

ГЛАВА 13

УСТОЙЧИВОСТЬ И ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ

§ 13.1. Общие понятия

В предыдущих главах при рассмотрении простых деформаций стержня (центральное растяжение и сжатие, изгиб, кручение, сложное сопротивление) отмечалось, что для надежной работы конструкции в целом и ее элементов необходимо выполнение условий прочности (ограничение напряжений или усилий) и в ряде случаев необходимо также выполнение условий жесткости (ограничение перемещений или деформаций). Однако, практика показывает, что в некоторых случаях условия прочности и жесткости являются лишь необходимыми, но не достаточными условиями для надежной работы конструкции или её элементов. То есть эти условия не всегда являются критериями надежности. Это имеет место в тех случаях, когда, например, в конструкции имеются стержни, работающие на сжатие. Такие стержни в зависимости от величины сжимающих усилий могут практически мгновенно потерять прямолинейную форму равновесия и изогнуться, то есть потерять *устойчивость*. Потеря устойчивости обычно сопровождается возникновением дополнительных напряжений изгиба в поперечных сечениях стержней и является опасным не только для отдельных элементов, но и для всей конструкции в целом. Следовательно, для надежной работы конструкций, содержащих сжатые стержни, необходимо кроме условий прочности и жесткости обеспечить также условие устойчивости.

Существуют три вида равновесия тел: устойчивое, безразличное и неустойчивое. *Устойчивым* называется такое равновесие, при котором тело после малого отклонения от исходного положения возвращается в это положение при устранении воздействия, вызывающего отклонение. *Безразличным* – когда тело после отклонения остается в равновесии и в новом положении. *Неустойчивым* – когда тело при малом отклонении не возвращается в исходное положение, а удаляется от него.

В качестве примера рассмотрим равновесные положения тяжелого шарика для трех случаев, изображенных на рис.13.1. Равновесие шарика, находящегося на дне вогнутой сферы (рис.13.1,*а*), является устойчивым, на плоскости (рис.13.1,*б*) – безразличным, на вершине выпуклой сферы (рис.13.1,*в*) неустойчивым.

Если слегка отклонить шарик от положения равновесия и отпустить его, то в первом случае он возвратится в исходное положение. Во втором

случае любое положение шарика является равновесным. В третьем случае при малейшем отклонении шарик будет удаляться от исходного положения.

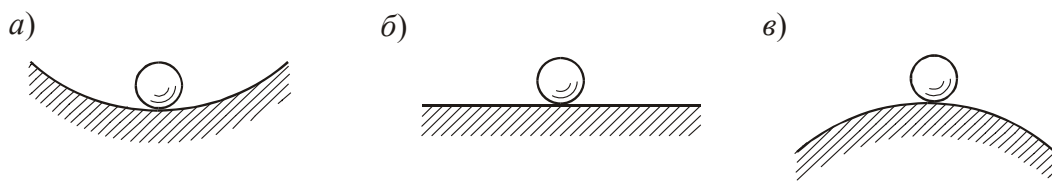


Рис.13.1

Рассмотренный пример относится к задачам *устойчивости положения* абсолютно твердого тела. В курсе сопротивления материалов рассматриваются задачи устойчивости стержней при их деформировании.

Рассмотрим равновесие идеально прямого гибкого стержня из упругого материала, находящегося под действием центрально приложенной к верхнему сечению сжимающей силы P (рис.13.2).

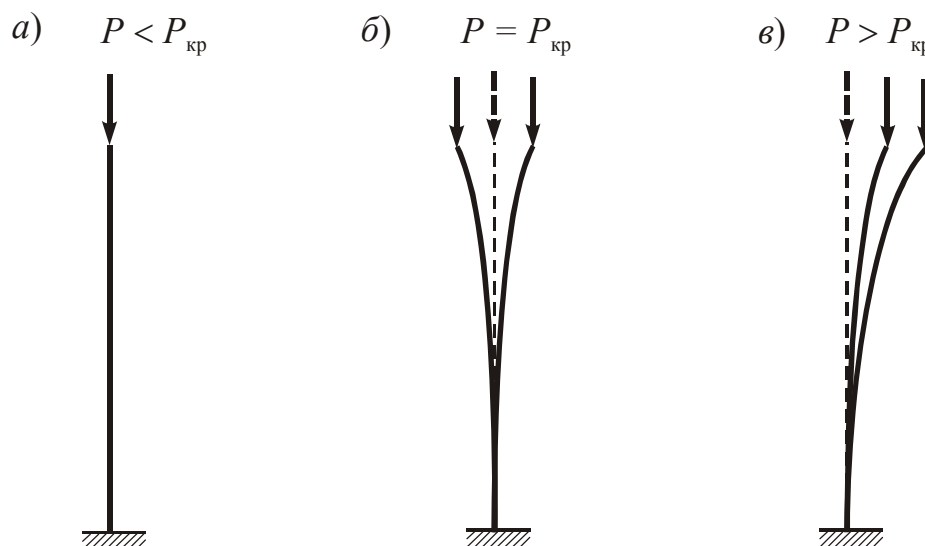


Рис.13.2

В зависимости от величины силы P возможны следующие три случая.

1. Сжимающая продольная сила P невелика. Если стержень с помощью какой-либо поперечной нагрузки слегка отклонить, а затем эту нагрузку снять, то стержень вновь примет первоначальную прямолинейную форму равновесия. Искривленная форма равновесия стержня при этом оказывается неустойчивой и поэтому невозможной.

2. При достижении силой P некоторого значения при кратковременном действии поперечной нагрузки стержень искривится и останется искривленным и после удаления поперечной нагрузки. Это явление носит название *продольного изгиба*, так как стержень находится в изогнутом состоянии под действием продольной силы P . Такую силу назовем *критической силой* и обозначим $P_{кр}$.

При отсутствии причин, отклоняющих стержень, центрально приложенной осевой силе $P_{кр}$ соответствует прямолинейная форма равновесия. Следовательно, при достижении сжимающей силой P критического значения $P_{кр}$ теоретически возможны две формы равновесия – прямолинейная и

искривлённая, причем прямолинейная форма равновесия оказывается неустойчивой. Таким образом, при действии на стержень критической силы $P_{кр}$ имеет место потеря устойчивости первоначальной прямолинейной формы равновесия.

3. При дальнейшем даже самом незначительном увеличении сжимающей силы происходит резкое нарастание прогибов и возникают значительные дополнительные напряжения изгиба.

Таким образом, в зависимости от величины сжимающей силы P возможны следующие виды равновесного состояния стержня.

При $P < P_{кр}$ прямолинейная форма равновесия сжатого стержня является *устойчивой* (рис.13.2,а).

При $P = P_{кр}$ равновесие стержня является *безразличным*. Теоретически возможны как прямолинейная, так и искривлённая формы равновесия (рис.13.2,б).

При $P > P_{кр}$ равновесие сжатого стержня является *неустойчивым*. В стержне возникают большие деформации (рис.13.2,в).

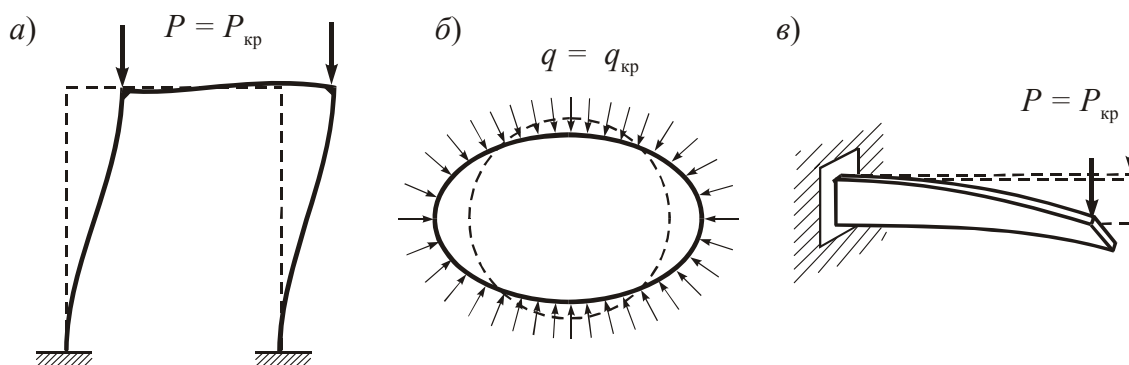


Рис.13.3

На рис.13.3 приведены примеры потери устойчивости с образованием смежных форм равновесия. Рама, в стойках которой возникает только центральное сжатие, при потере устойчивости изгибается, и узлы рамы смещаются по горизонтали. Труба, находящаяся под действием равномерного внешнего давления, при потере устойчивости приобретает смежную (овальную) форму равновесия. Тонкая полоса, работающая на изгиб в вертикальной плоскости, при достижении силой критического значения теряет *устойчивость плоской формы изгиба* и начинает дополнительно испытывать изгиб в горизонтальной плоскости и кручение.

Понятие потери устойчивости не следует отождествлять с понятием потери прочности. Так, например, если в гибком стержне, нагруженном сжимающей силой, равной по величине её критическому значению, возникают только упругие деформации, то после разгрузки восстанавливается первоначальная прямолинейная форма стержня. Разрушение стержня в результате потери устойчивости в этом случае не произойдет. Однако, в реальных конструкциях критическое состояние недопустимо, поскольку оно, как правило, приводит к разрушению конструкции.

Следует отметить, что проблема потери устойчивости возникает не только при продольном изгибе гибких стержней но и при деформировании

любых гибких элементов конструкций от нагрузок, вызывающих сжимающие напряжения в сечениях.

§ 13.2. Определение критической силы

Рассмотрим центрально сжатый идеально прямой стержень, находящийся в искривленном равновесном состоянии под действием силы $P = P_{кр}$ (рис.13.4). Изгибающий момент в произвольном сечении стержня равен

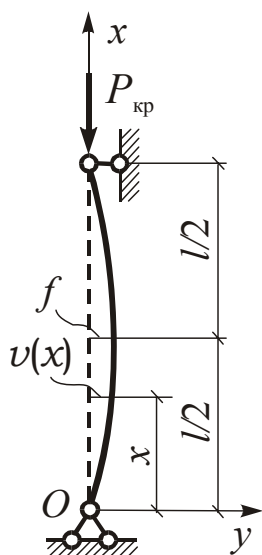


Рис.13.4

$$M(x) = P_{кр} v(x) . \quad (13.1)$$

Отметим, что изгибающий момент определяется для деформированного состояния стержня.

Если предположить, что напряжения изгиба, возникающие в поперечных сечениях стержня от действия критической силы, не превосходят предел пропорциональности материала $\sigma_{пц}$ и прогибы стержня малы, то можно воспользоваться приближенным дифференциальным уравнением изогнутой оси стержня (§ 8.2, часть 3)

$$EJv'' = -M = -P_{кр}v . \quad (13.2)$$

Введя обозначение

$$k^2 = \frac{P_{кр}}{EJ} , \quad (13.3)$$

получим следующее уравнение:

$$v'' + k^2 v = 0 . \quad (13.4)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx . \quad (13.5)$$

Это решение содержит три неизвестных: постоянные интегрирования C_1 , C_2 и параметр k , так как величина критической силы также неизвестна. Для определения этих трех величин имеются только два граничных условия: $v(0) = 0$, $v(l) = 0$. Из первого граничного условия следует, что $C_2 = 0$, а из второго получим

$$C_1 \sin kl = 0 . \quad (13.6)$$

Из этого равенства следует, что либо $C_1 = 0$, либо $\sin kl = 0$. В случае $C_1 = 0$ прогибы во всех сечениях стержня равны нулю, что противоречит исходному предположению задачи. Во втором случае $kl = n\pi$, где n – любое целое число кроме нуля, так как $k \neq 0$. С учетом этого по формулам (13.3) и (13.5) получим

$$P_{кр}^{(n)} = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2} ; \quad (13.7)$$

$$v^{(n)} = C_1^{(n)} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (13.8)$$

Как видно из (13.7), в зависимости от числа n сжимающая сила $P_{кр}^{(n)}$, при которой стержень находится в изогнутом состоянии, теоретически может принимать целый ряд значений. При этом согласно (13.8) стержень изгибается по n полуволнам синусоиды (рис 13.5). Однако, все формы равновесия, кроме случая $n = 1$, неустойчивы и поэтому не представляют практического интереса.

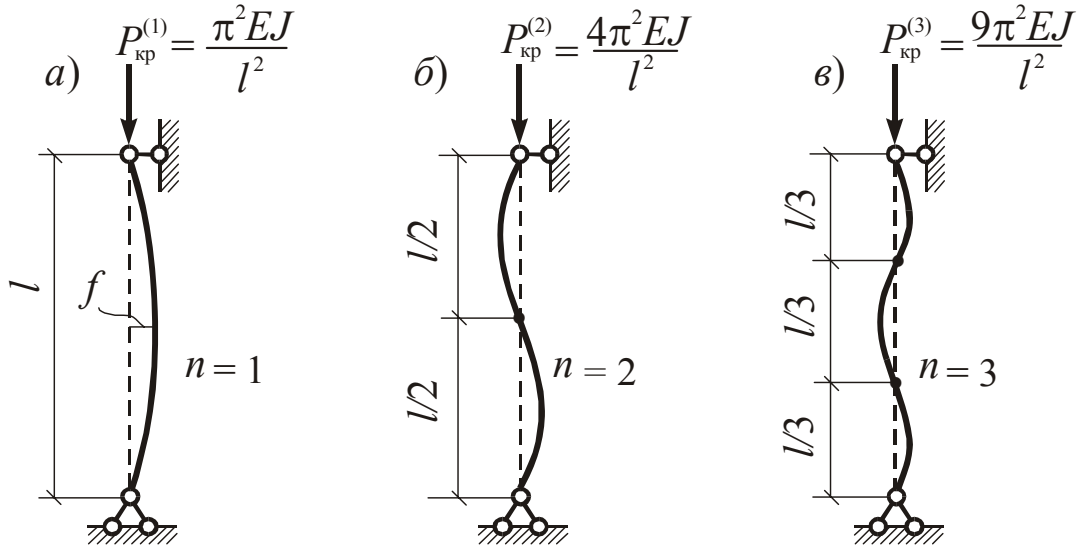


Рис.13.5

Значение критической силы при $n = 1$, которое равно

$$P_{кр}^{(1)} = P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}, \quad (13.9)$$

называется *критической силой Эйлера*. При этом изогнутая ось стержня представляет собой одну полуволну синусоиды (рис.13.5,а)

$$v^{(1)} = v = f \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (13.10)$$

где $f = C_1^{(1)}$ – прогиб в середине длины стержня.

Заметим, что с помощью граничных условий удалось определить только одну постоянную интегрирования $C_2 = 0$. Постоянная C_1 осталась неопределенной. Это обстоятельство имеет следующее объяснение. Под действием силы $P_{кр}$ стержень находится в состоянии безразличного равновесия, поэтому постоянная C_1 (амплитуда синусоиды) имеет неопределенное значение (см.рис.13.5).

Обратим также внимание на следующее обстоятельство. Приведенные выше рассуждения об устойчивом, безразличном и неустойчивом равновесии относятся к идеализированному случаю центрального сжатия прямого стержня. Реальные стержни, всегда имеют некоторое начальное искривление оси, связанное с дефектами изготовления или монтажа. Внешние силы также действуют с некоторым небольшим эксцентриситетом. Поэтому в реальных

стержнях при действии продольных сжимающих сил всегда возникает состояние продольного изгиба.

Качественные особенности поведения «реального» сжатого стержня можно установить, рассматривая внецентренно сжатый стержень, показанный на рис.13.6,*a*. Установлена зависимость (рис.13.6,*б*) между величиной сжимающей силы P и прогибом верхнего конца стержня $v_{нб}$ при различных значениях эксцентриситета e ($e_1 > e_2 > e_3$). Как видно из этого рисунка, на начальной стадии нагружения прогибы невелики и между P и $v_{нб}$ имеет место линейная зависимость.

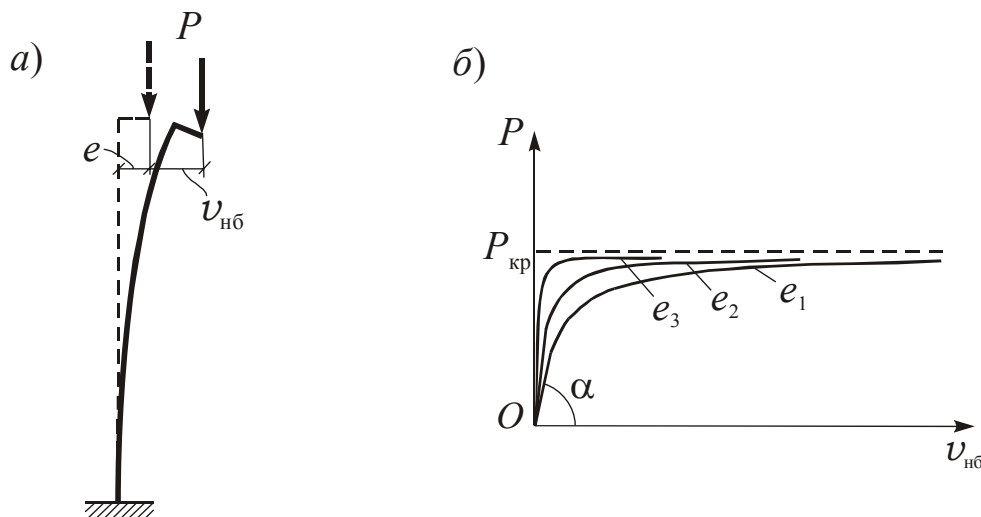


Рис.13.6

С увеличением силы P линии графика заметно искривляются и асимптотически приближаются к горизонтальной прямой, соответствующей значению $P = P_{кр}$ ($e \rightarrow 0$) для идеализированного стержня. При этом угол наклона α прямолинейного участка графика стремится к $\pi/2$. Таким образом, приближение силы P к значению $P_{кр}$ ведет к практически внезапному искривлению оси стержня, то есть к потере устойчивости.

Следовательно, проверка сжатого реального стержня на устойчивость должна состоять в сопоставлении величины фактической сжимающей силы с критической силой, соответствующей идеализированному стержню той же жесткости и при такой же схеме работы.

§ 13.3. Влияние способов закрепления концов стержня на величину критической силы

Формула Эйлера (13.9) была получена для стержня, шарнирно опертого по концам. Для стержней с другими опорными закреплениями решение можно получить аналогично.

Выражения для критических сил в четырёх случаях опорных закреплений приведены на рис.13.7. Как видно, выражения для критических сил отличаются друг от друга лишь числовыми коэффициентами. Поэтому можно придать всем формулам единообразный вид

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2} . \quad (13.11)$$

В этой формуле величина $l_0 = \mu l$ называется *приведенной длиной стержня*, а μ – *коэффициентом приведения длины*.

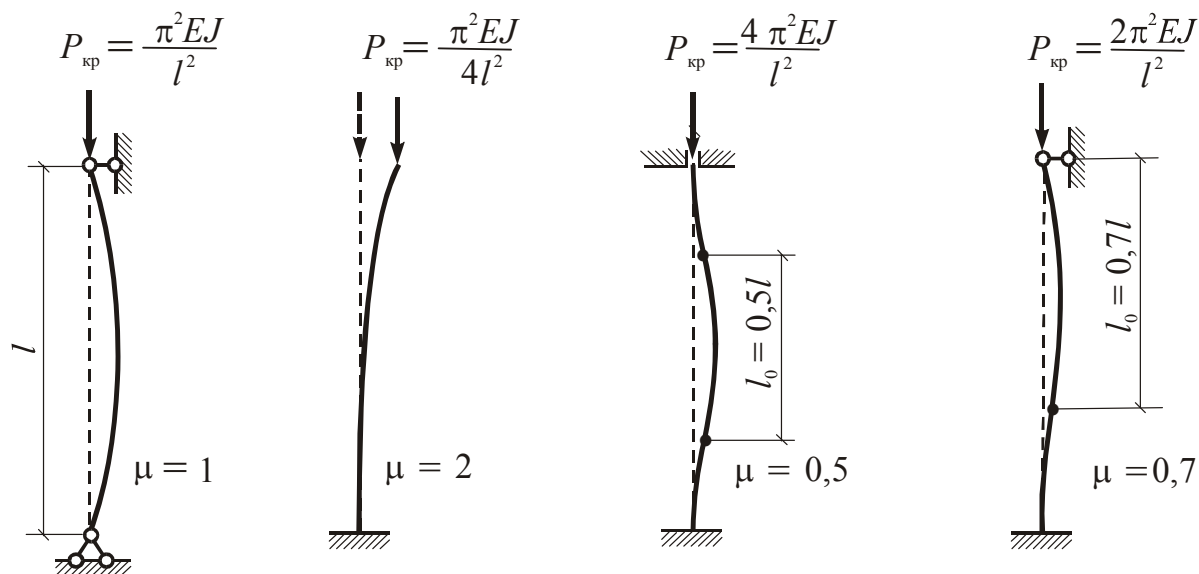


Рис.13.7

Рассматривая формы потери устойчивости стержней, изображенных на рис.13.7, видим, что коэффициент приведения длины μ представляет собой отношение длины полуволны синусоиды, выделенной на изогнутой оси стержня и равной расстоянию между точками перегиба, к его фактической длине.

Потеря устойчивости стержня может происходить в одной из двух главных плоскостей инерции. Если условия закрепления стержня в обеих главных плоскостях одинаковы, то потеря устойчивости произойдет в плоскости наименьшей жесткости, так как при прочих равных условиях согласно (13.11) меньшему моменту инерции соответствует меньшая критическая сила. При различных условиях закрепления стержня в главных плоскостях Oxy и Oxz ($\mu_y \neq \mu_z$) необходимо вычислить два значения критической силы:

$$P_{кр}^{(y)} = \frac{\pi^2 EJ_z}{(\mu_y l)^2} , \quad P_{кр}^{(z)} = \frac{\pi^2 EJ_y}{(\mu_z l)^2} . \quad (13.12)$$

Здесь $P_{кр}^{(y)}$ и $P_{кр}^{(z)}$ – критические силы, соответствующие потере устойчивости стержня в главных плоскостях Oxy и Oxz . Меньшая из этих сил определяет плоскость потери устойчивости и является критической силой для данного стержня.

§ 13.4. Критические напряжения. Пределы применимости формулы Эйлера

Критическими называются напряжения, возникающие в поперечном сечении прямого стержня при сжатии его критической силой $P_{кр}$. Используя формулу Эйлера для критической силы, найдём

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2 F}.$$

Учитывая, что величина $J/F = i^2$, где i – радиус инерции поперечного сечения, получим

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E i^2}{l_0^2} = \frac{\pi^2 E}{(l_0 / i)^2}.$$

Безразмерная величина

$$\lambda = \frac{l_0}{i} \quad (13.13)$$

называется *гибкостью стержня*.

С учетом (13.13) формула для критических напряжений примет вид

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (13.14)$$

Формула Эйлера была выведена на основе дифференциального уравнения (13.2), которое получено с использованием закона Гука. Таким образом формулу Эйлера можно применять лишь при условии

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{\text{пц}}. \quad (13.15)$$

Обозначим через λ_1 значение гибкости, при которой $\sigma_{кр} = \sigma_{\text{пц}}$

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пц}}}}. \quad (13.16)$$

Тогда условие (13.15) применимости формулы Эйлера можно представить в виде

$$\lambda \geq \lambda_1. \quad (13.17)$$

Величина λ_1 , определяемая по формуле (13.16), называется *предельной гибкостью*. Стержни, для которых выполняется условие (13.17), называются *стержнями большой гибкости*.

Как видно из формулы (13.16), предельная гибкость зависит от величин модуля упругости E и предела пропорциональности $\sigma_{\text{пц}}$ материала стержня. Например, у некоторых распространенных в строительных конструкциях сталей марки ВСт3 $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, а $\sigma_{\text{пц}} = (200 \div 210)$ МПа. При этом получим $\lambda_1 \approx 100$. Для таких сталей условием применимости формулы Эйлера можно считать

$$\lambda \geq 100 . \quad (13.18)$$

Величина предельной гибкости для дерева может быть принята $\lambda_1 = 70$, для чугуна – $\lambda_1 = 80$.

Теоретическое определение критических нагрузок при напряжениях, превышающих предел пропорциональности материала, достаточно сложно. В то же время имеется большое число экспериментальных исследований устойчивости стержней, которые показали, что при $\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}$ экспериментальные и теоретические значения критических сил практически совпадают. При $\sigma_{кр} > \sigma_{пц}$ наблюдается значительное расхождение между экспериментальными и теоретическими значениями критических сил, вычисленных по формуле Эйлера. При этом формула Эйлера всегда дает завышенное значение критической силы.

На основании опытных данных различными авторами были предложены эмпирические формулы для вычисления критических напряжений за пределом пропорциональности материала. Наиболее простой является линейная зависимость, предложенная немецким ученым Л.Тетмайером и профессором Петербургского института инженеров путей сообщения Ф.С.Ясинским:

$$\sigma = a - b\lambda , \quad (13.19)$$

где a и b – эмпирические коэффициенты, зависящие от свойств материала стержня и имеющие размерность напряжения. Для стали марки ВСт3 с пределом пропорциональности $\sigma_{пц} = 200$ МПа и пределом текучести $\sigma_T = 240$ МПа получено $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа.

Формулу Ясинского для стержней из пластичного материала можно использовать при условии, что критические напряжения, вычисленные по этой формуле, находятся в пределах

$$\sigma_{пц} \leq \sigma_{кр} \leq \sigma_T \quad (13.20)$$

Это условие равносильно неравенству

$$\lambda_2 \leq \lambda \leq \lambda_1 , \quad (13.21)$$

где λ_2 – значение гибкости, при котором критические напряжения, вычисленные по формуле (13.19), равны пределу текучести σ_T , а λ_1 определяется по формуле (13.16). С учетом приведенных выше значений σ_T , a и b для стали марки ВСт3 по формуле (13.19) получим $\lambda_2 \approx 60$, и условие (13.21) можно представить в виде

$$60 \leq \lambda \leq 100 . \quad (13.22)$$

Стержни, для которых выполняется условие (13.21), называются *стержнями средней гибкости*. Потеря устойчивости таких стержней происходит при упруго-пластических деформациях.

Короткие стержни, у которых $\lambda < \lambda_2$, называются *стержнями малой гибкости*. Они могут разрушиться не в результате потери устойчивости, а в результате потери прочности при центральном сжатии. В таком случае для стержней из пластичного материала следует принять

$$\sigma_{кр} = \sigma_T . \quad (13.23)$$

При определении критических напряжений для стержней малой и средней гибкости во многих случаях может быть использована параболическая зависимость. Так, например, для стержней из пластичного материала критическое напряжение можно определить по формуле

$$\sigma_{кр} = \sigma_T - (\sigma_T - \sigma_{пц}) \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} \right)^2 . \quad (13.24)$$

Для стержней из хрупкого материала, для сталей некоторых марок, а также для других материалов, можно принять

$$\sigma_{кр} = \sigma_B - (\sigma_B - \sigma_{пц}) \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} \right)^2 , \quad (13.25)$$

где σ_B – предел прочности при сжатии.

Формула (13.25) используется также для расчета на устойчивость деревянных стержней при $\lambda < \lambda_1 = 70$. Так, например, при $\sigma_B = 33$ МПа, $\sigma_{пц} = 20$ МПа (данные из СНиП для сосны, ели и лиственницы), можно использовать формулу

$$\sigma_{кр} = 33 - (33 - 20) \left(\frac{\lambda}{70} \right)^2 = 33 - 26,4 \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2 . \quad (13.26)$$

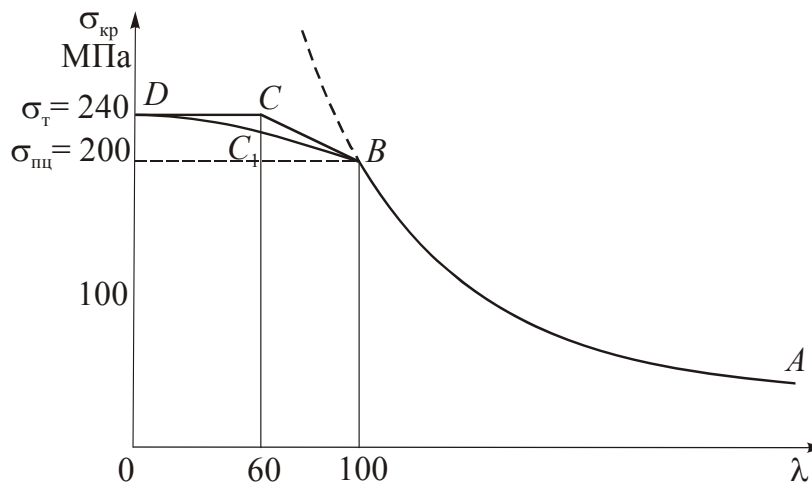


Рис.13.8

На рис.13.8 изображен график зависимости критических напряжений от гибкости для стали марки ВСт3 с пределом пропорциональности $\sigma_{пц} = 200$ МПа и пределом текучести $\sigma_T = 240$ МПа. При $\lambda \geq 100$ график $\sigma_{кр}(\lambda)$ представляется гиперболой Эйлера AB , при $60 \leq \lambda \leq 100$ – прямой Ясинского BC , при $\lambda \leq 60$ – горизонтальной прямой CD . Параболической зависимости (13.25) при $\lambda \leq 100$ соответствует кривая BC_1D , которая незначительно отклоняется от ломаной B_1CD . Для значений $\lambda \leq 100$ гипербола Эйлера изображена пунктирной линией. Из этого графика видно, что для стержней средней и малой гибкости формула Эйлера дает сильно завышенные значения критических напряжений.