

§ 13.6. Продольно-поперечный изгиб стержней

Продольно-поперечным называется изгиб стержня, возникающий от совместного действия поперечной и продольной нагрузок. Рассмотрим гибкий стержень, находящийся под действием поперечной нагрузки и центрально приложенной сжимающей силы P (рис.13.17). Обозначим через $v_{\text{п}}$ и $M_{\text{п}}$ прогиб и изгибающий момент в произвольном сечении стержня от действия только поперечной нагрузки.

После приложения продольной силы P прогиб и изгибающий момент получают приращения v_1 и M_1 . Суммарный прогиб и изгибающий момент при совместном действии поперечной и продольной нагрузок равны

$$v = v_{\text{п}} + v_1, \quad M = M_{\text{п}} + M_1 = M_{\text{п}} + Pv. \quad (13.41)$$

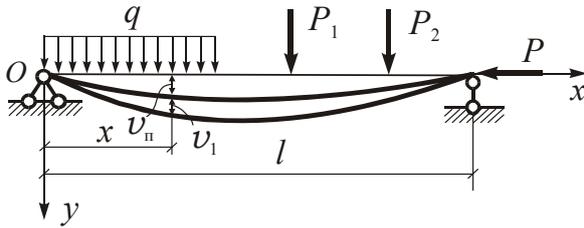


Рис.13.17

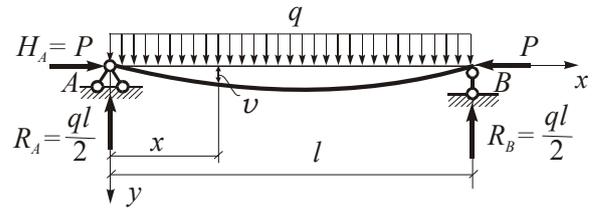


Рис.13.18

Обратим внимание на следующее обстоятельство. При продольно-поперечном изгибе нарушается принцип независимости действия сил, согласно которому результат совместного действия нескольких сил равен сумме ре-

зультатов от действия каждой силы по отдельности. Действительно, при действии только силы P возникает лишь продольное усилие $N = -P$; при действии поперечной нагрузки – изгибающий момент $M = M_{\text{п}}$. При одновременном действии тех и других нагрузок изгибающий момент M определяется выражением (13.41). Следовательно, величина Pv отсутствует в выражении изгибающего момента при раздельном действии нагрузок и появляется лишь при их совместном действии. Это и подтверждает нарушение принципа независимости действия сил.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня (§ 8.2, часть 3) с учетом (13.41) можно записать в виде

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} = -\frac{M_{\text{п}}}{EJ} - \frac{Pv}{EJ}. \quad (13.42)$$

Вводя обозначение

$$k^2 = \frac{P}{EJ},$$

получим

$$\frac{d^2v}{dx^2} + k^2v = -\frac{M_{\text{п}}}{EJ}. \quad (13.43)$$

Общее решение этого линейного дифференциального уравнения имеет вид

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + v^*, \quad (13.44)$$

где v^* – частное решение уравнения (13.43), зависящее от M_{Π} , то есть от вида поперечной нагрузки, а постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из граничных условий. Например, для балки на двух опорах, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q (рис.13.18) имеем.

$$EJ \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{qlx}{2} + \frac{qx^2}{2} - Pv.$$

Тогда

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + k^2 v = -\frac{q}{2EJ} (lx - x^2), \quad v^* = -\frac{q}{2EJk^2} \left(\frac{2}{k^2} + lx - x^2 \right).$$

Следовательно

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx - \frac{q}{2EJk^2} \left(\frac{2}{k^2} + lx - x^2 \right).$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий $v(0) = 0$ и $v(l) = 0$. В итоге получаем окончательное решение задачи в виде

$$v = \frac{q}{EJk^4} \left[(1 - \cos kl) \frac{\sin kx}{\sin kl} - 1 + \cos kx - \frac{k^2}{2} (lx - x^2) \right].$$

В случае более сложных поперечных нагрузок нахождение частного решения v^* связано с определенными трудностями.

Рассмотрим часто применяемый на практике приближённый метод расчёта сжато-изогнутых стержней.

Подставив первое из равенств (13.41) в левую часть (13.42), получим

$$\frac{d^2 v_{\Pi}}{dx^2} + \frac{d^2 v_1}{dx^2} = -\frac{M_{\Pi}}{EJ} - \frac{Pv}{EJ}. \quad (13.45)$$

При действии одной только поперечной нагрузки справедливо уравнение

$$\frac{d^2 v_{\Pi}}{dx^2} = -\frac{M_{\Pi}}{EJ},$$

с учётом которого уравнение (13.45) примет вид

$$\frac{d^2 v_1}{dx^2} = -\frac{Pv}{EJ}. \quad (13.46)$$

При решении этого уравнения можно принять приближённое выражение для дополнительного прогиба v_1 , удовлетворяющее граничным условиям. Так, например, для шарнирно опёртого по концам стержня (рис.13.17) при действии поперечной нагрузки, направленной в одну сторону, можно принять

$$v_1 = f \sin \frac{\pi x}{l}.$$

При этом будут удовлетворяться условия равенства нуля прогибов на концах стержня $x = 0$ и $x = l$.

Дифференцируя выражение для v_1 , найдем

$$\frac{d^2 v_1}{dx^2} = -f \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} = -\frac{\pi^2}{l^2} v_1 = -\frac{\pi^2}{l^2} (v - v_{\text{п}}).$$

С учётом этого из уравнения (13.46) получим

$$\frac{P^2}{l^2} (v - v_{\text{п}}) = \frac{Pv}{EJ}.$$

Учитывая, что выражение $P^2 EJ/l^2$ представляет собой критическую силу Эйлера для шарнирно опёртого по концам стержня, получим формулу для определения суммарного прогиба

$$v = \frac{v_{\text{п}}}{1 - \frac{P}{P_{\text{кр}}}}. \quad (13.47)$$

Эта формула часто используется и при других способах закрепления концов стержня. При этом независимо от гибкости величина $P_{\text{кр}}$ вычисляется по формуле Эйлера (13.11). Момент инерции в этой формуле берется относительно главной оси инерции поперечного сечения стержня, которая перпендикулярна к плоскости действия поперечной нагрузки. Прогибы стержня $v_{\text{п}}$ могут быть найдены любым известным методом (глава 8, часть 3).

Суммарный изгибающий момент в произвольном сечении стержня определяется по формуле $M = M_{\text{п}} + Pv$.

Расчеты показывают, что приближенная формула (13.47) дает достаточную для инженерных расчетов точность, если $P < 0,75P_{\text{кр}}$. Обычно в реальных конструкциях сжимающая сила не превышает величины $(0,5 \div 0,6)P_{\text{кр}}$.

§ 13.7. Расчет сжато-изогнутых стержней на прочность и устойчивость

Сжато-изогнутые стержни рассчитываются на устойчивость в двух главных плоскостях инерции по формуле (13.32) и на прочность при продольно-поперечном изгибе.

Величина наибольшего сжимающего напряжения в опасном сечении стержня определяется по формуле

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{P}{F} + \frac{M}{W}.$$

Воспользовавшись приближенным методом расчета, рассмотренным в предыдущем параграфе, эту формулу можно представить в виде

$$y = \frac{P}{F} + \frac{M_{\text{п}}}{W} + \frac{Pv_{\text{п}}}{W \left(1 - \frac{P}{P_{\text{кр}}}\right)}.$$

Увеличив все нагрузки, действующие на стержень в k раз, получим

$$y = \frac{kP}{F} + \frac{kM_{\text{п}}}{W} + \frac{kP \cdot kv_{\text{п}}}{W \left(1 - \frac{kP}{P_{\text{кр}}}\right)}. \quad (13.48)$$

Как видно из этой формулы, первые два слагаемых увеличились в k раз, а третье – более чем в k^2 раз. Таким образом, существенной особенностью продольно-поперечного изгиба является то, что *напряжения в поперечных сечениях стержня нелинейно зависят от внешних нагрузок и при их увеличении возрастают быстрее последних*. Поэтому реальным коэффициентом запаса сжато-изогнутого стержня является *коэффициент запаса по нагрузкам* n_p , который показывает, во сколько раз надо увеличить все заданные нормативные нагрузки, чтобы наибольшее сжимающее напряжение достигло опасной величины. Для пластичного материала за опасное принимается напряжение, равное пределу текучести $\sigma_{\text{т}}$. Положив в формуле (13.48) $k = n_p$ и допуская, что закон Гука справедлив до предела текучести, получим квадратное уравнение для определения коэффициента запаса по нагрузкам

$$n_p^2 \left[\left(\frac{P}{F} + \frac{M_{\text{п}}}{W} \right) \frac{P}{P_{\text{кр}}} - \frac{Pv_{\text{п}}}{W} \right] - n_p \left[\frac{P}{F} + \frac{M_{\text{п}}}{W} + y_{\text{т}} \frac{P}{P_{\text{кр}}} \right] + y_{\text{т}} = 0. \quad (13.49)$$

Нетрудно показать, что *коэффициент запаса по напряжениям*, равный отношению предела текучести к наибольшим напряжениям $n_{\text{т}} = \sigma_{\text{т}}/\sigma$, больше коэффициента запаса по нагрузкам n_p . По этой причине выполнение условия прочности

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{W} \leq \gamma_c R,$$

в основу которого положен коэффициент запаса по напряжениям, не гарантирует достаточного запаса прочности сжато-изогнутого стержня по нагрузкам.

Проверка прочности сжато-изогнутого стержня из пластичного материала может быть сведена к требованию, чтобы наибольшие сжимающие напряжения от действия нормативных нагрузок, умноженных на заданную величину коэффициента запаса по нагрузкам n_p , не превышали предел текучести материала

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{P}{F} + \frac{M}{W} \leq \sigma_{\text{т}}. \quad (13.50)$$

Рассмотрим примеры расчета сжато-изогнутых стержней.

Пример 13.9. Стальная колонна из прокатного двутавра I30, шарнирно опертая по концам, нагружена сжимающей силой P и поперечной нагрузкой в виде двух сил P_1 , расположенных в плоскости Oxy (рис.13.19,а). В плоскости Oxz , имеется дополнительная шарнирная опора (рис.13.19,б).

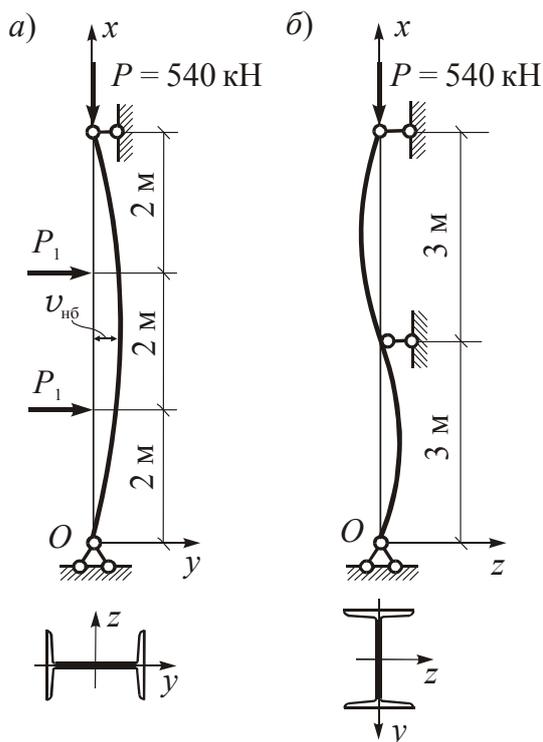


Рис.13.19

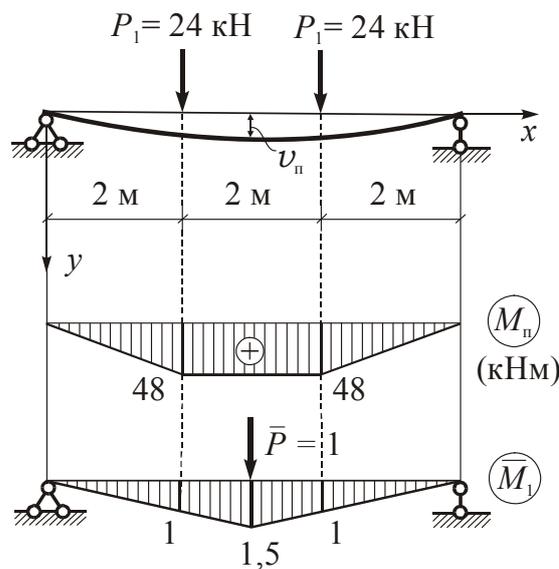


Рис.13.20

Нормативные значения нагрузок равны: $P = 360$ кН, $P_1 = 16$ кН. Расчётное сопротивление стали $R = 210$ МПа, предел текучести $\sigma_T = 240$ МПа, $E = 2,1 \cdot 10^4$ кН/см², коэффициент надёжности по нагрузке $\gamma_f = 1,2$, коэффициент условий работы $\gamma_c = 0,9$, коэффициент запаса по нагрузкам $n_p = 1,5$.

Выпишем из сортамента необходимые для расчета геометрические характеристики сечения I30: $F = 46,5$ см², $J_z = 7080$ см⁴, $W_z = 472$ см³, $i_z = 12,3$ см, $i_y = 2,69$ см.

Произведем расчет колонны на устойчивость при действии расчетной сжимающей силы $P = P_n \gamma_f = 360 \cdot 1,2 = 432$ кН. Вычислим гибкости колонны в двух главных плоскостях:

в плоскости Oxy

$$l_0 = l = 600 \text{ см}, \quad \lambda_y = \frac{l_0}{i_z} = \frac{600}{12,3} = 48,8;$$

в плоскости Oxz

$$l_0 = 0,5l = 300 \text{ см}, \quad \lambda_z = \frac{l_0}{i_y} = \frac{300}{2,69} = 111,5.$$

Таким образом, колонна может потерять устойчивость в плоскости Oxz , в которой гибкость имеет наибольшее значение. По таблице 13.1 для

гибкости $\lambda = 111,5$ с помощью линейной интерполяции находим коэффициент продольного изгиба $\varphi = 0,528$.

По формуле (13.32) производим проверку на устойчивость:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{432}{46,5} = 9,29 \text{ кН/см}^2 = 92,9 \text{ МПа} <$$

$$< \varphi \gamma_c R = 0,528 \cdot 0,9 \cdot 210 = 99,8 \text{ МПа} .$$

Условие устойчивости выполняется.

Проверим прочность колонны при совместном действии поперечной и продольной нагрузок по формуле (13.50). Для обеспечения заданной величины коэффициента запаса по нагрузкам умножим величины нормативных нагрузок на $n_p = 1,5$:

$$P = n_p P_n = 1,5 \cdot 360 = 540 \text{ кН} ;$$

$$P_1 = n_p P_{1n} = 1,5 \cdot 16 = 24 \text{ кН} .$$

Определим наибольший изгибающий момент M_n и прогиб v_n от действия поперечной нагрузки с помощью метода Мора. На рис.13.20 приведены эпюры изгибающих моментов от поперечной нагрузки и от единичной силы $\bar{P} = 1$, приложенной в середине длины колонны. Перемножая эти эпюры по правилу Верещагина, получим

$$v_n = \frac{2}{EJ} \left(\frac{48 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + 48 \cdot 1 \cdot \frac{1 + 1,5}{2} \right) =$$

$$= \frac{184}{EJ} = \frac{184(10^2)^3}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 7080} = 1,238 \text{ см} .$$

Размерность длины в числителе переведена в сантиметры. Определим критическую силу Эйлера в плоскости изгиба.

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_z}{l_0^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 7080}{600^2} = 4072 \text{ кН} .$$

Наибольший суммарный прогиб и суммарный изгибающий момент в опасном сечении равны

$$v = \frac{v_n}{1 - \frac{P}{P_{кр}}} = \frac{1,238}{1 - \frac{540}{4072}} = 1,427 \text{ см} = 0,01427 \text{ м} ;$$

$$M = M_n + Pv = 48 + 540 \cdot 0,01427 = 55,71 \text{ кНм} .$$

Производим по формуле (13.50) проверку прочности по наибольшим сжимающим напряжениям

$$\sigma_{нб} = \frac{P}{F} + \frac{M}{W_z} = \frac{540}{46,5} + \frac{55,71 \cdot 10^2}{472} = 23,42 \text{ кН/см}^2 =$$

$$= 234,2 \text{ МПа} < \sigma_T = 240 \text{ МПа} .$$

Условие прочности выполняется.

Пример 13.10 Консольный стержень в виде стальной трубы $\varnothing 426 \times 8$ мм нагружен сжимающей силой P и равномерно распределенной поперечной нагрузкой q (рис.13.21).

Нормативные значения нагрузок равны $P_n = 600$ кН, $q_n = 10$ кН/м. Расчетное сопротивление стали $R = 210$ МПа, предел текучести $\sigma_T = 240$ МПа, $E = 2,1 \cdot 10^4$ кН/см², коэффициент надежности по нагрузке $\gamma_f = 1,2$, коэффициент условий работы $\gamma_c = 1$, коэффициент запаса по нагрузкам $n_p = 1,5$. Произведём расчет стержня на прочность и устойчивость.

Определим геометрические характеристики поперечного сечения трубы.

Внутренний диаметр трубы $D_1 = 42,6 - 2 \cdot 0,8 = 41$ см,

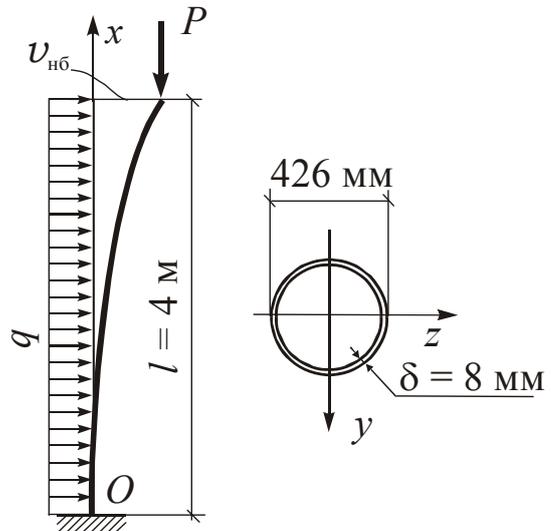


Рис.13.21

$$F = \frac{\pi}{4}(42,6^2 - 41^2) = 105 \text{ см}^2, \quad J = \frac{\pi}{64}(42,6^4 - 41^4) = 22941 \text{ см}^4;$$

$$W = \frac{22941}{21,3} = 1077 \text{ см}^3, \quad i = \sqrt{\frac{22941}{105}} = 14,8 \text{ см}.$$

Произведем расчет стержня на устойчивость при действии расчетной сжимающей силы

$$P = P_n \gamma_f = 600 \cdot 1,2 = 720 \text{ кН}.$$

Определим гибкость стержня и коэффициент продольного изгиба

$$\lambda = \frac{l_0}{i} = \frac{2 \cdot 400}{14,8} = 54, \quad \varphi = 0,852.$$

Проверим устойчивость стержня

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{720}{105} = 6,86 \text{ кН/см}^2 = 68,6 \text{ МПа} < \varphi \gamma_c R = 0,852 \cdot 1 \cdot 210 = 178,9 \text{ МПа}.$$

Условие устойчивости выполняется.

Проверим стержень на прочность при совместном действии продольной и поперечной нагрузок, умноженных на коэффициент запаса $n_p = 1,5$.

$$P = n_p P_n = 1,5 \cdot 600 = 900 \text{ кН}, \quad q = n_p q_n = 1,5 \cdot 10 = 15 \text{ кН/м}.$$

Наибольший по абсолютной величине изгибающий момент в заделке от поперечной нагрузки равен

$$M_{\text{п}} = \frac{ql^2}{2} = \frac{15 \cdot 4^2}{2} = 120 \text{ кНм} .$$

Наибольший прогиб на конце консоли от действия равномерно распределенной нагрузки равен (см.стр.38, часть 3)

$$v_{\text{п}} = \frac{ql^4}{8EJ} = \frac{0,15 \cdot 400^4}{8 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 22941} = 0,996 \text{ см} .$$

Определим критическую силу Эйлера и полный прогиб от совместного действия продольной силы и поперечной нагрузки

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 22941}{800^2} = 7422 \text{ кН} ;$$

$$v = \frac{v_{\text{п}}}{1 - \frac{P}{P_{\text{кр}}}} = \frac{0,996}{1 - \frac{900}{7422}} = 1,133 \text{ см} .$$

Суммарный изгибающий момент в заделке по абсолютной величине равен

$$M = M_{\text{п}} + Pv = 120 + 900 \cdot 0,01133 = 130,2 \text{ кНм} .$$

По формуле (13.49) производим проверку прочности стержня по наибольшим сжимающим напряжениям

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{P}{F} + \frac{M}{W} = \frac{900}{105} + \frac{130,2 \cdot 10^2}{1077} = 20,66 \text{ кН/см}^2 = 206,6 \text{ МПа} < \sigma_{\text{т}} = 240 \text{ МПа} .$$

Условие прочности выполняется.