Основы теории управления системами

Крак Юрий Васильевич,
доктор физико-математических наук,
профессор

Практические занятия

Практические задания к теме

«Управляемость линейных систем»

Пример 1.1. Исследовать систему на вполне управляемость.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2 + u \end{cases}.$$

<u>Решение</u>. Запишем данную систему в матрично-векторной форме.

Имеем: $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$.

Следовательно, здесь $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

По необходимому и достаточному условию вполне управляемости имеем:

$$\det(b, Ab) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\right) = 0 \times 4 - 1 \times 1 \neq 0 .$$

Таким образом, система вполне управляемой.

Пример 1.2. Исследовать систему на вполне управляемость.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 2u \\ \dot{y} = -4x + y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u .$$

<u>Решение.</u>

По необходимому и достаточному условию вполне управляемости имеем

$$\det(b, Ab) = \det\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-8) - 0 \cdot 2 = -16 \neq 0 .$$

Система вполне управляемой.

Пример 1.3. Исследовать систему на вполне управляемость.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u_1 - u_2 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = u_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Здесь имеем $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad rang(B, AB) = rang\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad rang\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

По необходимому и достаточному условию вполне управляемости система вполне управляемой.

Пример 1.4. Определить, при которых λ, b_1, b_2, b_3 система управления, задается матрицей

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ и вектором } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \text{ вполне управляемой.}$$

Решение. После проведения необходимых матрично-векторных вычислений условие вполне управляемости выглядит так:

$$\det(b, Ab, A^2b) = \det\begin{pmatrix} b_1 & \lambda b_1 + b_2 & \lambda^2 b_1 + 2\lambda b_2 + b_3 \\ b_2 & \lambda b_2 + b_3 & \lambda^2 b_2 + 2\lambda b_3 \\ b_3 & \lambda b_3 & \lambda^2 b_3 \end{pmatrix} =$$

$$= b_3 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & b_2 & 2\lambda b_2 + b_3 \\ 0 & b_3 & 2\lambda b_3 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} =$$

$$= b_3 \cdot \det\begin{pmatrix} b_2 & 2\lambda b_2 + b_3 \\ b_3 & 2\lambda b_3 \end{pmatrix} = b_3(2\lambda b_2 b_3 - 2\lambda b_2 b_3 - b_3^2) = -b_3^3 \neq 0$$

Следовательно, система вполне управляема при $b_3 \neq 0$ и произвольных λ, b_1, b_2.

Задания для самостоятельной работы.

1.5. При каких значениях параметра p система является вполне управляемой

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) + (p-3)x_2(t) + u_1(t) + u_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_2(t) + (p^2 - p)u_1(t) \end{cases}$$

1.6. Определить при каких a, b, c система управления, которая задается матрицей

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и вектором $b = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, является вполне управляемой.

1.7. Исследовать систему на вполне управляемость

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) - x_2(t) + 2u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) + x_2(t) + u_1(t) - u_2(t) \end{cases}$$

1.8. Исследовать систему на вполне управляемость

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = 4x_1(t) + 3x_2(t) + 2u(t) \end{cases}$$

1.9. Исследовать систему на вполне управляемость в зависимости от параметра c.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2 = x_2(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_3(t) + cu(t) \end{cases}$$

Практические задания к теме «Наблюдаемость линейных систем»

Пример 2.1. Исследовать систему на вполне управляемость и наблюдаемость:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}u, \quad y = (1{,}0) \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1$$

Решение.

Имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q^T = (1{,}0).$$

Итак, $$A \cdot b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\det(b, Ab) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \times 0 - 1 \times 1 = -1 \neq 0,$$

То есть система вполне управляема.

Для исследования на вполне наблюдаемость воспользуемся необходимым и достаточным условием вполне наблюдаемости.

Поскольку

$$q^T A = (1{,}0)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0{,}1), \quad A^T q = (q^T A)^T = (0{,}1)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и, согласно условию, $q=(1,0)^T=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$,

то есть $\det(q, A^T q)=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=1\neq 0$

Итак, система является вполне наблюдаемой.

Пример 2.2. Исследовать систему на вполне управляемость и вполне наблюдаемость:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}u\,,\quad y=(0,1)\times\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=x_2\,.$$

<u>Решение.</u>

Имеем:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad q^T=(0,1)\,.$$

Отсюда $\quad A\cdot b=\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$,

$$\det(b, Ab)=\det\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}=0\times 0-1\times 1=-1\neq 0$$

То есть система является вполне управляемой.

Далее

$q^T A=(0,1)\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}=(0,0)$, $A^T q=(0,0)^T=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $q=(0,1)^T=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Тогда $\det(q, A^T q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ система не является вполне наблюдаемой.

Приклад 2.3. Исследовать систему на наблюдаемость и восстановить вектор фазовых координат, если это возможно

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 17 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y(t) = -3x_1 - 2x_2 - 3x_3$$

Решение. Имеем $q^T = (-3, -2, -1)$.

Находим $A^T q = (-18, -14, -7)^T$,

$$(A^T)^2 q = A^T (A^T q) = (-123, -89, -49)^T .$$

Тогда $\det \tilde{S}_3 = \begin{pmatrix} -3 & -18 & -123 \\ -2 & -14 & -89 \\ -1 & -7 & -49 \end{pmatrix} = -27 \neq 0 \Rightarrow$

система является наблюдаемой и мы можем воспроизвести вектор фазовых координат.

Воспроизведение фазовых координат производится по формуле

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\tilde{S}_3^T)^{-1} \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix}.$$

Для чего сделаем следующие вычисления (несмотря на то, что производные от фазовых координат берутся в силу заданной системы)

$$\dot{y}(t) = -3\dot{x}_1(t) - 2\dot{x}_2(t) - 3\dot{x}_3(t) =$$
$$= -3(x_1(t) + 3x_2(t)) - 2(-x_1(t) + 3x_2(t) + 4x_3(t)) -$$
$$-3(17x_1(t) - x_2(t) - x_3(t)) =$$
$$= -18x_1(t) - 14x_2(t) - 7x_3(t)$$

$$\ddot{y}(t) = -18\dot{x}_1(t) - 14\dot{x}_2(t) - 7\dot{x}_3(t) =$$
$$= -123x_1(t) - 89x_2(t) - 49x_3(t)$$

На последнем шаге вычислим матрицу $(\tilde{S}_3^T)^{-1}$, дополнив справа к $\tilde{S}_3^T$ единичную 3×3 матрицу и выполнив необходимые преобразования Жордана-Гаусса до тех пор пока не появится единичная 3×3 матрица слева. Окончательно запишем

$$B = (\tilde{S}_3^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -7/3 & 1/3 & 0 \\ 7/9 & -8/9 & 1/9 \\ 40/9 & 7/9 & -2/9 \end{pmatrix}.$$

Задания для самостоятельной работы.

2.4. Исследовать систему на наблюдаемость и восстановить вектор фазовых координат, если это возможно

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + 9x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t) \end{cases}$$
$$y(t) = x_1(t) + 2\mathrm{x}_2(t)$$

Исследовать систему на наблюдаемость и восстановить вектор фазовых координат, если это возможно

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) + 10x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 3x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$
$$y(t) = 3x_1(t) + \mathrm{x}_2(t)$$

Исследовать систему на наблюдаемость и восстановить вектор фазовых координат, если это возможно

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = 2x_1(t) + 2x_2(t) - 2x_3(t) \end{cases}$$
$$y(t) = 2x_1(t) - 2\mathrm{x}_2(t) + 3x_3(t)$$

2.5. Исследовать на вполне управляемость и наблюдаемость в зависимости от a, b

$$\ddot{x}(t) + a^2\dot{x}(t) + bx(t) = 0$$
$$y(t) = x(t)$$
$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t)$$

2.8. Исследовать систему на наблюдаемость в зависимости от параметра a. n - порядковый номер студента в списке группы. Зафиксировав значение параметра, восстановить вектор фазовых координат, если это возможно

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 3x_1(t) + nx_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) + nx_2(t) \end{cases}$$
$$y(t) = ax_1(t) + \mathrm{x}_2(t)$$

2.9. Исследовать систему на наблюдаемость в зависимости от параметра a. Зафиксировав значение параметра, восстановить вектор фазовых координат,

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -2 & -n\\ 4 & 3 & -1\\ -2 & -1 & n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad y(t)=nx_1+ax_2+3x_3,$$

$$n=\begin{cases}1, & \text{\textit{фамилия студента начинается с} } А-Д\\ 2, & \text{\textit{фамилия студента начинается с} } Е-К\\ 3, & \text{\textit{фамилия студента начинается с}} Л-П\\ 4, & \text{\textit{фамилия студента начинается с} } Р-Ф\\ 5, & \text{\textit{фамилия студента начинается с} } Х-Я\end{cases}$$

2.10. Исследовать систему на наблюдаемость в зависимости от параметра значение a.

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=-ax_1(t)\end{cases}$$

$$y_1(t)=2x_1(t)+\mathrm{x}_2(t)$$

$$y_2(t)=x_1(t)-\mathrm{x}_2(t)$$