

§ 11.5. Изгиб с кручением

Изгиб с кручением является характерным случаем сложного сопротивления стержней машиностроительных конструкций, например, коленчатых валов, осей, кривошипов и т.п. Если стержень подвергается одновременному действию изгиба и кручения, то в его поперечных сечениях в общем случае возникают пять внутренних усилий – два изгибающих момента M_z и

M_y , две поперечные силы Q_y и Q_z и крутящий момент $M_x = M_k$. Они являются равнодействующими нормальных и касательных напряжений, причем те и другие могут быть достаточно велики и опасны для прочности стержня.

Нормальные напряжения, вызываемые изгибом стержня, определяются по формуле

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z.$$

Наибольшие растягивающие и сжимающие нормальные напряжения действуют в точках контура сечения, наиболее удаленных от нулевой линии. Изгибающие моменты M_z и M_y могут иметь различные законы изменения по длине стержня.

Для стержней круглого и кольцевого сечений можно вычислить в различных точках по длине стержня суммарный изгибающий момент $M_{\text{и}} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$ и построить его эпюру, которая в общем случае является нелинейной и пространственной. Наибольшие нормальные напряжения при этом равны

$$\sigma_{\text{нб}} = |\sigma_{\text{нм}}| = \frac{M_{\text{и}}}{W_{\text{и}}}, \quad (11.19)$$

где $W_{\text{и}}$ – момент сопротивления сечения. Для круглого сплошного сечения с радиусом R он определяется по формуле

$$W_{\text{и}} = W_z = W_y = \frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi D^3}{32}. \quad (11.20)$$

Для кольцевого сечения имеем

$$J_z = J_y = \frac{\pi}{4}(R_2^4 - R_1^4), \quad W_{\text{и}} = \frac{J_z}{R_2} = \frac{\pi(R_2^4 - R_1^4)}{4R_2}, \quad (11.21)$$

где R_1 и R_2 – внутренний и внешний радиусы.

Вызываемые изгибом касательные напряжения в поперечных сечениях определяются по формуле Д.И.Журавского (7.25), часть 2. В задачах изгиба с кручением стержней сплошного сечения эти напряжения часто не учитываются, поскольку они мало влияют на оценку прочности стержня.

Исключение составляют тонкостенные стержни, например, тонкостенные трубы с малой толщиной стенки δ ($\delta/R_2 \ll 1$).

Касательные напряжения, вызываемые кручением стержня, зависят от величины крутящего момента, а характер их изменения в поперечном сечении определяется его формой. Эти напряжения также имеют наибольшие значения в точках контура поперечного сечения.

Характер эпюры касательных напряжений для стержней круглого сплошного и кольцевого сечений показан на рис.11.31,а,б. Наибольшие значения касательных напряжений определяются по формулам, приведенным в главе 6 (часть 2 настоящего пособия).

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{к}}}{W_p}, \quad (11.22)$$

где W_p – полярный момент сопротивления сечения. Для круглого сплошного сечения он определяется по формуле

$$W_p = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16}, \quad (11.23)$$

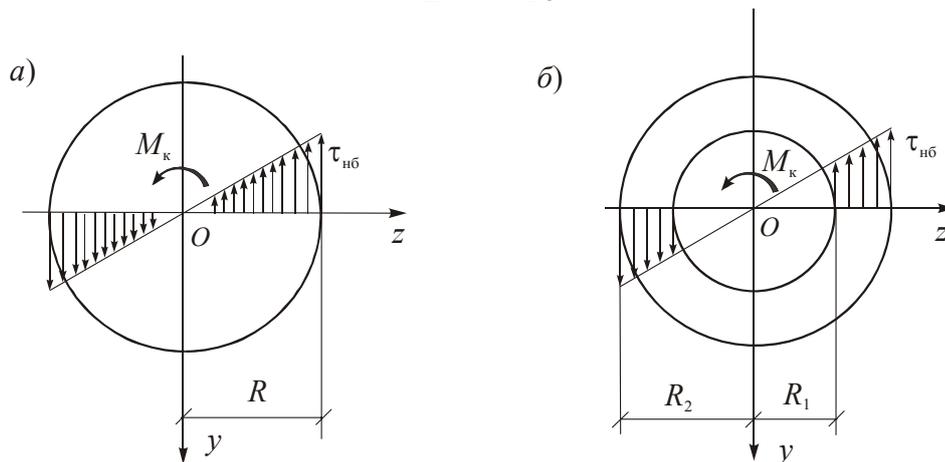


Рис.11.31

а для кольцевого сечения имеем

$$J_p = \frac{\pi}{2}(R_2^4 - R_1^4); \quad W_p = \frac{J_p}{R_2} = \frac{\pi(R_2^4 - R_1^4)}{2R_2}. \quad (11.24)$$

Опасным в смысле прочности являются точки стержня, где изгибающие моменты M_z , M_y и крутящий момент $M_{\text{к}}$ имеют наибольшие значения или достаточно велики. В общем случае таких сечений может быть несколько.

В опасном сечении вычисляются наибольшие значения нормальных и касательных напряжений. Для оценки прочности необходимо использовать соответствующую теорию прочности. Эти вопросы рассмотрены в следующем параграфе.

§ 11.6. Теории прочности

Одной из основных задач сопротивления материалов является оценка прочности конструкций и их элементов. Для решения этой задачи необходимо знать напряженное состояние в каждой точке тела, которое, как было показано в главе 4(часть 1), характеризуется тремя главными напряжениями σ_1 , σ_2 , σ_3 , действующими на трех главных площадках (рис.11.32) в окрестности точки. Напомним, что главными называются площадки, на которых касательные напряжения равны нулю, а нормальные напряжения имеют экстремальные значения. Обычно принимается, что $\sigma_1 = \sigma_{max}$, $\sigma_3 = \sigma_{min}$, $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$.

Наиболее просто вопрос о прочности решается при одноосном напряженном состоянии, когда два главных напряжения равны нулю. Производя

экспериментальные исследования образцов на растяжение или сжатие, можно определить опасные (предельные) напряжения σ_0^p и σ_0^c . Напомним, что для пластичных материалов в качестве опасного напряжения принимается предел текучести σ_T , а для хрупких материалов – временное сопротивление (предел прочности) σ_B . При этом опасное напряженное состояние наступает при выполнении условий

$$\sigma = \sigma_0^p, \quad |\sigma| = \sigma_0^c. \quad (11.25)$$

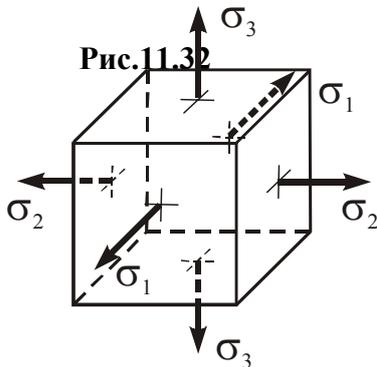


Рис.11.32

Первая из этих формул соответствует одноосному растяжению ($\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$), а вторая – одноосному сжатию ($\sigma_3 = -\sigma$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$).

Значительно более сложной является оценка прочности в случаях, когда два или все три главных напряжения отличны от нуля. Поскольку соотношений между главными напряжениями может быть бесчисленное множество, не представляется возможным проведе-

ние соответствующих экспериментов, а многие опыты технически неосуществимы. В этих случаях условия прочности формулируются на основании различных теоретических предположений о причинах наступления опасного (предельного) состояния. Для этого используются теории или критерии прочности.

Суть любой теории прочности заключается в построении равенства

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_0, \quad (11.26)$$

соответствующего наступлению опасного состояния. В (11.26) функция $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ представляет собой некоторую комбинацию главных напряжений, а опасное напряжение σ_0 определяется из опытов на одноосное растяжение или сжатие. В различных теориях прочности вид функции $F(\sigma_1,$

σ_2 , σ_3) устанавливается на основе тех или иных гипотез о причинах разрушения. Отметим, что определение истинной причины наступления опасного состояния при трехосном напряженном состоянии является достаточно трудной и во многих случаях не разрешенной до конца задачей. Этим объясняется существование нескольких теорий прочности, каждая из которых применима к определенным материалам при определенных условиях их работы.

Для экспериментальной проверки теорий прочности можно произвести весьма ограниченное число опытов, в которых имеется возможность изменять соотношения между главными напряжениями. Например, для пластичных материалов одним из распространенных опытов является испытание тонких цилиндрических трубок при одновременном действии внутреннего давления, растяжения и кручения. Проверка теорий прочности для хрупких материалов, таких как бетон, кирпич, камень, осуществляется при испытании образцов в виде кубиков стандартного размера.

При проведении практических расчетов на прочность выражение (11.26) записывается в виде неравенства, в правой части которого в соответствии с методом расчета подставляются либо допускаемое напряжение $[\sigma]$, либо произведение $\gamma_c R$, где R – расчетное сопротивление материала и γ_c – коэффициент условий работы.

Рассмотрим наиболее известные теории прочности.

• **Первая теория прочности** (теория наибольших нормальных напряжений). В основу данной теории положена гипотеза о том, что разрушение или переход в пластическое состояние происходят при достижении наибольшим по абсолютной величине главным напряжением опасного значения σ_0 . Если материал имеет различные значения опасных напряжений при растяжении и сжатии, то опасное состояние наступит при выполнении условий

$$\sigma_1 = \sigma_0^p, \quad |\sigma_3| = \sigma_0^c. \quad (11.27)$$

Условия прочности по методу предельных состояний имеют вид

$$\sigma_1 \leq \gamma_c R_p, \quad |\sigma_3| \leq \gamma_c R_c, \quad (11.28)$$

где R_p и R_c – расчетные сопротивления материала на растяжение и сжатие.

Очевидным недостатком первой теории прочности является то, что в этой теории учитывается влияние на прочность лишь одного из трех главных напряжений. Эта теория подтверждается экспериментально только для хрупких материалов и при условии, что одно из главных напряжений значительно превосходит по абсолютной величине два других главных напряжения.

• **Вторая теория прочности** (теория наибольших линейных деформаций). Данная теория основана на предположении, что опасное состояние наступает, когда наибольшая относительная деформация растяжения или сжатия достигает предельных значений ε_0^p или ε_0^c ,

определяемых из опытов на одноосное растяжение или сжатие. Этой гипотезе соответствуют условия наступления опасного состояния

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0^p, \quad |\varepsilon_3| = \varepsilon_0^c, \quad (11.29)$$

где ε_1 и ε_3 – главные деформации, причем принимается, что $\varepsilon_1 = \varepsilon_{max}$ и $\varepsilon_3 = \varepsilon_{min}$.

Если считать, что материал подчиняется закону Гука, то в обеих частях равенств (11.29) можно от деформаций перейти к напряжениям. При этом условия прочности по методу предельных состояний примут следующий вид

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \gamma_c R_p, \quad |\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)| \leq \gamma_c R_c. \quad (11.30)$$

Отметим, что в данной теории учитывается влияние на прочность всех трех главных напряжений. Эта теория прочности подтверждается экспериментально при трехосном напряженном состоянии только для хрупких материалов, когда все три главных напряжения являются сжимающими.

• **Третья теория прочности** (теория наибольших касательных напряжений). Согласно этой теории предполагается, что причиной наступления опасного напряженного состояния является достижение наибольшими касательными напряжениями опасного значения

$$\tau_{нб} = \tau_0. \quad (11.31)$$

Опасное напряжение τ_0 , определяемое из опытов на одноосное растяжение или сжатие, равно $\sigma_0/2$. При трехосном напряженном состоянии, как было показано в главе 4, наибольшие касательные напряжения действуют на площадках, наклонённых под углами 45° к главным площадкам, и равны

$$\tau_{нб} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (11.32)$$

При этом условие наступления опасного состояния принимает следующий вид

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_0. \quad (11.33)$$

Условие прочности по методу предельных состояний записывается в виде

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \gamma_c R. \quad (11.34)$$

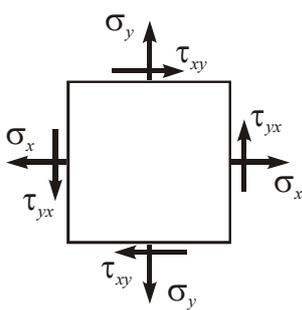
Теория наибольших касательных напряжений находит экспериментальное подтверждение для пластичных материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию. Это относится, например, к двухосному напряженному состоянию для случаев, когда $\sigma_1 \geq \sigma_2 > 0$, $\sigma_3 = 0$ и $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 < 0$.

Данная теория подтверждается также для случая всестороннего равномерного сжатия (гидростатическое давление) при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma$. В этом случае левая часть равенства (11.33) обращается в нуль и, следовательно, оно удовлетворяется при любых значениях одинаковых по

величине и знаку главных напряжений. Это вполне согласуется с опытами на всестороннее равномерное сжатие, при котором материал способен выдержать действие очень больших нагрузок.

Недостатком теории наибольших касательных напряжений является то, что в ней не учитывается влияние на прочность промежуточного главного напряжения σ_2 .

Данная теория достаточно широко используется при расчетах на прочность элементов конструкций из пластичных материалов. Используем эту теорию для оценки прочности при двухосном напряженном состоянии (рис.11.33). Главные напряжения в рассматриваемой плоскости можно определить по формуле (4.8), часть 2:



$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} . \quad (11.35)$$

Третье главное напряжение равно нулю. Его надо подставить в условие прочности (11.34), если оба главных напряжения, вычисленных по формуле (11.35), являются положительными или отрицательными.

Рис.11.33

В инженерной практике часто встречается частный случай двухосного напряженного состояния, при котором $\sigma_y = 0$. Такое напряженное состояние имеет место, например, в стержнях при прямом изгибе в плоскости Oxy (§ 7.6, часть 2).

В этом случае главные напряжения в рассматриваемой плоскости являются разнозначными, а равное нулю третье главное напряжение занимает промежуточное положение. Приняв $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = 0$ и $\tau_{xy} = \tau$, приведем условие прочности (11.34) с помощью формулы (11.35) к следующему виду

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \gamma_c R . \quad (11.36)$$

• **Энергетическая теория прочности.** В основу данной теории прочности положена гипотеза о том, что опасное напряженное состояние наступает, когда удельная потенциальная энергия формоизменения U^Φ (см. § 4.6, часть 2) при работе материала в упругой стадии достигает предельного значения U_0^Φ , соответствующего одноосному напряженному состоянию. Таким образом, условие наступления опасного состояния записывается в виде:

$$U^\Phi = U_0^\Phi . \quad (11.37)$$

Удельная потенциальная энергия формоизменения для трехосного напряженного состояния определяется по формуле (4.42), часть 2

$$U^{\phi} = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (11.38)$$

Для одноосного напряженного состояния при $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ имеем

$$U_o^{\phi} = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_1. \quad (11.39)$$

Подставив в правую часть формулы (11.39) вместо σ_1 опасное напряжение σ_o , представим условие наступления опасного состояния в следующем виде

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_o. \quad (11.40)$$

Условие прочности по методу предельных состояний имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq \gamma_c R. \quad (11.41)$$

Для частного случая двухосного напряженного состояния ($\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = \tau$, $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$) условие (11.41) можно с помощью формулы (11.35) привести к следующему виду:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \gamma_c R. \quad (11.42)$$

Энергетическая теория, также как и теория наибольших касательных напряжений, хорошо подтверждается экспериментально для пластичных материалов. Она широко используется в расчетах на прочность элементов металлических конструкций, что нашло отражение в соответствующих разделах СНиП.

• **Теория прочности Мора.** Данная теория используется при расчетах на прочность элементов конструкций из материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию. Условие наступления опасного состояния записывается в следующем виде

$$\sigma_1 - k\sigma_3 = \sigma_o^p, \quad (11.43)$$

где $k = \sigma_o^p / \sigma_o^c$ – коэффициент, учитывающий различное сопротивление материала растяжению и сжатию.

Для частного случая двухосного напряженного состояния ($\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = \tau$, $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$) условие прочности по методу предельных состояний с помощью формулы (11.35) принимает вид

$$\frac{1-k}{2} \sigma + \frac{1+k}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \gamma_c R_p. \quad (11.44)$$

Для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, $k = 1$, и расчетные формулы по теории Мора совпадают с аналогичными формулами теории наибольших касательных напряжений.

Теория прочности Мора хорошо подтверждается экспериментально как для пластичных, так и для хрупких материалов, особенно при $\sigma_1 > 0$, $\sigma_3 < 0$.

В заключении отметим, что для оценки прочности конструкций из анизотропных материалов, например, из широко используемых в последнее время стеклопластиков, предложены новые теории прочности. Однако эти теории нуждаются в дальнейшей разработке и экспериментальной проверке.

Пример 11.10. Проверим прочность балки двутаврового сечения I30, изображённой на рис.11.34,а. В расчётах примем $R = 210$ МПа, $R_s = 130$ МПа (расчётное сопротивление на срез), $\gamma_c = 1,0$. Значение нагрузки считаем расчётным.

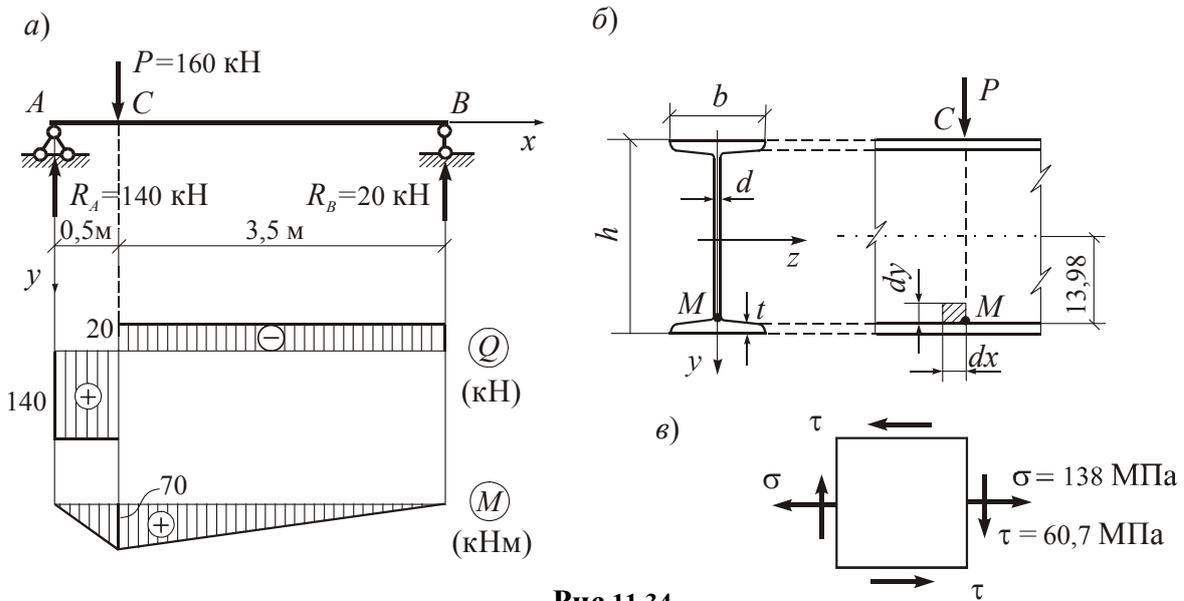


Рис.11.34

Определяем опорные реакции и строим эпюры Q и M (рис.11.34,а). Опасным является сечение C , где приложена сосредоточенная сила. Для прокатного двутавра I30 (рис.11.34,б) имеем: $h = 30$ см, $b = 13,5$ см, $d = 0,65$ см, $t = 1,02$ см, $J_z = 7080$ см⁴, $W_z = 472$ см³, $S_z^{1/2} = 268$ см³ (статический момент полусечения).

Проверяем прочность балки по наибольшим нормальным напряжениям в крайних волокнах и по наибольшим касательным напряжениям на уровне нейтральной оси.

$$\sigma_{\text{ноб}} = \frac{M_z}{W_z} = \frac{70 \cdot 10^2}{472} = 14,8 \text{ кН/см}^2 = 148 \text{ МПа} < \gamma_c R = 210 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\text{max}} = \frac{QS_z^{1/2}}{J_z d} = \frac{140 \cdot 268}{7080 \cdot 0,65} = 8,15 \text{ кН/см}^2 = 81,5 \text{ МПа} < \gamma_c R_s = 130 \text{ МПа}.$$

Прочность балки по наибольшим напряжениям обеспечена. Однако необходимо проверить прочность в точках стенки двутавра в местах её сопряжения с полками (уровень $y = h/2 - t = 15 - 1,02 = 13,98$ см). Определяем напряжения в нижней точке сопряжения M (рис.11.34,б) опасного сечения.

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y = \frac{70 \cdot 10^2}{7080} \cdot 13,98 = 13,8 \text{ кН/см}^2 = 138 \text{ МПа};$$

$$\tau = \frac{Q S_z^n}{J_z d} = \frac{140 \cdot 199,5}{7080 \cdot 0,65} = 6,07 \text{ кН/см}^2 = 60,7 \text{ МПа},$$

где S_z^n – статический момент площади сечения полки двутавра относительно оси Oz . При его определении поперечное сечение полки приближённо считаем прямоугольным.

$$S_z^n = bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 13,5 \cdot 1,02 \left(\frac{30}{2} - \frac{1,02}{2} \right) = 199,5 \text{ см}^3.$$

Поскольку в точке M нормальные и касательные напряжения имеют достаточно большие значения, для проверки прочности балки необходимо использовать соответствующую теорию прочности. Считая, что стенка двутавра находится в условиях двухосного напряжённого состояния при $\sigma_y = 0$ (рис.11.34,в) и используя энергетическую теорию прочности, по формуле (11.42) получаем:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{138^2 + 3 \cdot 60,7^2} = 173,5 \text{ МПа} < \gamma_c R = 210 \text{ МПа}.$$

Прочность балки в точке M также обеспечена.

Пример 11.11. Для стального консольного ломаного стержня круглого сечения, находящегося в условиях изгиба с кручением (рис.11.35,а), определим диаметр из условия прочности по теории наибольших касательных напряжений. В расчётах примем $[\sigma] = 160 \text{ МПа} = 16 \text{ кН/см}^2$. Построим эпюры нормальных и касательных напряжений в опасном сечении.

Вертикальная сила вызывает изгиб стержней AB и BC в плоскости Oxy и кручение стержня AB . Горизонтальная сила вызывает изгиб участка стержня AB в плоскости Oxz . Отметим, что при расчёте стержней AB и BC использована подвижная система координат. Строим эпюры изгибающих моментов M_z и M_y и крутящего момента M_k (рис.11.35,а). Размерность моментов дана кНсм. Все три момента являются отрицательными. Опасным является сечение стержня AB в заделке, где моменты M_z , M_y и M_k имеют наибольшие значения. Вычислим величину суммарного изгибающего момента в заделке:

$$M_{\text{и}} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2} = \sqrt{120^2 + 90^2} = 150 \text{ кНсм}.$$

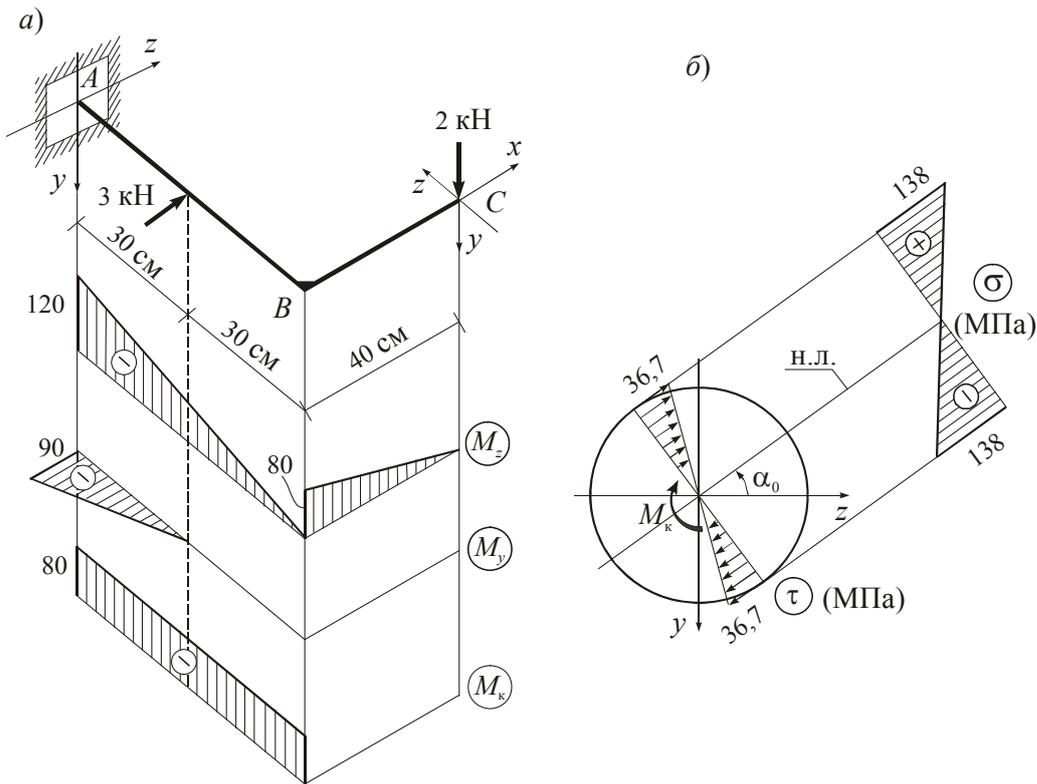


Рис.11.35

Суммарный изгибающий момент вызывает сжатие в точках сечения в первой четверти системы координат.

Опасными являются точки контура поперечного сечения, в которых нормальные напряжения от изгиба и касательные напряжения от кручения имеют наибольшие значения. Используя теорию прочности наибольших касательных напряжений и формулы (11.19) и (11.22) для наибольших σ и τ , получим с учётом равенства $W_p = 2W_n$ следующее условие:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{1}{W_n} \sqrt{M_n^2 + M_k^2} \leq [\sigma].$$

Подставив формулу (11.20) для W_n круглого сплошного сечения, определяем требуемый диаметр стержня:

$$W_n = \frac{\pi D^3}{32} \geq \frac{\sqrt{M_n^2 + M_k^2}}{[\sigma]} = \frac{\sqrt{150^2 + 80^2}}{16} = 10,625 \text{ см}^3 ;$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 10,625}{3,14}} = 4,76 \text{ см} .$$

Принимаем $D = 4,8$ см и определяем наибольшие значения нормальных и касательных напряжений в сечении A.

$$W_n = \frac{\pi D^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 4,8^3}{32} = 10,9 \text{ см}^3 , \quad W_p = 2 \cdot 10,9 = 21,8 \text{ см}^3 ;$$

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{и}}}{W_{\text{и}}} = \frac{150}{10,9} = 13,8 \text{ кН/см}^2 = 138 \text{ МПа} ;$$

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{к}}}{W_{\text{р}}} = \frac{80}{21,8} = 3,67 \text{ кН/см}^2 = 36,7 \text{ МПа} .$$

Для построения эпюры σ в сечении A определим угол наклона нулевой линии к оси Oz . Учитывая, что для круглого сечения $J_z = J_y$, находим

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = -\frac{J_z}{J_y} \cdot \frac{M_y}{M_z} = -\frac{(-90)}{(-120)} = -0,75, \quad \alpha_0 = -36,9^\circ .$$

Откладываем угол α_0 от оси Oz против хода часовой стрелки и строим эпюры σ и τ в сечении A (рис.11.35,б).