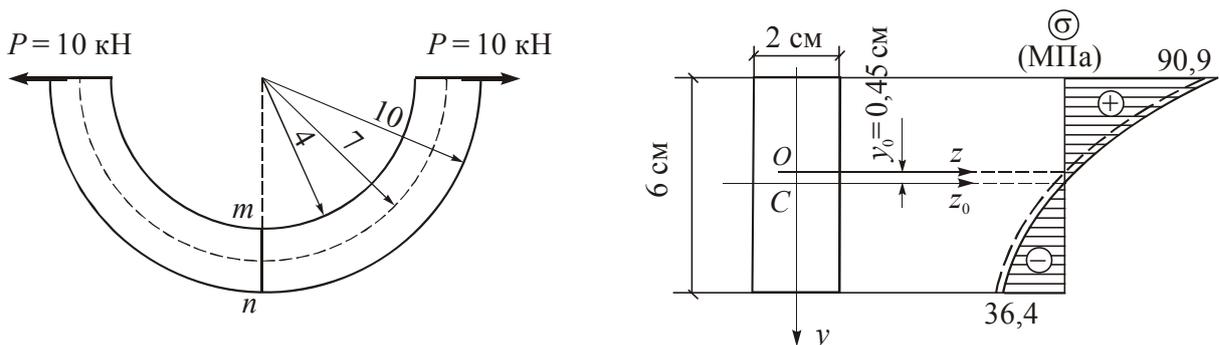


Рис.7 65

Определяем статический момент площади сечения относительно нейтральной оси:

$$S = Fy_0 = 2 \cdot 6 \cdot 0,45 = 5,4 \text{ см}^3 .$$

Координаты точек, соответствующих крайним волокнам стержня, равны

$$y_1 = -(r_0 - r_1) = -(6,55 - 4) = -2,55 \text{ см} , \quad y_2 = r_2 - r_0 = 10 - 6,55 = 3,45 \text{ см} .$$

Определим величины напряжений в крайних волокнах стержня и в волокнах слоя, проходящего через центр тяжести сечения:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{M}{S} \cdot \frac{y_1}{r_0 + y_1} = \frac{-70}{5,4} \cdot \frac{-2,55}{4} = 8,26 \text{ кН/см}^2 = 82,6 \text{ МПа} ; \\ \sigma_2 &= \frac{M}{S} \cdot \frac{y_2}{r_0 + y_2} = \frac{-70}{5,4} \cdot \frac{3,45}{10} = -4,47 \text{ кН/см}^2 = -44,7 \text{ МПа} ; \\ \sigma_0 &= \frac{M}{S} \cdot \frac{y_0}{r_0 + y_0} = \frac{M}{F\rho_0} = \frac{-70}{2 \cdot 6 \cdot 7} = -0,83 \text{ кН/см}^2 = -8,3 \text{ МПа} . \end{aligned}$$

К этим напряжениям надо прибавить напряжения от действия растягивающей продольной силы:

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{10}{2 \cdot 6} = 0,83 \text{ кН/см}^2 = 8,3 \text{ МПа} .$$

Суммарная эпюра нормальных напряжений в опасном сечении стержня показана на рис.7.65 сплошной линией. В волокнах слоя, проходящего через центр тяжести сечения, напряжения равны нулю.