

### § 11.3 Внецентренное растяжение и сжатие

Многие элементы строительных конструкций (колонны, стойки, опоры) находятся под воздействием сжимающих сил, приложенных не в центре тяжести. Рассмотрим, например, колонну, на которую опирается балка перекрытия (рис.11.11). Поскольку сила  $P$ , характеризующая передачу нагрузки от балки на колонну, действует по отношению к её оси с эксцентриситетом  $e$ , колонна испытывает сжатие с изгибом. При этом в поперечном сечении  $a - a$  колонны наряду с продольной силой  $N = -P$  возникает изгибающий момент, величина которого равна  $M = Pe$ .

Таким образом, внецентренное растяжение и сжатие стержня имеет место в случае, когда нагрузки действуют вдоль прямой, параллельной оси стержня. Будем рассматривать в основном задачи внецентренного сжатия, наиболее характерные для элементов строительных конструкций. При внецентренном растяжении во всех приводимых ниже формулах надо изменить знак перед силой  $P$  на противоположный.

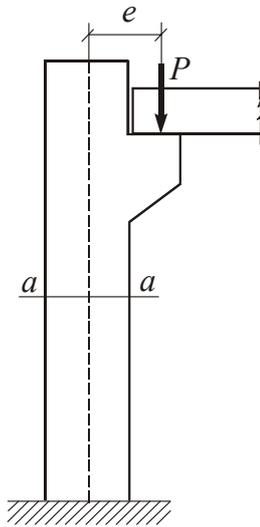


Рис.11.11

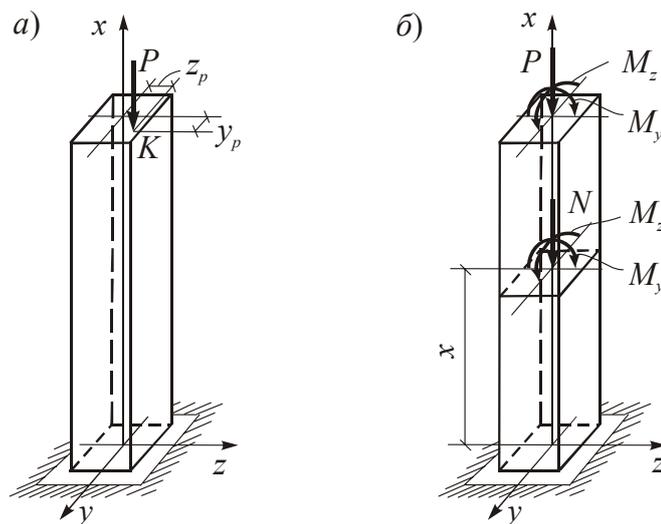


Рис.11.12

Рассмотрим стержень, нагруженный на торце внецентренно приложенной в точке  $K$  сжимающей силой  $P$ , направленной параллельно оси  $Ox$  (рис.11.12,а). Обозначим координаты точки приложения силы через  $y_p$  и  $z_p$ . Перенесем силу в центр тяжести сечения и согласно правилам статики добавим два момента  $M_z = -Py_p$  и  $M_y = -Pz_p$  (рис.11.12,б). При этом внутренние усилия в произвольном поперечном сечении стержня будут равны:

$$N = -P, \quad M_z = -Py_p, \quad M_y = -Pz_p. \quad (11.11)$$

Согласно принятому правилу знаков внутренние усилия являются отрицательными, поскольку в точках первой четверти системы координат они вызывают сжатие. Отметим также, что величины внутренних усилий не изменяются по длине стержня и, таким образом, распределение нормальных

напряжений в сечениях, достаточно удаленных от места приложения нагрузки, будет одинаковым.

Подставив (11.11) в (11.1), получим формулу для определения нормальных напряжений при внецентренном сжатии

$$\sigma = -\frac{P}{F} - \frac{P y_p}{J_z} y - \frac{P z_p}{J_y} z .$$

Эту формулу можно преобразовать к виду

$$\sigma = -\frac{P}{F} \left( 1 + \frac{y_p}{i_z^2} y + \frac{z_p}{i_y^2} z \right), \quad (11.12)$$

где  $i_y$ ,  $i_z$  – главные радиусы инерции сечения, определяемые по формулам

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} . \quad (11.13)$$

Приравняв выражение (11.12) к нулю, получим уравнение нулевой линии

$$1 + \frac{y_p}{i_z^2} y + \frac{z_p}{i_y^2} z = 0 .$$

Полагая в этом уравнении последовательно  $y = 0$  и  $z = 0$ , получим формулы для определения отрезков, отсекаемых нулевой линией на осях координат:

$$y = y_0 = -\frac{i_z^2}{y_p}, \quad z = z_0 = -\frac{i_y^2}{z_p} . \quad (11.14)$$

Отложив эти отрезки на осях, проведем нулевую линию (рис.11.13), в каждой точке которой  $\sigma = 0$ . Отметим, что при внецентренном сжатии (растяжении) нулевая линия не проходит через центр тяжести сечения, а её положение не зависит от величины силы  $P$ .

Поскольку знаки величин  $z_0$  и  $y_0$  противоположны знакам соответственно  $z_p$  и  $y_p$ , нулевая линия проходит через те четверти системы координат, которые не содержат точки приложения силы (рис.11.13).

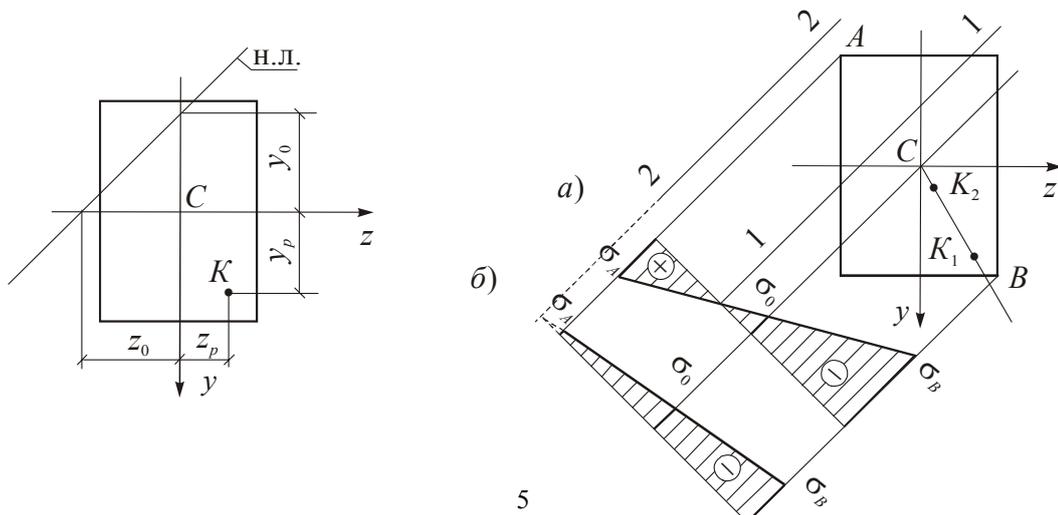


Рис.11.13

Положение нулевой линии зависит от геометрических характеристик сечения и от координат точки приложения силы. При этом величины  $z_0$ ,  $z_p$  и  $y_0$ ,  $y_p$  являются обратно пропорциональными по отношению друг к другу.

Исследуем изменение положения нулевой линии при перемещении точки приложения силы вдоль прямой, проходящей через центр тяжести сечения. Из формул (11.14) следует, что все нулевые линии будут при этом параллельными между собой, причем при приближении точки приложения силы к центру тяжести сечения величины  $z_p$  и  $y_p$  уменьшаются и нулевая линия удаляется от него, и наоборот (рис.11.14).

Нетрудно доказать также следующее положение. Если точка приложения силы перемещается вдоль прямой, не проходящей через центр тяжести сечения, то нулевая линия поворачивается относительно некоторой точки (рис.11.15). Справедливо и обратное утверждение. Это свойство используется при построении особой области – ядра сечения.

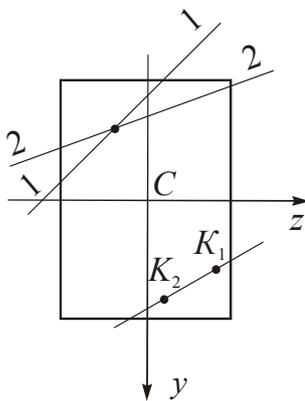


Рис.11.15

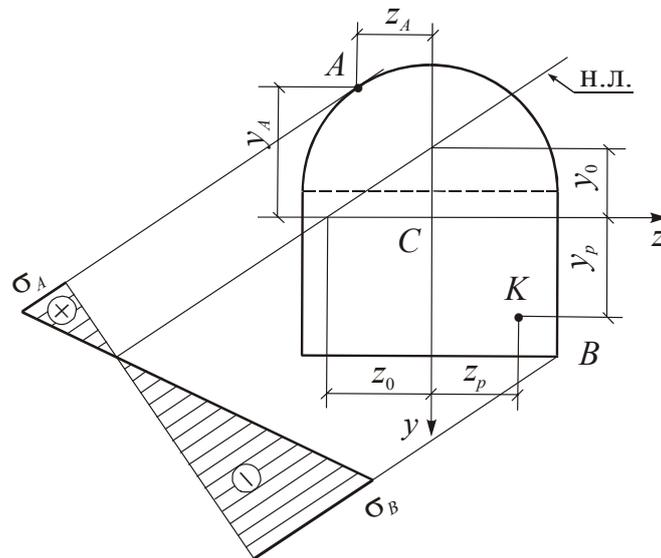


Рис.11.16

Нормальные напряжения в сечении изменяются по линейному закону, увеличиваясь по абсолютной величине по мере удаления от нулевой линии. Эпюра  $\sigma$  строится на прямой, перпендикулярной к нулевой линии. При этом она может быть разнозначной или однозначной (рис.11.14). Последнее имеет место в случае, если точка приложения силы  $P$  расположена вблизи центра тяжести сечения. Напомним, что при центральном сжатии или растяжении нормальные напряжения являются одинаковыми по величине, а эпюра  $\sigma$  представляет собой прямоугольник.

В точках прямой, проходящей через центр тяжести сечения и параллельной нулевой линии, нормальные напряжения равны  $\sigma_0 = -P/F$ .

Рассмотрим случай разнозначной эпюры  $\sigma$  (рис.11.14,а). Также, как и при косом изгибе, наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения действуют в точках сечения, наиболее удаленных от нулевой линии (угловые

точки  $A$  и  $B$  на рис.11.14). Для произвольного сечения эти точки и их координаты устанавливаются с помощью касательных к сечению, параллельных нулевой линии (например, точка  $A$  на рис.11.16). В общем случае  $\sigma_{нб} \neq |\sigma_{нм}|$ .

Если материал стержня неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то необходимо обеспечить выполнение двух условий прочности по наибольшим растягивающим и наибольшим сжимающим напряжениям в точках  $A$  и  $B$ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{нб} = \sigma_A = -\frac{P}{F} \left( 1 + \frac{y_p}{i_z^2} y_A + \frac{z_p}{i_y^2} z_A \right) &\leq \gamma_c R_p ; \\ |\sigma_{нм}| = |\sigma_B| = \left| -\frac{P}{F} \left( 1 + \frac{y_p}{i_z^2} y_B + \frac{z_p}{i_y^2} z_B \right) \right| &\leq \gamma_c R_c , \end{aligned} \right\} \quad (11.15)$$

где  $R_p$  и  $R_c$  – расчетные сопротивления материала при растяжении и сжатии,  $z_A$ ,  $y_A$  и  $z_B$ ,  $y_B$  – координаты наиболее напряженных точек сечения.

Из условий прочности (11.15) можно определить величину предельной расчетной силы, то есть установить грузоподъемность стержня.

Для стержней из материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию ( $R_p = R_c = R$ ), а также в случае однозначной эпюры  $\sigma$  (рис.11.14,б) достаточно обеспечить выполнение одного условия прочности по точке с наибольшими по абсолютной величине напряжениями.

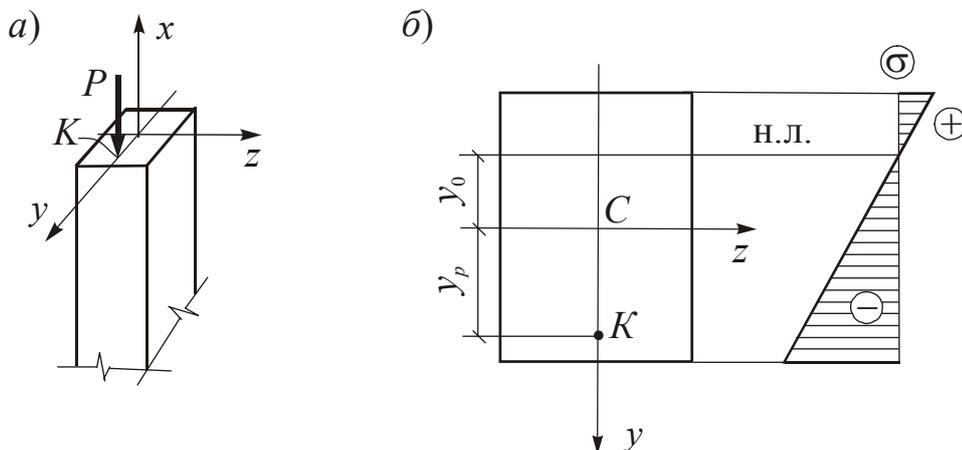


Рис.11.17

В инженерной практике чаще имеет место случай внецентренного сжатия (или растяжения), когда одна из координат точки приложения силы  $P$  равна нулю (рис.11.17,а). При этом согласно формулам (11.14) нулевая линия параллельна оси, соответствующей нулевому значению координаты точки приложения силы (рис.11.17,б). Нормальные напряжения определяются по двухчленной формуле. Например, для случая, показанного на рис.11.17, имеем

$$\sigma = -\frac{P}{F} \left( 1 + \frac{y_p}{i_z^2} y \right).$$

Многие строительные материалы (бетон, кирпичная кладка, чугун и др.) плохо сопротивляются растяжению. Поэтому в элементах конструкций из таких материалов, работающих на внецентренное сжатие, нежелательно появление растягивающих нормальных напряжений. Это условие будет выполнено, если точка приложения силы расположена внутри или на границе некоторой области вокруг центра тяжести, которая называется *ядром сечения*.

Граница или контур ядра строится с помощью нулевых линий, которые являются касательными к сечению. При этом координаты точек контура ядра определяются с помощью формул (11.14):

$$y_p = -\frac{i_z^2}{y_0}, \quad z_p = -\frac{i_y^2}{z_0}. \quad (11.16)$$

Здесь  $y_0$ ,  $z_0$  – координаты точек пересечения нулевых линий, касательных к контуру сечения, с осями координат;  $y_p$ ,  $z_p$  – координаты точек контура ядра, соответствующие положению данной касательной.

Таким образом, если точка приложения силы расположена на контуре ядра, то нулевые линии являются касательными к сечению, а эпюра  $\sigma$  представляет собой треугольник. При приложении силы внутри ядра нулевая линия проходит вне сечения и эпюра  $\sigma$  является однозначной трапецией.

Ядро сечения содержит центр тяжести и является замкнутой и выпуклой областью, поскольку соответствующие границе ядра нулевые линии должны касаться огибающей контура сечения и не пересекать его.

При построении контура ядра его точки надо соединить соответствующими линиями. Если нулевые линии, касательные к сечению, перемещаются при переходе от одного положения к другому путем поворота вокруг угловых точек, то на основании изложенного выше положения линии контура ядра являются прямыми. В противном случае контур ядра является криволинейным.

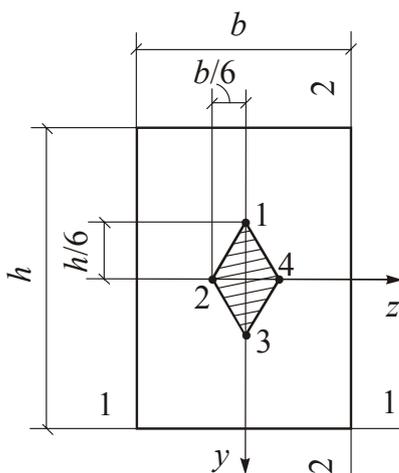


Рис.11.18

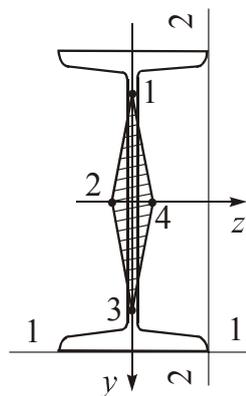


Рис.11.19

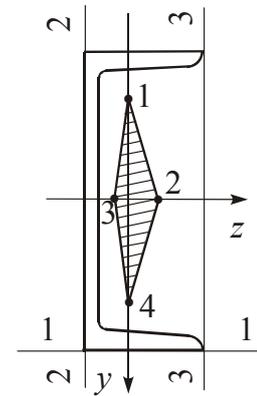


Рис.11.20

Построим ядро сечения для некоторых фигур. Для прямоугольника достаточно провести две нулевые линии, являющиеся касательными к

сечению (рис.11.18). Для касательной 1 – 1 имеем  $y_0 = h/2$  и  $z_0 = \infty$ . Учитывая, что

$$F = bh, \quad J_z = \frac{bh^3}{12}, \quad i_z^2 = \frac{J_z}{F} = \frac{h^2}{12},$$

определяем координаты точки 1 контура ядра сечения

$$y_p = -\frac{i_z^2}{y_0} = -\frac{h}{6}, \quad z_p = -\frac{i_y^2}{z_0} = 0.$$

Аналогично для касательной 2 – 2 находим координаты точки 2:  $z_p = -b/6, y_p = 0$ . Точки 3 и 4 расположены симметрично по отношению к точкам 1 и 2. Ядро сечения представляет собой ромб с длинами диагоналей  $h/3$  и  $b/3$  (рис.11.18).

Ядро сечения для двутавра также представляет собой ромб, значительно вытянутый вдоль оси  $Oy$  (рис.11.19), поскольку  $J_z \gg J_y$ . Ядро сечения для швеллера является четырехугольником, симметричным относительно оси  $Oz$  (рис.11.20).

При построении ядра сечения круга достаточно провести одну касательную 1 – 1 (рис.11.21), для которой  $y_0 = R, z_0 = \infty$ .

Учитывая, что для круга

$$F = \pi R^2, \quad J_z = J_y = \frac{\pi R^4}{4}, \quad i_z^2 = i_y^2 = \frac{R^2}{4},$$

находим координаты точки 1:

$$y_p = -\frac{R^2}{4R} = -\frac{R}{4}, \quad z_p = 0.$$

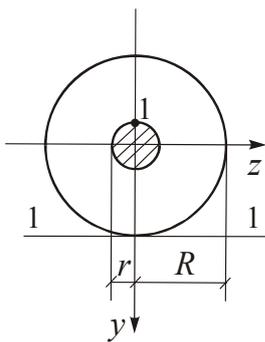


Рис.11.21

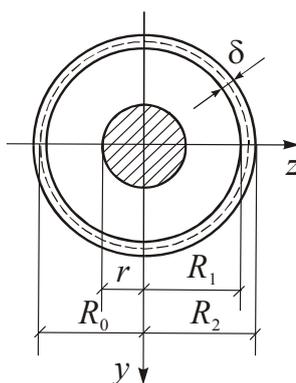


Рис.11.22

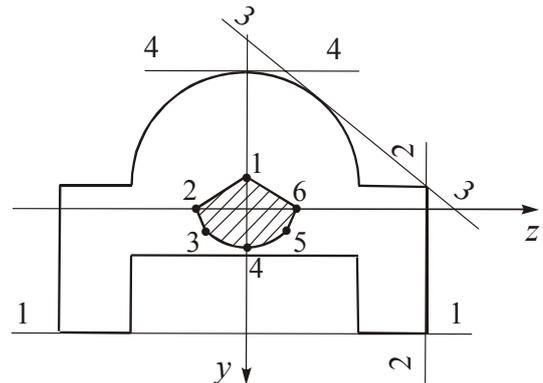


Рис.11.23

Очевидно, что ядро сечения для круга представляет собой также круг с радиусом  $r = R/4$ . Такой же вид имеет ядро для кольцевого сечения (рис.11.22), однако радиус ядра значительно больше, чем для сплошного круга. Нетрудно показать, что при  $\delta \ll R_2$ , радиус ядра сечения приближенно равен  $R_0/2$ , где  $R_0$  – средний радиус кольца.

При построения ядра сечения, показанного на рис.11.23, достаточно провести четыре касательные к сечению и определить координаты четырех точек контура ядра. Точки 1, 2 и 3 надо соединить прямыми линиями. Контур ядра между точками 3, 4 является криволинейным. Точки 5 и 6 симметричны по отношению к точкам 3 и 2.

**Пример 11.5.** Для короткого чугунного стержня коробчатого сечения, испытывающего внецентренное сжатие (рис.11.24,*а*), определим расчётную величину силы  $P$  из условий прочности. Построим эпюру  $\sigma$  и ядро сечения. В расчетах примем  $R_p = 50 \text{ МПа} = 5 \text{ кН/см}^2$ ,  $R_c = 150 \text{ МПа} = 15 \text{ кН/см}^2$  и  $\gamma_c = 1,0$ .

Определяем необходимые геометрические характеристики сечения (рис.11.24,*б*).

$$F = 9 \cdot 12 - 5 \cdot 8 = 68 \text{ см}^2,$$

$$J_z = \frac{9 \cdot 12^3}{12} - \frac{5 \cdot 8^3}{12} = 1083 \text{ см}^4, \quad J_y = \frac{12 \cdot 9^3}{12} - \frac{8 \cdot 5^3}{12} = 645,7 \text{ см}^4;$$

$$i_z^2 = \frac{J_z}{F} = \frac{1083}{68} = 15,9 \text{ см}^2, \quad i_y^2 = \frac{J_y}{F} = \frac{645,7}{68} = 9,5 \text{ см}^2.$$

Координаты точки приложения силы  $P$  равны:  $y_p = 6 \text{ см}$ ,  $z_p = -4,5 \text{ см}$ . Определяем по формулам (11.14) величины отрезков, отсекаемых нулевой линией на осях координат.

$$y_0 = -\frac{i_z^2}{y_p} = -\frac{15,9}{6} = -2,65 \text{ см}, \quad z_0 = -\frac{i_y^2}{z_p} = -\frac{9,5}{-4,5} = 2,11 \text{ см}.$$

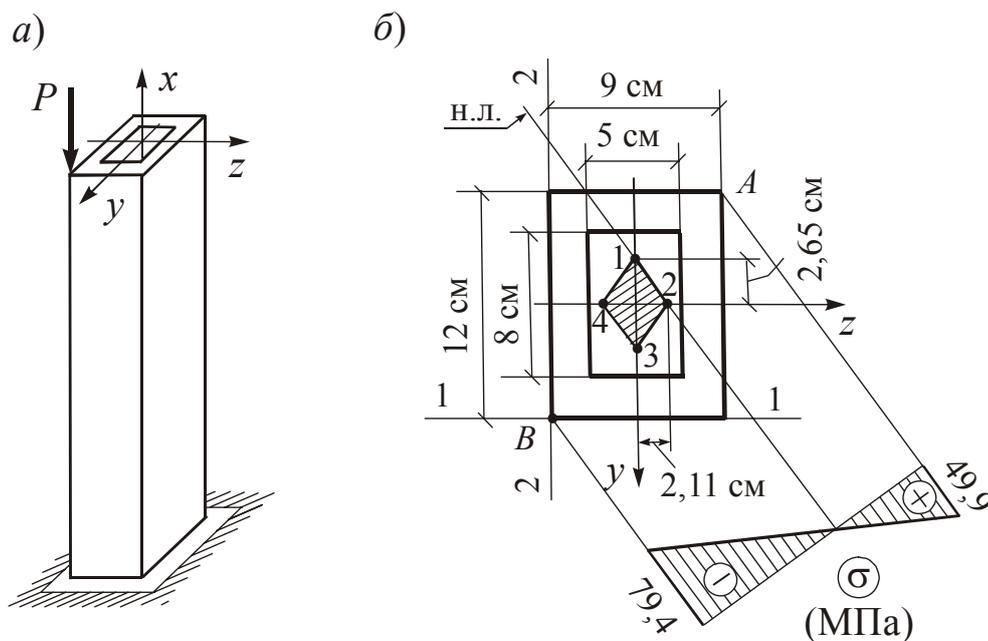


Рис.11.24

Отложив эти отрезки на осях, проводим нулевую линию, которая пересекает сечение и делит его на зоны растяжения и сжатия. Эпюра  $\sigma$

является разнозначной (рис.11.24,б). Наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения действуют в угловых точках  $A$  и  $B$ , наиболее удаленных от нулевой линии. Координаты этих точек равны:  $y_A = -6$  см,  $z_A = 4,5$  см,  $y_B = 6$  см,  $z_B = -4,5$  см.

Из условий прочности при растяжении и сжатии находим два значения расчетной силы  $P$ .

$$\sigma_A = -\frac{P}{F} \left( 1 + \frac{y_p}{i_z^2} y_A + \frac{z_p}{i_y^2} z_A \right) \leq \gamma_c R_p ;$$

$$P \leq \frac{68 \cdot 5 \cdot 1,0}{-\left( 1 + \frac{6}{15,9} (-6) + \frac{(-4,5)}{9,5} \cdot 4,5 \right)} = \frac{340}{3,396} = 100,1 \text{ кН} .$$

$$|\sigma_B| = \left| -\frac{P}{F} \left( 1 + \frac{y_p}{i_z^2} y_B + \frac{z_p}{i_y^2} z_B \right) \right| \leq \gamma_c R_c ;$$

$$P \leq \frac{68 \cdot 15 \cdot 1,0}{1 + \frac{6}{15,9} \cdot 6 + \frac{(-4,5)}{9,5} (-4,5)} = \frac{1020}{5,396} = 189 \text{ кН} .$$

Для обеспечения прочности стержня в зонах растяжения и сжатия принимаем с округлением меньшую силу  $P = 100$  кН. При этом напряжения в точках  $A$  и  $B$  равны

$$\sigma_A = -\frac{100}{68} (-3,396) = 4,99 \text{ кН/см}^2 = 49,9 \text{ МПа} < \gamma_c R_p = 50 \text{ МПа} ;$$

$$|\sigma_B| = \frac{100}{68} \cdot 5,396 = 7,94 \text{ кН/см}^2 = 79,4 \text{ МПа} < \gamma_c R_c = 150 \text{ МПа} .$$

Прочность стержня обеспечена. Эпюра  $\sigma$  приведена на рис.11.24,б.

Для построения ядра сечения достаточно провести две нулевые линии, касательные к контуру сечения, и определить координаты двух точек контура ядра.

Касательная 1 – 1:

$$y_0 = 6 \text{ см} , \quad z_0 = \infty , \quad y_p = -\frac{i_z^2}{y_0} = -\frac{15,9}{6} = -2,65 \text{ см} , \quad z_p = 0 .$$

Касательная 2 – 2:

$$y_0 = \infty , \quad z_0 = -4,5 \text{ см} , \quad y_p = 0 , \quad z_p = -\frac{i_y^2}{z_0} = -\frac{9,5}{(-4,5)} = 2,11 \text{ см} .$$

Проведенные касательные соответствуют точкам 1 и 2 контура ядра сечения. Симметрично расположены точки 3 и 4. Поскольку касательные переходят из одного положения в другое путем поворота вокруг угловых точек сечения, все линии контура ядра являются прямыми. Ядро сечения представляет собой ромб (рис.11.24,б). Так как точка приложения силы

принадлежит одновременно касательным 1 – 1 и 2 – 2, нулевая линия проходит по линии контура ядра 1 – 2.

**Пример 11.6.** Для короткого стального стержня составного сечения, находящегося в условиях внецентренного сжатия (рис.11.25,а), определим величину расчётной силы  $P$  из условия прочности. В расчетах примем  $R = 210 \text{ МПа} = 21 \text{ кН/см}^2$  и  $\gamma_c = 0,9$ . Построим эпюру  $\sigma$  и ядро сечения.

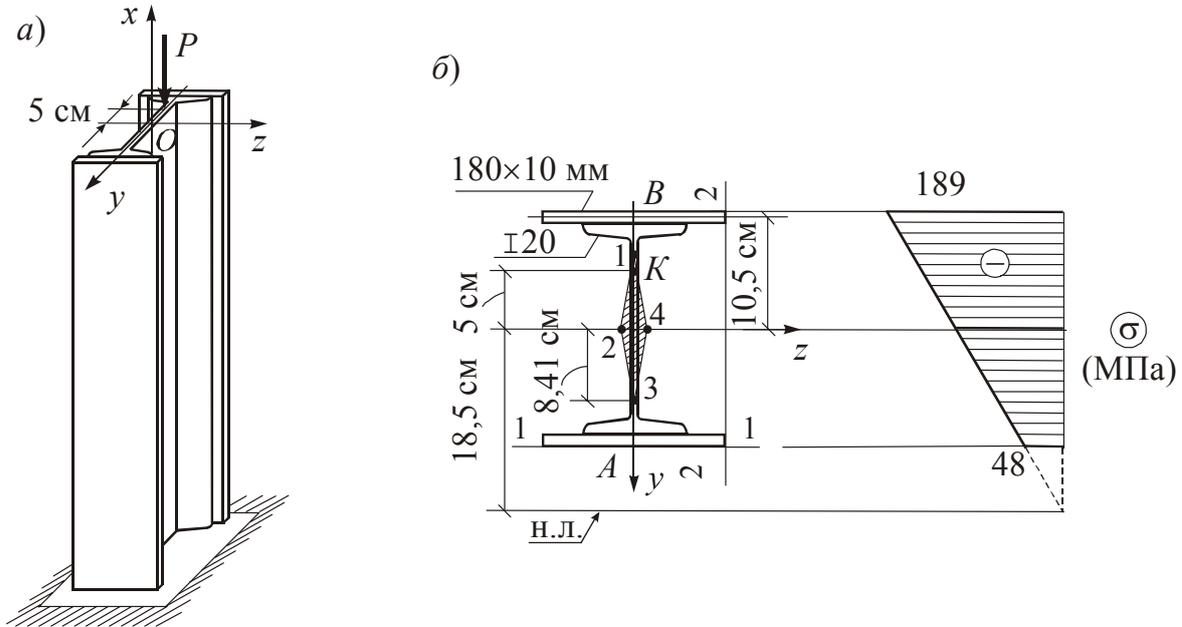


Рис.11.25

Поскольку  $z_p = 0$ , данная задача относится к частному случаю внецентренного сжатия. Определяем необходимые геометрические характеристики сечения.

$$F = 2 \cdot 18 \cdot 1 + 26,8 = 62,8 \text{ см}^2,$$

$$J_z = 1840 + 2 \left( \frac{18 \cdot 1^3}{12} + 10,5^2 \cdot 18 \right) = 5812 \text{ см}^4;$$

$$i_z^2 = \frac{J_z}{F} = \frac{5812}{62,8} = 92,5 \text{ см}^2;$$

$$J_y = 2 \cdot \frac{1 \cdot 18^3}{12} + 115 = 1087 \text{ см}^4, \quad i_y^2 = \frac{J_y}{F} = \frac{1087}{62,8} = 17,3 \text{ см}^2.$$

Определяем положение нулевой линии.

$$y_0 = -\frac{i_z^2}{y_p} = -\frac{92,5}{-5} = 18,5 \text{ см}, \quad z_0 = \infty.$$

Нулевая линия параллельна оси  $Oz$  и не пересекает сечение. Эпюра  $\sigma$  является однозначной (рис.11.25,б). Наибольшие сжимающие напряжения

действуют в крайних верхних точках сечения ( $y = y_B = -11$  см). Из условия прочности определяем расчетное значение силы  $P$ .

$$|\sigma_B| = \left| -\frac{P}{F} \left( 1 + \frac{y_p}{i_z^2} y_B \right) \right| \leq \gamma_c R;$$

$$P \leq \frac{62,8 \cdot 21 \cdot 0,9}{1 + \frac{-5}{92,5} \cdot (-11)} = 744 \text{ кН}.$$

При действии силы  $P = 744$  кН наибольшие сжимающие напряжения в крайних верхних точках сечения по абсолютной величине равны  $\gamma_c R = 189$  МПа. Определяем напряжения в крайних нижних точках сечения ( $y = y_A = 11$  см).

$$\sigma_A = -\frac{744}{62,8} \left( 1 + \frac{-5}{92,5} \cdot 11 \right) = -4,8 \text{ кН/см}^2 = -48 \text{ МПа}.$$

Напряжения в поперечных сечениях стержня являются сжимающими. Эпюра  $\sigma$  приведена на рис.11.25,б.

Ядро сечения представляет собой ромб, координаты вершин которого определяем с помощью двух касательных к сечению.

Касательная 1 – 1:

$$y_0 = 11 \text{ см}, \quad z_0 = \infty, \quad y_p = -\frac{i_z^2}{y_0} = -\frac{92,5}{11} = -8,41 \text{ см}, \quad z_p = 0.$$

Касательная 2 – 2:

$$y_0 = \infty, \quad z_0 = 9 \text{ см}, \quad y_p = 0, \quad z_p = -\frac{i_y^2}{z_0} = -\frac{17,3}{9} = -1,92 \text{ см}.$$

Точка приложения силы расположена внутри ядра сечения (рис.11.25,б).

## § 11.4. Растяжение и сжатие с изгибом

В инженерной практике часто имеют место случаи одновременного действия на стержень поперечных и продольных нагрузок, причем последние могут быть приложены внецентренно. Такой случай показан на рис.11.26. При этом внутренние усилия в заделке равны

$$N = -P, \quad M_z = -P \frac{h}{2}, \quad M_y = \frac{ql^2}{2} + P \frac{b}{2};$$

$$Q_y = 0, \quad Q_z = -ql, \quad M_x = M_k = 0.$$

В общем случае растяжения или сжатия с изгибом внутренние усилия определяются раздельно от действия всех составляющих нагрузок.

Нормальные напряжения в поперечных сечениях определяются по общей формуле

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z .$$

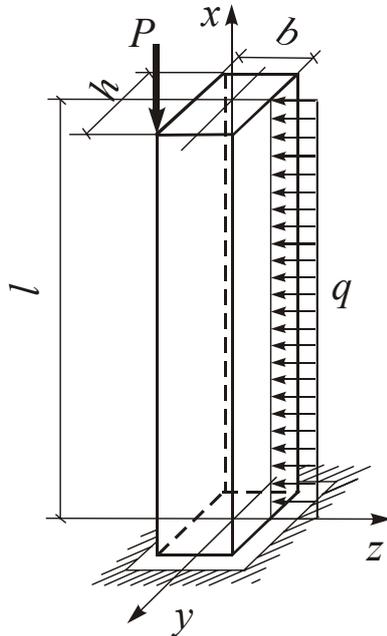


Рис.11.26

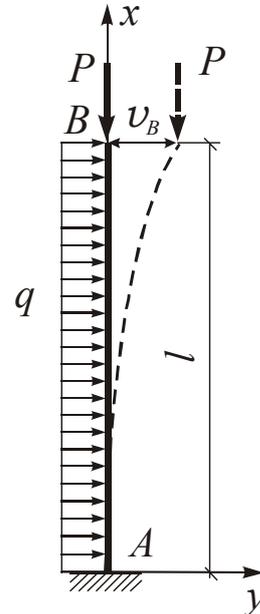


Рис.11.27

Приравняв это выражение к нулю, получим уравнение нулевой линии

$$\frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z = 0 .$$

Положив в этом уравнении последовательно  $y = 0$  и  $z = 0$ , получим формулы для определения отрезков, отсекаемых нулевой линией на осях координат:

$$y = y_0 = -\frac{N}{M_z} \cdot \frac{J_z}{F}, \quad z = z_0 = -\frac{N}{M_y} \cdot \frac{J_y}{F} . \quad (11.17)$$

Как и во всех рассмотренных выше случаях сложного сопротивления, наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения действуют в точках сечения, наиболее удаленных от нулевой линии. Для сечений типа прямоугольника и двутавра это противоположные угловые точки сечения. Значения наибольших и наименьших напряжений в угловых точках можно определить по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{нб}} &= \frac{N}{F} + \left( \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \right); \\ \sigma_{\text{нм}} &= \frac{N}{F} - \left( \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \right). \end{aligned} \quad (11.18)$$

Напомним, что во всех предыдущих решениях использовался принцип независимости действия сил, позволяющий определять внутренние усилия для недеформированного состояния стержня. Строго говоря, это возможно только при малых деформациях. В противном случае принцип независимости действия сил использовать нельзя.

Рассмотрим, например, консольный стержень в условиях сжатия с изгибом (рис.11.27). Если стержень обладает значительной гибкостью и прогибы от поперечной нагрузки достаточно велики, то сила  $P$  вызывает дополнительный изгиб, а изгибающий момент в заделке от ее действия равен  $M_1 = P \nu_B$ . Для негибких стержней этот момент незначителен и его можно не учитывать. Для гибких стержней необходимо проводить расчет по так называемой деформированной схеме с учетом влияния продольных сил на изгиб. Подобные задачи будут рассмотрены в главе 13.

**Пример 11.7.** Для короткого консольного деревянного стержня круглого сечения, находящегося в условиях центрального сжатия и изгиба в плоскости  $Oxz$  (рис.11.28), построим эпюру  $\sigma$  в опасном сечении.

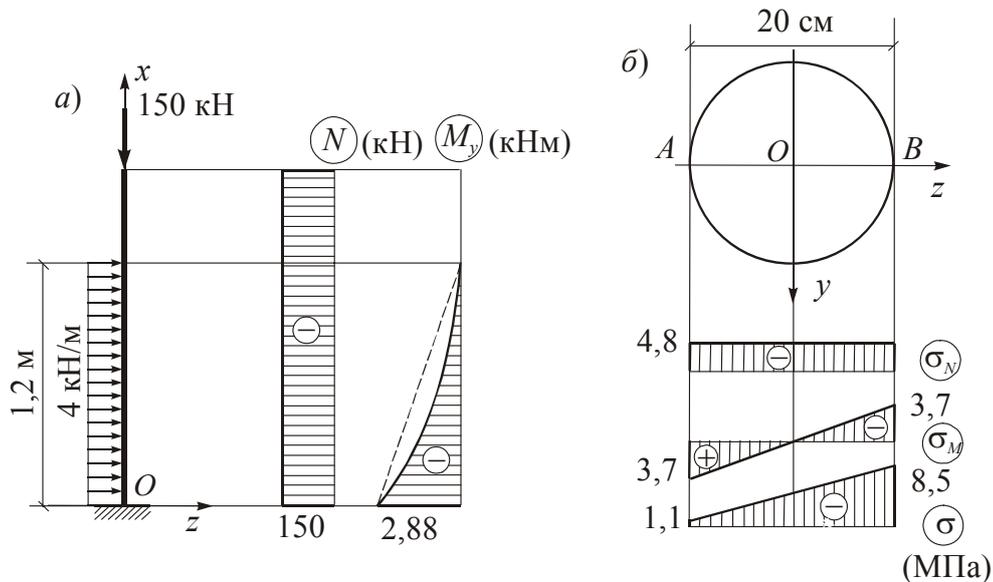


Рис.11.28

Определяем геометрические характеристики сечения.

$$F = \pi \cdot 10^2 = 314,2 \text{ см}^2, \quad W_z = W_y = \frac{\pi \cdot 10^3}{4} = 785,4 \text{ см}^3.$$

Строим эпюры внутренних усилий  $N$  и  $M_y$  (рис.11.28,а). Изгибающий момент  $M_y$  вызывает растяжение волокон левой половины стержня и имеет наибольшее значение в заделке:  $M_y = -4 \cdot 1,2 \cdot 0,6 = -2,88 \text{ кНм}$ . Изгибающий момент  $M_z$  равен нулю. Определяем значения наибольших нормальных напряжений в точках  $A$  и  $B$  в сечении вблизи заделки:

$$\begin{aligned} \sigma_A &= -\frac{N}{F} + \frac{M_y}{W_y} = -\frac{150}{314,2} + \frac{2,88 \cdot 10^2}{785,4} = \\ &= -0,48 + 0,37 = -0,11 \text{ кН/см}^2 = -1,1 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\sigma_B = -\frac{N}{F} - \frac{M_y}{W_y} = -0,48 - 0,37 = -0,85 \text{ кН/см}^2 = -8,5 \text{ МПа} .$$

Напряжения во всех точках сечения стержня являются сжимающими. Эпюры  $\sigma$  в опасном сечении от действия  $N$  и  $M_y$  и суммарная эпюра  $\sigma$  приведены на рис.11.28,б.

**Пример 11.8.** Для стального стержня, состоящего из двух неравнобоких уголков  $\text{L160}\times\text{100}\times\text{10}$ , находящегося в условиях центрального растяжения и изгиба в плоскости  $Oxy$  (рис.11.29,а), определим расчётное значение силы  $P$  из условия прочности и построим эпюру  $\sigma$  в опасном сечении. Совместная работа уголков обеспечена соединениями, показанными пунктиром. В расчетах примем  $R = 210 \text{ МПа} = 21 \text{ кН/см}^2$ ,  $\gamma_c = 0,9$ .

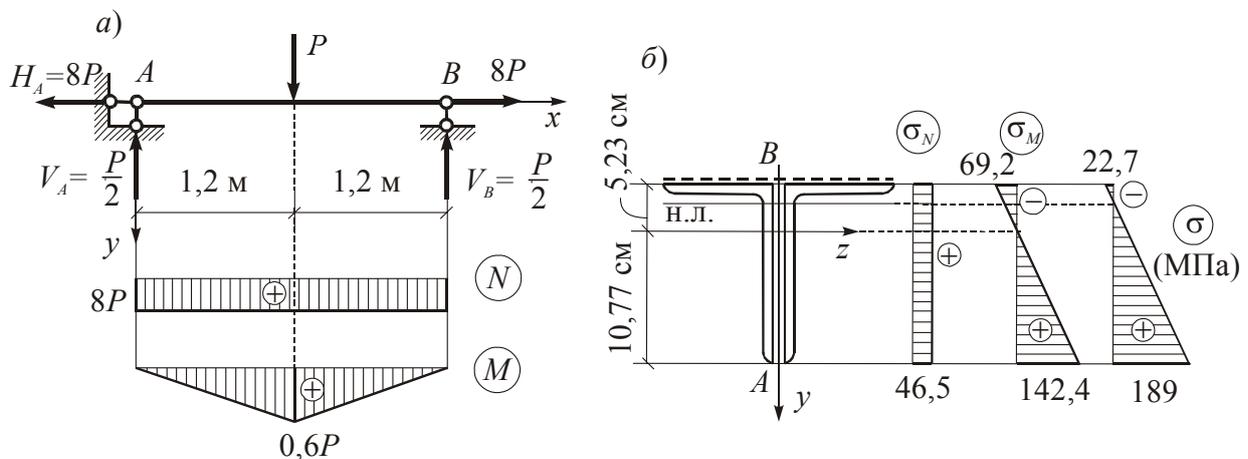


Рис.11.29

Определяем геометрические характеристики сечения.

$$F = 2 \cdot 25,3 = 50,6 \text{ см}^2, \quad J_z = 2 \cdot 667 = 1334 \text{ см}^4;$$

$$W_{zn} = \frac{J_z}{h_n} = \frac{1334}{10,77} = 124 \text{ см}^3, \quad W_{zb} = \frac{J_z}{h_b} = \frac{1334}{5,23} = 255 \text{ см}^3.$$

Строим эпюры  $N$  и  $M_z$  (рис.11.29,а). Опасным является сечение в середине стержня, где  $M_z$  имеет наибольшее значение. В нижних волокнах стержня нормальные напряжения от действия  $N$  и  $M_z$  имеют одинаковый знак и являются растягивающими. Из условия прочности по наибольшим растягивающим напряжениям в точке  $A$

$$\sigma_{\text{ноб}} = \sigma_A = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{W_{zn}} = \frac{8P}{50,6} + \frac{0,6 \cdot 10^2 \cdot P}{124} \leq \gamma_c R = 18,9 \text{ кН/см}^2$$

находим  $P \leq 29,4 \text{ кН}$ . При действии силы  $P = 29,4 \text{ кН}$  напряжения в точках  $A$  и  $B$  равны

$$\sigma_A = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{W_{zn}} = \frac{8 \cdot 29,4}{50,6} + \frac{0,6 \cdot 10^2 \cdot 29,4}{124} =$$

$$= 4,65 + 14,24 = 18,9 \text{ кН/см}^2 = 189 \text{ МПа} ;$$

$$\sigma_B = \frac{N}{F} - \frac{M_z}{W_{zB}} = \frac{8 \cdot 29,4}{50,6} - \frac{0,6 \cdot 10^2 \cdot 29,4}{255} =$$

$$= 4,65 - 6,92 = -2,27 \text{ кН/см}^2 = -22,7 \text{ МПа} .$$

Эпюры  $\sigma$  в опасном сечении от действия  $N$  и  $M_z$  и суммарная эпюра  $\sigma$  приведены на рис.11.29,б.

**Пример 11.9.** Для стального консольного стержня составного сечения, находящегося в условиях внецентренного растяжения и изгиба (рис.11.30,а), проверим прочность и построим эпюру  $\sigma$  в опасном сечении. В расчётах примем  $R = 210 \text{ МПа}$ ,  $\gamma_c = 0,9$ .

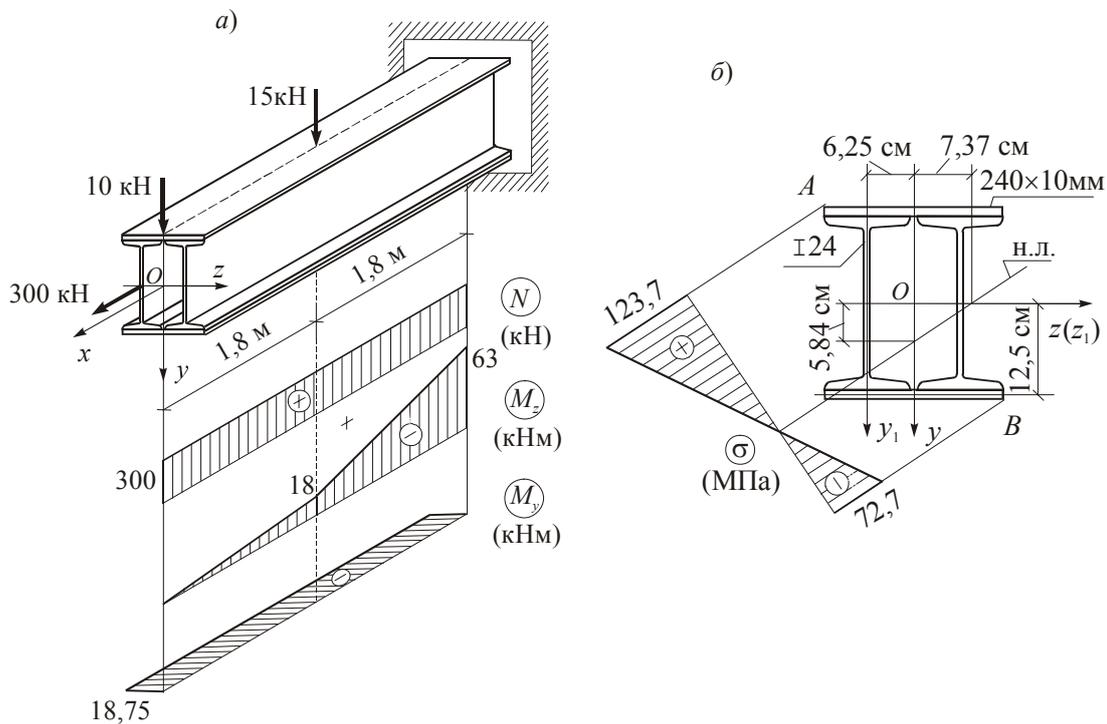


Рис.11.30

Построим эпюры  $N$ ,  $M_z$ ,  $M_y$ . Изгибающий момент  $M_z$  вызывает растяжение верхних волокон стержня и в заделке равен  $M_z = -10 \cdot 3,6 - 15 \cdot 1,8 = -63 \text{ кНм}$ , а момент  $M_y$  вызывает растяжение волокон левой части сечения (при взгляде от положительного направления оси  $Ox$ ) и имеет постоянное значение  $M_y = -300 \cdot 0,0625 = -18,75 \text{ кНм}$ . Продольная сила является растягивающей и также имеет постоянное значение  $N = 300 \text{ кН}$ . Наибольшие нормальные напряжения действуют в сечении вблизи заделки (опасное сечение).

Определяем геометрические характеристики сечения. Учитывая, что для двутавра I24  $F_1 = 34,8 \text{ см}^2$ ,  $J_{z_1} = 3460 \text{ см}^4$ ,  $J_{y_1} = 198 \text{ см}^4$ ,  $b = 11,5 \text{ см}$ ,  $h = 24 \text{ см}$ , находим

$$F = 2 \cdot 34,8 + 2 \cdot 24 \cdot 1 = 117,6 \text{ см}^2 ;$$

$$J_z = 2 \cdot 3460 + 2 \left( \frac{24 \cdot 1^3}{12} + 12,5^2 \cdot 24 \right) = 14424 \text{ см}^4;$$

$$J_y = 2 \cdot \frac{1 \cdot 24^3}{12} + 2(198 + 6,25^2 \cdot 34,8) = 5419 \text{ см}^4;$$

$$W_z = \frac{14424}{13} = 1110 \text{ см}^3, \quad W_y = \frac{5419}{12} = 452 \text{ см}^3.$$

Наибольшие напряжения действуют в противоположных угловых точках опасного сечения. Определяем по формулам (11.17) отрезки, отсекаемые нулевой линией на осях координат. Учитывая, что в первой четверти сечения моменты  $M_z$  и  $M_y$  вызывают сжатие и имеют отрицательный знак, находим

$$y_0 = -\frac{N J_z}{M_z F} = -\frac{300 \cdot 14424}{-63 \cdot 10^2 \cdot 117,6} = 5,84 \text{ см};$$

$$z_0 = -\frac{N J_y}{M_y F} = -\frac{300 \cdot 5419}{-18,75 \cdot 10^2 \cdot 117,6} = 7,37 \text{ см}.$$

Отложив  $y_0$  и  $z_0$  на осях координат, проводим нулевую линию. На прямой, перпендикулярной нулевой линии, строим эпюру  $\sigma$  (рис.11.30,б), которая является разнозначной. Наибольшие растягивающие напряжения возникают в точке  $A$ . Напряжения в точках  $A$  и  $B$  равны:

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \frac{N}{F} - \left( \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \right) = \frac{300}{117,6} - \left( \frac{63 \cdot 10^2}{1110} + \frac{18,75 \cdot 10^2}{452} \right) = \\ &= 2,55 + 9,82 = 12,37 \text{ кН/см}^2 = 123,7 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\sigma_B = \frac{N}{F} + \left( \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \right) = 2,55 - 9,82 = -7,27 \text{ кН/см}^2 = -72,7 \text{ МПа}.$$

Поскольку  $\sigma_A = 123,7 \text{ МПа} < \gamma_c R = 189 \text{ МПа}$ , прочность стержня обеспечена. Эпюра  $\sigma$  в опасном сечении приведена на рис.11.30,б.