ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Ш.ЕСЕНОВ АТЫНДАҒЫ КАСПИЙ МЕМЛЕКЕТТІК ТЕХНОЛОГИЯЛАР ЖӘНЕ ИНЖИНИРИНГ УНИВЕРСИТЕТІ

ЖАРАТЫЛЫСТАНУ ҒЫЛЫМИ МАМАНДЫҚТАР КАФЕДРАСЫ

М.Ш. ТІЛЕПИЕВ
Б.Т. ҚҰЛЖАҒАРОВА

МАТЕМАТИКА 1
ЕСЕПТЕР МЕН ЖАТТЫҒУЛАР

Оқу құралы

Ақтау-2010

ӘОЖ 51(075.8)
ББК22.1я73
Т93

Пікір берушілер: Ш. Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университеті профессоры, ф.-м.ғ.д. Н.Р.Садыков

Ш.Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университеті доценті, ф.-м.ғ.к. Э.Ұ.Уразмағамбетова

Алматы энергетика және байланыс институтының доценті, ф.-м.ғ.к. М.Ж.Байсалова

М.Ш. Тілепиев, Б.Т. Құлжағарова

Математика 1. Есептер мен жаттығулар: Оқу құралы/ Тілепиев М.Ш., Құлжағарова Б.Т. - Ақтау, Ш.Есенов атындағы КМТжИУ, 2010. - 144 б.

ISBN 978-601-226-054-0

Бұл оқу құралы Ш. Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университетінде оқитын барлық техникалық мамандықтардың Математика 1 пәнінің бағдарламасына сәйкес жасалған.

ӘОЖ 51(075.8)
ББК22.1я73

Ш.Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университетінің Оқу-әдістемелік Кеңесінің шешімімен баспаға ұсынылды.
Хаттама №2 23.12.2009 ж.

ISBN 978-601-226-054-0

КІРІСПЕ

Қазіргі ғылым мен техникада математикалық зерттеулер, модельдер, жобалар өте үлкен роль атқарады. Ол қазіргі ақпараттар жүйесінің дамуына тікелей байланысты. Демек математикалық нақты сандар шешімін табуға табысты қолдану мүмкіншілігін кеңейтеді.

Математика фундаменталды пән, одан дәріс беру төменгі жағдайды қарастырады:
а) ойдың логикалық және алгоритмдік дамуын;
ә)негізгі зерттеу әдістерін меңгеру және математикалық есептердің шешімдерін таба білу;
б) математикалық негізгі сандық әдістерін меңгеру және оны компьютерде орындау;
в) математикалық білімді өз бетінше ұғып алуға еңбектену, қолданбалы инженерлік және экономикалық есептерге талдау жүргізу.

Математиканың жалпы курсы дәстүрлі мамандар үшін оқу жоспары бойынша арнайы және жалпы техникалық пәндерді табысты оқытуға маңызды мәні бар инженерлер білімдерінің математикалық фундаментін қалайды.

«Математика 1. Есептер мен жаттығулар» оқулығы, «Математика 1» пәнінің бағдарламасына сәйкес кредиттік жүйеге лайықты етіліп жазылған.

Мұнда аналитикалық геометрия және векторлық алгебра, бір айнымалы функциялар, оларды дифференциалдау және интегралдау тақырыптары бойынша теориялық материалдар, сонымен қатар үлгі-мысалдардың шешу жолдары көрсетіліп, соңында өзбетімен орындау үшін жаттығулар жауаптарымен берілген.

1 СЫЗЫҚТЫҚ ЖӘНЕ ВЕКТОРЛЫҚ АЛГЕБРА ЭЛЕМЕНТТЕРІ
1.1 АНЫҚТАУЫШТАР

1. Екінші және үшінші ретті анықтауыштар. *Екінші ретті анықтауыш* деп $\grave{a}_{11} \cdot \grave{a}_{22} - \grave{a}_{12} \cdot \grave{a}_{21}$ санын айтады, ол мына таңбамен белгіленеді

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21},$$

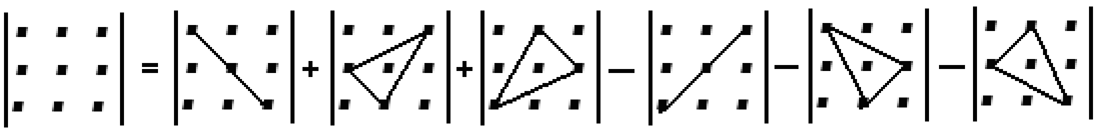
мұндағы a_{ij} $(i = 1,2,\ j = 1,2)$ сандары – екінші ретті анықтауыш элементтері, i жол, ал j баған нөмірін анықтайды.

Үшінші ретті анықтауыш деп

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} -$$

$$- a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \qquad (1.1)$$

санын айтады. Үшінші ретті анықтауыштың мәні Саррюс (не үшбұрыштар) ережесі деп аталатын келесі сұлба бойынша былай есептелінеді:



мұнда алғашқы үш қосылғыш өз таңбасымен, соңғы үш қосылғыш қарама-қарсы таңбасымен алынады.

2. n- ші ретті анықтауыш. *n- ші ретті анықтауыш* деп

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots \ldots \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{[j_1 j_2 \ldots j_k]} \cdot a_{1 j_1} \cdot a_{2 j_2} \ldots \cdot a_{n j_n}$$

қосындыны айтады, мұндағы қосу белгісі 1,2,3,…, n сандарынан анықталған барлық алмастырулар бойынша алынған (барлық алмастыру саны n!- ға тең), $a_{ij}\ (i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n})$ анықтауыштың элементтері және ол i - жол пен j - бағандарының қиылысуында орналасқан. n-ші ретті анықтауыш n жол және n бағандардан тұрады, бірінші i индексі жолдың, ал екінші j индексі бағанның нөмірін көрсетеді.

Төртінші және одан да жоғарғы ретті анықтауыштарды есептеу үшін анықтауыштың қасиеттерін білу қажет.

А н ы қ т а у ы ш қ а с и е т т е рі.

1^0. Анықтауыштың жолын (не бағанын) сәйкес бағанымен (не жолымен) орын алмастырсақ (транспонирлесек), онда анықтауыштың мәні өзгермейді:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

2^0. Анықтауыштың екі жолын (бағанын) орнын алмастырсақ, онда анықтауыш таңбасы қарама- қарсыға өзгереді.

3^0. Анықтауыштың қандай да бір жолының (бағанының) барлық элементтерін k санына көбейтсек, онда анықтауыш мәні k есе артады.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & k\,a_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

4^0. Анықтауыштың екі жолының (бағанының) сәйкес элементтері тең болса, онда анықтауыш нөлге тең болады.

5^0. Анықтауыштың екі жолының (бағанының) сәйкес элементтері пропорционал болса, онда анықтауыш нөлге тең болады.

6^0. Анықтауыштың қандай да бір жолының (бағанының) элементтері екі қосылғыштан тұрса, онда ол анықтауыш мәні екі анықтауыштың мәндерінің қосындысына тең болады:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & в_{12} \\ a_{21} & в_{22} \end{vmatrix}.$$

7^0. Анықтауыштың қандай да бір жолының (бағанының) барлық элементтерін k санына көбейтіп, екінші бір жолының (бағанының) сәйкес элементтеріне коссақ, онда анықтауыш мәні өзгермейді.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+k\,a_{12} & a_{12} \\ a_{21}+k\,a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Анықтауыштың a_{ij} элементінің M_{ij} *миноры* деп, осы анықтауыштың i-ші жолы мен j-ші бағанын сызып тастағаннан қалған анықтауышты айтады, яғни

Анықтауыштың a_{ij} элементінің A_{ij} *алгебралық толықтауышы* деп, $(-1)^{i+j}$ таңбасымен алынған осы элементтің минорын айтады, яғни

8^0. Анықтауыштың мәні оның қандай да бір жолының (бағанының) барлық элементтерін сәйкес алгебралық толықтауыштарына көбейтіп қосқанға тең.

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}A_{ij}, \qquad j=\overline{1,n}\ .$$

1. $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$ анықтауышын есептеу керек.

Шешуі: $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 4\cdot 5 - (-3)\cdot(-2) = 14.$ ▲

2. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & -6 \end{vmatrix}$ анықтауышын есептеу керек.

Шешуі: Саррюс ережесі бойынша, яғни (1.1) формуланы пайдалансақ, онда

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot(-6) + 3\cdot 4\cdot 1 + (-1)\cdot(-5)\cdot(-3) - 3\cdot 2\cdot(-3) - 2\cdot(-5)\cdot 1 - (-1)\cdot 4\cdot(-6) = -23.$$

▲

3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ анықтауышының a_{21} элементінің минорын есептеу керек. Шешуі:
$a_{21} = -5, M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11.$ ▲

4. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & -6 \end{vmatrix}$ анықтауышын екінші баған элементтері арқылы жіктеп есептеу керек.
Шешуі:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & -6 \end{vmatrix} = (-1)\cdot A_{12} + 2\cdot A_{22} + 1\cdot A_{32} = -(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -23$$

. ▲

5. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ анықтауышын есептеу керек.

Шешуі: Келесі түрлендірулерді жасаймыз:
1) 2-ші жол элементтерін (-3)-ке көбейтіп, 1-ші жолдың сәйкес элементтеріне қосамыз.
2) 3-ші жол элементтеріне 2 еселенген 2-ші жол элементтерін қосамыз.
3) 4-ші жол элементтерінен 2-ші жол элементтерін шегереміз. Сонда берілген анықтауыштардың мүрі мынадай болады:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Бұл анықтауышты 1-ші баған элементтері бойынша жіктейміз:

$$\Delta = 1\cdot A_{21} = 1\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

1-ші жол элементтерін 2-ші жол элементтеріне және 3-ші жол элементтеріне қосамыз, сонда:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{vmatrix}$$

Осы анықтауышты 2-ші не 3-ші жол немесе 1-ші баған элементтері бойынша жіктеуге болады. Мысалы, 2-ші жол бойынша жіктейік:

$$\Delta = 7\cdot A_{22} = 7\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 0 & -10 \end{vmatrix} = 7\cdot(-10+0) = -70.$$ ▲

Келесі анықтауыштарды есептеу керек:

6. $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -5 & 10 \end{vmatrix}$ **Ж:** 60.

7. $\begin{vmatrix} -\cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$ **Ж:** 1.

8. $\begin{vmatrix} tg\alpha & 1 \\ -1 & tg\alpha \end{vmatrix}$ **Ж:** $\frac{1}{cos^2\alpha}$.

9. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ **Ж:**-29.

10. $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix}$ **Ж: -44.**

11. $\begin{vmatrix} a & a & в \\ в & 0 & a \\ в & в & a \end{vmatrix}$ **Ж:** $b(b^2-a^2)$.

12. $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$ анықтауыштың мәні *а*-ның қандай мәнінде 0-ге тең болады? **Ж:** *а*=1, *а*= -2.

13. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ анықтауышын:

а) Саррюс ережесі бойынша,

ә) 1-ші жол элементтері бойынша жіктеп,

б) 2-ші баған элементтері бойынша жіктеп есептеу керек.

Ж: а)-20, ә)-20, б)-20.

14. $\Delta = \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$ **Ж:** 0. (Нұсқау: 1-ші бағанға 3-ші бағанды қосқан жөн).

15. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ **Ж:**18.

16. $\begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$ **Ж:**180.

17. $\begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \\ \cos 2\beta & \cos^2\beta & \sin^2\beta \\ \cos 2\gamma & \cos^2\gamma & \sin^2\gamma \end{vmatrix}$ **Ж:**0.

18. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ **Ж:**28.

19. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$ **Ж:**12.

20. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ **Ж:**180.

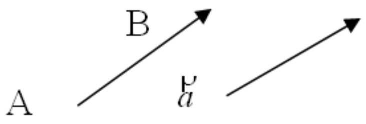
21. $\begin{vmatrix} a & в & в & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **Ж:** *2а+в.*

1.2 ВЕКТОРЛЫҚ АЛГЕБРА ЭЛЕМЕНТТЕРІ

1. Векторлар. Кез келген сандар математикада, физикада, механикада және т.б. екі түрлі шамамен сипатталады. Оң (не теріс) санмен берілген шамаларды скаляр шамалар деп, ал сандық мәнімен қоса бағытын да білу қажет шамаларды векторлық шамалар деп атайды. Мысалы, үдеу, жылдамдық, күш – векторлық шамалар болып табылады.

Вектор деп бағытталған кесіндіні айтады.

Берілген вектор екі үлкен (не кіші бір) латын әріпімен белгіленеді. Мысалы, $\overrightarrow{AB}$ - вектор, A - осы вектордың бас нүктесі, ал B - ұшы.



2.1 Сурет

Берілген $\overrightarrow{AB}$ векторының ұзындығы (модулі): $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ немесе $|\vec{a}|$ деп белгіленеді.

$\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ - *нөлдік* вектор. $|\vec{e}| = 1$ болса, онда $\vec{e}$ - *бірлік* вектор.

Үш өлшемді R^3 кеңістігінде декарттық координат жүйесі енгізілсін. $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ - нүктелері берілсе, онда $\overrightarrow{AB}$ векторының *координаттары*:

$\overrightarrow{AB}\ \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ немесе $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$;

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ - вектор ұзындығы.

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \{a_x, a_y, a_z\}$ векторының ұзындығы $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}$,

$\vec{a}$ векторының координата осьтерімен жасайтын бұрыштары α, β, γ болса, яғни $\alpha = (\vec{a}\wedge, OX),\ \beta = (\vec{a}\wedge, OY),\ \gamma = (\vec{a}\wedge, OZ)$, онда

$\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma - \vec{a}$ векторының *бағыттаушы косинустары* деп аталады.

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ теңдігі орындалады.

Егер векторлар бір түзудің бойында немесе параллель түзулердің бойында жатса, онда мұндай векторлар *коллинеар* векторлар деп аталады.

Коллинеар, бағыттас және модульдері бірдей векторларды *тең векторлар* дейді.

Векторға коллинеар, модулі тең, бірақ қарама-қарсы бағытталған вектор *қарама-қарсы вектор* деп аталады. $\vec{a}$ және $-\vec{a}$ -қарама-қарсы векторлар.

Параллель жазықтықтардың немесе бір жазықтықтың бойында жатқан векторларды *компланар векторлар* дейді.

2. Векторларға қолданылатын амалдар.

а) в е к т о р л а р д ы қ о с у. Берілген $\vec{a}$ мен $\vec{в}$ векторлардың қосындысы деп бас нүктесі $\vec{a}$ векторының бас нүктесімен үйлесетін, ал ұшы $\vec{в}$ векторының ұшымен үйлесетін $\vec{c} = \vec{a} + \vec{в}$ векторын айтады.

Егер векторлар координаттарымен берілсе, яғни $\vec{a} = a_x i + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},\ \vec{в} = в_x\vec{i} + в_y j + в_z\vec{k}$, онда

$$\vec{a} + \vec{в} = (a_x + в_x)\vec{i} + (a_y + в_y)\vec{j} + (a_z + в_z)\vec{k};$$

ә) в е к т о р л а р д ы   а з а й т у. $\vec{a}$ мен $\vec{в}$ векторларының айырмасы деп бас нүктесі $\vec{в}$ векторының ұшымен үйлесетін, ал ұшы $\vec{a}$ векторының ұшымен үйлесетін $\vec{c}=\vec{a}-\vec{в}$ векторын айтады.

Векторлардың айырмасын қосу амалын пайдаланып та табуға болады:

$$\vec{a}-\vec{в}=\vec{a}+(-\vec{в}).$$

б) в е к т о р д ы   с а н ғ а   к ө б е й т у. Берілген $\vec{a}$ векторын λ санына көбейту деп келесі шарттарды қанағаттандыратын $\vec{в}=\lambda\,\vec{a}$ векторын айтады:

1) $|\vec{в}|=|\lambda|\,|\vec{a}|$; 2) $\vec{a}$ мен $\vec{в}$ векторлары коллинеар: егер $\lambda>0$ болса, онда $\vec{a}$ мен $\vec{в}$ векторлары бағыттас, ал $\lambda<0$ болса, онда олардың бағыттары қарама-қарсы бағыттас болады.

22. $\vec{a}=\{3:-3;-4\}$ векторының модулін және бағыттаушы косинустарын табу керек.

Шешуі: $|\vec{a}|=\sqrt{9+9+16}=\sqrt{34}$; $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{34}}$; $\cos\beta=-\frac{3}{\sqrt{34}}$; $\cos\gamma=-\frac{4}{\sqrt{34}}$. ▲

23. АВС үшбұрышында АВ қабырғасы М және N нүктелерімен үш бірдей бөлікке бөлінген: $|AM|=|MN|=|NB|$. Егер $\vec{CA}=\vec{a}$, $\vec{CB}=\vec{b}$ болса, онда $\vec{CM}$ -ын табу керек.

Шешуі: $\vec{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ екені белгілі. Ендеше, $\vec{AM}=\frac{1}{3}(\vec{b}-\vec{a})$. $\vec{CM}=\vec{CA}+\vec{AM}$ болғандықтан, $\vec{CM}=\vec{a}+\frac{1}{3}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{1}{3}(2\vec{a}+\vec{b})$. ▲

24. А(1;3;2) және В(5;8;-1) нүктелері берілген. $\vec{a}=\vec{AB}$ векторының координаттарын табу керек.

Шешуі: В және А нүктелерінің сәйкес координаттарының айырмасы $\vec{AB}$ векторының координат осьтеріндегі проекциялары болып табылады: $a_x=5-1=4$, $a_y=8-3=5$, $a_z=-1-2=-3$. Сондықтан, $\vec{AB}=4\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$. ▲

25. $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}-\frac{1}{5}(4\vec{i}+8\vec{j}+3\vec{k})$ векторының модулін және бағыттаушы косинустарын табу керек?

Ж: $|\vec{a}|=\frac{3}{5}$; $\cos\alpha=\frac{1}{3}$; $\cos\beta=\cos\gamma=\frac{2}{3}$.

26. $\mathrm{M}_1(1;2;3)$ және $\mathrm{M}_2(3;-4;6)$ нүктелері берілген. $\vec{M_1M_2}$ векторының ұзындығын және бағытын табу керек.

Ж: $|\vec{M_1M_2}|=7$; $\cos\alpha=\frac{2}{7}$, $\cos\beta=-\frac{6}{7}$, $\cos\gamma=\frac{3}{7}$.

27. $\vec{a}=4\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ векторы берілген. Егер $|\vec{b}|=|\vec{a}|$, $b_y=a_y$ және $b_x=0$ екені белгілі болса, $\vec{b}$ векторын табу керек.

Ж: $\vec{b}=-2\vec{j}+5\vec{k}$ немесе $\vec{b}=-2\vec{j}-5\vec{k}$.

1.3 ВЕКТОРЛАРДЫ КӨБЕЙТУ

1. Векторлардың скаляр көбейтіндісі. Екі $\vec{a}$ мен $\vec{в}$ *векторларының скаляр көбейтіндісі* деп осы векторлардың ұзындықтары мен арасындағы бұрышының косинусының көбейтіндісіне тең санды айтады. $\vec{a}\cdot\vec{в}=(\vec{a},\vec{в})=|\vec{a}|\,|\vec{в}|\cos(\vec{a}\wedge,\vec{в})$.

Егер $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\quad \vec{в}=в_x\vec{i}+в_y\vec{j}+в_z\vec{k}$ координаттарымен берілсе, онда

$$\vec{a}\cdot\vec{в}=a_xв_x+a_yв_y+a_zв_z.$$

Скаляр көбейтіндінің қасиеттері:

а) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$, немесе $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$ (*скаляр квадрат* деп аталады);

ә) $\vec{a}\cdot\vec{в}=0$ - болса, онда $\vec{a},\vec{в}$ - өзара перпендикуляр векторлар (не екі вектордың біреуі нөлдік вектор).

б) орын ауымтырымдылық заңы: $\vec{a}\cdot\vec{в}=\vec{в}\cdot\vec{a}.$

в) терімділік заңы: $\alpha\vec{a}\cdot\vec{в}=\vec{a}\cdot\alpha\vec{в}=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{в}).$

г) үлестірімділік заңы: $(\vec{a}+\vec{в})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{в}\cdot\vec{c}.$

Скаляр көбейтіндінің физикалық мағынасы: Материалдық нүктені $\vec{F}$ күші әсерінен $\vec{S}$ жолға жылжыту кезіндегі істелетін жұмыс мөлшерін табу үшін $\vec{F}$ және $\vec{S}$ векторларының скаляр көбейтіндісін тапсақ жеткілікті, яғни $A=\vec{F}\cdot\vec{S}=|\vec{F}|\cdot|\vec{S}|\cos\varphi$.

28. $\vec{a}$ және $\vec{a}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табу керек**.**
$\vec{a}=\{1, -5, 12\}$, $\vec{в}=\{1, 5, 2\}$.
Шешуі: $\vec{a}\vec{в}=1\cdot1+(-5)\cdot5+12\cdot2=1-25+24=0$, яғни $\vec{a}$ және $\vec{в}$ векторлары ортогональды. ▲

29. $\vec{a}=m\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ және $\vec{b}=4\vec{i}+m\vec{j}-7\vec{k}$ векторлары берілген. *m*-нің қандай мәнінде векторлар перпендикуляр болады?

Шешуі: Осы векторлардың скаляр көбейтіндісін табайық: $\vec{a}\cdot\vec{b}=4m+3m-28$. $\vec{a}\perp\vec{b}$ болғандықтан $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ болады. Бұдан $7m-28=0$, яғни $m=4$. ▲

30. $|\vec{a}|=2$**,** $|\vec{b}|=3$**,** $\vec{a}\perp\vec{b}$ екені белгілі. $(5\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$ көбейтіндісін табу керек.
Шешуі:

$$(5\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=10\vec{a}^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}+6\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{b}^2=10\vec{a}^2-3\vec{b}^2=40-27=13.\ ▲$$

31. $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3k$ және $\vec{b}=6\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$ векторларының арасындағы бұрышты табу керек.

Шешуі: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$ болғандықтан, $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$. Мұндағы $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot6+2\cdot4+3\cdot(-2)=8$, $\vec{a}=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$, $\vec{b}=\sqrt{36+16+4}=2\sqrt{14}$. Сондықтан, $\cos\varphi=\dfrac{8}{\sqrt{14}\cdot2\sqrt{14}}=\dfrac{2}{7}$ және $\varphi=\arccos\dfrac{2}{7}$. ▲

32. $3\vec{a}-2\vec{b}$ және $5\vec{a}-6\vec{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісін $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=6$, $\left(\vec{a},\hat{\vec{b}}\right)=\frac{\pi}{3}$ екенін ескере отырып табу керек.
Ж: -96.
33. $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$ және $\vec{b}=4\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$ векторларының арасындағы бұрышты анықтау керек.
Ж: $\arccos\frac{17}{50}$.
34. $\vec{a}=m\vec{i}+\vec{j}$ мен $\vec{b}=3\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$ векторлары *m*-нің қандай мәнінде перпендикуляр болады?
Ж: $m=1$.
35. $2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}$ және $5\vec{a}+6\vec{b}+7\vec{c}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табу керек, мұндағы $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$, $(\vec{a}\hat{}\vec{b})=(\vec{a}\hat{}\vec{c})=(\vec{b}\hat{}\vec{c})=\frac{\pi}{3}$.
Ж: 547.

36. Егер $|\vec{F}|=2$, $|\vec{S}|=5$ және $\varphi=(\vec{F}\hat{}\vec{S})=\frac{\pi}{6}$ болса, $\vec{S}$ орын ауыстырғанда $\vec{F}$ күшінің әсерінен істелетін жұмыс мөлшерін табу керек.
Ж: $\vec{A}=\vec{F}\cdot\vec{S}=|\vec{F}|\cdot|\vec{S}|\cdot\cos\varphi=5\sqrt{3}$.
37. $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ және $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ векторларына перпендикуляр бірлік векторды табу керек.
Ж: $\pm\frac{1}{\sqrt{11}}\left(\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}\right)$.

2. Векторлардың векторлық көбейтіндісі. $\vec{a}$ және $\vec{в}$ векторларының *векторлық көбейтіндісі* деп $\vec{a}\times\vec{в}$ $(\textit{немесе } [\vec{a},\vec{в}])$ белгіленетін және келесі шарттарды қанағаттандыратын $\vec{c}$ векторды айтады:
а) $|\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{в}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|\sin\varphi,\ \ \varphi=(\vec{a}\hat{},\vec{в})$;
ә) $\vec{c}$ векторы $\vec{a}$, $\vec{в}$ векторлардың әрқайсысына перпендикуляр: $\vec{c}\perp\vec{a}, \vec{c}\perp\vec{в}$;
б) OZ осі OX, OY осьтеріне қарағанда қалай бағытталса $\vec{c}$ векторы $\vec{a},\vec{в}$ векторларына қарағанда солай бағытталған, яғни $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\vec{c}$ - оң үштік құрайды.
Векторлық көбейтіндінің қасиеттері.
а) $\vec{a}\times\vec{в}=0$ болады, егер $\vec{a}=\vec{0}$ не $\vec{в}=\vec{0}$ не $\vec{a}\,//\,\vec{в}$;
ә) векторлық көбейту коммутативті емес: $\vec{a}\times\vec{в}=-(\vec{в}\times\vec{a})$;
б) терімділік заңы: $(\lambda\,\vec{a})\times\vec{в}=\vec{a}\times(\lambda\,\vec{в})=\lambda(\vec{a}\times\vec{в})$;
в) үлестірімділік заңы: $(\vec{a}+\vec{в})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{в}\times\vec{c},\ \ c\times(\vec{a}+\vec{в})=\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{в}$.
Ортақ бір нүктеден шығатын коллинеар емес $\vec{a}$ мен $\vec{в}$ векторларының векторлық көбейтіндісі $S=|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{в}|\sin\varphi,\ \varphi=(\vec{a}\hat{},\vec{в})$ - сол векторлардан құралған параллелограмм ауданын анықтайды.

Егер $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},\ \vec{в} = в_x\vec{i} + в_y j + в_z\vec{k}$ векторлары координаталарымен берілсе, онда $\vec{a}$ және $\vec{в}$ векторларының векторлық көбейтіндісі

$$\vec{a}\times\vec{в} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ в_x & в_y & в_z \end{vmatrix}$$

формуласымен есептелінеді.

38. $\vec{a}$= {3, -4, 2} және $\vec{в}$= {1, 5, 1} векторларының векторлық көбейтіндісін табу керек

Шешуі: $[\vec{a}, \vec{в}] = \left\{ \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \right\}$ ={-14, -1, 19}. ▲

39. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ және $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ векторларының векторлық көбейтіндісін табу керек.

Шешуі: $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, яғни $\vec{a}\times\vec{b} = -7\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$. ▲

40. $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ және $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$ векторлары арқылы тұрғызылған параллелограмм ауданын табу керек.

Шешуі: $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 14\vec{i} - 42\vec{j} - 21\vec{k}$.

Векторлық көбейтіндінің модулі ол векторлар арқылы тұрғызылған параллелограмм ауданына тең болғандықтан: $S = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{14^2 + 42^2 + 21^2} = 49$ (кв. бірлік) болады. ▲

41. Төбелері А(1;1;1;), В(2;3;4), С(4;3;2) болатын үшбұрыш ауданын есепттеу керек.

Шешуі: $\vec{AB}, \vec{AC}$ векторларын табайық:

$$\vec{AB} = (2-1)\vec{i} + (3-1)\vec{j} + (4-1)\vec{k} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k},$$

$$\vec{AC} = (4-1)\vec{i} + (3-1)\vec{j} + (2-1)\vec{k} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}.$$

ΔABC-ның ауданы $\vec{AB}, \vec{AC}$ арқылы тұрғызылған параллелограмм ауданының жартысына тең, сондықтан бұл векторлардың векторлық көбейтіндісін табамыз:

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}.$$

Бұдан, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{16+64+16} = \sqrt{24}$ (кв.бірлік). ▲

42. Егер $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $(\vec{a}\hat{\ }\vec{b}) = 30^\circ$ екені белгілі болса, $\vec{a} + 3\vec{b}$ және $3\vec{a} + \vec{b}$ векторлары арқылы тұрғызылған параллелограмм ауданын есептеу керек.

Шешуі:

$$(\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{a}+\vec{b})=3\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+9\vec{b}\times\vec{a}+3\vec{b}\times\vec{b}=3\cdot 0+\vec{a}\times\vec{b}-9\vec{a}\times\vec{b}+3\cdot 0=-8\vec{a}\times\vec{b}$$

(себебі, $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{b}=0$, $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$).

Сонымен, $S=8\cdot\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=8\cdot 1\cdot 1\cdot\sin 30^\circ=4$ (кв.бірлік) . ▲

43. $\vec{a}(2;5;1)$ және $\vec{b}(1;2;-3)$ векторларының векторлық көбейтіндісін табу керек.

Ж: $\vec{a}\times\vec{b}=-17\vec{i}+7\vec{j}-\vec{k}$.

44. $\mathrm{A}(2;2;2)$, $\mathrm{B}(4;0;3)$, $C(0;1;0)$ төбелері болатын үшбұрыш ауданын есептеу керек.

Ж: $\sqrt{65}/2$ кв.бірлік.

3. Аралас көбейтінді. $\vec{a},\vec{в},\vec{c}$ векторларының *аралас көбейтіндісі* деп $\vec{a}\times\vec{в}$ векторлық көбейтіндісін $\vec{c}$ -на скаляр көбейткенде шығатын санды айтады.

$\vec{a},\vec{в},\vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісі $\vec{a}\,\vec{в}\,\vec{c}$ немесе $(\vec{a},\vec{в},\vec{c})$ деп белгіленеді.

А р а л а с к ө б е й т і н д і н і ң қ а с и е т т е р і.

а) $\vec{a}\vec{в}c=-(\vec{в}\vec{a}\vec{c})=-(\vec{a}\vec{c}\vec{в})$- егер көбейтіндідегі көршілес екі вектордың орнын алмастырсақ, онда сол аралас көбейтіндінің таңбасы қарама - қарсыға өзгереді;

ә) $\vec{a}\vec{в}c=\vec{в}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{в}$- егер аралас көбейтіндідегі векторлардың орнын толық алмастырсақ, аралас көбейтіндінің таңбасы өзгермейді.

б) $\vec{a},\vec{в},\vec{c}$ векторлары компланар болса, онда $\vec{a}\,\vec{в}\,\vec{c}=0$ (үш вектордың компланарлық шарты).

Егер $\vec{a},\vec{в},\vec{c}$ векторлары координаттарымен берілсе: $\vec{a}=a_x i+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{в}=в_x i+в_y\vec{j}+в_z\vec{k}$, $\vec{c}=c_x i+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$, онда олардың аралас көбейтіндісі келесі формуламен есептелінеді:

$$(\vec{a}\times\vec{в})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ в_x & в_y & в_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

Компланар емес $\vec{a},\vec{в},\vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісінің модулі осы векторлар арқылы тұрғызылған параллелипипедтің көлеміне тең болады: $V_{пар-д}=|\vec{a}\vec{в}\vec{c}|$.

45. $\vec{a}$= {-3, 2, -1}, $\vec{в}$ = {2, 1, 0}, $\vec{c}$= {-1, 3, -1} векторларының аралас көбейтіндісін табу керек.

Шешуі: $\vec{a}\vec{в}\vec{c}=\begin{vmatrix}-3 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & -1\end{vmatrix}=0,$ векторлар компланар. ▲

46. $\vec{a}=\{1,3,1\}$, $\vec{b}=\{-2,4,-1\}$, $\vec{c}=\{2,4,-6\}$ векторларын компланарлыққа тексеру керек.

Шешуі:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ -2 & 4 & -1\\ 2 & 4 & -6\end{vmatrix}=-16\neq 0.$$

Демек, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторлары компланар емес. ▲

47. $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$ векторларының аралас көбейтіндісін табу керек.

Шешуі:
$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 3 & -1\\ 1 & 1 & 4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=26+5+2=33$$
. ▲

48. $\vec{a}=2\vec{i}+5\vec{j}+7\vec{k}, \vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ векторлары компланар екенін дәлелдеу керек.

Шешуі: Векторлардың аралас көбейтіндісін табамыз:
$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}2 & 5 & 7\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}-5\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+7\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=8-15+7=0$$
.

$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$ болғандықтан, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторлары компланар. ▲

49. *A(2;2;2), B(4;3;3), C(4;5;4), Д(5;5;6)* - төбелері болатын үшбұрышты пирамида көлемін табу керек.

Шешуі: Пирамида қырлары болатын *A* төбесінен шығатын $\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}$ векторларын табамыз: $\vec{AB}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k},$ $\vec{AC}=2\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{AD}=3\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$. Олардың аралас көбейтіндісі:
$$\vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot\vec{AD}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 3\end{vmatrix}=2\cdot6-1\cdot2-1\cdot3=7.$$

Пирамида көлемі параллелепипед көлемінің $\frac{1}{6}$ бөлігіне тең болғандықтан, $V=\frac{1}{6}\cdot7=\frac{7}{6}$ (куб бірлік). ▲

50. $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})$ векторлардың аралас көбейтіндісін есептеу керек.

Шешуі: $(\vec{a}-\vec{b})+(\vec{b}-\vec{c})+(\vec{c}-\vec{a})\ =0$ екені белгілі. Сондықтан, бұл векторлар -компланар. Ал бұдан, олардың аралас көбейтіндісі 0-ге теңдігі шығады:
$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$$
. ▲

51. $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ векторларының аралас көбейтіндісін табу керек. **Ж:** 4.

52. $\vec{a}=7\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$, $b=3\vec{i}-7\vec{j}+8\vec{k}$, $c=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ векторларын компланарлыққа тексеру керек. **Ж:** Компланар.

53. A(0;0;1), B(2;3;5), C(6;2;3) және D(3;7;2) төбелері болатын үшбұрышты пирамида көлемін есептеу керек. BCD жағына түсірілген пирамида биіктігін табу керек.

Ж: V=20 куб бірлік, $H=\frac{4}{17}\sqrt{510}$ бірлік.

54. A(5;7;-2), B(3;1;-1), C(9;4;-4) және D(1;5;0) нүктелері бір жазықта жататынын көрсету керек.

1.4 МАТРИЦА

1. Негізгі ұғымдар. m– жатық және n- тік жолдардан құралған тік бұрышты кесте түрінде берілген сандар жиынын $m\times n$ өлшемді *матрица* дейді, ол былай белгіленеді:

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{m1}\, a_{m2} \dots a_{mn} \end{Vmatrix} \quad \text{немесе} \quad A=\begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{m1}\, a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix},$$

мұндағы $(a_{ij}),\, i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n},$- матрицаның *элементтері* деп аталады, бірінші индекс i - матрицаның жатық жолының, ал екінші индкес j – тік жолының нөмірін анықтайды.

Егер m = n болса, онда ол матрица *квадрат матрица* деп, ал n *матрица реті* деп аталады.

Квадрат матрицаның $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ элементтері оның негізгі диагоналы, ал $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ элементтері қосалқы диагоналы деп аталады.

Квадрат матрица элементтерінен құралған анықтауышты матрица анықтауышы деп атап, $\det A$ немесе $\Delta(A)$ деп белгілейді.

Ескерту. Квадрат емес матрицаның анықтауышы болмайды, себебі анықтауыштар тек квадрат кесте түрінде беріледі.

Егер $\Delta(A)\neq 0$, онда A матрица *ерекше емес матрица* деп, ал егер $\Delta(A)=0$ болса, онда ол ерекше матрица деп аталады.

Егер A матрицаның жолдары A^* матрицаның бағандары болып келсе, онда A^* матрицасын A матрицасының *транспонирленген матрицасы* деп атайды.

Егер квадрат A матрица элементтері үшін $a_{ij}=a_{ji},\, i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n},$ теңдігі орындалса, онда A матрицасын *симметриялы* деп, ал $a_{ij}=-a_{ji}$ теңдігі орындалса, онда қиғаш симметриялы деп атайды.

Егер квадрат матрицаның негізгі диагоналының элементтерінен өзге элементтері нөлге тең болса, онда ол матрица *диагоналды матрица* деп аталады.

Егер диагоналды матрицаның барлық элементтері бірге тең болса, онда ол *бірлік матрица* деп аталады және ол E символымен белгіленеді.

Егер негізгі диагоналынан төмен орналасқан (жоғары орналасқан) элементтері нөлге тең болса, онда квадратты матрица *жоғары (төменгі) үшбұрышты матрица* деп аталады.

Егер матрица бір жолдан (бағаннан) тұрса, онда ол матрица *жол (баған) матрица* деп аталады.

Бірдей ретті A және B матрицаның сәйкес элементтері тең болса, яғни $a_{ij}=в_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,k},$ онда A және B *тең матрицалар* деп аталады.

2. Матрицаларға амалдар қолдану.

а) матрицаларды қосу. Бірдей ретті A мен B матрицаларының қосындысы деп элементтері берілген матрицалардың сәйкес элементтерінің қосындысына тең матрицаны айтады.

ә) санға көбейту. Кез келген A матрицаның α *санына көбейтіндісі* деп элементтері A матрицасының барлық элементтерін α-ға көбейткенде шығатын матрицаны айтады.

М а т р и ц а н ы с а н ғ а к ө б е й т у қ а с и е т т е р і.

1) сандар көбейткіштеріне терімділік қасиет $(\alpha \cdot \beta)A = \alpha(\beta A)$;
2) үлестірімділік қасиет $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$;
3) сандардың қосындысына үлестірімділік қасиет $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$;
4) $(-1)\cdot A = -A$;
5) $0 \cdot A = 0$;
6) $A - B = A + (-1)\cdot B$;

б) матрицаларды көбейту. Берілген $m\times n$-ретті A матрицаның $n\times k$-ретті B матрицаға *көбейтіндісі* деп, $m\times k$-ретті C матрицаны айтады: $C = A\cdot B$. Оның элементтері c_{ij} келесі формуламен анықталады: $c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{ij}\, в_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,k}.$

A матрицасын B матрицасына көбейту үшін A матрицасының бағандар саны B матрицасының жолдар санына тең болуы қажет, басқаша жағдайда көбейту мүмкін емес.

$AB = BA$ болуы да, болмауы да мүмкін.

Үшінші ретті A және B квадрат матрицаларының $A\cdot B$ көбейтіндісін қарастырайық:

$$C = A\cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} в_{11} & в_{12} & в_{13} \\ в_{21} & в_{22} & в_{23} \\ в_{31} & в_{32} & в_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}в_{11} + a_{12}в_{21} + a_{13}в_{31} & a_{11}в_{12} + a_{12}в_{22} + a_{13}в_{32} & a_{11}в_{13} + a_{12}в_{23} + a_{13}в_{33} \\ a_{21}в_{11} + a_{22}в_{21} + a_{23}в_{31} & a_{21}в_{12} + a_{22}в_{22} + a_{23}в_{32} & a_{21}в_{13} + a_{22}в_{23} + a_{23}в_{33} \\ a_{31}в_{11} + a_{32}в_{21} + a_{33}в_{31} & a_{31}в_{12} + a_{32}в_{22} + a_{33}в_{32} & a_{31}в_{13} + a_{32}в_{23} + a_{33}в_{33} \end{pmatrix}.$$

М а т р и ц а л а р д ы к ө б е й т у қ а с и е т т е р і.

1) терімділік қасиет $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$;
2) үлестірімділік қасиет $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$; $C(A+B) = CA + CB$;
3) $A\cdot E = E\cdot A = A$.

55. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ және $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ матрицаларының қосындысын табу керек.

Шешуі: $\mathrm{A}+\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3+1 & 5+2 & 7+4 \\ 2+2 & -1+3 & 0-2 \\ 4-1 & 3+0 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. ▲

56. Егер $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ болса, 2A+5B матрицасын табу керек.

Шешуі: $2A = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$, $5B = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}$, $2A+5B = \begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 13 & -8 \end{pmatrix}$. ▲

57. $A=\begin{pmatrix}2&0&1&2\\1&3&2&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\\0&3\\5&0\end{pmatrix}$ матрицалары берілген. АВ матрицасын табу керек.

Шешуі: АВ = $\begin{pmatrix}2&0&1&2\\1&3&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&2\\0&3\\5&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+0+0+10&4+0+3+0\\1+9+0+5&2+6+6+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&7\\15&14\end{pmatrix}$. ▲

58. $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&3&1\\2&0&4\\1&2&3\end{pmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&-1&2\\3&2&1\end{pmatrix}$ матрицалары берілген, *АВ* және *ВА* көбейтінділерін табу керек.

Шешуі:

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}=\begin{pmatrix}1\cdot2+3\cdot1+1\cdot3 & 1\cdot1+3\cdot(-1)+1\cdot2 & 1\cdot0+3\cdot2+1\cdot1\\ 2\cdot2+0\cdot1+4\cdot3 & 2\cdot1+0\cdot(-1)+4\cdot2 & 2\cdot0+0\cdot2+4\cdot1\\ 1\cdot2+2\cdot1+3\cdot3 & 1\cdot1+2\cdot(-1)+3\cdot2 & 1\cdot0+2\cdot2+3\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0&7\\16&10&4\\13&5&7\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{B}\cdot\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2\cdot1+1\cdot2+0\cdot1 & 2\cdot3+1\cdot0+0\cdot2 & 2\cdot1+1\cdot4+0\cdot3\\ 1\cdot1-1\cdot2+2\cdot1 & 1\cdot3-1\cdot0+2\cdot2 & 1\cdot1-1\cdot4+2\cdot3\\ 3\cdot1+2\cdot2+1\cdot1 & 3\cdot3+2\cdot0+1\cdot2 & 3\cdot1+2\cdot4+1\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&6&6\\1&7&3\\8&11&14\end{pmatrix}.$$ ▲

59. $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}$ матрицалары берілген. A^3 матрицасын табу керек.

Шешуі: $\mathrm{A}^2=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9+2&6+8\\3+4&2+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&14\\7&18\end{pmatrix}$;

$$\mathrm{A}^3=\mathrm{A}^2\cdot\mathrm{A}=\begin{pmatrix}11&14\\7&18\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}33+14&22+56\\21+18&14+72\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}47&78\\39&86\end{pmatrix}.$$ ▲

60. $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&3&1\\4&1&1\end{pmatrix}$ және Е - 3-ші ретті бірлік матрица берілген. $2\mathrm{A}^2+3\mathrm{A}+5\mathrm{E}$ матрицасын табу керек.

Шешуі: $\mathrm{A}^2=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&3&1\\4&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&2\\1&3&1\\4&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&6&5\\8&11&6\\9&8&10\end{pmatrix}\Rightarrow 2\cdot\mathrm{A}^2=\begin{pmatrix}20&12&10\\16&22&12\\18&16&20\end{pmatrix}$

$3\mathrm{A}=\begin{pmatrix}3&3&6\\3&9&3\\12&3&3\end{pmatrix}$, $5\cdot\mathrm{E}=5\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}\Rightarrow 2\mathrm{A}^2+3\mathrm{A}+5\mathrm{E}=\begin{pmatrix}28&15&16\\19&36&15\\30&19&28\end{pmatrix}$. ▲

61. $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}5&8&4\\3&2&5\\7&6&0\end{pmatrix}$ матрицасы берілген. Бірлік матрица шығу үшін *А* матрицасына қандай В матрицасын қосу керек?

Ж: $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}-4 & -8 & -4\\ -3 & -1 & -5\\ -7 & -6 & 1\end{pmatrix}$.

62. $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ матрицасы берілген. $\mathrm{A}^2+\mathrm{A}+\mathrm{E}$ қосындысын табу керек.

Ж: $\begin{pmatrix}9 & 6 & 6\\ 6 & 9 & 6\\ 6 & 6 & 9\end{pmatrix}$.

3. Кері матрица. Егер A мен B матрицалары үшін AB мен BA көбейтінділері бар және $AB=BA=E$ болса, онда B матрицасын A матрицасының *кері матрицасы* деп атап, былай белгілейді: $B=A^{-1}$, яғни $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$, мұндағы $E-$ бірлік матрица.
Кез келген квадрат A матрицаның кері матрицасы

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta(A)}\cdot\begin{pmatrix}A_{11}\,A_{21}\dots A_{n1}\\ A_{12}\,A_{22}\dots A_{n2}\\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\ A_{1n}\,A_{2n}\dots A_{nn}\end{pmatrix}$$

формуласымен анықталады, мұндағы A_{ij} берілген A матрицаның элементтерінің алгебралық толықтауыштары, $\Delta(A)$- берілген A матрицасының анықтауышы.
$\Delta(A)=0$ жағдайда A матрицасының кері матрицасы болмайды.

63. $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$-матрицасының кері матрицасын табу керек.
Шешуі: Алдымен матрицаның анықтауышын есептейді:

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix}2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=27\neq 0,$$ олай болса, кері матрица табылады.

Ол мына формуламен анықталады: $\mathrm{A}^{-1}=1/\Delta\begin{pmatrix}\mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{31}\\ \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{22} & \mathrm{A}_{32}\\ \mathrm{A}_{13} & \mathrm{A}_{23} & \mathrm{A}_{33}\end{pmatrix}$,

$\mathrm{A}_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2+4=6,$ $\quad\mathrm{A}_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-(4+2)=-6,$

$\mathrm{A}_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4-1=3,$ $\quad\mathrm{A}_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-(-4-2)=6,$

$\mathrm{A}_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4-1=3,$ $\quad\mathrm{A}_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-(4+2)=-6,$

$\mathrm{A}_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=4-1=3,$ $\quad\mathrm{A}_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-(-4-2)=6,$

$\mathrm{A}_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=2+4=6,$

Олай болса, $A^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. ▲

64. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ матрицасының кері матрицасын A^{-1} табу керек.

Шешуі*:* *A* матрицасының анықтауышын есептейік.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 27 + 2 - 24 = 5$$

Осы анықтауыш элементтерінің алгебралық толықтауыштарын табамыз.

$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9$, $A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$, $A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4$,

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1$, $A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2$, $A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$,

$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -12$, $A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1$, $A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$.

Бұдан, $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/5 & -2/5 & -4/5 \\ 1/5 & 2/5 & -1/5 \\ -12/5 & 1/5 & 7/5 \end{pmatrix}$. ▲

65. $A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & -30 \\ 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ матрицасының кері матрицасын табу керек.

Ж: $\begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}7 \\ 0 & 0{,}1 & -0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

66. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ берілген. Табу керек: A^{-1}.

Ж: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$.

4. Матрица рангісі. A матрицаның нөлге тең емес минорларының ең жоғарғы реті оның *рангісі* деп аталады және ол $rang\,A$ немесе $r(A)$ деп белгіленеді.

Матрицаның рангісін табу үшін элементар түрлендірулер және минорларды көмкеру әдістері қолданады.

Элементар түрлендірулер деп мына түрлендірулерді айтады:

1) матрицаны транспонирлеу, яғни барлық жолдарын сәйкес бағандарымен алмастыру;

2) екі жолының (бағанының) орнын ауыстыру;
3) кез келген жол (баған) элементтерін $\lambda \neq 0$ санына көбейту;
4) кез келген жолының (бағанының) элементтерін $\lambda \neq 0$ санына көбейтіп, басқа кез келген жолының (бағанының) сәйкес элементтеріне қосу;
5) бірдей жол (баған) болса, біреуін алып тастау;
6) түгелдей нөлден тұратын жолды (бағанды) алып тастау;
Элементар түрлендірулер матрицаның рангісін өзгертпейді. Элементар түрлендіру жасап кез келген матрицаны бірлік матрицаға келтіруге болады. Диагональ бойындағы 1- лер саны матрицаның рангісіне тең болады.
Минорларды көмкеру әдісі мысалдар арқылы түсіндіріледі.

67. $A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ матрица рангісін табу керек.

Шешуі: A матрицасының барлық 2-ші және 3-ші ретті минорлары 0-ге тең, себебі бұл минорлардың барлық жолдары пропорционал. Ал, 1-ші ретті минорлар (матрица элементтері) 0-ге тең емес. Ендеше, матрица рангісі 1-ге тең. ▲

68. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$ матрица рангісін табу керек.

Шешуі: Матрицаның 2-ші жолын, сосын 2-ші, 3-ші және 4-ші бағандарын сызып тастасақ, берілген матрицаға эквивалентті $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$ матрицасын аламыз. $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ болғандықтан, берілген матрица рангісі 2-ге тең. ▲

69. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ берілген**.** Табу керек: $r(A)$.

Шешуі: 1-ші жолға 3-ші жолдың сәйкес элементтерін қосып, сосын 4-ке қысқартамыз:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

1-ші жол элементтерінен 2-ші жолдың сәйкес элементтерін азайтып, сосын 1-ші жолды сызып тастаймыз:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Соңғы матрица рангісі 2-ге тең, себебі мысалы $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$. Ендеше, берілген матрица рангісі де 2-ге тең. ▲

70. $A=\begin{pmatrix}4&3&2&2\\0&2&1&1\\0&0&3&3\end{pmatrix}$ берілген. Табу керек: $r(A)$.

Шешуі: 4-ші баған элементтерінен 3-ші баған элементтерін шегереміз, сосын 4-ші бағанды сызып тастаймыз:

$$A=\begin{pmatrix}4&3&2&2\\0&2&1&1\\0&0&3&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4&3&2&0\\0&2&1&0\\0&0&3&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4&3&2\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix}4&3&2\\0&2&1\\0&0&3\end{vmatrix}=24\neq 0$$

болғандықтан, матрица рангісі 3-ке тең. ▲

71. $A=\begin{pmatrix}3&2&1&2\\2&0&-1&1\\0&4&5&1\end{pmatrix}$ матрицасының рангісін табу керек.

Шешуі: A матрицасының рангісін минорларды көмкеру әдісі бойынша табайық.

$a_{11}=3\neq 0$ болғандықтан, оны көмкеріп, 2-ші ретті минор аламыз.

$$M=\begin{vmatrix}3&2\\2&0\end{vmatrix}=-4\neq 0$$

2-ші ретті минор нөлге тең емес болды, оны әрі қарай көмкеріп:

$$M=\begin{vmatrix}3&2&1\\2&0&-1\\0&4&5\end{vmatrix}=0$$ аламыз.

2-ші ретті минорды 3-ші жол және 4-ші бағанмен көмкерейік:

$$M=\begin{vmatrix}3&2&2\\2&0&1\\0&4&1\end{vmatrix}=0.$$

3-ші ретті екі көмкеруші минордың екеуі де 0-ге тең, ендеше, $r(A)=2$. ▲

72. $A=\begin{pmatrix}4&3&-1\\5&0&4\\2&1&2\end{pmatrix}$ матрица рангісін минорларды көмкеру әдісімен табу керек.

Шешуі: $a_{11}=4\neq 0$ болғандықтан, оны көмкеріп 2-ші ретті минор аламыз:

$$M=\begin{vmatrix}4&3\\5&0\end{vmatrix}=-15\neq 0.$$

2-ші ретті минор 0-ге тең емес болды. Оны көмкереміз, сонда:

$$M=\begin{vmatrix}4&3&-1\\5&0&4\\2&1&2\end{vmatrix}=-27\neq 0$$
.

Ендеше, $r(A)=3$. ▲

Матрица рангісін есептеу керек.

73. $A=\begin{pmatrix}1&4&-3&6\\2&5&1&-2\\1&7&-10&20\end{pmatrix}$ **Ж:** $r(A)=2$. **74.** $A=\begin{pmatrix}3&-2&1&-4\\2&-3&-2&1\\4&-1&4&9\end{pmatrix}$ **Ж:** $r(A)=2$.

75. $A=\begin{pmatrix}3&4&2&8\\2&-4&-3&-1\\1&5&1&0\end{pmatrix}$ **Ж:** $r(A)=3$. **76.** $A=\begin{pmatrix}5&-5&10&-1\\3&1&7&1\\1&7&4&3\end{pmatrix}$ **Ж:** $r(A)=2$.

77. $A=\begin{pmatrix}7&5&3&6\\2&-1&-1&4\\1&8&6&-6\end{pmatrix}$ **Ж:** $r(A)=2$. **78.** $A=\begin{pmatrix}1&2&3&6\\2&3&1&6\\3&1&2&6\end{pmatrix}$ **Ж:** $r(A)=3$.

79. $A=\begin{pmatrix}3&5&-1&2\\2&4&-1&3\\1&3&-1&4\end{pmatrix}$ **Ж:** $r(A)=2$. **80.** $A=\begin{pmatrix}5&-3&4&2\\3&2&-1&3\\1&7&-6&4\end{pmatrix}$ **Ж:** $r(A)=2$.

1.5 СЫЗЫҚТЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ

1. Негізгі ұғымдар. n белгісізі бар m сызықтық теңдеулер жүйесі берілсін.

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=в_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=в_2\\\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_nв_m\end{cases} \qquad (1.2)$$

мұндағы a_{ij}- жүйенің коэффициенттері нақты сандар (бірінші индексі i теңдеу нөмірін, ал екінші индекс j белгісіз айнымалы нөмірін көрсетеді), x_i- белгісіз айнымалылар, $в_i$- бос мүшелер ($i=\overrightarrow{1,m},\ j=\overrightarrow{1,k}$.),
$в_i=0$ болса, онда жүйе *біртекті* деп аталады.
Сызықтық теңдеулер жүйесінің коэффициенттерінен анықталған келесі матрица

$A=\begin{pmatrix}a_{11}\,a_{12}\dots a_{1n}\\a_{21}\,a_{22}\dots a_{2n}\\\dots\ \dots\ \dots\ \dots\\a_{m1}\,a_{m2}\dots a_{mn}\end{pmatrix}$ - *жүйе матрицасы*, $A'=\begin{pmatrix}a_{11}\,a_{12}\dots a_{1n}\,в_1\\a_{21}\,a_{22}\dots a_{2n}в_2\\\dots\ \dots\ \dots\ \dots\\a_{m1}\,a_{m2}\dots a_{mn}в_m\end{pmatrix}$ - *жүйенің кеңейтілген матрицасы* деп аталады.

Егер $x_1=\alpha_1,\ x_2=\alpha_2,\dots,x_n=\alpha_n$ - сандар жиыны (1.2) теңдеулер жүйесіндегі теңдеулердің барлығын қанағаттандырса, онда осы сандар жиыны сызықтық теңдеулер жүйесінің *шешімі* деп аталады.

Сызықтық теңдеулер жүйесінің кемінде бір шешімі бар болса, онда ол *үйлесімді жүйе*, ал егер бірде-бір шешімі жоқ болса, онда ол *үйлесімсіз жүйе* деп аталады.

2. Крамер ережесі. n белгісізі бар біртекті емес n сызықты теңдеулер жүйесі берілсін

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = в_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = в_2, \\ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = в_n. \end{cases} \qquad (1.3)$$

Жүйе матрицасының анықтауышы берілген сызықтық теңдеулер жүйесінің *анықтауышы* деп аталады.

(1.3) жүйенің анықтауышы нөлге тең болмасын, яғни $\Delta(A) \neq 0$:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1;k-1}\, a_{1k}\, a_{1,k+1} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2,k-1}\, a_{2k}\, a_{2,k+1} \ldots a_{2n} \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{n,k-1}\, a_{nk}\, a_{n,k+1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Осы анықтауыштың кез келген бағанының (мысалы, k-ші бағанының) элементтерін (1.3) жүйенің сәйкес бос мүшелер бағанымен орын алмастырғанда алынған анықтауышты Δ_k таңбасымен белгілейік:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1;k-1} & в_1 & a_{1,k+1} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2,k-1} & в_2 & a_{2,k+1} \ldots a_{2n} \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots & \ldots & \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{n,k-1} & в_n & a_{n,k+1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}, \ k = \overrightarrow{1,n}.$$

К р а м е р т е о р е м а с ы. Егер (1.3) біртекті емес сызықты теңдеулер жүйесінің негізгі матрицасының анықтауышы нөлге тең болмаса, онда ол жүйенің шешімі келесі формулалармен анықталады:

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta(A)}, \quad k = \overrightarrow{1,n}.$$

81. Берілген $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін Крамер тәсілімен шешу керек.

Шешуі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 102 \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 13 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -10 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 306, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 13 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -10 \end{vmatrix} = -102,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 3, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -1. \ ▲$$

82. $\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешу керек.

Шешуі: Келесі төрт анықтауышты есептейміз.

Жүйенің анықтауышы:

$$\Delta=\begin{vmatrix}5&-1&-1\\1&2&3\\4&3&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&-1\\11&-1&3\\19&1&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}11&-1\\19&1\end{vmatrix}=-(11+19)=-30\neq 0$$

Бұл анықтауыштың бірінші бағанын бос мүшелер бағанымен алмастырып, есептейік:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}0&-1&-1\\14&2&3\\16&3&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&-1\\14&-1&3\\16&1&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}14&-1\\16&1\end{vmatrix}=-(14+16)=-30$$

Δ анықтауыштың екінші бағанын бос мүшелер бағанымен алмастырамыз:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}5&0&-1\\1&14&3\\4&16&2\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}14&3\\16&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&14\\4&16\end{vmatrix}=5(28-48)-(16-56)=-60$$

Δ анықтауыштағы үшінші бағанды бос мүшелер бағанымен алмастырамыз:

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}5&-1&0\\1&2&14\\4&3&16\end{vmatrix}=-14\cdot\begin{vmatrix}5&-1\\4&3\end{vmatrix}+16\cdot\begin{vmatrix}5&-1\\1&2\end{vmatrix}=-14\cdot(15+4)+16\cdot(10+1)=-90.$$

Сонымен, $x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-30}{-30}=1, y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-60}{-30}=2, z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-90}{-30}=3$. ▲

83. $\begin{cases}4x+y+z=0\\x+3y+z=0\\x+y+2z=0\end{cases}$ біртекті теңдеулер жүйесін шешу керек.

Шешуі: $\Delta=\begin{vmatrix}4&1&1\\1&3&1\\1&1&2\end{vmatrix}$ анықтауышты есептеу үшін 1-ші жол элементтеріне (-4)-ке көбейтілген 3-ші жол элементтерін, ал 2-ші жол элементтеріне (-1)-ге көбейтілген 3-ші жол элементтерін қосамыз:

$$\Delta=\begin{vmatrix}0&-3&-7\\0&2&-1\\1&1&2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-3&-7\\2&-1\end{vmatrix}=17.$$

$\Delta\neq 0$ болғандықтан, берілген жүйенің тек нөлдік шешімі бар болады: x=0, y=0, z=0. ▲

3. Кронекер – Капелла теоремасы. Біртекті емес сызықты теңдеулер жүйесі үйлесімді болуы үшін жүйе матрицасының рангісі мен оның кеңейтілген матрицасының рангісі тең болуы, яғни $rang\ A=rang\ A'$, қажетті әрі жеткілікті.

84. $\begin{cases}x_1-3x_2+4x_3=2\\2x_1+x_2-x_3=1\\11x_1-12x_2+17x_3=3\end{cases}$ теңдеулер жүйесін үйлесімдікке зерттеу керек.

Шешуі: $r(A)=r\begin{pmatrix}1&-3&4\\2&1&-1\\11&-12&17\end{pmatrix}=2$,

$$r(A')=r\begin{pmatrix}1&-3&4&2\\2&1&-1&1\\11&-12&17&3\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}1&-3&4&2\\0&7&-9&-3\\0&21&-27&-19\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&7&-9&-3\\0&21&-27&-19\end{pmatrix}=$$

$$=r\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&7&-9&-3\\0&0&0&-10\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=3.$$

$r(A)\neq r(A')$ болғандықтан, Кронекер-Капелла теоремасы бойынша берілген жүйе үйлесімсіз, яғни оны шешімі жоқ . ▲

Теңдеулер жүйесін үйлесімдікке зерттеу керек.

85. $\begin{cases}3x_1+4x_2+2x_3=8\\2x_1-4x_2-3x_3=-1\\x_1+5x_2+x_3=0\end{cases}$ **Ж:** үйлесімді.

86. $\begin{cases}3x_1+x_2+x_3=21\\x_1-4x_2-2x_3=-16\\-3x_1+5x_2+6x_3=41\end{cases}$ **Ж:** үйлесімді.

87. $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=-2\\4x_1-3x_2+x_3=1\\2x_1+x_2-x_3=1\end{cases}$ **Ж:** үйлесімді.

88. $\begin{cases}x+2y+z=4\\3x-5y+3z=1\\2x+7y-z=8\end{cases}$ **Ж:** үйлесімді.

89. $\begin{cases}x-2y+3z=6\\2x+3y-4z=20\\3x-2y-5z=6\end{cases}$ **Ж:** үйлесімді.

90. $\begin{cases}3x+4y+2z=8\\2x-4y-3z=-1\\x+8y+5z=0\end{cases}$ **Ж:** үйлесімсіз.

91. $\begin{cases}3x_1+x_2+x_3=21\\x_1-4x_2-2x_3=-16\\5x_1-7x_2-3x_3=1\end{cases}$ **Ж:** үйлесімсіз.

92. $\begin{cases}x+y-z=-2\\4x-3y+z=1\\2x+2y-2z=3\end{cases}$ **Ж:** үйлесімсіз.

4. Гаусс әдісі. Элементар түрлендірулер жасау арқылы белгісіздерді біртіндеп жоя отырып, берілген жүйені өзіне эквивалент үшбұрышты (яғни баспалдақты) түрге келтіреміз.

Элементар түрлендірулерге келесі түрлендірулер жатады:

а) екі теңдеудің орнын алмастыру;

ә) нөлден өзге санға теңдеудің екі жағын да көбейту;

б) кез келген $c\neq 0$ санға көбейтілген бір теңдеудің екі жағын да басқа теңдеуге сәйкесінше қосу;

в) теңдеудің екі жағында да коэффициенттер нөлге тең болса, онда бұл теңдеуді алып тастау.

Сол жағындағы коэффициенттер нөлге тең болып, оң жағындағы бос мүше нөлге тең болмаса, онда берілген жүйе үйлесімсіз болғаны.

93. $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=5\\x_1-2x_2+3x_3=-3\\7x_1+x_2-x_3=10\end{cases}$ жүйесін Гаусс әдісімен шешу керек.

Шешуі: Кеңейтілген матрицасын құрамыз:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 5\\ 1 & -2 & 3 & -3\\ 7 & 1 & -1 & 10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -3\\ 2 & 1 & -1 & 5\\ 7 & 1 & -1 & 10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -3\\ 0 & 5 & -7 & 11\\ 0 & 15 & -22 & 31\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -3\\ 0 & 5 & -7 & 11\\ 0 & 0 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3=-3\\ 5x_2-7x_3=11\\ -x_3=-2\end{cases}$$

$x_1 = 1$; $x_2 = 5$; $x_3 = 2$. ▲

94. $\begin{cases}x+3y-6z=12\\ 3x+2y+5z=-10\\ 2x+5y-3z=6\end{cases}$ теңдеулер жүйесін Гаусс әдісімен шешу керек.

Шешуі: 1-ші теңдеуді (-3)-ке көбейтіп 2-ші теңдеуге, сосын 1-ші теңдеуді (-2)-ге көбейтіп 3-ші теңдеуге қосамыз:

$$\begin{cases}x+3y-6z=12\\ -7y+23z=-46\\ -y+9z=-18\end{cases}.$$

Енді 3-ші теңдеуді (-7)-ге көбейіп 2-ші теңдеуге қосамыз:

$$\begin{cases}x+3y-6z=12\\ -y+9z=-18\\ -40z=80\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=12-3y+6z\\ y=9z+18\\ z=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\\ z=-2\end{cases}.$$ ▲

95. $\begin{cases}3x+2y+z=5\\ x+y-z=0\\ 4x-y+5z=3\end{cases}$ теңдеулер жүйесін Гаусс әдісімен шешу керек.

Шешуі: Ыңғайлылық үшін 1-ші және 2-ші теңдеулердің орын алмастырайық:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 1 & 5\\ 4 & -1 & 5 & 3\end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 4 & 5\\ 0 & -5 & 9 & 3\end{array}\right).$$

Мұнда 1-ші жолды (-3)-ке көбейтіп 2-ші жолға, сосын сол 1-ші жолды (-4)-ке көбейтіп 3-ші жолға қостық. Енді 2-ші жолды (-5)- ке көбейтіп 3-ші жолға қосайық:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 4 & 5\\ 0 & 0 & -11 & -22\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right)$$

мұнда 3-ші жолды (-11)-ге қысқарттық. Теңдеулер жүйесі үшбұрыш түрге келді:

$$\begin{cases}x+y-z=0\\ -y+4z=5\\ z=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-y+z\\ y=4z-5\\ z=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=3\\ z=2\end{cases}.$$ ▲

5. Матрицалық әдіс. n белгісізі бар біртекті емес n сызықты теңдеулер жүйесі берілсін.

$$\begin{cases} a_n\, x_1+\dots+a_{1n}\, x_n=в_1 \\ a_{21}\, x_1+\dots+a_{2n}\, x_n=в_2 \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{n1}\, x_1+\dots+a_{nn}\, x_n=в_n \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{n1}\, a_{n2}\dots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} в_1 \\ в_2 \\ \vdots \\ в_n \end{pmatrix}$$

мұндағы A - жүйе матрицасы ерекше емес ($\Delta(A)\neq 0$), X - белгісіздер баған-матрицасы, B - бос мүшелер баған-матрицасы.

Берілген жүйені матрицалар арқылы жазайық: $A\cdot X=B$.

Енді осы теңдеудің екі жағын да сол жақтан A^{-1}-кері матрицасына көбейтейік. Сонда $X=A^{-1}B$ теңдеуін аламыз. Бұл - берілген жүйе шешімін өрнектейтін теңдеу.

96. Жүйені матрицалық әдіспен шешу керек: $\begin{cases} x+3y-z=4 \\ 2x-y-5z=-15. \\ 5x+y+4z=19 \end{cases}$

Шешуі:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 \\ -15 \\ 19 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$ $\Delta_A=-105.$ Кері матрицаны табамыз. A^{-1}:

$$A_{11}=1, A_{12}=-33, A_{13}=7, A_{21}=-13, A_{22}=9, A_{23}=14, A_{31}=-16, A_{32}=3, A_{33}=-7.$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{105}\begin{pmatrix} 1 & -13 & -16 \\ -33 & 9 & 3 \\ 7 & 14 & -7 \end{pmatrix}, A^{-1}B=-\frac{1}{105}\begin{pmatrix} 1\cdot 4-13(-15)-16\cdot 19 \\ -33\cdot 4+9(-15)+3\cdot 19 \\ 7\cdot 4+14(-15)-7\cdot 19 \end{pmatrix}=-\frac{1}{105}\begin{pmatrix} -105 \\ -210 \\ -315 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

x = 1, y = 2, z = 3. ▲

97. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0 \\ 3x_1+2x_3=4 \\ 4x_1-2x_2+5x_3=2 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін матрицалық әдіспен шешу керек.

Шешуі: Матрицаларды жазайық:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица анықтауышы:

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}=4\neq 0.$$

$\Rightarrow$ А матрицасы ерекше емес, сондықтан оның кері матрицасы бар болады:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta(A)}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Енді алгебралық толықтауыштарды есептейік:

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=-7 \qquad A_{11}=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=4 \qquad A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=-8 \qquad A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4$$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$.

Енді, $X = A^{-1}B$ формуласы бойынша:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -32+8 \\ 36-10 \\ 40-12 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -24 \\ 26 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 13/2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Берілген жүйенің шешімі $x_1 = -6$, $x_{21} = \frac{13}{2}$, $x_3 = 7$ болады. ▲

98. $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 5x - 3z = 14 \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін матрицалық әдіспен шешу керек.

Шешуі: Матрицаларды жазайық:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 18 \end{pmatrix}$$

А матрицасының анықтауышын есептейік:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 39 \neq 0$$

$\Rightarrow$ кері матрицасы бар.

Ендеше алгебралық толықтауыштарды есептейік:

$$A_{11} = 8 \qquad A_{21} = 6 \qquad A_{31} = -1$$
$$A_{12} = -11 \qquad A_{22} = -18 \qquad A_{32} = 16$$
$$A_{13} = -13 \qquad A_{23} = -39 \qquad A_{33} = 26$$

Сонда, кері матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{39} \begin{pmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -11 & -18 & 16 \\ -13 & -39 & 26 \end{pmatrix}$$

болады. Онда $X = A^{-1}B$ формуласы бойынша:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{39} \begin{pmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -11 & -18 & 16 \\ -13 & -39 & 26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 18 \end{pmatrix} = \frac{1}{39} \begin{pmatrix} 138 \\ -63 \\ -195 \end{pmatrix}.$$

Сонымен, жүйенің шешімі:

$$x = \frac{46}{13}, \quad y = -\frac{21}{13}, \quad z = -5. \quad ▲$$

Теңдеулер жүйесін шешу керек.

99. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ **Ж:** (2;-1;3). **100.** $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7 \end{cases}$ **Ж:** $\left(\frac{53}{49}; \frac{2}{7}; \frac{72}{49}\right)$.

101. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$ **Ж:** (3;8;13). **102.** $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$ **Ж:** (1;1;1).

103. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 20 \\ 3x - 2y - 5z = 6 \end{cases}$ **Ж:** (8;4;2). **104.** $\begin{cases} 5x + 8y - z = 7 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$ **Ж:** (3;-1;0).

105. $\begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ 5y + 6z = 28 \\ x + 2z = 7 \end{cases}$ **Ж:** (1;2;3). **106.** $\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ 4x + 3y - 2z = 4 \end{cases}$ **Ж:** (1;2;3).

107. $\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$ **Ж:** (1;2;3). **108.** $\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases}$ **Ж:** (0;0;-2).

2 ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ АНАЛИТИКАЛЫҚ ГЕОМЕТРИЯ
2.1 АНАЛИТИКАЛЫҚ ГЕОМЕТРИЯ ЕСЕПТЕРІ

1. Нүктелердің ара қашықтығы. Егер жазықтықта тік бұрышты OXY координаттар жүйесі берілсе, онда осы жазықтықтың $M_1(x_1;y_1)$ және $M_1(x_2;y_2)$ нүктелерінің ара қашықтығы d келесі формула арқылы анықталады:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

2. Кесіндіні берілген қатынаста бөлу. $A(x_1;y_1)$ және $B(x_2;y_2)$ нүктелерінің арасындағы кесіндіні берілген λ қатынаста бөлетін $C(x;y)$ нүктесінің координаттары келесі формулалармен анықталады:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Дербес жағдайда, $\lambda = 1$ болғанда кесінді ортасының координаталары:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

109. A(3;8) және B(-5:14) нүктелерінің арақашықтығын табу керек.

Шешуі: Арақашықтықты есептеу формуласына нүктелердің координаттарын қоямыз:

$$d = \sqrt{(-5-3)^2 + (14-8)^2} = \sqrt{64+36} = 10. \blacktriangle$$

110. Төбелері A(-3:-3), B(-1;3), C(11;-1) болатын үшбұрыш тікбұрышты болатынын дәлелдеу керек.

Шешуі: Үшбұрыш қабырғаларының ұзындықтарын табамыз:

$$|AB| = \sqrt{(-1+3)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{40},$$

$$|BC| = \sqrt{(11+1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{160},$$

$$|AC| = \sqrt{(11+3)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{200}.$$

$\Rightarrow |AB|^2 = 40$, $|BC|^2 = 160$, $|AC|^2 = 200$ $\Rightarrow |AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$, яғни үшбұрыштың екі қабырғасы квадраттарының қосындысы үшінші қабырға квадратына тең. Бұдан, ΔABC -тікбұрышты, ал АС-ның гипотенузасы екендігі шығады. ▲

111. *AB* кесінді ұштары А(-2;5), В(4;17) екені белгілі. Осы кесіндінің бойынан *А*-ға дейінгі қашықтығы В-ға дейінгі қашықтығынан 2 есе үлкен болатын *С* нүктесін белгілейік. *С* нүктесінің координаттарын табу керек.

Шешуі: $|AC| = 2|CB| \Rightarrow \lambda = |AC| : |CB| = 2$

$x_c = \dfrac{-2+2\cdot 4}{1+2} = 2$, $y_c = \dfrac{5+2\cdot 7}{1+2} = 13$, яғни С(2;13) . ▲

112. *AB* кесіндінің ортасы С(2;3) нүктесі екені белгілі. Егер В(7:5) болса, *А* нүктесінің координаттарын табу керек.

Шешуі: $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ формуласы бойынша $2 = \dfrac{x_A + 7}{2}$,

$3 = \dfrac{y_A + 5}{2}$ $\Rightarrow x_A = -3$, $y_A = 1$, яғни А(-3;1) . ▲

113. $\Delta ABC -$төбелері: $A(x_1;y_1),\ B(x_2;y_2),\ C(x_3;y_3)$. Үшбұрыш медианаларының қиылысу нүктесінің координаттарын табу керек.

Шешуі: D - *AB* кесіндінің ортасы:

$$x_D = \frac{x_1 + x_2}{2},\quad y_D = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

М - медианалардың қиылысу нүктесі, ол *CD* кесіндісін *С*-дан бастап есептегенде 2:1 қатынаста бөледі,

$$x_M = \frac{x_3 + 2x_D}{1+2},\qquad y_M = \frac{y_3 + 2y_D}{1+2},$$

яғни

$$x_M = \frac{x_3 + 2(x_1 + x_2)/2}{3},\qquad y_M = \frac{y_3 + 2(y_1 + y_2)/2}{3}.$$

Бұдан,

$$x_M = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},\qquad y_M = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$ ▲

114. Төбелері А(-2;-4), В(2;8) және С(10;2) болатын үшбұрыш ауданын табу керек.

Шешуі: $S = \dfrac{1}{2}|\Delta|$, мұндағы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 10 \\ -4 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4\cdot(1-10-4+2-20+1) = 4\cdot(-30) = -120.$$

$\Rightarrow S = \dfrac{1}{2}\cdot 120 = 60$ (кв. бірл.). ▲

115. Нүктелердің ара қашықтығын табу керек:

1) А(2;3) және В(-10;-2) ; 2) $C(\sqrt{2}\ ;-\sqrt{7})$ және $D(2\sqrt{2}\ ;0)$

Ж: 1)13; 2)3.

116. Төбелері A(4;3), B(7;6), C(2;11) үшбұрыш тікбұрышты болатынын көрсету керек.
117. Төбелері A(2;-1), B(4;2), C(5;1) үшбұрыш теңбүйірлі болатынын көрсету керек.
118. Үшбұрыш төбелері: A(-1;-1), B(0;-6), C(-10;-2) берілген. A төбесінен жүргізілген медиана ұзындығын табу керек.
Ж: 5.
119. AB кесінді ұштары берілген: A(-3;7), B(5;11). Осы кесінді үш нүкте арқылы төрт бірдей бөлікке бөлінген. Осы нүктелердің координаттарын табу керек.
Ж: (-1;8), (1;9), (3;10).
120. Төбелері A(1;5), B(2;7), C(4;11) үшбұрыш ауданын есептеу керек.
Ж: S=0, яғни A,B,C бір түзу бойында жатады.
121. Параллелограмның үш төбесі берілген: A(11;4), B(-1;-1), C(5;7) Төртінші D төбесінің координаттарын табу керек.
Ж: D(17;12).
122. Үшбұрыштың екі төбесі A(3;8) және B(10;2) және медианалардың қиылысуы M(1;1) нүктесі берілген. Үшбұрыштың үшінші C төбесін табу керек.
Ж: C(-10;-7).
123.Үшбұрыш төбелері: A(7;2), B(1;9), C(-8;-11) берілген. Медианалардың қиылысу нүктесінен үшбұрыш төбелеріне дейінгі қашықтықтарды табу керек.
Ж: $\sqrt{53},\ \sqrt{82},\ \sqrt{185}$ **.**

2.2 ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ ТҮЗУ ТЕҢДЕУЛЕРІ

1. Түзудің жалпы теңдеуі. Жазықтықта бірінші ретті екі айнымалы x,y арқылы анықталған кез келген теңдеу түзу сызықты (l) анықтайды және, керісінше, кез келген түзу бірінші ретті теңдеумен анықталады.
$Ax + By + C = 0$ теңдеуі (мұндағы A,B,C- тұрақты коэффициенттер, әрі $A^2 + B^2 \neq 0$) жазықтықта түзуді анықтайды. Бұл теңдеу *түзудің жалпы теңдеуі* деп аталады. Координаттары $A,\ B$ коэффициенттері болатын вектор $\vec{n}\{A;B\} \perp l$ болады.
Д е р б е с ж а ғ д а й л а р ы.
1. $C = 0,\ A \neq 0,\ B \neq 0.\ \ Ax + By = 0$ теңдеуімен анықталған түзу координаттар бас нүктесі арқылы өтеді.

2. $A = 0,\ B \neq 0,\ C \neq 0.\ \ By + C = 0$ (немесе $y = -\dfrac{C}{B}$) теңдеуімен анықталған түзу OX осіне параллель болады.

$B = 0,\ A \neq 0,\ C \neq 0.\ \ Ax + C = 0$ (немесе $x = -\dfrac{C}{A}$) теңдеуімен анықталған түзу OY осіне параллель болады.
3. $B = C = 0,\ A \neq 0.\ \ Ax = 0$ (немесе $x = 0$) теңдеуімен анықталған түзу OY осімен беттеседі.
$A = C = 0,\ B \neq 0.\ \ Ay = 0$ (немесе $y = 0$) теңдеуімен анықталған түзу OX осімен беттеседі.
2. Бұрыштық коэффициенті арқылы жазылған түзудің теңдеуі. Егер түзудің жалпы теңдеуінде $B \neq 0$ болса, оны y арқылы шешсек, онда

$$y = kx + в$$

түріндегі теңдеу аламыз. Бұл *түзудің бұрыштық коэффициенті арқылы жазылған теңдеуі* деп аталады, себебі $k=-\frac{A}{B}=tg\,\alpha$ - түзудің бұрыштық коэффициенті, ал $в=-\frac{C}{B}$ - түзудің $OУ$ осінен қиып өтетін кесіндісі, x, y - түзу бойындағы айнымалы М нүктесінің координаттары.

3. Түзудің «кесіндідегі» теңдеуі. Егер түзудің жалпы теңдеуінде $C\neq 0$ болса, оның барлық мүшелерін –С -ға бөлсек, онда

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{в}=1$$

түріндегі теңдеу аламыз. Бұл *түзудің «кесіндідегі» теңдеуі* деп аталады, мұндағы $a=-\frac{C}{A}$ -түзудің ОХ осінен, ал $в=-\frac{C}{B}$ - түзудің $OУ$ осінен қиып өтетін кесіндісі. Сондықтан *а* мен *в* координат осьтеріндегі *кесінділер* делінеді.

4. Нүктесі мен бұрыштық коэффициенті арқылы жазылған түзу теңдеуі. $tg\,\alpha=\frac{y-y_1}{x-x_1}=k$ теңдігінен $y-y_1=k(x-x_1)$ аламыз. Бұл - $M_1(x_1;\,y_1)$ *нүктесі арқылы өтетін,* k *- бұрыштық коэффициенті болатын түзу теңдеуі.*

5. Екі нүкте арқылы өтетін түзу теңдеуі. $M_1(x_1;y_1),\ M_2(x_2;y_2)$ нүктелері берілсін. $y-y_1=k(x-x_1)$ теңдігіне k-ның мәнін $k=tg\,\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ қойсақ, онда $M_1,\ M_2$ *нүктелері арқылы өтетін түзу теңдеуін* $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ аламыз.

6. Екі түзу арасындағы бұрыш. Бізге $l_1: y=k_1x+в_1$ және $l_2: k_2x+в_2$ түзулері берілсін.

$tg\varphi=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1\cdot k_2}\right|$ - *екі түзу арасындағы бұрыш* тангенсін есептейтін формула.

Егер $l_1\,//\,l_2$ болса, онда $\varphi=0$, яғни $k_1=k_2$ - (түзулердің параллельдік шарты)

Егер $l_1\perp l_2$ болса, онда $\varphi=\frac{\pi}{2}$, яғни $1+k_1k_2=0\ \Rightarrow\ k_1=-\frac{1}{k_2}$ (түзулердің перпендикулярлық шарты).

Егер түзулер теңдеулері жалпы түрде берілсе, яғни

$$l_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$$

а) $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ болса, онда $l_1\,//\,l_2$;

ә) $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$ болса, онда $l_1\cap l_2$;

б) $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ болса, онда $l_1\equiv l_2$.

7. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық. $M_0(x_0, y_0)$ нүктеден түзуге дейінгі қашықтық мына формуламен есептелінеді $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

124. Ордината осінен b= -3 кесіндісін қиятын және OX осінің оң бағытымен $\alpha = \frac{\pi}{6}$ бұрыш жасайтын түзудің теңдеуін жазу керек.

Шешуі: Бұрыштық коэффициентті табайық:

$$R = tg\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Бұрыштық коэффицент арқылы жазылған түзу теңдеуі бойынша:

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - 3$$

аламыз. Бөлімнен құтылып және барлық мүшелерді сол жаққа шығарғанда: $x - \sqrt{3}y - 3\sqrt{3} = 0$ - түзудің жалпы теңдеуін аламыз. ▲

125. Координат осьтерінде $a = \frac{2}{5}$, b= $-1/10$ кесінділерін қиятын түзудің теңдеуін жазу керек.

Шешуі: Түзудің «кесіндідегі» теңдеуін қолданамыз:

$$\frac{x}{2/5} + \frac{y}{-1/10} = 1$$

Бұдан, $\frac{5}{2}x - 10y = 1$ теңдеуін аламыз, немесе $5x - 20y - 2 = 0$ - түзудің жалпы теңдеуі шығады. ▲

126. Түзудің жалпы теңдеуі берілген: 12x-5y-65=0. Түзудің: 1)бұрыштық коэффиценті арқылы жазылған теңдеуін; 2)«кесіндідегі» теңдеуін жазу керек.

Шешуі: 1) Жалпы теңдеуден у-ті шығарып алсақ, бұрыштық коэффиценті арқылы жазылған түзудің теңдеуін аламыз.

$$5y = 12x - 65 \Rightarrow y = \frac{12}{5}x - 13$$, мұндағы $k = \frac{12}{5}$, b= -13.

2) Жалпы теңдеудің бос мүшесін оң жаққа көшіріп, сосын теңдеудің екі жағын да 65-ке бөлеміз:

$$12x - 5y = 65 \Rightarrow \frac{12}{65}x - \frac{5}{65}y = 1.$$

Бұл теңдеуге келесі түрлендіру жасайық:

$$\frac{x}{65/12} + \frac{y}{\left(-65/5\right)} = 1 \quad \text{немесе} \quad \frac{x}{65/12} + \frac{y}{-13} = 1$$

- бұл түзудің «кесіндідегі» теңдеуі. Мұндағы $a = \frac{65}{12} = 5\frac{5}{12},\ b = -13$. ▲

127. A(2,-3), B(-4, 3) нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазу керек.

Шешуі: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ формуласын қолданады. x + y + 1 = 0. ▲

128. A(2;3) нүктесінен 2x- 3y +4 = 0 түзуіне дейінгі қашықтықты табу керек.

Шешуі: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, олай болса $d = \frac{|4-9+4|}{\sqrt{4+9}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$. ▲

129. y = -3x+7 және y =2x+1 түзулерінің арасындағы сүйір бұрышты табу керек.

Шешуі: $k_1 = -3$, $k_2 = 2$ мәндерін екі түзу арасындағы бұрыш тангенсін есептейтін формулаға қоямыз:

$$tg\varphi = \left|\frac{-3-2}{1+(-3)\cdot 2}\right| = \left|\frac{-5}{-5}\right| = 1$$, яғни $\varphi = \frac{\pi}{4}$. ▲

130. $4x - 6y + 7 = 0$ және $20 - 30y - 11 = 0$ түзулері параллель екенін көрсету қажет.

Шешуі: Ол үшін $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ - шарты орындалуы керек. Шынында да, $\frac{4}{20} = \frac{-6}{-30}$. Ендеше түзулер параллель. ▲

131. M(-2;-5) нүктесі арқылы өтетін $3x + 4y + 2 = 0$ түзуіне параллель түзудің теңдеуін жазу керек.

Шешуі: Тузудің теңдеуінен y-ті шығарып алайық: $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$. Бұдан, бұрыштық коэффициенті $k = -\frac{3}{4}$ екені көрініп тұр. Нүктесі мен бұрыштық коэффициенті арқылы түзудің теңдеуін жазайық:

$$y - (-5) = -\frac{3}{4}(x - (-2))$$, яғни $3x + 4y + 26 = 0$. ▲

132. $3x - 2y + 1 = 0$ және $2x + 5y - 12 = 0$ түзулері қиылысатындығын көрсетіп, қиылысу нүктелерін табу керек.

Шешуі: $k_1 = \frac{3}{2}$; $k_2 = -\frac{2}{5}$ - бұрыштық коэффициенттер тең емес, ендеше түзулер қиылысады. Келесі жүйені шешейік: $\begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ 2x + 5y - 12 = 0 \end{cases}$. Оның шешімі x=1, y=2 болады, яғни (1;2) нүктесінде берілген түзулер қиылысады. ▲

133. Төбелері: A(2;2), B(-2;-8), C(-6;-2) үшбұрыштың медианаларының теңдеулерін жазу керек.

Шешуі: BC, AC, AB қабырғаларының орталарының координаттарын табайық:

$$x_1 = \frac{-2-6}{2} = -4, \quad y_1 = \frac{-8-2}{2} = -5 \qquad A_1(-4;-5)$$

$$x_2 = \frac{2-6}{2} = -2, \quad y_2 = \frac{2-2}{2} = 0 \qquad B_1(-2;0)$$

$$x_3 = \frac{2-2}{2} = 0, \quad y_3 = \frac{2-8}{2} = -3 \qquad C_1(0;-3).$$

Медианалардың теңдеулерін екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі бойынша жазамыз.

AA_1 медиана теңдеуі: $\frac{x-2}{-4-2} = \frac{y-2}{-5-2}$, немесе $-6(y-2) = -7(x-2)$, яғни

$$7x - 6y - 2 = 0$$

BB_1 медиана теңдеуі: $\frac{x+2}{-2+2} = \frac{y+8}{0+8}$, $\frac{x+2}{0} = \frac{y+8}{8} \Rightarrow 8\cdot(x+2) = 0$, яғни x+2=0.

B(-2;-8) және $B_1(-2;0)$ нүктелерінің абсциссалары бірдей болғандықтан, BB_1 медианасы Oy өсіне параллель.

CC_1 медиана теңдеуі: $\frac{x+6}{0+6}=\frac{y+2}{-3+2}$, яғни x+6y+18=0. ▲

134. Үшбұрыш төбелері берілген: A(0;1), B(6;5), C(12;-1). C төбесінен түсірілген биіктік теңдеуін жазу керек.

Шешуі: AB қабырғасының теңдеуін жазайық:

$$\frac{x-0}{6-0}=\frac{y-1}{5-1} \quad \Rightarrow \quad 4x=6(y-1) \quad \Rightarrow \quad 2x-3y+3=0.$$

Бұдан бұрыштық коэффициенті: $k=-\frac{2}{-3}=\frac{2}{3}.$

C төбесінен түсірілген биіктік AB түзуіне перпендикуляр болғандықтан, оның бұрыштық коэффициенті $k=-\frac{3}{2}$ болады. Енді биіктік теңдеуін жазайық:

$y-(-1)=-\frac{3}{2}(x-12)$, немесе 3x+2y-34=0. ▲

135. Үшбұрыш қабырғалары берілген: x+3y-7=0 (AB), 4x-y-2=0 (BC), 6x+8y-35=0 (AC). B төбесінен түсірілген биіктік ұзындығын табу керек.

Шешуі: B нүктесінің координаттарын табайық: $\begin{cases} x+3y-7=0 \\ 4x-y-2=0 \end{cases} \Rightarrow x=1, y=2,$ яғни *B*(1;2). *BB₁* биіктігінің ұзындығын *B* нүктесінен AC түзуіне дейінгі қашықтық формуласы бойынша табамыз:

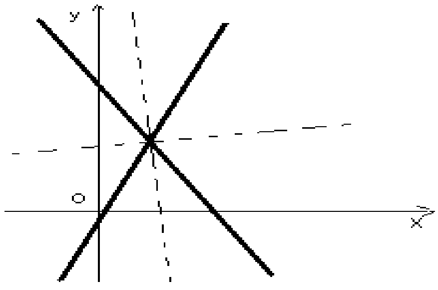
$$|BB_1|=\frac{|6\cdot 1+8\cdot 2-35|}{\sqrt{6^2+8^2}}=1{,}3$$. ▲

136. $3x+y-3\sqrt{10}=0$ және $6x+2y+5\sqrt{10}=0$ параллель түзулерінің арақашықтығын табу керек.

Шешуі: Параллель түзулердің арақашықтығын табу үшін түзудің біреуінің қандай да бір нүктесінен екінші түзуге дейінгі қашықтықты табу жеткілікті. Бірінші түзуде $x=0$ десек, $y=3\sqrt{10}$ аламыз. Сонда, $M(0;3\sqrt{10})$ нүктесі - бірінші түзудің нүктесі. M нүктесінен екінші түзуге дейінгі қашықтықты табайық:

$$d=\frac{|6\cdot 0+2\cdot 3\sqrt{10}+5\sqrt{10}|}{\sqrt{36+4}}=\frac{11\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}=5{,}5.$$ ▲

137. $x+y-5=0$ және $7x-y-19=0$ түзулерінің арасындағы бұрыштардың биссектрисаларының теңдеулерін жазу керек.



2.1 Сурет

Шешуі: Түзулердің арасындағы бұрыштардың биссектрисалары осы түзулерден бірдей қашықта орналасқан нүктелер жиынтығы екені белгілі. Биссектрисалардың біреуінде жататын кез келген M(x;y) нүктесі үшін (нүктеден түзуге дейінгі қашықтық формуласы бойынша):

$$\frac{|x+y-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|7x-y-19|}{\sqrt{7^2+(-1)^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+y-5}{\sqrt{2}}=\pm\frac{7x-y-19}{\sqrt{50}} \quad \Rightarrow$$

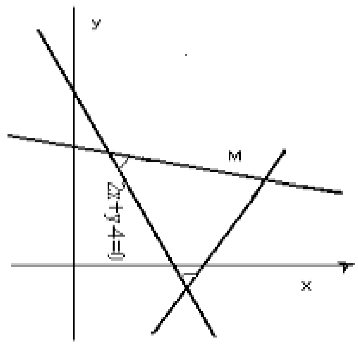
$$5\cdot(x+y-5)=\pm(7x-y-19).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5(x+y-5)=7x-y-19 & \text{, яғни } 2x-6y+6=0 \\ 5(x+y-5)=-(7x-y-19) & \text{, яғни } 12x+4y-44=0 \end{cases}$$

Сонымен, $x-3y+3=0$ және $3x+y-11=0$ биссектрисалар теңдеулері (2.1 Сурет). ▲

138. M(5;1) нүктесі арқылы өтетін және $2x+y-4=0$ түзуімен $\frac{\pi}{4}$ бұрыш жасайтын түзулердің теңдеуін жазу керек.

Шешуі: Ізделінді түзулердің біреуінің бұрыштық коэффициенті k болсын. Берілген түздің бұрыштық коэффиценті (-2)-ге тең. Бұл түзулердің арасындағы бұрыш $\frac{\pi}{4}$ болғандықтан: $tg\frac{\pi}{4}=\left|\frac{k+2}{1-2k}\right|$, яғни $1=\left|\frac{k+2}{1-2k}\right|$. Бұдан, $\frac{k+2}{1-2k}=1$ және $\frac{k+2}{1-2k}=-1$. Бұл теңдеулерді шешіп: $k=-\frac{1}{3}$ және $k=3$ табамыз. Сонымен, ізделінді түзулердің теңдеулерін жазайық: $y-1=-\frac{1}{3}(x-5)$ және $y-1=3(x-5)$, яғни $x+3y-8=0$ және $3x-y-14=0$ (2.2 Сурет). ▲



2.2 Сурет

139. ΔABC –ның төбелері берілген: A(0;2), B(7;3), C(1;6). Табу керек: $B\hat{A}C$ **.**

Ж: $tg\alpha=\frac{27}{11}$**.**

140. Үшбұрыш қабырғалары берілген: x+y-6=0, 3x-5y+14=0, 5x-3y-14=0. Оның биіктіктерінің теңдеулерін жазу керек.

Ж: x-y=0, 5x+3y-26=0, 3x+5y-26=0.

141. $3x+4y-20=0$ және $8x+6y-5=0$ түзулерінің арасындағы бұрыштардың биссектрисаларының теңдеулерін жазу керек.

Ж: $14x+14y-45=0$, $2x-2y+35=0$.

142. Үшбұрыш төбелері берілген: A(0;0), B(-1;-3), C(-5;-1) Үшбұрыш төбелері арқылы өтетін, қабырғаларына параллель түзулердің теңдеулерін жазу керек.
Ж: 3x-y+14=0, x-5y-14=0, x+2y=0.
143. A(-1:7), B(8;-2) нүктелері арқылы өтетін AB түзуімен 45° бұрыш жасап, M(2;7) нүктесі арқылы өтетін түзулердің теңдеуін жаз.
Ж: x-2=0, y-7=0.
144. M(2;-1) нүктесінен координата өстерінен $a = 8$, $b = 6$ кесінділерін қиятын түзуге дейінгі қашықтықты табу керек.
Ж: 4,4.
145. Төбелері: $A\left(\frac{3}{2};1\right)$, $B\left(1;\frac{5}{3}\right)$, C(3;3) үшбұрыштың C төбесінен жүргізілген биіктіктің ұзындығын табу керек.
Ж: 2,4.
146. m-нің қандай мәнінде 7x-2y-5=0, x+7y-8=0 және mx+my-8=0 түзулері бір нүктеде қиылысады?
Ж: m = 4.
147. $A_1(-1;-1), B_1(1;9), C_1(9;1)$ нүктелері - үшбұрыш қабырғаларының орталары екені белгілі. Үшбұрыш қабырғаларының орта перпендикулярларының теңдеулерін жазу керек.
Ж: x-y=0, x+5y-14=0, 5x+y-14=0.
148. Ордината өсінің $A(2;\sqrt{3})$ және $B(3;2\sqrt{3})$ нүктелері арқылы өтетін түзумен жасайтын сүйір бұрышынын табу керек.
Ж: $\frac{\pi}{6}$.
149. A(1;2) және C(3;6) – квадраттың қарсы жатқан төбелері. Қалған екі төбесінің координаттарын табу керек.
Ж: (0;5), (4;3).
150. $8x+15y+10=0$ түзуге дейінгі қашықтығы 1-ге тең болатын абсцисса өсінің бойындағы нүктені табу керек.
Ж: $\left(\frac{7}{8};0\right)$ және $\left(-\frac{27}{8};0\right)$.
151. Үшбұрыш төбелері: A(1;1), B(4;5), C(13;-4) берілген. B төбесінен жүргізілген медиана мен C төбесінен түсірілген биіктіктің теңдеулерін табу керек. Үшбұрыш ауданын есептеу керек.
Ж: 13x+6y-82=0, 3x+4y-23=0. S = 31,5 кв.бірлік.
152. *x+6y+5=0, 3x-2y+1=0* түзулерінің қиылысу нүктесі мен $M\left(-\frac{4}{5};1\right)$ нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазу керек.
Ж: 5x+4=0.
153. *x+2y+3=0, 2x+3y+4=0* түзулерінің қиылысу нүктесі арқылы өтетін, *5x+8y=0* түзуіне параллель болатын түзуді табу керек.
Ж: 5x+8y+11=0.
154. *3x-y-1=0, x+3y+1=0* түзулерінің қиылысу нүктесі арқылы өтетін, абсцисса өсіне параллель түзуді табу керек.

Ж: $5y+2=0$.

155. $5x+3y+10=0$, $x+y-15=0$ түзулерінің қиылысу нүктесі мен координаттар басы арқылы өтетін түзуді табу керек.

Ж: $17x+11y=0$.

156. $x+2y+1=0$, $2x+y+2=0$ түзулерінің қиылысу нүктесі арқылы өтетін, абсцисса өсімен 135° бұрыш жасайтын түзуді табу керек.

Ж: $x+y+1=0$.

157. $M(a;в)$ нүктесі арқылы өтетін, $x+y+c=0$ түзуімен 45° бұрыш жасайтын түзулердің теңдеулерін жазу керек.

Ж: $x=a$, $y=в$.

158. Үшбұрыш қабырғалары берілген**:** $x-y=0$ *(AB)*, $x+y-2=0$ *(BC)*, $y=0$ *(AC)*. В төбесі арқылы өтетін медиана мен *A* төбесі арқылы өтетін биіктіктің теңдеулерін жазу керек.

Ж: $x=1$, $y=x$.

159. Қабырғалары: $x+y\sqrt{3}+1=0$, $x\sqrt{3}+y+1=0$ және $x-y-10=0$ болатын үшбұрыш тең бүйірлі екенін көрсету керек. Төбесіндегі бұрышты табу керек.

Ж: 30°.

160. パреллелограмның көршілес төбелері берілген: *A(0;0), B(1;3), C(7;1).* Диагональдарының арасындағы бұрышты тауып және осы параллелограмның тіктөртбұрыш болатынын көрсету керек.

Ж: $\varphi = 53^\circ 8'$.

161. Үшбұрыш қабырғалары берілген: $x-y+2=0$ *(AB)*, $x=2$ *(BC)*, $x+y-2=0$ *(AC)*. *A* төбесі және *AC* қабырғасын (*A* төбесінен бастап санағанда) *1:3* қатынасындай бөлетін нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазу керек.

Ж: $5x-3y+2=0$.

162. Төбелері: *A(1;1),* В $\left(2;1+\sqrt{3}\right)$, *C(3;1)* үшбұрыш тең қабырғалы болатынын көрсетіп, оның ауданын есептеу керек.

Ж: $\sqrt{3}$ кв. бірлік.

163. Үшбұрыштың төбесі *A(3;9)* және медианалары: $y-6=0$, $3x-4y+9=0$ берілген. Қалған екі төбесінің координаттарын табу керек.

Ж: B(1;3), C(11;6).

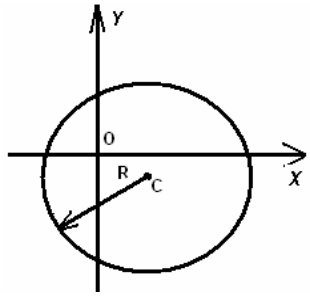
2.3 ЕКІНШІ РЕТТІ ҚИСЫҚТАР

Декарттық координат жүйесінде екінші ретті қисықтар

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Дx + 2Ey + F = 0$$

- жалпы теңдеуімен беріледі, мұндағы A, B, C - бірдей нөлге тең емес сандар. Жазықтықта екінші ретті теңдеумен өрнектелетін қисықтар: шеңбер, эллипс, гипербола, парабола.

1. Шеңбер. Центр деп аталатын $C(\alpha, \beta)$ нүктесінен бірдей қашықтықта орналасқан нүктелердің геометриялық орнын *шеңбер* дейді.

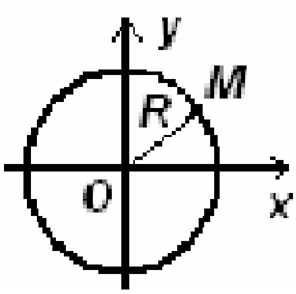


2.3 Сурет

$C(\alpha;\beta)-$ *центрі*, $R-$ *радиусы*

болатын шеңбердің канондық теңдеуі

(2.3 Сурет): $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$



24-Сурет

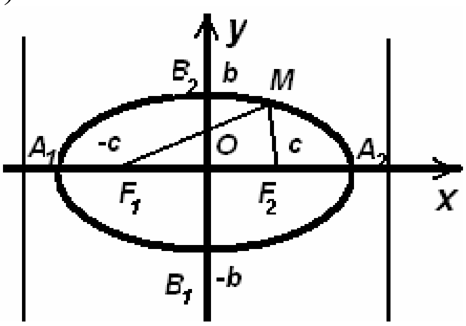
$O(0;0)-$ *центрі*, $R-$ *радиусы*

болатын шеңбердің канондық теңдеуі

(2.4 Сурет): $x^2+y^2=R^2$

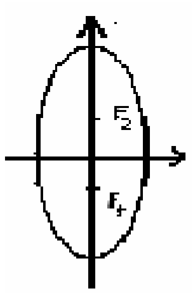
2. Эллипс. Фокус деп аталатын жазықтықтың $F_1(-c,0),\ F_2(c,0)$ екі нүктесінен ара қашықтықтарының қосындысы тұрақты $2a$ санына тең болатын нүктелердің геометриялық орнын *эллипс* дейді.

Жарты осьтері $b<a$ (a - үлкен жарты ось, b - кіші жарты ось): $b=\sqrt{a^2-c^2}$ болатын эллипс (2.5 Сурет):



2.5 Сурет

Жарты осьтері $b>a$ болатын эллипс (2.6 Сурет):



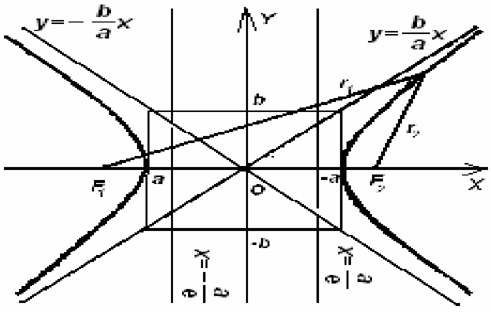
2.6Сурет

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ - эллипстің канондық теңдеуі, $F_1M+F_2M=2a,\ \ 2a>2c\Rightarrow a>c$

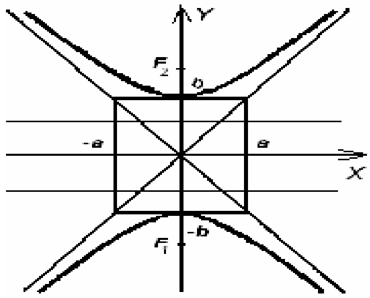
$\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ - эксцентриситет, $\varepsilon<1$. $x=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ - директриса.

3. Гипербола. Фокус деп аталатын жазықтықтың $F_1(-c,\ 0),F(c,\ 0)$ екі нүктесінен ара қашықтықтарының айырымы тұрақты 2а санына тең болатын нүктелердің геометриялық орнын *гипербола* дейді:

$a)\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $\quad F_1,\ F_2\in OX,\ \ a,b$ - жарты осьтері (2.7 Сурет).



2.7 Сурет



(2.8 Сурет).

ә) $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $F_1, F_2 \in OY$, $F_1(0,-c), F_2(0,c)$,

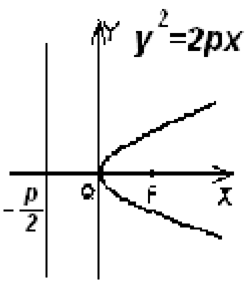
$b=\sqrt{c^2-a^2}$, $y=\pm\frac{b}{a}x$ - асимптоталары

$\varepsilon=\frac{c}{a}$ - эксцентриситет, $\varepsilon>1$

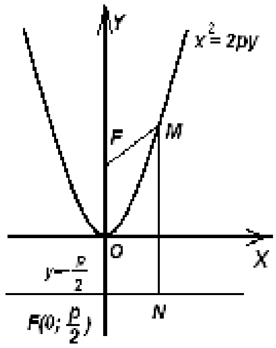
4. Парабола. Фокус деп аталатын нүкте мен директриса деп аталатын түзуге дейінгі ара қашықтықтары тең болатын нүктелердің геометриялық орнын *парабола* дейді.

а) $y^2=2px$, $x=-\frac{p}{2}$ - директриса; (2.9 Сурет)

ә) $x^2=2py$, $y=-\frac{p}{2}$ - директриса (2.10 Сурет).



2.9 Сурет



2.10 Сурет

164. $2x^2+2y^2-8x+5y-4=0$ теңдеуі қандай қисықты анықтайды?

Шешуі: Берілген теңдеуге келесі түрлендірулер қолданайық: Теңдеуді 2-ге қысқартып, теңдеу мүшелерін топтаймыз.

$$x^2-4x+y^2+\frac{5}{2}y=2.$$

Енді толық квадратқа дейін толықтырамыз:

$$\left(x^2-4x+4\right)+\left(y^2+\frac{5}{2}y+\frac{25}{16}\right)=2+4+\frac{25}{16} \qquad (x-2)^2+\left(y+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{121}{16}$$

- бұл центрі $\left(2;-\frac{5}{4}\right)$, радиусы $r=\frac{11}{4}$ шеңбердің теңдеуі. ▲

165. $x^2-9y^2+2x+36y-44=0$ теңдеуі қандай қисықты анықтайды?

Шешуі: Теңдеу мүшелерін топтастырып, келесі түрлендірулер жасайық:

$$\left(x^2+2x\right)-9\left(y^2-4y\right)=44 \qquad \left(x^2+2x+1\right)-9\left(y^2-4y+4\right)=44+1-36$$

$$(x+1)^2-9(y-2)^2=9 \qquad \frac{(x+1)^2}{9}-(y-2)^2=1$$

. Бұл қисық – гипербола. ▲

166. $M\left(\frac{5}{2};\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ және $N\left(-2;\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$ нүктелері арқылы өтетін эллипстің теңдеуін жазу керек.

Шешуі: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - ізделінді эллипс теңдеуі болсын. Берілген нүктелердің координаттары осы теңдеуді қанағаттандыруы керек. Ендеше,

$$\frac{25}{4a^2}+\frac{3}{8b^2}=1,\ \ \frac{4}{a^2}+\frac{3}{5b^2}=1$$

Бұдан, $a^2=10,\ b^2=1$ екендігі шығады. Сонымен, эллипс теңдеуі:

$$\frac{x^2}{10}+y^2=1.$$ ▲

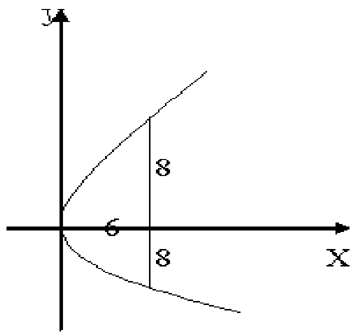
167. Ох өсіне қатысты симметриялы, төбесі координаттар бас нүктесінде болатын парабола теңдеуін жазу керек. Осы параболаның қандай да бір *Ox* осіне перпендикуляр хордасының ұзындығы 16, ал осы хорданың төбеге дейінгі қашықтығы 6-ға тең екені белгілі.

Шешуі: Хорданың ұзындығы мен оның төбеге дейінгі қашықтығы белгілі болғандықтан, хорданың ұшы болатын параболада жататын M нүктесінің координаттарын табуға болады: M(6;8).

Парабола теңдеуін $y^2=2px$ түрінде іздейміз.

Бұдан, $8^2=2p\cdot 6,\ \ 2p=\frac{32}{3}$.

Сонымен, $y^2=\frac{32}{3}\cdot x$ - ізделінді парабола теңдеуі (2.11 Сурет). ▲



2.11 Сурет

Төмендегі теңдеулермен қандай қисықтар анықталғандығын табу керек.

168. $36x^2+36y^2-36x-24y-23=0$ **Ж:** Шеңбер $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=1$.

169. $16x^2+25y^2-32x+50y-359=0$ **Ж:** Эллипс $\frac{x_*^2}{25}+\frac{y_*^2}{16}=1$,

$0^*(1;-1)$ – жаңа бас нүкте.

170. $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}y^2-x+\frac{2}{3}y-1=0$ **Ж:** Гипербола $\frac{x_*^2}{4}-\frac{y_*^2}{9}=1$;

$0^*(2;3)$ - жаңа бас нүкте.

171. $2x-y^2-2y-5=0$ **Ж:** Парабола.

172. Төбесі координата басында болатын, *Ox* өсіне қатысты симметриялы және *M(4;2)* нүктесі арқылы өтетін парабола теңдеуін жазу керек.

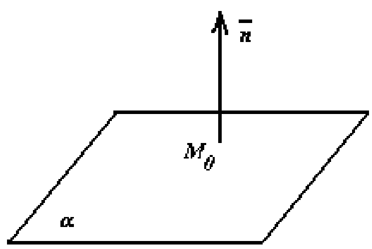
Ж: $y^2=x$.

3 КЕҢІСТІКТЕГІ АНАЛИТИКАЛЫҚ ГЕОМЕТРИЯ

3.1 ЖАЗЫҚТЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРІ

1. Жазықтықтың жалпы теңдеуі. Кеңістікте декарттық координат жүйесінде берілген кез келген жазықтыққа бірінші дәрежелі теңдеу сәйкес келеді және керісінше, бірінші дәрежелі теңдеуге кеңістікте жазықтық сәйкес келеді. $\alpha:\ \ Ax+By+Cz+D=0$.

$\bar{n}=\{A;B;C\}$ - жазықтықтың нормаль векторы: $\bar{n}\perp\alpha$ (3.1 Сурет).



3.1 Сурет

2. Нүктесі мен нормаль векторы арқылы жазылған жазықтық теңдеуі. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі, $\bar{n} = \{A; B; C\}$ жазықтықтың нормаль векторы берілсе, онда M_0 нүктесі арқылы өтетін $\bar{n}$- нормаль векторы болатын жазықтық теңдеуі мына түрде жазылады

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{3.1}$$

3. Жазықтықтың «кесіндідегі» теңдеуі. Жазықтықтың жалпы теңдеуіндегі әрбір мүшесін $-D$-ға бөле отырып

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{в} + \frac{z}{c} = 1$$

- *жазықтықтың «кесіндідегі» теңдеуі* деп аталатын теңдеу алуға болады, мұндағы *а,в,с* – жазықтықтың әр осьтен қиятын кесінділері.

4. Жазықтықтың нормаль теңдеуі. $\overline{N}$ нормаль векторы OX, OY, OZ координат осьтерімен сәйкесінше α, β, γ бұрыштарын жасасын, О нүктесінен M нүктесіне қарайғы бағытты оң бағыт деп алайық, OM кесіндісінің ұзындығы $p = |OM|$ болсын. Бағыттаушы косинустар $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ белгілі болса *жазықтықтың нормаль теңдеуін* былайша жазамыз:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

5. Жазықтықтардың өз-ара орналасуы. α_1, α_2 екі жазықтық жалпы теңдеулерімен $\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ \alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ берілсін. арасындағы бұрыш.

Екі жазықтық арасындағы бұрышты олардың нормальдарының арасындағы бұрыш есебінде алуға болады. Сондықтан екі жазықтық арасындағы бұрыштың косинусы былай есептелінеді:

$$\cos\theta = \frac{\overline{N_1} \cdot \overline{N_2}}{|\overline{N_1}| \cdot |\overline{N_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Егер $\alpha_1 \ // \ \alpha_2 \Rightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

6. Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінен $Ax + By + Cz + D = 0$ жазықтығына дейінгі қашықтық d мына формуламен есептелінеді:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{3.2}$$

7. Жазықтық теңдеуін құруға арналған негізгі есептер. а) $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі арқылы өтетін және $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\},\ \bar{в} = \{в_x, в_y, в_z\}$ (коллинеар емес) векторларына параллель α жазықтық теңдеуін жазу керек.

α жазықтығында жататын кез келген $M(x, y, z)$ нүктесін алайық. $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}, \bar{a}, \bar{в}$ - векторлары компланар векторлар. Олай болса $\overrightarrow{M_0M} \cdot \bar{a} \cdot \bar{в} = 0$. Осыдан α жазықтығының теңдеуі

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_x & a_y & a_z \\ \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \end{vmatrix} = 0;$$

ә) $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ нүктелері арқылы өтетін $\overline{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ векторына параллель жазықтық теңдеуін жазу керек.

$M(x,y,z)\in\alpha$. $\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1;y-y_1;z-z_1\}$, $\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$,

$\overrightarrow{M_1M},\overrightarrow{M_1M_2},\overline{a}$ - компланар векторлар. Олай болса $\overrightarrow{M_1M}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overline{a}=0$.Осыдан α жазықтығының теңдеуі

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}=0;$$

б) $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтық теңдеуін жазу керек.

$M(x,y,z)\in\alpha$. Келесі векторларды табайық:

$\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1;y-y_1;z-z_1\}$, $\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$,

$\overrightarrow{M_1M_3}=\{x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1\}$.

$\overrightarrow{M_1M},\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M_3}$ компланар векторлар. $\overrightarrow{M_1M}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_3}=0$. Осыдан α жазықтығының теңдеуі

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (3.3)$$

173. $2x+3y-6z+21=0$ жазықтық теңдеуін нормаль түрге келтіру керек.

Шешуі: Ол үшін келесі санды есептейміз:

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}}=-\frac{1}{7},$$

(мұндағы $D=21>0$ болғандықтан, μ таңбасын оған қарама-қарсы «–» таңбамен аламыз). Сонымен, жазықтықтың нормаль теңдеуін берілген теңдеуді μ санына көбейткенде аламыз:

$$-\frac{1}{7}\cdot 2x-\frac{1}{7}\cdot 3y-\frac{1}{7}\cdot(-6z)-3=0,\quad -\frac{2}{7}x-\frac{3}{7}y-\frac{6}{7}z-3=0. \ \blacktriangle$$

174. $M_0(3;5;-8)$ нүктесінен $6x-3y+2z-28=0$ жазықтығына дейінгі қашықтықты табу керек.

Шешуі: Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтықты табу формуласы (3.2) бойынша табамыз:

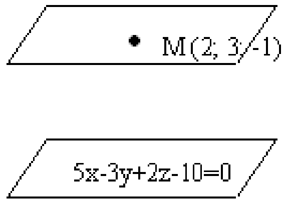
$$d=\frac{|6\cdot3-3\cdot5+2\cdot(-8)-28|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\frac{|-41|}{7}=\frac{41}{7}. \ \blacktriangle$$

175. $M(2;3;5)$ нүктесі арқылы өтетін және $\vec{n}(4;3;2)$ векторына перпендикуляр жазықтық теңдеуін жазу керек.

Шешуі: Нүктесі мен нормаль векторы арқылы жазықтық теңдеуін (3.1) формуласы бойынша жазайық:

$$4(x-2)+3(y-3)+2(z-5)=0, \text{ яғни } 4x+3y+2z-27=0. \ \blacktriangle$$

176. $M(2;3;-1)$ нүктесі арқылы өтетін $5x-3y+2z-10=0$ жазықтығына параллель жазықтық теңдеуін жазу керек (3.2 Сурет).



3.2 Сурет

Шешуі: Берілген жазықтықтың нормаль векторы $\vec{n}\,(5;-3;2)$ болады. Жазықтықтар параллель болғандықтан бұл вектор ізделінді жазықтық үшін де нормаль вектор болады. Сондықтан $5x-3y+2z+D=0-$ ізделінді жазықтық теңдеуі. Мұндағы $D-$бос мүшені M нүктесі арқылы табамыз. M нүктесі жазықтық бойында жататындықтан оның теңдеуін қанағаттандырады, яғни $5\cdot 2-3\cdot 3+2(-1)+D=0 \Rightarrow D=1.$

Сонымен, жазықтық теңдеуі $5x-3y+2z+1=0$ болады. ▲

177. $P\,(2;3;-5)$ нүктесінен координаттар осіне перпендикуляр түсірейік. Олардың табандары арқылы өтетін жазықтық теңдеуін жазу керек.

Шешуі: Перпендикулярлардың табандары: $M_1(2;3;0),\ M_2(2;0;-5),\ M_3(0;3;-5)$ нүктелері болады. Осы нүктелер арқылы өтетін жазықтық теңдеуін (3.3) формуласы бойынша жазамыз:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-0 \\ 2-2 & 0-3 & -5-0 \\ 0-2 & 3-3 & -5-0 \end{vmatrix}=0 \quad \text{немесе} \quad \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z \\ 0 & -3 & -5 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 15x+10y-6z-60=0.$$

▲

178. $A\,(5;4;3)$ нүктесі арқылы өтетін, координат осьтерінен бірдей кесінділер қиятын жазықтық теңдеуін жазу керек.

Шешуі: Жазықтықтың «кесіндідегі» теңдеуін пайдаланамыз, ондағы $a=b=c$ екенін ескеру керек:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1.$$

A нүктесінің координаттары ізделінді жазықтық теңдеуін қанағаттандырады, сондықтан келесі теңдік орындалады:

$$\frac{5}{a}+\frac{4}{a}+\frac{3}{a}=1 \quad \Rightarrow \quad a=12.$$

Сонымен, $x+y+z-12=0$ теңдеуін аламыз. ▲

179. $A\,(2;-1;4)$ және $B\,(3;2;-1)$ нүктелері арқылы өтетін, $x+y+2z-3=0$ жазықтығына перпендикуляр жазықтық теңдеуін жазу керек.

Шешуі: Ізделінді жазықтықтың нормаль $\vec{n}$ векторы ретінде $\overrightarrow{AB}=\{1;3;-5\}$ векторы мен берілген жазықтықтың нормаль $\vec{n}_1=\{1;1;2\}$ векторына перпендикуляр векторды алуға болады. Сондықтан $\vec{n}$ ретінде $\overrightarrow{AB}$ мен $\vec{n}_1$ векторларының векторлық көбейтіндісін аламыз:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \vec{n}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 11\vec{i} - 7\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Енді берілген нүкте (мысалы, A) арқылы өтетін, $\vec{n} = (11; -7; -2)$ векторына перпендикуляр жазықтық теңдеуін қолдану ғана қалды:

$$11(x-2) - 7(y+1) - 2(z-4) = 0 \text{ немесе } 11x - 7y - 2z - 21 = 0. \ \blacktriangle$$

180. $M(3; -1; -5)$ нүктесі арқылы өтетін, $3x - 2y + 2z + 7 = 0$ және $5x - 4y + 3z + 1 = 0$ жазықтықтарына перпендикуляр жазықтық теңдеуін жазу керек.

Шешуі: Ізделінді жазықтықтың $\vec{n}$ нормаль векторы ретінде берілген жазықтықтардың $\vec{n}_1 = \{3; -2; 2\}$ және $\vec{n}_2 = \{5; -4; 3\}$ нормаль векторларының векторлық көбейтіндісін аламыз:

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \vec{i} + \vec{j} - 2 \cdot \vec{k}.$$

Енді берілген $M(3; -1; -5)$ нүктесі арқылы өтетін, $\vec{n} = \{2; 1; -2\}$ векторына перпендикуляр жазықтық теңдеуін қолданамыз. Сонда:

$$2(x-3) + (y+1) - 2(z+5) = 0 \text{ немесе } 2x + y - 2z - 15 = 0. \ \blacktriangle$$

181. Жазықтықтар теңдеулерін нормаль түрге келтір:

1) $x + y - z - 2 = 0;$ 2) $3x + 5y - 4z + 7 = 0.$

Ж: 1) $\dfrac{(x + y - z - 2)}{\sqrt{3}} = 0;$ 2) $-\dfrac{3}{5\sqrt{2}}x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y + \dfrac{4}{5\sqrt{2}}z - \dfrac{7}{5\sqrt{2}} = 0.$

182. $M_0(1; 3; -2)$ нүктесінен $2x - 3y - 4z + 12 = 0$ жазықтығына дейінгі қашықтықты табу керек. M_0 нүктесі жазықтыққа қатысты қалай орналасқан?

Ж: $d = \dfrac{13}{\sqrt{29}}$, координат бас нүктесі мен M_0 нүктесі жазықтыққа қатысты әр жақта орналасады.

183. $M_0(2; 3; -5)$ нүктесінен $4x - 2y + 5z - 12 = 0$ жазықтығына түсірілген перпендикуляр ұзындығын табу керек.

Ж: $d = \dfrac{7\sqrt{5}}{3}.$

184. 1) $M(-2; 3; 4)$ нүктесі арқылы өтетін координат осьтерінен бірдей кесінділер қиятын;

2) $N(2; -1; 4)$ нүктесі арқылы өтетін Oz осінен Ox және Oy осьтеріне қарағанда екі есе үлкен кесінді қиятын жазықтық теңдеуін жазу керек.

Ж: 1) $x + y + z - 5 = 0;$ 2) $2x + 2y + z - 6 = 0.$

185. $P(2; 0; -1)$ және $Q(1; -1; 3)$ нүктелері арқылы өтетін, $3x + 2y - z + 5 = 0$ жазықтығына перпендикуляр жазықтық теңдеуін жазу керек.

Ж: $7x - 11y - z - 15 = 0.$

186. $2x-5y+2z+5=0$ жазықтығының бойынан, OM түзуі координат осьтерімен бірдей бұрыштар жасайтындай, M нүктесін табу керек.

Ж: $M(5;5;5)$.

187. $P(4;-3;12)$ нүктесі координат басынан қандай да бір жазықтыққа түсірілген биіктіктің табаны екені белгілі. Сол жазықтықтың теңдеуін жазу керек.

Ж: $4x-3y+12z-169=0$.

188. $3x-4y+5z-12=0$ жазықтығына перпендикуляр, координат осьтері арқылы өтетін жазықтықтардың теңдеулерін жазу керек.

Ж: $5y+4z=0;\ 5x-3z=0;\ 4x+3y=0$.

189. $P(1;-4;2)$ және $Q(7;1;-5)$ нүктелерінен бірдей қашықтықта орналасқан жазықтық теңдеуін жазу керек.

Ж: $6x+5y-7z-27=0$.

190. $P(0;2;0)$ және $Q(2;0;0)$ нүктелері арқылы өтетін, $x=0$ жазықтығымен 60^0 бұрыш жасайтын жазықтық теңдеуін жазу керек.

Ж: $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{\pm\sqrt{2}}=1$.

191. $M(1;-1;-1)$ нүктесі арқылы өтетін, біреуі Ox осі, екіншісі Oz осін қамтитын жазықтықтар арасындағы бұрышты табу керек.

Ж: 60^0.

192. Координат басы мен $P(4;-2;1),\ Q(2;4;-3)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтық теңдеуін жазу керек.

Ж: $x+7y+10z=0$.

193. $2x+2y+z-7=0,\ 2x-y+3z-3=0,\ 4x+5y-2z-12=0$ жазықтықтарының қиылысу нүктесі мен $M(0;3;0),\ N(1;1;1)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтық теңдеуін жазу керек.

Ж: $x-z=0$.

194. $M(0;2;1)$ нүктесі арқылы өтетін, $\vec{a}=\{1;1;1\}$ және $\vec{b}=\{1;1;-1\}$ векторларына параллель жазықтық теңдеуін жазу керек.

Ж: $x-y+2=0$.

195. $\vec{a}=\{1;2;1\}$ векторы $x+y+2z-4=0$ жазықтығымен қандай бұрыш жасайды?

Ж: $\arcsin\frac{5}{6}$.

3.2 КЕҢІСТІКТЕГІ ТҮЗУ ТЕҢДЕУЛЕРІ

1. Кеңістіктегі түзудің жалпы теңдеуі. Кеңістікте түзу *екі жазықтықтың қиылысуы* ретінде анықталады:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$

2. Түзудің канондық теңдеуі. Түзудің бойында жататын не оған параллель кез келген вектор түзудің *бағыттаушы векторы* делінеді және $\vec{s}(l,m,n)$ деп белгіленеді.

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүктесі арқылы өтетін, бағыттаушы векторы $\vec{s}(l, m, n)$ болатын *түзудің канондық теңдеуі былай жазылады*: $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$.

3. Түзудің параметрлік теңдеуі. Түзудің канондық теңдеуін $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} = t$ параметріне теңестірсек, онда $\begin{cases} x = lt + x_1, \\ y = mt + y_1, \\ z = nt + z_1 \end{cases}$ - *түзудің параметрлік теңдеуі* шығады.

4. Екі түзудің өзара орналасуы. $l_1: \frac{x-a_1}{l_1} = \frac{y-в_1}{m_1} = \frac{z-c_1}{n_1}$ және $l_2: \frac{x-a_2}{l_2} = \frac{y-в_2}{m_2} = \frac{z-c_2}{n_2}$ екі түзу канондық теңдеулерімен берілсе, онда *екі түзудің арасындағы бұрыштың* косинусы келесі формуламен есептеледі:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{S_1} \cdot \overrightarrow{S_2}}{\left|\overrightarrow{S_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{S_2}\right|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

$l_1 \perp l_2 \;\Rightarrow\; \overrightarrow{S_1} \cdot \overrightarrow{S_2} = 0$ (немесе $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$) – түзулердің перпендикулялық белгісі.

$l_1 // l_2 \;\Rightarrow\; \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ - – түзулердің параллельдік белгісі.

5. Түзу мен жазықтыққа арналған есептер. $\frac{x-a}{l} = \frac{y-в}{m} = \frac{z-c}{n}$ түзуі және $Ax + By + Cz + D = 0$ жазықтығы берілсін.

Түзу мен жазықтық арасындағы сүйір бұрыш деп түзу мен оның проекциясының арасындағы бұрышты айтады. Бұл бұрыштың синусы мына формуламен анықталады

$$\sin\alpha = \frac{\overline{N} \cdot \overline{S}}{\left|\overline{N}\right| \cdot \left|\overline{S}\right|} = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

$\vec{n} \perp \vec{s} \;\Rightarrow\; \vec{n} \cdot \vec{s} = 0$ - түзу мен жазықтықтың параллельдік белгісі.

$\vec{n} // \vec{s} \;\Rightarrow\; \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$ - түзу мен жазықтықтың перпендикулялық белгісі.

196. $2x - y + 3z - 1 = 0$ және $5x + 4y - z - 7 = 0$ - түзуінің теңдеуін канондық түрге келтір.

Шешуі: I – т ә с і л. Әуелі $y-$ті, сосын $z-$ті жоя отырып, келесі теңдеулерді аламыз:

$$13x + 11z - 11 = 0 \text{ және } 17x + 11y - 22 = 0.$$

Бұл теңдеулерді x арқылы шешейік:

$$x = \frac{11(z-1)}{-13} = \frac{11(y-2)}{-17}, \quad \text{яғни} \quad \frac{x}{-11} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{13}.$$

II – т ә с і л. Ізделінді түзуге параллель $\vec{s}=\{l;m;n\}$ бағыттаушы векторды табайық. Ол берілген жазықтықтардың нормаль векторларына $\vec{n_1}=\{2;-1;3\}$ және $\vec{n_2}=\{5;4;-1\}$ перпендикуляр болғандықтан, $\vec{s}$ ретінде $\vec{n_1},\vec{n_2}$ векторларының векторлық көбейтіндісін аламыз:

$$\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 5 & 4 & -1\end{vmatrix}=-11\cdot\vec{i}+17\cdot\vec{j}+13\cdot\vec{k}.$$

Сонымен, $l=-11,\ m=17,\ n=13.$

Ізделінді түзу бойында жататын $M_1(x_1;y_1;z_1)$ нүктесін табу үшін бір айнымалыға мән берейік. Мысалы, $x_1=0$ делік. Сонда берілген жазықтықтардың теңдеулерінен:

$$\begin{cases}-y+3z-1=0\\ 4y-z-7=0\end{cases}$$ жүйесін аламыз.

Бұл жүйені шеше отырып, $y_1=2,\ z_1=1$ табамыз. Сонымен, ізделінді түзу теңдеуі:

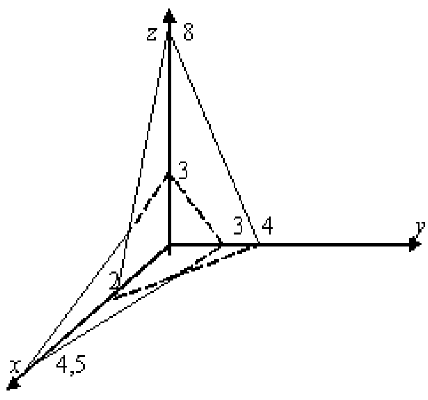
$$\frac{x}{-11}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{13}.$$ ▲

197. $\begin{cases}2x+3y+3z-9=0\\ 4x+2y+z-8=0\end{cases}$ түзуін тұрғызу керек.

Шешуі: Бұл түзуді екі жазықтықтың қиылысу сызығы ретінде тұрғызуға болады. Ол үшін бұл жазықтықтардың «кесіндідегі» теңдеулерін жазайық:

$$\frac{x}{4{,}5}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=0,\quad \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}=1.$$

Берілген жазықтықтарды тұрғызып, ізделінді түзуді аламыз (3.3 Сурет). ▲



3.3 Сурет

198. Координат басынан $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{1}$ түзуіне жүргізілген перпендикуляр түзудің теңдеуін табу керек.

Шешуі: Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі бойынша: $A=l,$ $B=m,\ C=n,\ D=0$ деп ұйғарып, координат басы арқылы өтетін, берілген түзуге перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін жазайық: $2x+3y+z=0.$

Осы жазықтық пен берілген түзудің қиылысу нүктесін табайық. Түзудің параметрлік теңдеуін жазайық: $x = 2t + 2,\ y = 3t + 1,\ z = t + 3.$ Бұл өрнектерді жазықтық теңдеуіне апарып қоямыз:

$$2(2t + 2) + 3(3t + 1) + (t + 3) = 0, \text{ бұдан } t = -\frac{5}{7}.$$

Қиылысу нүктесінің координаттары: $x = \frac{4}{7},\ y = -\frac{8}{7},\ \ z = \frac{16}{7},$ яғни $M\left(\frac{4}{7}; -\frac{8}{7}; \frac{16}{7}\right).$

Координат басы мен M нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуін, берілген екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуінің формуласы бойынша жазамыз:

$$\frac{x-0}{\frac{4}{7}-0} = \frac{y-0}{-\frac{8}{7}-0} = \frac{z-0}{\frac{16}{7}-0} \text{ немесе } \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{4}. \ \blacktriangle$$

199. $\frac{x+1}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z}{1}$ түзуімен қиылысатын $\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{n}$ түзуінің теңдеуіндегі n параметрді және түзулердің қиылысу нүктесін табу керек.

Шешуі: Екі түзудің бағыттаушы векторлары $\vec{s_1} = \{3; 2; 1\},\ \vec{s_2} = \{2; -3; n\}$ мен екі түзудің бойындағы берілген нүктелер арқылы өтетін $\overrightarrow{M_1M_2}\{1-0; 5-0; 0-0\} = \{1; 5; 0\}$ векторы компланар болғандықтан, келесі анықтауыш мәні 0-ге тең (компланарлық шарт бойынша):

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & n \end{vmatrix} = 0 \text{ немесе } 2n + 10 + 3 - 15n = 0, \text{ яғни } n = 1.$$

$\frac{x+1}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z}{1}$ және $\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{1}$ түзулерінің қиылысу нүктесін табу үшін соңғы теңдеуден x пен y-ті z арқылы өрнектейік: $x = 2z, y = -3z.$ Бұл өрнектерді $\frac{x+1}{3} = \frac{y+5}{2}$ теңдігіне қоялық. Сонда:

$$\frac{2z+1}{3} = \frac{-3z+5}{2}, \text{ бұдан } z = 1.$$

Ендеше, $x = 2z = 2,\ y = -3z = -3.$ Сонымен $M(2; -3; 1).$ $\blacktriangle$

200. $M(3; 2; -1)$ нүктесі арқылы өтетін, Ox осімен тік бұрыш жасай қиылысатын түзудің теңдеуін жазу керек.

Шешуі: Түзу Ox осіне перпендикуляр және оны қиятын болғандықтан, ол $N(3; 0; 0)$ нүктесі арқылы өтеді. M және N нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуі:

$$\frac{x-3}{3-3} = \frac{y-2}{0-2} = \frac{z+1}{0+1}, \text{ яғни } \frac{x-3}{0} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{1}. \ \blacktriangle$$

201. $x + y - 2z - 6 = 0$ жазықтығы мен онда жатпайтын $M(1; 1; 1)$ нүктесі берілген. Берілген жазықтыққа қатысты M нүктесіне симметриялы N нүктесін табу керек.

Шешуі: M нүктесі арқылы өтетін кез келген түзудің теңдеуін жазайық: $\frac{x-1}{l}=\frac{y-1}{m}=\frac{z-1}{n}$. MN түзуінің бағыттаушы векторы ретінде берілген жазықтықтың нормаль векторын $\vec{n}=\{1;1;-2\}$ алуға болады:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-2} \quad (MN).$$

Енді берілген жазықтық пен MN түзуінің қиылысу нүктесін табайық. Ол үшін MN түзуінің параметрлік түріне көшейік: $x=t+1,\ y=t+1,\ z=-2t+1.$ Бұл өрнектерді жазықтық теңдеуіне қоялық, сөйтіп $t=1$ табылады. Ендеше, $x=2,\ y=2,\ z=-1$ – MN түзуі мен берілген жазықтықтың қиылысу нүктесінің координаттары.

N симметриялы нүктенің координаттарын келесі формулалар бойынша табамыз:

$$x_0=\frac{x_M+x_N}{2},\ y_0=\frac{y_M+y_N}{2},\ z_0=\frac{z_M+z_N}{2},$$ яғни

$$2=\frac{1+x_N}{2},\ 2=\frac{1+y_N}{2},\ -1=\frac{1+z_N}{2} \quad \Rightarrow \quad x_N=3,\ y_N=3,\ z_N=-3.$$

Сонымен $N(3;3-3)$. ▲

202. $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$ түзуі мен оның бойында жатпайтын $M(1;1;1)$ нүктесі берілген. Берілген түзуге қатысты M нүктесіне симметриялы N нүктесін табу керек.

Шешуі: M нүктесі арқылы өтетін, берілген түзуге перпендикуляр жазықтық теңдеуін жазайық:

$$2(x-1)+3(y-1)-(z-1)=0 \text{ немесе } 2x+3y-z-4=0.$$

Енді бұл жазықтық пен берілген түзудің қиылысу нүктесін табайық. Ол үшін берілген түзудің параметрлік теңдеуін жазамыз: $x=2t+1,\ y=3t,\ z=-t-1.$ Бұл өрнектерді жазықтық теңдеуіне қойып, $t=\frac{1}{14}$ табамыз. Бұдан $x=\frac{8}{7},\ \ y=\frac{3}{14},\ \ z=-\frac{15}{4}.$

Симметриялы N нүктесінің координаттарын кесінді ортасының формулалары бойынша табамыз, яғни

$$\frac{8}{7}=\frac{1+x_N}{2};\quad \frac{3}{14}=\frac{1+y_N}{2};\quad \frac{-15}{14}=\frac{1+z_N}{2} \quad \Rightarrow \quad x_N=\frac{9}{7},\ y_N=-\frac{4}{7},\ z_N=-\frac{22}{7}.$$

Сонымен, $N\left(\frac{9}{7};-\frac{4}{7};-\frac{22}{7}\right)$. ▲

203. $M(5;3;4)$ нүктесі арқылы өтетін, $\vec{s}=\{2;5;-8\}$ векторына параллель түзудің теңдеуін жазу керек.

Ж: $\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-4}{-8}$. ▲

204. $\begin{cases}2x+3y-16z-7=0\\3x+y-17z=0\end{cases}$ түзуінің теңдеуін канондық түрге келтіру керек.

Ж: $\frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{1}$.

205. $\begin{cases}x-2y-5=0\\x-3z+8=0\end{cases}$ түзуінің координат осьтерімен жасайтын бұрыштарын табу керек.

Ж: $\cos\alpha = \frac{6}{7}$, $\cos\beta = \frac{3}{7}$, $\cos\gamma = \frac{2}{7}$.

206. $M(1;-2;3)$ нүктесі арқылы өтетін Ox және Oy осьтерімен 45^0 және 60^0 бұрыштарын жасайтын түзудің теңдеуін жазу керек.

Ж: $\frac{x-1}{\sqrt{2}} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{\pm 1}$.

207. $N(5;-1;-3)$ нүктесі арқылы өтетін және $\begin{cases} 2x+3y+z-6=0 \\ 4x-5y-z+2=0 \end{cases}$ түзуіне параллель болатын түзудің теңдеуін жазу керек.

Ж: $\frac{x-5}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{-11}$.

208. Параллелограмның үш төбесі берілген: $A(3;0;-1), B(1;2;-4)$ және $C(0;7;-2)$. AD және CD қабырғаларының теңдеулерін жазу керек.

Ж: $\frac{x-3}{-1} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{2}$, $\frac{x}{2} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z+2}{3}$.

209. $M(2;-5;1)$ және $N(-1;1;2)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің параметрлік теңдеуін жазу керек.

Ж: $x = -3t-1,\ y = 6t+1,\ z = t+2.$

210. $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}$ және $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ түзулерінің ара қашықтығын табу керек.

Ж: $d = \frac{5\sqrt{30}}{6}$.

211. $A(-1;2;3)$ және $B(2;-3;1)$ нүктелері берілген. $M(3;-1;2)$ нүктесі арқылы өтетін, $\vec{AB}$ векторына параллель түзудің теңдеуін жазу керек.

Ж: $\frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{-2}$.

212. $\begin{cases} 4x-y-z+12=0 \\ y-z-2=0 \end{cases}$ және $\begin{cases} 3x-2y+16=0 \\ 3x-z=0 \end{cases}$ түзулерінің арасындағы бұрышты табу керек.

Ж: $\cos\varphi = \frac{20}{21}$.

213. $ABCD$ параллелограмның екі төбесі $C(-2;3;-5), D(0;4;-7)$ және $M(1;2;-3{,}5)$ диагональдарының қиылысу нүктесі берілген. AB қабырғасының теңдеуін жазу керек.

Ж: $\frac{x-4}{2} = y-1 = \frac{z+2}{-2}$.

214. $A(1;1;1), B(2;3;3)$ және $C(3;3;2)$ нүктелері берілген. A нүктесі арқылы өтетін, $\vec{AB}$ және $\vec{AC}$ векторларына перпендикуляр түзудің теңдеуін жазу керек.

Ж: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{2}$.

3.3 ЕКІНШІ РЕТТІ БЕТТЕР

Декарттық координат жүйесінде екінші ретті беттер $A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1xy + 2B_2xz + 2B_3yz + 2C_1x + 2C_2y + 2C_3z + D = 0$ - жалпы теңдеуімен беріледі, мұндағы $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ - бірдей нөлге тең емес сандар.

Кеңістікте екінші ретті теңдеумен өрнектелетін беттер:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ - эллипсоид, .

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ - бір қуысты гиперболоид,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ - екі қуысты гиперболоид,

$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$ - эллипстік параболоид,

$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}$ - гиперболалық параболоид,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - эллипстік цилиндр,

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - гиперболалық цилиндр,

$y^2 = 2px$ - параболалық цилиндр,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ - конус.

215. $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 8x - 18y - 72z + 13 = 0$ теңдеуін канондық түрге келтіру керек.

Шешуі: Бірдей айнымалылы мүшелерін топтастырайық:

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 2y) + 36(z^2 - 2z) = -13.$$

Жақша ішіндегі өрнектерді толық квадратқа дейін толықтырамыз:

$$4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 - 2y + 1) + 36(z^2 - 2z + 1) = -13 + 4 + 9 + 36$$

немесе $4(x-1)^2 + 9(y-1)^2 + 36(z-1)^2 = 36.$

Координат осьтерін параллель көшіреміз, жаңа координат басы ретінде $O'(1;1;1)$ нүктесін аламыз. Координаттарды түрлендіру формуласы: $x = x'+1,\quad y = y'+1,\quad z = z'+1$ болады. Сонда беттің теңдеуі: $4x'^2 + 9y'^2 + 36z'^2 = 36$ немесе $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} + z'^2 = 1$ – бұл эллипсоид теңдеуі. Оның центрі жаңа координат басында болады, ал жарты осьтері 3, 2, 1-ге тең. ▲

216. $x^2 - y^2 - 4x + 8y - 2z = 0$ теңдеуін канондық түрге келтіру керек.

Шешуі: x пен y-і бар мүшелерді топтастырайық: $(x^2 - 4x) - (y^2 - 8y) = 2z.$ Жақшадағы өрнектерді толық квадратқа дейін толықтырайық:

$$(x^2 - 4x + 4) - (y^2 - 8y + 16) = 2z + 4 - 16 \text{ немесе } (x-2)^2 - (y-4)^2 = 2(z-6).$$

Координат осьтерін параллель көшіреміз, мұндағы жаңа координат басы ретінде $O'(2;4;6)$ нүктесін аламыз. Сонда $x = x'+2,\ y = y'+4,\ z = z'+6.$ Соңында $x'^2 - y'^2 = 2z'$ теңдеуін аламыз. Бұл гиперболалық параболоидты анықтайды. ▲

217. $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y + 1 = 0$ теңдеуі қандай бетті анықтайды?

Шешуі: $(x^2 - x) + (y^2 + 2y) + z^2 = -1.$ Енді толық квадратқа дейін толықтырамыз:

$(x^2 - x + \frac{1}{4}) + (y^2 + 2y + 1) + z^2 = -1 + \frac{1}{4} + 1$ немесе $(x - \frac{1}{2})^2 + (y+1)^2 + z^2 = \frac{1}{4}$

- бұл центрі $C\left(\frac{1}{2}; -1; 0\right),$ радиусы $r = \frac{1}{2}$ сфераның теңдеуі. ▲

218. $4x^2 - y^2 + 4z^2 - 8x + 4y + 8z + 4 = 0$ теңдеуі қандай бетті анықтайды?

Шешуі: Сәйкес түрлендірулер жасап,

$4(x^2 - 2x) - (y^2 - 4y) + 4(z^2 + 2z) = -4$ аламыз. Бұдан

$$4(x^2 - 2x + 1) - (y^2 - 4y + 4) + 4(z^2 + 2z + 1) = -4 + 4 - 4 + 4,$$

$$4(x-1)^2 - (y-2)^2 + 4(z+1)^2 = 0.$$

Жаңа координат бас нүктесі ретінде $O'(1; 2; -1)$ нүктесін ала отырып, координат осьтерін параллель көшіреміз. Сонда $x = x'+1,\ y = y'+2,\ z = z'-1$ формулалары бойынша координаттарды түрлендіре отырып, берілген теңдеу келесі түрге келеді:

$4x'^2 - y'^2 + 4z'^2 = 0$ - бұл конус бетінің теңдеуі. ▲

Төмендегі теңдеулер қандай беттерді анықтайтынын көрсету керек:

219. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z - 2 = 0.$ **Ж:** $C(2; -3; -1), r = 4$ сфера.

220. $x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy - 8z + 5 = 0.$ **Ж:** Еш геометриялық мағынасы жоқ.

221. $x^2 + z^2 - 4x - 4z + 4 = 0.$ **Ж:** $(x-2) + (z-2)^2 = 4 -$ дөңгелек циллиндр.

222. $x^2 + y^2 - z^2 - 2y + 2z = 0.$ **Ж:** $x^2 + (y-1)^2 - (z-1)^2 = 0 -$ конус.

223. $4x^2 + y^2 - z^2 - 24x - 4y + 2z + 35 = 0.$ **Ж:** $x'^2 + \frac{y'^2}{4} - \frac{z'^2}{4} = 1$ - бір қуысты гиперболоид.

224. $x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 2y + 2z + 2 = 0.$ **Ж:** $x'^2 + y'^2 - z'^2 = -1$ - екі қуысты гиперболоид.

225. $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 4z + 18 = 0.$ **Ж:** $x'^2 + y'^2 = 4z'$ - айналу параболоиды.

226. $9x^2 - z^2 - 18x - 18y - 6z = 0.$ **Ж:** $x'^2 - \frac{z'^2}{9} = 2y' -$ гиперболалық параболоид.

4 ФУНКЦИЯЛАР

4.1 НЕГІЗГІ ҰҒЫМДАР

x айнымалының әрбір $x \in X$ мәніне белгілі бір $y \in У$ мәні сәйкес келсе, онда y-ті x-тің *функциясы* деп атап, оны $y = f(x)$ не $y = \varphi(x)$, т.с.с деп белгілейді, мұндағы x- тәуелсіз айнымалы (немесе аргумент) деп аталады.

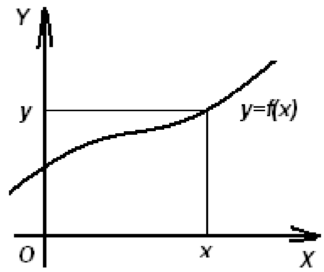
x тәуелсіз айнымалысының қабылдайтын мәндер жиынын *анықталу облысы* деп, ал y функциясының f сәйкестігі бойынша қабылдайтын мәндер жиынын *мәндер* (*өзгеру) облысы* деп атайды.

Сонымен, $y = f(x)$ функциясының X- анықталу облысы, $У$- мәндер облысы, ал f - x тәуелсіз айнымалы мен y функциясының арасындағы сәйкестік.

1. Функцияның берілу тәсілдері. а) К е с т е л і к б е р і л у і. Бұл әдіс бойынша белгілі бір ретпен x- тің мәндері және оған сәйкес y мәндері жазылады.

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

ә) Г р а ф и к т і к б е р і л у і**.** Сан жиындарының арасындағы тәуелділікті көрнекі түрде, оның графигін пайдалана отырып көрсетуге болады. Ол үшін жазықтықта барлық (x, y) нүктелерін салу жеткілікті, сонда (x, y) парларының бірінші элементі - x-абсциссалар да, ал екіншілері - y-ординаталар (4.1 Сурет). Осы нүктелер графикпен анықталған функцияны береді.



4.1 Сурет

б) А н а л и т и к а л ы қ т ә с і л м е н б е р і л у і. Математикада формула түрінде жазылған екі айнымалылы өрнекпен функцияның берілуі аса жиі кездеседі.

Сандар мен айнымалылар арқылы алынған өрнекті функцияның *аналитикалық тәсілмен берілуі* деп атайды.

Мысалға, $x^4 - 2;\ (l\,g\,x - \sin x)/(5x^2 + 1);\ 2^x - \sqrt{5 + 3x}$ - аналитикалық өрнектер, ал $y = x^4 - 2,\ \ f(x) = \dfrac{\lg x - \sin x}{5x^2 + 1},\ \ y(x) = 2^x - \sqrt{5 + 3x}$ - функциялардың аналитикалық түрде берілуі.

2. Функция түрлері. Егер $y = f(x)$ функциясы үшін аргументтің үлкен мәніне функцияның үлкен мәні сәйкес келсе, онда *функция өспелі*, керісінше жағдайда, яғни аргументтің үлкен мәніне функцияның кіші мәні сәйкес келсе, онда *кемімелі функция* деп аталады.

Егер қандай да бір T саны табылып $y(x + T) = y(x)$ теңдігі орындалса, онда $y = f(x)$ функциясын *периодты функция* дейді. T - периоды.

$y=\sin x,\ y=\cos x,\ T=2\pi;\ y=tg\,x, y=ctg\,x;\ T=\pi$ периодты функциялар.

Егер $\alpha(-x)=-\alpha(x)$ теңдігі орындалса, онда $\alpha(x)$- *тақ функция*, ал $\alpha(-x)=\alpha(x)$, онда $\alpha(x)$- *жұп функция* делінеді.

Қандай да бір оң M саны табылып $|f(x)|<M$ теңсіздігі орындалса, онда $f(x)$- *шектелген функция*.

Егер $y=F(u),\ u=\varphi(x)$ болса, онда $y=F[\alpha(x)]$ - *күрделі функция* делінеді. Мысалы, $y=\sin u,\ u=x^2 \Rightarrow y=\sin x^2$.

3. Негізгі элементар функциялар. *Негізгі элементар функциялар* деп келесі аналитикалық түрде берілген функцияларды айтады.

1. Дәрежелік функция $y=x^{\alpha}$, α - нақты сан.
2. Көрсеткіштік функция $y=a^x, a>0, a\neq 1$.
3. Логарифмдік функция $y=\log_a x, a>0, a\neq 1, x>0$.
4. Тригонометриялық функциялар
   $y=\cos x;\ y=\sin x;\ y=tg\,x;\ y=ctg\,x;\ y=\sec x;\ y=\operatorname{cosec} x.$
5. Кері тригонометриялық функциялар
   $y=\arcsin x;\ y=\arccos x;\ y=arctg\,x;\ y=arcctg\,x.$

Негізгі элементар функцияларға амалдар қолдану арқылы алынған функцияны *элементар функция* дейді.

227. $f(x)=x^2$ функциясы берілген. Табу керек: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Шешуі: $x=a$ және $x=b$ нүктелеріндегі берілген функцияның мәндерін табамыз. $f(a)=a^2,\ f(b)=b^2$. Сонда $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{b^2-a^2}{b-a}=a+b.$ ▲

228. $f(x)=\dfrac{x-2}{2x-1}$ функциясының анықталу облысын табу керек.

Шешуі: Берілген функция бөлшек рационал функция болғандықтан, оның бөлімі нөлден өзге болуы керек. Сонымен, $2x-1\neq 0,\ x\neq\dfrac{1}{2}$ үшін берілген функция анықталады.

$$D(f)=\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right).$$ ▲

229. $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x-1}$ функциясының анықталу облысын табу керек.

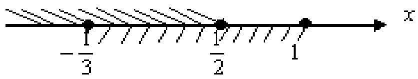
Шешуі: $x-1\neq 0$ және $1+x>0$ мәндерінде функция анықталады. Яғни $x\neq 1$ және $x>-1$. Сонымен, функцияның анықталу облысы екі интервалдың бірігуі болады:

$$D(f)=(-1;1)\cup(1;+\infty).$$ ▲

230. $f(x)=\sqrt{1-2x}+3\cdot\arcsin\dfrac{3x-1}{2}$ функциясының анықталу облысын табу керек.

Шешуі: Бірінші қосылғыш үшін $1-2x\geq 0$ және екінші қосылғыш үшін $-1\leq\dfrac{3x-1}{2}\leq 1$ болуы керек. Берілген функцияның анықталу облысын табу үшін $\begin{cases}1-2x\geq 0\\ -2\leq 3x-1\leq 2\end{cases}$ теңсіздіктер жүйесін шешу керек.

$$\begin{cases} x \le \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \le x \le 1 \end{cases}$$



Функциясының анықталу облысы $\left[-\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right]$ кесіндісі. ▲

231. 1) $f(x) = x^2 - 6x + 5;$ 2) $f(x) = 2 + 3\sin x$ функцияларының мәндер облысын табу керек.

Шешуі: 1) Квадрат үшмүшеліктен толық квадратты шығарып аламыз: $f(x) = x^2 - 6x + 9 - 4 = (x-3)^2 - 4.$ Бірінші қосылғыш кез келген x үшін теріс емес, сондықтан функция (-4)-тен кем емес мән қабылдайды. Сонымен, функцияның мәндер облысы: $E(f) = [-4; +\infty)$ шексіз аралығы.

2) $-1 \le \sin x \le 1$ қабылдайтыны белгілі. Бұл қос теңсіздіктің барлық жағын 3-ке көбейтіп, сосын оларға 2 қосып шығайық:

$$-3 \le 3\sin x \le 3$$
$$-1 \le 2 + 3\sin x \le 5.$$

Сонымен, $E(f) = [-1; 5].$ ▲

232. Функциялардың негізгі периодтарын табу керек:

1) $f(x) = \cos 8x;$ 2) $f(x) = \sin 6x + tg 4x.$

Шешуі: 1) $\cos x$ функциясының негізгі периоды 2π болғандықтан, $f(x) = \cos 8x$ функциясының негізгі периоды $\frac{2\pi}{8}$, яғни $\frac{\pi}{4}$ болады.

2) Мұнда бірінші қосылғыш үшін негізгі периоды $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, ал екінші қосылғыш үшін ол $\frac{\pi}{4}$. Ендеше, берілген функция үшін негізгі период $\frac{\pi}{3}$ пен $\frac{\pi}{4}$ сандарының ең кіші ортақ еселігі болады, яғни π. ▲

233. 1) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x} + 2\sin x;$ 2) $f(x) = 2^x + 2^{-x};$

3) $f(x) = |x| - 5e^{x^2};$ 4) $f(x) = x^2 + 5x;$ 5) $f(x) = \lg \frac{x+3}{x-3}$

функцияларының жұп-тақтығын анықтау керек.

Шешуі: Бұл бес функцияның анықталу облысы 0-ге қатысты симметриялы: алғашқы төртеуінде $D(f) = (-\infty; +\infty),$ ал соңғысында $D(f) = (-\infty; -3) \cup (3; +\infty).$

1) x орнына $(-x)$-ті қоямыз:

$$f(-x) = (-x)^2 \cdot \sqrt[3]{-x} + 2\sin(-x) = -x^2 \cdot \sqrt[3]{x} - 2\sin x = -(x^2 \cdot \sqrt[3]{x} + 2\sin x) = -f(x),$$

яғни берілген функция – тақ.

2) $f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^x = f(x),$ яғни берілген функция – жұп.

3) $f(-x) = |-x| - 5 \cdot e^{(-x)^2} = |x| - 5e^{x^2} = f(x).$ Ендеше $f(x)-$жұп функция.

4) $f(x) = (-x)^2 + 5(-x) = x^2 - 5x.$ Яғни, $f(-x) \ne f(x)$ және $f(-x) \ne -f(x).$ Сонымен, $f(x)-$жұп та емес, тақ та емес.

5) $f(-x)=\lg\frac{-x+3}{-x-3}=\lg\frac{x-3}{x+3}=\lg\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^{-1}=-\lg\frac{x+3}{x-3}=-f(x),$ яғни берілген функция – тақ. ▲

234. Функциялардың анықталу облысын табу керек:

1) $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{x};$ 2) $f(x)=\arccos\left(\frac{x}{2}-1\right);$ 3) $f(x)=\frac{1}{xe^x};$ 4) $f(x)=\frac{x-2}{\cos 2x};$

5) $f(x)=\frac{2x^2+3}{x-\sqrt{x^2-4}};$ 6) $f(x)=\lg(3x-1)+2\lg(x+1);$ 7) $f(x)=\sqrt{\frac{x}{2-x}}-\sqrt{\sin x};$

Ж: 1) $[-2;0)\cup(0;2];$ 2) $[0;4];$ 3) $(-\infty;0)\cup(0;+\infty);$

4) $x\neq\frac{\pi(2n+1)}{4}, n\in Z;$ 5) $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty);$ 6) $(\frac{1}{3};+\infty);$ 7) $[0;2).$

235. Функциялардың мәндер облысын табу керек:

1) $f(x)=|x|+1;$ 2) $f(x)=\frac{5}{x};$ 3) $f(x)=\sqrt{16-x^2};$

4) $f(x)=-x^2+8x-13;$ 5) $f(x)=1-3\cos x;$ 6) $f(x)=4^{-x^2}.$

Ж: 1) $[1;+\infty);$ 2) $(-\infty;0)\cup(0;+\infty);$ 3) $[-4;4];$

4) $(-\infty;3];$ 5) $[-2;4];$ 6) $(0;1].$

236. Функциялардың жұп-тақтығын анықтау керек.

1) $f(x)=x^4\cdot\sin 7x;$ 2) $f(x)=5|x|-3\cdot\sqrt[3]{x^2};$ 3) $f(x)=x^4-3x^2+x;$

4) $f(x)=|x|+2;$ 5) $f(x)=|x+2|;$ 6) $f(x)=\lg\cos x;$ 7) $f(x)=\frac{16^x-1}{4^x}.$

Ж: 1) тақ; 2) жұп; 3) жұп та, тақ та емес; 4) жұп; 5) жұп та, тақ та емес;

6) жұп; 7) тақ.

237. Функциялардың негізгі периодын табу керек:

1) $f(x)=\sin 5x;$ 2) $f(x)=-2\cos\frac{x}{3}+1;$ 3) $f(x)=\lg\cos 2x;$ 4) $f(x)=tg3x+\cos 4x.$

Ж: 1) $\frac{2\pi}{5};$ 2) $6\pi;$ 3) $\pi;$ 4) $\pi.$

4.2 ШЕКТЕР

1. Сандық тізбектер мен функциялар шектері. Математикадағы негізгі түсініктің бірі – сан. $N=\{1,2,\dots\}$- натурал сандар жиыны.

Реттері өсуіне қарай бүтін сандармен нөмірленген сандар жиынын *тізбек* деп атайды: $x_1,x_2,x_3,\dots,\ x_n,\dots$ немесе былай белгілейді $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.

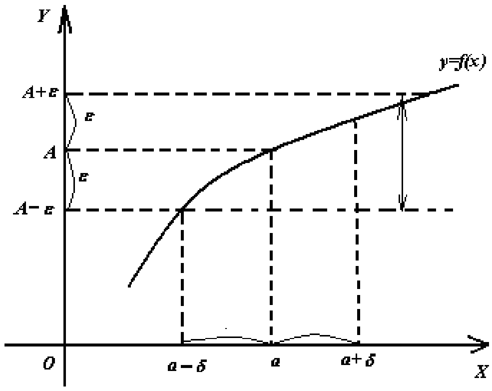
Егер кез келген оң ε санына сәйкес натурал $N=N(\varepsilon)$ саны табылып, барлық $n>N(\varepsilon)$ нөмірлері үшін $|x_n-a|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда a саны $\{x_n\}$ *тізбегінің шегі* деп аталады және былай жазылады: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ (немесе $n\to\infty$ жағдайда $x_n\to a$).

Шегі бар болатын тізбек *жинақты тізбек* деп, ал шегі болмайтын тізбек *жинақсыз тізбек* деп аталады.

Егер тізбек жинақты болса, оның тек бір ғана шегі болады.

Егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына сәйкес $\delta > 0$ саны табылып, $0 < |x-a| < \delta$ шартын қанағаттандыратын барлық x үшін $|f(x) - A| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда A санын f *функциясының* x-тің a-ға ұмтылғандағы *шегі* деп атайды және $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ деп жазады (4.2 Сурет).

(символдар арқылы: $A = \lim\limits_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow\ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$).



4.2 Сурет

Ш е к қ а с и е т т е р і.

1^0. Қосындысының шегі олардың шектерінің қосындысына тең болады:

$\lim(\grave{E}_1 + \grave{E}_2 + \ldots + \grave{E}_n) = \lim \grave{E}_1 + \lim \grave{E}_2 + \ldots + \lim \grave{E}_n$.

2^0. Көбейтіндінің шегі олардың шектерінің көбейтіндісіне тең болады:

$$\lim(И_1 \cdot И_2 \ldots И_n) = \lim И_1 \cdot \lim И_2 \cdot \ldots \cdot \lim И_n.$$

Тұрақтыны шек таңбасының сыртына шығаруға болады:

$$\lim C И_1 = \lim C \cdot \lim И_1 = C \lim И_1.$$

3^0. Бөлшектің шегі олардың шектерінің қатынасына тең болады:

2. Шексіз аз және шексіз көп функциялар (шамалар). Егер $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ немесе $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0$ болса, онда $\alpha = \alpha(x)$ функциясы (шамасы) *шексіз аз функция (шама)* деп аталады.

Егер $\alpha(x)$ шексіз аз шама болса, яғни $\alpha(x) \to 0$, онда $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ *шексіз көп шама* деп аталады, яғни $\dfrac{1}{\alpha(x)} \to \infty$. Сонымен, егер $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, онда $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{\alpha(x)} = \infty$.

Ш е к с і з а з ш а м а л а р д ы ң қ а с и е т т е р і.

1. Шексіз аз шамалардың алгебралық қосындысы да шексіз аз шама болады.
2. Шексіз аз шама $\alpha = \alpha(x)$-тің шектелген $z = z(x)$ функциясына көбейтіндісі де шексіз аз шама болады
3. Шексіз аз шама $\alpha(x)$-тің $z(x)$ функциясына қатынасы $\dfrac{\alpha(x)}{z(x)}$ да шексіз аз шама болады ($\lim\limits_{x\to a} z(x) \neq 0$).

238. $n\to\infty$ жағдайда $3,\ 2\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{3},\ 2\frac{1}{4},...,\ 2+\frac{1}{n},...$ тізбегінің шегі 2 санына тең екенін көрсету керек.

Шешуі: Тізбектің n-ші мүшесі $x_n=2+\frac{1}{n}.$ Бұдан, $x_n-2=\frac{1}{n}.$ ε оң санын алдын ала белгілейік. $\frac{1}{n}<\varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай n санын үлкен етіп таңдап аламыз. Ол үшін $n>\frac{1}{\varepsilon}$ деп алу жеткілікті. Онда $|x_n-2|=\left|\frac{1}{n}\right|<\varepsilon.$ Ендеше, $\lim x_n=2.$ ▲

239. $n\to\infty$ жағдайда $\frac{7}{3},\ \frac{10}{5},\ \frac{13}{7},...,\frac{3n+4}{2n+1},...$ тізбегінің шегі $\frac{3}{2}$ санына тең екенін көрсету керек.

Шешуі: $x_n-\frac{3}{2}=\frac{3n+4}{2n+1}-\frac{3}{2}=\frac{5}{2(2n+1)}.$ n-нің қандай мәнінде $\frac{5}{2(2n+1)}<\varepsilon$ теңсіздігі орындалатынын анықтайық. $2(2n+1)>\frac{5}{\varepsilon}$ болғандықтан $n>\frac{5}{4\varepsilon}-\frac{1}{2}$ болады. Сонымен, егер $n>\frac{5}{4\varepsilon}-\frac{1}{2}$ болса, онда $\left|x_n-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon,$ яғни $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{3}{2}.$

$\varepsilon=0{,}1$ деп алсақ, $\left|x_n-\frac{3}{2}\right|<0{,}1$ теңсіздігі $n>12$ (мысалы, $n=13$) үшін орындалатын болады. Сол сияқты, $\left|x_n-\frac{3}{2}\right|<0{,}01$ теңсіздігі $n>124{,}5$ (мысалы, $n=125$) үшін орындалады, ал $\left|x_n-\frac{3}{2}\right|<0{,}001$ теңсіздігі $n>1249{,}5$ (мысалы, $n=1250$) болғанда орындалады. ▲

3. Шекті есептеу тәсілдері. 1) $x\to\infty-$да екі көпмүшенің қатынасының шегін табу үшін алдын ала бөлшектің алымы мен бөлімін x^n-не бөлеміз (мұндағы $n-$көпмүшелердің үлкен дәрежесі).

240. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2+x-15}{3x^2+x-1}$ шегін есептеу керек.

Шешуі: $x\to\infty$ болғандықтан, бөлшектің алымы да, бөлімі де шексіз үлкен шамалар. Мұндайда, $\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандық дейді. Бөлшектің алымы мен бөлімін $x-$тің үлкен дәрежесі x^2-не бөлеміз, сонда:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+x-15}{3x^2+x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{1}{x}-\frac{15}{x^2}}{3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{6}{3}=2,$$

мұндағы $x\to\infty-$да $\frac{1}{x},\ \frac{15}{x^2},\ \frac{1}{x^2}$ бөлшектері нөлге ұмтылады. ▲

2) $\lim\limits_{x\to a}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}-$ екі көпмүшенің қатынасының шегін табу керек болсын.

Егер $x \to a-$да $P_n(x) \to 0,\ Q_m(x) \to 0$ болса, онда $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық аламыз. Мұндай жағдайда бөлшектің алымы мен бөлімін көбейткіштерге жіктеп, сосын қысқартамыз.

241. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+1}$ шегін есептеу керек.

Шешуі: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{x+2}{x-1} = \frac{2+2}{2-1} = \frac{4}{1} = 4.$ ▲

3) Иррационал функцияларды рационалға келтіру үшін кейде жаңа айнымалы енгізу керек.

242. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ шегін есептеу керек.

Шешуі: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left|\begin{matrix}1+x=t^6 \\ x\to 0-\partial a\ \ t\to 1\end{matrix}\right| = \lim\limits_{t\to 1}\frac{t^3-1}{t^2-1} = \left(\frac{0}{0}\right) =$

$= \lim\limits_{t\to 1}\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)t+1)} = \lim\limits_{t\to 1}\frac{t^2+t+1}{t+1} = \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}.$ ▲

4) Иррационалдықтан рационалға көшудің тағы бір жолы – алым мен бөлімді түйіндеске көбейту.

243. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$ шегін есептеу керек.

Шешуі: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x^2\cdot\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2-1^2}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\cdot\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{1}{2}.$ ▲

5) Б і р і н ш і т а м а ш а ш е к. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

($\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандықты шешу үшін қолданылады).

244. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x}$ шегін есептеу керек.

Шешуі: Бірінші тамаша шекті пайдаланамыз, сонда:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{m\cdot\sin mx}{m\cdot x} = m\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{m\cdot x} = m\cdot 1 = m.$$ ▲

6) Е к і н ш і т а м а ш а ш е к. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ немесе $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

(1^∞ түріндегі анықталмағандықты шешу үшін қолданылады).

$y=\log_a x$ функциясында $a=e$ болса, онда $y=\ln x$- *натурал логарифм* деп аталады. $\lg x=\frac{\ln x}{\ln 10}=\lg e\cdot\ln x$.

245. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$.

Шешуі: Бөлшектің алымын бөліміне бөле отырып, бүтін бөлігін шығарып аламыз:

$$\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}=1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}.$$

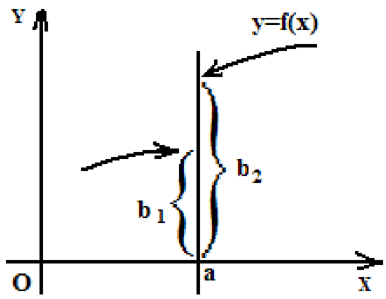
$x\to\infty$-да берілген функция – негізі 1-ге, ал дәрежесі ∞-ке ұмтылатын 1^∞ түріндегі анықталмағандықты береді. Ендеше, екінші тамаша шекті пайдалану үшін келесі түрлендірулер жасаймыз:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right]^{\frac{x\cdot(8x-3)}{x^2-3x+7}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^2-3x}{x^2-3x+7}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8-\frac{3}{x}}{1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}}=e^8.\ \blacktriangle$$

4. Бір жақты шектер. Егер x айнымалы a-дан кіші мәндер қабылдап a санына ұмтылғанда $f(x)$ функциясы $в_1$-ге ұмтылса, онда былай белгіленеді: $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=в_1$ және $в_1$-ді $f(x)$ функциясының a нүктесіндегі *сол жақ шегі* деп атайды.

Егер x айнымалы a санынан тек үлкен мәндер қабылдап a-ға ұмтылса, онда былай белгіленеді $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=в_2$ және $в_2$-ні $f(x)$ функциясының a нүктесіндегі *оң жақ шегі* деп атайды (4.3 Сурет).



4.3 Сурет

246. $f(x)=e^{\frac{1}{x-a}}$ функциясының $x\to a$-да біржақты шектерін табу керек.

Шешуі: Егер $x\to a-0$ болса, онда $\frac{1}{x-a}=\frac{1}{-0}=-\infty.$ Сонымен,

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=\lim_{x\to a-0}e^{\frac{1}{x-a}}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{+\infty}}=\frac{1}{+\infty}=0.$$

Егер $x\to a+0$ болса, онда $\frac{1}{x-a}=\frac{1}{+0}=+\infty.$

Сонымен, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} e^{\frac{1}{x-a}} = e^{+\infty} = +\infty.$ ▲

Келесі шектерді есептеу керек:

247. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x+2}{2x+3}.$

Шешуі: $x\to 4$ болғандықтан, бөлшектің алымы $5\cdot 4+2=22$ санына, ал бөлімі $2\cdot 4+3=11$ санына ұмтылады. Ендеше, $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x+2}{2x+3}=\dfrac{22}{11}=2.$ ▲

248. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+5}{2x+7}.$

Шешуі: Бөлшектің алымы мен бөлімі $x\to\infty$ болғанда шексіз өседі. Мұндайда, $\dfrac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандық делінеді. Бөлшектің алымы мен бөлімін x-ке бөлеміз, сонда:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{2x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}}{2+\frac{7}{x}}=\frac{3}{2},$$

себебі $x\to\infty$ жағдайда $\dfrac{5}{x}$ және $\dfrac{7}{x}$ бөлшектері нөлге ұмтылады. ▲

249. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}.$

Шешуі: $x\to 3$ жағдайда бөлшектің алымы мен бөлімі нөлге ұмтылады ($\dfrac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық). Сондықтан келесі түрлендіру жасайық:

$$\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}=\frac{x+3}{x}.$$

Сонымен, $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{3+3}{3}=\dfrac{6}{2}=2.$ ▲

250. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}.$

Шешуі: Мұнда $x\to 1$ болғандықтан $\dfrac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық алынады. Сондықтан, келесі түрлендіру жасайық – бөлшектің алымы мен бөлімін көбейткіштерге жіктейік:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-1)}{(x+1)(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0}{2}=0.$$ ▲

251. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}.$

Шешуі: Мұнда $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық алынады. Келесі түрлендіруді жасайық.. Бөлшектің алымы мен бөлімін көбейткіштерге жіктейік:

$$\lim_{x\to10}\frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to10}\frac{(x-10)(x^2+10x+100)}{x(x^2-20x+100)}=\lim_{x\to10}\frac{(x-10)(x^2+10x+100)}{x(x-10)^2}=$$

$$=\lim_{x\to10}\frac{x^2+10x+100}{x(x-10)}=\frac{10^2+10\cdot10+100}{10(10-10)}=\frac{300}{0}=\infty,$$ себебі $\frac{300}{0}$ бөлшегінің бөлімі шексіз аз шама. Сондықтан оған кері шама $\frac{300}{0}$ - шексіз көп шама болады. ▲

252. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.

Шешуі: Бөлшектің алымы мен бөлімін $\sqrt{x+4}+2$ қосындысына көбейтеміз:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)\cdot(\sqrt{x+4}+2)}{x\cdot(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to0}\frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}.$$ ▲

253. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}$.

Шешуі: $1+x=y^5$ деп белгілейік, сонда $x\to0$-да $y\to1$ болады. Ендеше,

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{y\to1}\frac{\sqrt[5]{y^{15}}-1}{y^5-1}=\lim_{y\to1}\frac{y^3-1}{y^5-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{y\to1}\frac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y^4+y^3+y^2+y+1)}=$$

$$=\lim_{y\to1}\frac{y^2+y+1}{y^4+y^3+y^2+y+1}=\frac{3}{5}.$$ ▲

254. $\lim_{x\to0}\frac{1-cos5x}{x^2}$.

Шешуі: $$\lim_{x\to0}\frac{1-cos5x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{2\cdot\sin^2\frac{5x}{2}}{x^2}=2\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{5x}{2}}{x}\cdot\frac{\sin\frac{5x}{2}}{x}=$$

$$=2\cdot\frac{25}{4}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}=2\cdot\frac{25}{4}\cdot1\cdot1=\frac{25}{2}.$$ ▲

255. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$.

Шешуі: Мұнда $\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандық. Бөлшектің алымы мен бөлімін x-тің үлкен дәрежесіне, яғни x^3-не бөлеміз:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{4}.$$

▲

256. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}.$

Шешуі: Алым мен бөлімді x^4-не бөлеміз:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x^4}}{\sqrt{1+\frac{3}{x^7}+\frac{4}{x^8}}}=\frac{3}{1}=3.$$

▲

257. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right).$

Шешуі: Мұнда $\infty-\infty$ түріндегі анықталмағандық. Берілген өрнекті $\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}$, яғни түйіндесіне көбейтіп, сосын қысқартамыз:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}\right)}{\left(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+8x+3-(x^2+4x+3)}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\frac{4}{1+1}=2.$$

▲

258. $f(x)=\dfrac{1}{x+2^{\frac{1}{x-3}}}$ функциясының $x\to 3$-да біржақты шектерін табу керек.

Шешуі: Егер $x\to 3-0$ болса, онда $\dfrac{1}{x-3}\to-\infty$ және $2^{\frac{1}{x-3}}=2^{-\infty}=\dfrac{1}{2^{+\infty}}=\dfrac{1}{\infty}\to 0.$ Сонымен,

$$\lim_{x\to 3-0}f(x)=\lim_{x\to 3-0}\frac{1}{x+2^{\frac{1}{x-3}}}=\frac{1}{3+0}=\frac{1}{3}.$$

Сол сияқты, $x\to 3+0$ болса, онда $\dfrac{1}{x-3}\to+\infty$ және $2^{\frac{1}{x-3}}=2^{+\infty}\to\infty.$ Сонымен,

$$\lim_{x\to 3+0}f(x)=\lim_{x\to 3+0}\frac{1}{x+2^{\frac{1}{x-3}}}=\frac{1}{3+\infty}=\frac{1}{\infty}=0.$$

▲

259. $n\to\infty$-да $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{9}{4},\ldots,\dfrac{4n-3}{n+1},\ldots$ тізбегінің шегі 4 болатынын көрсету керек.

260. $n\to\infty$-да $1,\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{5},\ldots,\dfrac{1}{2n-1},\ldots$ тізбегінің шексіз аз болатынын көрсету керек.

Келесі шектерді есептеу керек:

261. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$. **Ж:** $\dfrac{1}{2}$. **262.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$. **Ж:** -1.

263. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$. **Ж:** $\dfrac{1}{6}$. **264.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$. **Ж:** -2.

265. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(a+2h)-2\sin(a+h)+\sin a}{h^2}$. **Ж:** $-\sin a$. **266.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgmx}{\sin nx}$. **Ж:** $\dfrac{m}{n}$.

267. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{tgx-tgx_0}{x-x_0}$. **Ж:** $\sec^2 x_0$. **268.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}$. **Ж:** $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

269. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\pi-2x}$. **Ж:** $\dfrac{1}{2}$. **270.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+3x^2+5x-6}{x^3+3x^2+7x-1}$. **Ж:** ∞.

($\dfrac{\pi}{2}-x=\alpha$ деп ұйғарған жөн).

271. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x^3+4x+5)(x^2+x+1)}{(x+2)\cdot(x^4+2x^3+7x^2+x-1)}$. **Ж:** 2. **272.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}$. **Ж:** $\dfrac{3}{4}$.

273. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$. **Ж:** $-\dfrac{1}{4}$. **274.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$. **Ж:** $\dfrac{1}{2}$.

275. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$. **Ж:** 3. **276.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}$. **Ж:** $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

277. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$. **Ж:** $\dfrac{25}{9}$. **278.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$. **Ж:** $\dfrac{1}{2}$.

279. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+mx)}{x}$. **Ж:** m. **280.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2^x+3}{2^2-3}$. **Ж:** 1, егер $x\to+\infty$; -1, егер $x\to-\infty$.

281. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+b^2}-\sqrt{x^2+cx+d}\right)$. **Ж:** $\dfrac{a-c}{2}$. **282.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-5^x}{1-e^x}$. **Ж:** $\ln 5$.

283. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$. **Ж:** 0. **284.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$. **Ж:** 0.

285. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8^x-7^x}{6^x-5^x}$. **Ж:** $\ln\dfrac{8}{7}:\ln\dfrac{6}{5}$. **286.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\ln(1+x)}$. **Ж:** 2.

287. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-1}{x}$. **Ж:** $\ln 5$. **288.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}$. **Ж:** $\dfrac{1}{4}$.

289. $\lim\limits_{x\to\pm 0}\dfrac{\sin x}{|x|}$. **Ж:** 1, егер $x\to+0$; -1, егер $x\to-0$. **290.** $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t+\sin t}{t-\sin t}$. **Ж:** $+\infty$.

291. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{\ln(x+1)}$. **Ж:** 2. **292.** $\lim\limits_{x\to 5-0}10^{\frac{1}{x-5}}$. **Ж:** 0.

293. $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$. **Ж:** Шегі жоқ. **294.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^4-1}$. **Ж:** $\dfrac{5}{4}$.

295. $\lim\limits_{t\to\infty}t\left(\sqrt[t]{a}-1\right)$ (мұндағы $t>0$). **Ж:** $\ln a$.

(Ескерту: $\frac{1}{t}=x$ деп алған жөн, мұнда $x\to 0$).

296. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}$. **Ж:** e. **297.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$. **Ж:** e^3.

298. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)$. **Ж:** $\frac{1}{6}$. **299.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5^x-4^x}{x^2+x}$. **Ж:** $\ln\frac{5}{4}$.

300. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x\cdot\ln x}$ **Ж:** 1. ($x^x=e^{x\ln x}$ екенін ескерген жөн).

301. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x)}{x}$. **Ж:** -3. **302.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+5x^3+7}{2x^5+3x^4+1}$. **Ж:** 0.

303. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+2)-\ln 2}{x}$. **Ж:** $\frac{1}{2}$.

304. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x-2}\right)^{x}$. **Ж:** e^{10}. **ә)** $\lim\limits_{\alpha\to 0}(2-\cos\alpha)^{\operatorname{cosec}^2\alpha}$. **Ж:** $\sqrt{e}$.

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{x+c}$. **Ж:** e^{a-b}. **в)** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$. **Ж:** $\sqrt{e}$.

4.3 ЭКВИВАЛЕНТ ШЕКСІЗ АЗ ШАМАЛАР

1. Шексіз аз шамаларды салыстыру. $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ - шексіз аз шамалар болсын. Егер $\frac{\beta}{\alpha}$ қатынасының шегі ақырлы және нөлге тең емес болса, яғни $\lim\frac{\beta}{\alpha}=A\neq 0$ болса, онда шексіз аз α және β шамалары *бірдей өлшемді шексіз аз шамалар* деп аталады.

Егер екі шексіз аз шамалардың қатынасы $\frac{\beta}{\alpha}\to 0$, яғни $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$ $(\lim\frac{\alpha}{\beta}=\infty)$ болса, онда β шексіз аз шамасы α - ға қарағанда *жоғарғы ретті шексіз аз шама* деп аталады.

Егер $\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=A\neq 0$ болса, онда β шексіз аз шама мен α^k шексіз аз шамалары *бірдей өлшемді шексіз аз шамалар* деп аталады.

Егер $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$ болса, онда α және β *эквивалент шексіз аз шамалар* деп аталады.

Е с к е р т у. Егер $\lim\frac{\beta}{\alpha}$ - шегі жоқ болса және шексіздікке ұмтылса, онда α мен β салыстырылмайды дейді.

2. Эквивалент шексіз аз шамаларды шекті есептеуде қолдану. $\alpha(x)$ функциясы $x\to a$-да шексіз аз шама болсын $\left(\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0\right)$. Эквивалент шексіз аз шамаларды қарастырайық:

1. $\sin\alpha(x)\approx\alpha(x)$.

2. $tg\,\alpha(x)\approx\alpha(x)$.

3. $\arcsin\alpha(x)\approx\alpha(x)$.

4. $arctg\,\alpha(x)\approx\alpha(x)$.

5. $\log_a(1+\alpha(x))\approx\dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$.

6. $\ln(1+\alpha(x))\approx\alpha(x)$.

7. $1-\cos\alpha(x)\approx\dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$.

8. $a^{\alpha(x)}-1\approx a(x)\ln a$.

9. $e^{\alpha(x)}-1\approx\alpha(x)$.

10. $(1+\alpha(x))^a-1\approx a\cdot\alpha(x)$.

11. $\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1\approx\dfrac{\alpha(x)}{n}$.

12. $(1+\alpha(x))^{1/\beta(x)}\approx e^{\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}}$.

Эквивалент шексіз аз шамаларды пайдаланып шектерді табуға болады.

305. $t-$шексіз аз болсын. $\alpha=5t^2+2t^5$ және $\beta=3t^2+2t^3$ шексіз аз шамаларды салыстыру керек.

Шешуі: $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{5t^2+2t^5}{3t^2+2t^3}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{5+2t^3}{3+2t}=\dfrac{5}{3}.$

α және β қатынасының шегі 0-ге тең емес тұрақты сан болғандықтан, α және β - бірдей өлшемді шексіз аз шамалар болады. ▲

306. $\alpha=t\cdot\sin^2 t$ және $\beta=2t\cdot\sin t$ функцияларын $t\to0$-да салыстыру керек.

Шешуі: $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t\cdot\sin^2 t}{2t\cdot\sin t}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{t\to0}\sin t=0,$ яғни $\alpha=O(\beta)$. ▲

307. $\alpha=t\cdot\ln(1+t),\ \beta=t\cdot\sin t$ шексіз аз функцияларды $t\to0$-да салыстыру керек.

Шешуі: $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t\cdot\ln(1+t)}{t\cdot\sin t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln(1+t)}{\sin t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\frac{\ln(1+t)}{t}}{\frac{\sin t}{t}}=1,$ яғни $\alpha\sim\beta$. ▲

308. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x\cdot\sin x)}{tg\,x^2}$ шегін есептеу керек.

Шешуі: Бөлшектің алымы мен бөлімін эквивалент шексіз аз шамалармен алмастырамыз: $\ln(1+3x\cdot\sin x)\sim3x\cdot\sin x,\ tgx^2\sim x^2$. Сонда:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x\cdot\sin x)}{tgx^2}=\lim_{x\to0}\frac{3x\cdot\sin x}{x^2}=3\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=3.$$ ▲

309. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{x}=5$. ▲

310. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin3x}{\ln(1+7x)}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{7x}=\dfrac{3}{7}$. ▲

311. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos3x}{e^x-1}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{(3x)^2}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{9x}{2}=0$. ▲

312. $y = xe^x$ шексіз аз шамасының x шексіз аз шамасымен салыстырғанда өлшемін анықтау керек.

Ж: $y \sim x$. ▲

313. $y = \sqrt{1 + x\sin x} - 1$ шексіз аз шамасының x шексіз аз шамасымен салыстырғанда өлшемін анықтау керек.

Ж: 2. ▲

314. $x \to 0$-да $y = \sqrt{\sin 2x}$ шексіз аз шамасының x-пен салыстырғанда өлшемін анықтау керек.

Ж: $\frac{1}{2}$. ▲

315. $\alpha = t^2 \cdot \sin^2 t$ және $\beta = t \cdot tgt$ шексіз аз шамаларды $t \to 0$-да салыстыру керек.

Ж: $\alpha = O(\beta)$. ▲

316. $\alpha = (1+x)^m - 1$ және $\beta = mx$ ($m-$ оң рационал сан) шексіз аз шамаларды $x \to 0$-да салыстыру керек.

Ж: $\alpha \sim \beta$. ▲

317. $\alpha = a^x - 1$ және $\beta = x \cdot \ln a$ шексіз аз шамаларды $x \to 0$-да салыстыру керек.

Ж: $\alpha \sim \beta$. ▲

Төмендегі шектерді эквивалент шексіз аз шамаларды пайдаланып табу керек:

318. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{tg3x}$. **Ж:** $\frac{1}{3}$.

319. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}$. **Ж:** $\frac{9}{4}$.

320. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1-4x)}$. **Ж:** $-\frac{1}{2}$.

321. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(1+x-3x^2+2x^3)}{\ln(1+3x-4x^2+x^3)}$. **Ж:** $-\frac{1}{2}$.

322. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}$ **Ж:** $-\frac{1}{2}$. ($\cos x = 1-(1-\cos x)$ теңдігін пайдаланған жөн).

323. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(e^{x-1} - 1)}{\ln x}$. **Ж:** 1.

324. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{(1+x)^3} - 1}{(1+x)\cdot\sqrt[3]{(1+x)^2} - 1}$. **Ж:** $\frac{9}{25}$.

325. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{(5^\alpha - 1)\cdot(4^\alpha - 1)}{(3^\alpha - 1)\cdot(6^\alpha - 1)}$. **Ж:** $\frac{\ln 5 \cdot \ln 4}{\ln 3 \cdot \ln 6}$.

326. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x} - 2}{\sqrt[4]{16+5x} - 2}$ **Ж:** 1,6 (алым мен бөлімді 2-ге бөлген жөн).

4.4 ФУНКЦИЯ ҮЗІЛІССІЗДІГІ

1. Функцияның нүктедегі және аралықтағы үзіліссіздігі. $y = f(x)$ функциясы берілсін. $x_0 \in X$ - анықталу облысы болсын. Егер

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

болса, онда $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде *үзіліссіз функция* деп аталады.

Бұл анықтама мынадай үш шарттың орындалуымен мәндес деп саналады:

а) x_0 нүктесі өзінің қандай да бір маңайымен қоса X анықталу облысына тиісті болады;

ә) x_0 нүктесінде функцияның бір жақты шектері бар болады және олар өзара тең, яғни

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x);$$

б) функциясының бір жақты шектері оның осы x_0 нүктедегі мәніне тең болады:

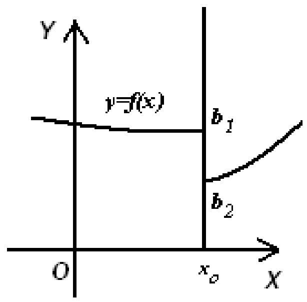
$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$$

Егер f функциясы қандай да бір аралықтың әрбір нүктесінде үзіліссіз болса, онда ол сол *аралықта үзіліссіз функция* деп аталады.

Егер $f_1(x)$ және $f_2(x)$ функциялары x_0 нүктесінде үзіліссіз болса, онда осы нүктеде мына функциялар да $f_1(x) \pm f_2(x), f_1(x) \cdot f_2(x), \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}, f_2(x) \neq 0$ үзіліссіз болады.

2. Үзіліс нүктелері және олардың түрлері. Функцияның үзіліссіздік шарттарының кемінде біреуі орындалмайтын нүктелері оның *үзіліс нүктелері* деп аталады.

Ү з і л і с   т ү р л е р і. 1) Егер x_0 нүктесінде f функциясының сол жақ және оң жақ шектері бар болып, бірақ олар бір-біріне тең болмаса, немесе олар бір-біріне тең, бірақ олар x_0 нүктесіндегі функцияның мәніне тең емес (немесе $f(x_0)$ анықталмаған болса), онда x_0 нүктесі f функциясының *бірінші текті үзіліс нүктесі* деп аталады.

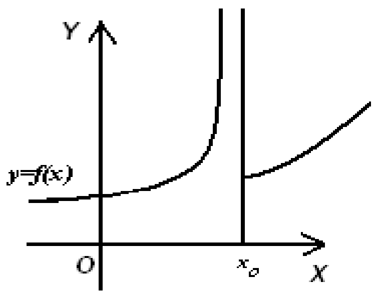


4.4 Сурет

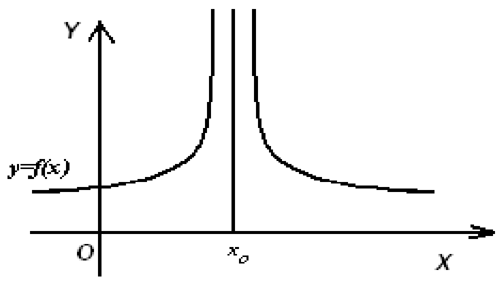
$f(x_0 - 0) = в_1,\ f(x_0 + 0) = в_2,\ f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0) = в_2 - в_1 < \infty.$

$в_1 \neq в_2$. Ендеше x_0 нүктесінде 1-ші текті үзіліс (4.4 Сурет);

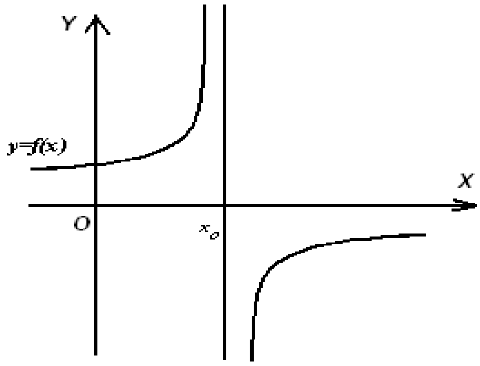
2) Егер x_0 нүктесінде алынған f функциясының бір жақты шектерінің кемінде бірі шексіз болып, не тіпті ол болмаса, онда x_0 нүктесі f функциясының *екінші текті үзіліс нүктесі* деп аталады (4.5 - 4.7 Суреттер).



4.5 Сурет



4.6 Сурет

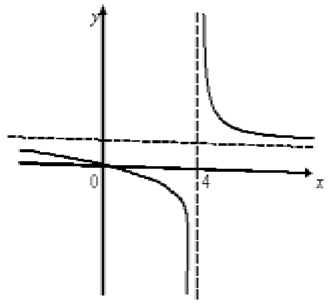


4.7 Сурет

3) Егер x_0 нүктесінде f функциясының шегі бар (яғни сол жақ және оң жақ шектері бір-біріне тең) болса, бірақ ол x_0 нүктесіндегі функцияның мәніне тең емес (немесе $f(x_0)$ анықталмаған болса), онда x_0 нүктесі f функциясының *жөнделетін үзіліс нүктесі* деп аталады.

327. $x=4$ нүктесінде $y=\dfrac{x}{x-4}$ функциясы үзілісті екенін көрсету керек.

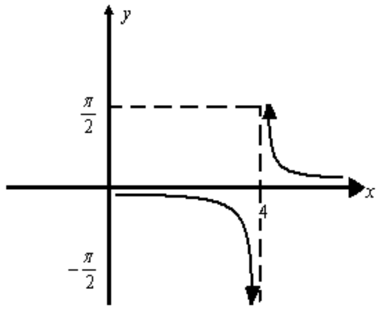
Шешуі: $\lim\limits_{x\to 4-0}\dfrac{x}{x-4}=-\infty,\ \lim\limits_{x\to 4+0}\dfrac{x}{x-4}=+\infty,$ яғни берілген функцияның $x\to 4$-да не сол жақ, не оң жақ ақырлы шегі жоқ. Ендеше, $x=4$- екінші текті үзіліс нүктесі болады (4.8 Сурет). ▲



4.8 Сурет

328. $x=4$ нүктесінде $y=arctg\,\dfrac{1}{x-4}$ функциясы үзілісті екенін көрсету керек.

Шешуі: Егер $x\to 4-0$ болса, онда $\dfrac{1}{x-4}\to-\infty$ және $\lim\limits_{x\to 4-0}y=\dfrac{\pi}{2}.$ Егер $x\to 4+0$ болса, онда $\dfrac{1}{x-4}\to+\infty$ және $\lim\limits_{x\to 4+0}y=\dfrac{\pi}{2}.$ Сонымен, $x\to 4$-да берілген функцияның сол жақ және оң жақ ақырлы шектері бар, бірақ олар әртүрлі. Ендеше, $x=4$ - бірінші текті үзіліс (секіріс) нүктесі. $x=4$ нүктесінде секіріс $\dfrac{\pi}{2}-\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi$ -ге тең (4.9 Сурет). ▲



4.9 Сурет

329. $y=\dfrac{x^2-25}{x-5}$ функциясын үзіліссіздікке зерттеу керек.

Шешуі: $x=5$ нүктесінде функция анықталмайды, себебі x орнына 5 қойсақ., $\dfrac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық аламыз. Басқа нүктелерде $x-5\neq 0$ болғандықтан бөлшекті $(x-5)$-ке қысқартамыз. Сондықтан, $y=x+5$ болады. Бұдан, $\lim\limits_{x\to 5-0} y=\lim\limits_{x\to 5+0} y=10.$

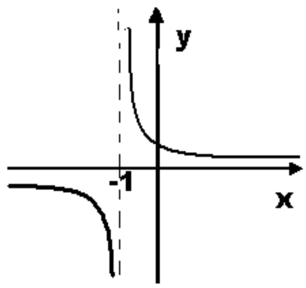
Сонымен, $x=5$ болғанда функция жөнделетін үзілісті болады. Егер $x=5$ болғанда $y=10$ деп ұйғарсақ функция үзіліссіз болады.

Сонда $y=\dfrac{x^2-25}{x-5}$ функциясы барлық x нүктесінде үзіліссіз. Мұндай функция графигі $y=x+5$ түзуі болады. ▲

330. $y=\dfrac{1}{x+1}$ функциясын $x=-1$ нүктесінде үзіліссіздікке зерттеу керек.

Шешуі: $\lim\limits_{x\to -1-0}\dfrac{1}{x+1}=-\infty,\ \lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{1}{x+1}=+\infty.$

Сондықтан, $y=\dfrac{1}{x+1}$ функциясы $x=-1$ нүктесінде екінші текті үзілісті (4.10 Сурет). ▲



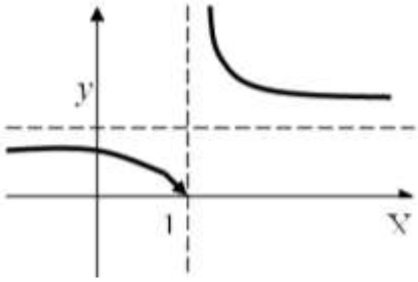
4.10 Сурет

331. $y=2^{\frac{1}{x-1}}$ функциясын $x=1$ нүктесінде үзіліссіздікке зерттеу керек.

Шешуі: $\lim\limits_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}}=2^{+\frac{1}{0}}=2^{+\infty}=+\infty,$

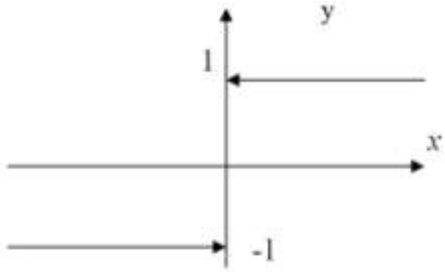
$\lim\limits_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}}=2^{-\frac{1}{0}}=2^{-\infty}=\dfrac{1}{2^{\infty}}=0.$

$\Rightarrow x=1$ -екінші текті үзіліс нүктесі (4.11 Сурет). ▲



4.11 Сурет

332. $f(x)=\frac{x}{|x|}$ функциясын $x=0$ нүктесінде зерттеу керек.



4.12 Сурет

Шешуі: $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{x}{x}=1,$

$\lim\limits_{x\to 0-}\frac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0-}\frac{x}{-x}=-1.$

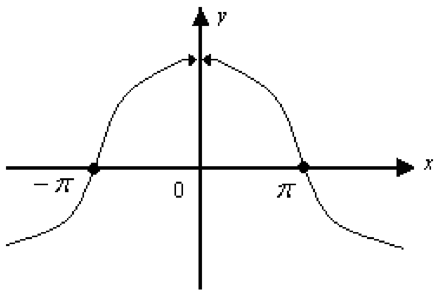
$\Rightarrow x=0$ - бірінші текті үзіліс нүктесі.

Секіріс 2-ге тең (4.12 Сурет). ▲

333. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ функциясын $x_0=0$ нүктесінде үзіліссіздікке зерттеу керек.

Шешуі: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$ бірақ $f(x_0)=f(0)$ мәні жоқ. Ендеше, $x_0=0$ нүктесінде берілген функция жөнделетін үзілісті. Берілген функцияны толықтырайық:

$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}-$ үзіліссіз функция болады (4.13 Сурет). ▲



4.13 Сурет

Төмендегі функциялардың үзіліс нүктелерін тауып, үзіліс түрін анықтау керек.

334. $y=\frac{2^{\frac{1}{x-2}}-1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}.$ **Ж:** $x=2-$секіріс нүктесі.

335. $y=\frac{1}{(x-1)(x-5)}.$ **Ж:** $x=1,\ x=5-$екінші текті үзіліс нүктелері.

336. $y=\frac{1}{1+e^{1-x}}.$ **Ж:** $x=1-$екінші текті үзіліс нүктесі.

337. $y=\frac{tgx\cdot arctg\,\frac{1}{x-3}}{x\cdot(x-5)}.$ **Ж:** $x=0-$жөнделетін үзіліс нүктесі. $x=3-$секіріс нүктесі, $x=5-$екінші текті үзіліс нүктесі, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n(n\in Z)-$ екінші текті үзіліс нүктесі.

338. $y=\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}.$ **Ж:** $x=1,\ x=2-$жөнделетін үзіліс нүктелері.

339. $y=\dfrac{x+1}{x^3+6x^2+11x+6}$. **Ж:** $x=-2,\ x=-3-$ екінші текті үзіліс, $x=-1-$ жөнделетін үзіліс нүктелері.

340. $y=\dfrac{1}{x^2+x+1}$. **Ж:** $(-\infty;\infty)$ аралығында функция үзіліссіз.

341. $y=\dfrac{1}{(x-1)\cdot(x-6)}$ функциясын 1) $[2;5]$, 2) $[4;10]$, 3) $[0;7]$ кесінділерінде зерттеу керек.

Ж: 1) үзіліссіз; 2) екінші текті үзілісті бір нүктесі бар; 3) екінші текті үзілісті екі нүктесі бар.

342. $y=\dfrac{1}{x^4-26x^2+25}$ функциясын 1) $[6;10]$, 2) $[-2;2]$, 3) $[-6;6]$ кесінділерінде зерттеу керек.

Ж: 1) функция үзіліссіз; 2) екінші текті үзілісті екі нүктесі бар; 3) екінші текті үзілісті төрт нүктесі бар.

4.5 ФУНКЦИЯ ТУЫНДЫСЫ

1. Функция туындысының анықтамасы. $y=f(x)$ функциясы $(a,в)$ интервалында анықталған болсын. Осы интервалдан $x_0+\Delta x$ нүктесі шықпайтындай етіп, x_0 аргументіне $\Delta x\neq 0$ өсімшесін берейік. Сонда $y=f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі сәйкес өсімшесі

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

болады.

$y=f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі *туындысы* деп Δx нөлге ұмтылғанда функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасының шегін айтады. Белгіленуі: $f'(x_0)$ немесе $y'(x_0)$.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Егер $y=f(x)$ функциясының $(a,в)$ интервалдың әрбір x нүктесінде туындысы бар болса, онда ол туынды x аргументінің функциясы болып табылады және оны

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=y'=f'(x)$$

деп белгілейді.

Геометриялық тұрғыдан туынды *x* нүктесінде $y=f(x)$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициентін анықтайды, яғни $y'=tg\alpha$.

Механикалық тұрғыдан туынды - *x* нүктесіндегі функцияның өзгеріс жылдамдығы**,** дәлірек айтқанда $S=f(t)$ функциясы материалдық нүктенің түзу бойымен қозғалыс заңдылығын өрнектейтін болсақ, t уақыт аралығындағы лездік жылдамдығы

$$V=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=f'(t).$$

Функцияның туындысын табу *функцияны дифференциалдау* делінеді.

Д и ф ф е р е н ц и а л д а у д ы ң   н е г і з г і   е р е ж е л е р і:
Егер $c=const$ және $u=u(x),\ v=v(x)$ функцияларының x нүктесінде туындылары бар болса, онда

1) $c'=0$, 2) $x'=1$, 3) $(u\pm v)'=u'\pm v'$, 4) $(c\cdot u)'=c\cdot u'$,

5) $(u\cdot v)'=u'v+uv'$, 6) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

7) Егер $y=F(u)$ функциясының u нүктесінде және $u=u(x)$ функциясының x нүктесінде туындысы бар болса, онда $y=F(u(x))$ күрделі функциясының x нүктесінде туынды бар және ол

$$\left[f(u(x))\right]'=f'(u)\cdot u'(x)$$

формуламен анықталады (күрделі функцияны дифференциалдау ережесі).

Мысалы, $y=\sin x^2$ $\Rightarrow$ $y'=\cos x^2\cdot\left(x^2\right)'=2x\cos x^2$. ▲

$y=\left(x+\frac{2}{x}\right)^{100}$, онда $y'=100\left(x+\frac{2}{x}\right)^{99}\cdot\left(x+\frac{2}{x}\right)'=100\left(x+\frac{2}{x}\right)^{99}\cdot\left(1-\frac{2}{x^2}\right)$. ▲

$y=\ln^3(x+3)$, онда $y'=3\cdot\ln^2(x+3)\cdot(\ln(x+3))'=\frac{3\ln^2(x+3)}{x+3}$. ▲

8) Егер $y=f(x)$ функциясының x нүктесінде туындысы $y'=f'(x)\neq 0$ болса, онда оған кері $x=\varphi(y)$ функциясының туындысы бар болады және ол

$$x'_y=\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$ тең болады.

Н е г і з г і   ф у н к ц и я л а р д ы ң   т у ы н д ы л а р ы

1	$c'=0$	6	$(\sin x)'=\cos x$	11	$(e^x)'=e^x$
2	$x'=1$	7	$(\cos x)'=-\sin x$	12	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\,\ell na}$
3	$(x^n)'=nx^{n-1}$	8	$(tg\,x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	13	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$
4	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	9	$(ctg\,x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	14	$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	10	$(a^x)'=a^x\ell na$	15	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16	$(arctg\,x)'=\frac{1}{1+x^2}$	18	$(sh\,x)'=ch\,x$	20	$(th\,x)'=\frac{1}{ch^2x}$
17	$(arcctg\,x)'=-\frac{1}{1+x^2}$	19	$(ch\,x)'=sh\,x$	21	$(cth\,x)'=-\frac{1}{sh^2x}$

22. Көрсеткіштік-дәрежелік $F(x)=[U(x)]^{V(x)},\ U(x)>0$ функциясының туындысын табу үшін берілген функцияның екі жағын да логарифмдеп, сосын оны дифференциалдаймыз:

$$\ln F(x)=V(x)\cdot\ln U(x)\Rightarrow\frac{F'(x)}{F(x)}=V'(x)\cdot\ln U(x)+V(x)\cdot\frac{U'(x)}{U(x)}.$$

Сонда

$$\left([U(x)]^{V(x)}\right)'=[U(x)]^{V(x)}\cdot\left[V'(x)\cdot\ln U(x)+V(x)\cdot\frac{U'(x)}{U(x)}\right].$$

343. Туындының анықтамасы бойынша (дифференциалдау формулаларын қолданбай) $y = 2x^3 + 5x^2 - 7x - 4$ функциясының туындысын табу керек.
Шешуі: x аргументке Δx өсімшесін берейік, сонда y функция Δy өсімшесін алады:

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^3 + 5(x + \Delta x)^2 - 7(x + \Delta x) - 4.$$

Функция өсімшесін табайық:

$$\Delta y = [2 \cdot (x + \Delta x)^3 + 5 \cdot (x + \Delta x)^2 - 7 \cdot (x + \Delta x) - 4] - (2x^3 + 5x^2 - 7x - 4) =$$
$$= 6x^2 \cdot \Delta x + 6x \cdot (\Delta x)^2 + 2 \cdot (\Delta x)^3 + 10x \cdot \Delta x + 5 \cdot (\Delta x)^2 - 7 \cdot \Delta x.$$

Функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасын табайық:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x \cdot \Delta x + 2 \cdot (\Delta x)^2 + 10x + 5 \cdot \Delta x - 7.$$

Бұл қатынастың $\Delta x \to 0$-дағы шегін табайық:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6x^2 + 6x \cdot \Delta x + 2 \cdot (\Delta x)^2 + 10x + 5 \cdot \Delta x - 7) = 6x^2 + 10x - 7.$$

Ендеше, туынды анықтамасы бойынша $y' = 6x^2 + 10x - 7.$ ▲

344. Туындының анықтамасы бойынша $y = \sqrt{x}$ функциясының туындысын табу керек.
Шешуі: Функция өсімшесін табайық.: $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}.$

Бұдан $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$ және

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}\right) \cdot \left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Сонымен, $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$ ▲

345. Туындының анықтамасы бойынша $y = -ctgx - x$ функциясының туындысын табу керек.

Шешуі: $\Delta y = [-ctg(x + \Delta x) - (x + \Delta x)] - (-ctgx - x) = -ctg(x + \Delta x) - x - \Delta x + ctgx + x =$
$$= ctgx - ctg(x + \Delta x) - \Delta x.$$

$ctg\alpha - ctg\beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$ формуласын қолданамыз.

Сонда $$\Delta y = \frac{\sin(x + \Delta x - x)}{\sin x \cdot \sin(x + \Delta x)} - \Delta x = \frac{\sin\Delta x}{\sin x \cdot \sin(x + \Delta x)} - \Delta x,$$

бұдан $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}}{\sin x \cdot \sin(x + \Delta x)} - 1.$$

Ендеше, $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}}{\sin x \cdot \sin(x + \Delta x)} - 1 = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

Сонымен, $y' = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 = ctg^2 x.$ ▲

Туындының анықтамасы бойынша келесі функциялардың туындысын табу керек.

346. $y=\frac{1}{x^2}.$ **Ж:** $y'=-\frac{2}{x^3}.$ **347.** $y=\sqrt[3]{x^2}.$ **Ж:** $y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$

348. $y=5\sin x+3\cos x.$ **Ж:** $y'=5\cos x-3\sin x.$

349. $y=5(tgx-x).$ **Ж:** $y'=5tg^2x.$

350. $y=\frac{1}{e^x+1}.$ **Ж:** $y'=-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}.$ **351.** $y=2^{x^2}.$ **Ж:** $y'=2^{x^2}\cdot 2x\cdot\ln 2.$

Дифференциалдау ережелері мен формулаларын қолдана отырып, келесі функциялардың туындыларын табу керек.

352. $y=2x^3-5x^2+7x+4.$

Шешуі: $$y'=(2x^3)'-(5x^2)'+(7x)'+(4)'=2(x^3)'-5(x^2)'+7x'+4'=$$
$$=2\cdot 3x^2-5\cdot 2x+7\cdot 1+0=6x^2-10x+7.\ \blacktriangle$$

353. $y=x^2e^x.$

Шешуі: $y'=x^2\cdot(e^x)'+e^x\cdot(x^2)'=x^2\cdot e^x+2x\cdot e^x=xe^x(x+2).\ \blacktriangle$

354. $y=x^3arctgx.$

Шешуі: $$y'=x^3\cdot(arctgx)'+arctgx\cdot(x^3)'=x^3\cdot\frac{1}{1+x^2}+3x^2\cdot arctgx=\frac{x^3}{1+x^2}+3x^2\cdot arctgx.\ \blacktriangle$$

355. $y=x\sqrt{x}(3\ln x-2).$

Шешуі: Берілген функцияны былайшы түрлендіріп жазайық: $y=x^{\frac{3}{2}}\cdot(3\ln x-2)$. Сонда
$$y'=x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{3}{x}+\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot(3\ln x-2)=3x^{\frac{1}{2}}+\frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}}\cdot\ln x-3x^{\frac{1}{2}}=\frac{9}{2}\sqrt{x}\cdot\ln x.\ \blacktriangle$$

356. $y=\frac{\arcsin x}{x}.$

Шешуі: $$y'=\frac{(\arcsin x)'\cdot x-\arcsin x\cdot(x)'}{x^2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot x-\arcsin x}{x^2}=\frac{x-\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x}{x^2\cdot\sqrt{1-x^2}}.\ \blacktriangle$$

357. $y=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}.$

Шешуі: $$y'=\frac{(\sin x-\cos x)'\cdot(\sin x+\cos x)-(\sin x-\cos x)\cdot(\sin x+\cos x)'}{(\sin x+\cos x)^2}=$$
$$=\frac{(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{2}{(\sin x+\cos x)^2}.\ \blacktriangle$$

358. $y=(2x^3+5)^4.$

Шешуі: $2x^3+5=u$ деп белгілейік, сонда $y=u^4$. Күрделі функцияны дифференциалдау ережесі бойынша: $y'=(u^4)'_u\cdot(2x^3+5)'_x=4u^3\cdot(6x^2)=24x^2(2x^3+5)^3.$ ▲

359. $y=tg^6x.$

Шешуі: $y'=6tg^5x\cdot(tgx)'=6tg^5x\cdot\sec^2x.$ ▲

360. $y=\cos^2x.$

Шешуі: $y'=2\cos x\cdot(\cos x)'=-2\cos x\cdot\sin x=-\sin 2x.$ ▲

361. $y=\sin(2x+3).$

Шешуі: $y'=\cos(2x+3)\cdot(2x+3)'=2\cdot\cos(2x+3).$ ▲

362. $y=tg\ln x.$

Шешуі: $y'=\sec^2\ln x\cdot(\ln x)'=\frac{1}{x}\cdot\sec^2\ln x.$ ▲

363. $y=\sin^3\frac{x}{3}.$

Шешуі: $y'=3\sin^2\frac{x}{3}\cdot\left(\sin\frac{x}{3}\right)'=3\sin^2\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{3}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)'=\sin^2\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{3}.$ ▲

364. $y=\ln(x^2+5).$

Шешуі: $y'=\frac{1}{x^2+5}\cdot(x^2+5)'=\frac{2x}{x^2+5}.$ ▲

365. $y=\ln tg\frac{x}{2}.$

Шешуі: $y'=\frac{1}{tg\frac{x}{2}}\cdot\left(tg\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{tg\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{2tg\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sin x}.$ ▲

366. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

Шешуі: $y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\times$

$$\times\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$ ▲

367. $y=\ln\left(\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{2\sin x-1}\right)$

Шешуі: $y'=\frac{1}{\left(\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{2\sin x-1}\right)}\cdot\left(\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{2\sin x-1}\right)'=$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{2\sin x-1}\right)}\cdot\left(\frac{2\cos x}{2\sqrt{2\sin x+1}}+\frac{2\cos x}{2\sqrt{2\sin x-1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{2\sin x-1}}\times$$

$$\times\frac{\cos x\cdot\left(\sqrt{2\sin x-1}+\sqrt{2\sin x+1}\right)}{\sqrt{4\sin^2x-1}}=\frac{\cos x}{\sqrt{4\sin^2x-1}}.$$ ▲

368. $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+k}+\frac{k}{2}\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+k}\right)$

Шешуі: $y'=\frac{x}{2}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+k}}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x^2+k}+\frac{k}{2}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+k}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+k}}\right)=$

$$=\frac{x^2}{2\sqrt{x^2+k}}+\frac{\sqrt{x^2+k}}{2}+\frac{k}{2}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+k}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+k}+x}{\sqrt{x^2+k}}=\frac{x^2+k}{\sqrt{x^2+k}}=\sqrt{x^2+k}.$$ ▲

369. $y=\arcsin\frac{2x^2}{1+x^4}$, $|x|<1$.

Шешуі: $y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x^2}{1+x^4}\right)^2}}\cdot\left(\frac{2x^2}{1+x^4}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x^2}{1+x^4}\right)^2}}\cdot\frac{4x(1+x^4)-2x^2\cdot 4x^3}{(1+x^4)^2}=$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-2x^4+x^8}}\cdot\frac{4x(1-x^4)}{1+x^4}=\frac{4x}{1+x^4}.$$ ▲

370. $y=arctg\,\frac{\ln x}{3}$.

Шешуі: $y'=\frac{1}{1+\frac{\ln^2 x}{9}}\cdot\frac{1}{3x}=\frac{1}{3x+\frac{x\cdot\ln^2 x}{3}}=\frac{3}{x(9+\ln^2 x)}.$ ▲

371. $y=e^x\cdot arctg\,e^x-\ln\sqrt{1+e^{2x}}$.

Шешуі: Берілген функцияны былайша түрлендірейік:

$$y=e^x\cdot arctg\,e^x-\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}).$$

Енді туындысын табамыз: $y'=e^x\cdot\frac{1}{1+e^{2x}}\cdot e^x+e^x\cdot arctg\,e^x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^{2x}}\cdot e^{2x}\cdot 2=$

$$=\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}+e^x\cdot arctg\,e^x-\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}=e^x-arctg\,e^x.$$ ▲

372. $y=\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\ln\frac{1+\sin x}{\cos x}$.

Шешуі: Берілген функцияны түрлендірейік: $y=\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\ln(1+\sin x)-\ln\cos x.$

Сонда $y'=\frac{\cos x\cdot\cos^2 x-\sin x\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x)}{\cos^4 x}+\frac{1}{1+\sin x}\cdot\cos x-\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)=$

$$=\frac{\cos^2 x+2\sin^2 x}{\cos^3 x}+\frac{\cos x\,(1-\sin x)}{1-\sin^2 x}+\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos^2 x+2\sin^2 x}{\cos^3 x}+\frac{1-\sin x}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+2\sin^2 x}{\cos^3 x}+\frac{1}{\cos x}=\frac{2}{\cos^3 x}=2\sec^3 x.$$ ▲

373. $y=\frac{1}{2}\cdot tg^2\sqrt{x}+\ln\cos\sqrt{x}$.

Шешуі: $y'=tg\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\cos\sqrt{x}}\cdot\left(-\sin\sqrt{x}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot tg\sqrt{x}\cdot\left(\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}-1\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot tg^3\sqrt{x}.$ ▲

374. $y = 5\,sh^3\,\dfrac{x}{15} + 3\,sh^5\,\dfrac{x}{15}.$

Шешуі: $y' = 15\,sh^2\,\dfrac{x}{15}\cdot ch\dfrac{x}{15}\cdot\dfrac{1}{15} + 15\,sh^4\,\dfrac{x}{15}\cdot ch\dfrac{x}{15}\cdot\dfrac{1}{15} = sh^2\,\dfrac{x}{15}\cdot ch\dfrac{x}{15}\cdot\left(1 + sh^2\,\dfrac{x}{15}\right).$

Ал $ch^2 x - sh^2 x = 1$ болғандықтан, қорытындылай келе $y' = sh^2\,\dfrac{x}{15}\cdot ch^3\,\dfrac{x}{15}$ аламыз. ▲

375. $y = x^{x^2}.$

Шешуі: Мұнда негізі де, дәреже көрсеткіші де x-ке тәуелді. Логарифмдегенде $\ln y = x^2 \cdot \ln x$ теңдігін аламыз. Теңдіктің екі жағын да x бойынша дифференциалдаймыз. y x-тің функциясы болғандықтан, $\ln y$ x-тің функциясы болып табылады, сондықтан $(\ln y)' = \dfrac{1}{y}\cdot y'.$ Ендеше,

$$\frac{y'}{y} = x^2\cdot\frac{1}{x} + 2x\cdot\ln x, \qquad \frac{y'}{y} = x\cdot(1 + 2\ln x),$$

$$y' = xy\cdot(1 + 2\ln x) = x\cdot x^{x^2}(1 + 2\ln x) = x^{x^2+1}(1 + 2\ln x). \ ▲$$

376. $y = (\sin x)^{tgx}.$

Шешуі: $\ln y = tgx\cdot\ln\sin x.$

$$\frac{y'}{y} = tgx\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x + \frac{1}{\sec^2 x}\cdot\ln\sin x = 1 + \sec^2 x\cdot\ln\sin x.$$

$$y' = y\,(1 + \sec^2 x\cdot\ln\sin x) = (\sin x)^{tgx}\cdot(1 + \sec^2 x\cdot\ln\sin x). \ ▲$$

377. $y = \dfrac{(2x-1)^3\cdot\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\cdot\sqrt[3]{1-x}}.$

Шешуі: $\ln y = 3\ln(2x-1) + \dfrac{1}{2}\ln(3x+2) - 2\ln(5x+4) - \dfrac{1}{3}\ln(1-x).$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{2x-1}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3x+2} - 2\cdot\frac{5}{5x+4} + \frac{1}{3(1-x)}.$$

$$y' = \frac{(2x-1)^3\cdot\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\cdot\sqrt[3]{1-x}}\cdot\left[\frac{6}{2x-1} + \frac{3}{2\,(3x+2)} - \frac{10}{5x+4} + \frac{1}{3\,(1-x)}\right]. \ ▲$$

Функциялардың туындыларын табу керек.

378. $y = \dfrac{7}{x^3}.$ **Ж:** $y' = -\dfrac{21}{x^4}.$ **379.** $y = \dfrac{3}{4}x\cdot\sqrt[3]{x}.$ **Ж:** $y' = \sqrt[3]{x}.$

380. $y = \dfrac{2}{7}x^3\cdot\sqrt{x} - \dfrac{4}{11}x^5\cdot\sqrt{x} + \dfrac{2}{15}x^7\cdot\sqrt{x}.$ **Ж:** $y' = x^2\sqrt{x}(1 - x^2)^2.$

381. $y = (x^2 + 2x + 2)\cdot e^{-x}.$ **Ж:** $y' = -x^2\cdot e^{-x}.$ **382.** $y = 3x^3\cdot\ln x - x^3.$ **Ж:** $y' = 9x^2\cdot\ln x.$

383. $y = \dfrac{2^{3x}}{3^{2x}}.$ **Ж:** $y' = \left(\dfrac{8}{9}\right)^x\cdot\ln\dfrac{8}{9}.$ **384.** $y = \ln(2x^3 + 3x^2).$ **Ж:** $y' = \dfrac{6\,(x+1)}{2x^2 + 3x}.$

385. $y = x^2\cdot\sin x + 2x\cdot\cos x - 2\sin x.$ **Ж:** $y' = x^2\cos x.$

386. $y=\sqrt{1-3x^2}.$ **Ж:** $y'=-\dfrac{3x}{\sqrt{1-3x^2}}.$ **387.** $y=x\arccos\dfrac{x}{2}-\sqrt{4-x^2}.$ **Ж:** $y'=\arccos\dfrac{x}{2}.$

388. $y=\sqrt{x}\cdot\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{1-x}.$ **Ж:** $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\arcsin\sqrt{x}.$

389. $y=\left(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right)^2.$ **Ж:** $y'=-\cos x.$ **390.** $y=\cos^3\dfrac{x}{3}.$ **Ж:** $y'=-\cos^2\dfrac{x}{3}\cdot\sin\dfrac{x}{3}.$

391. $y=\ln tg\,\dfrac{2x+1}{4}.$ **Ж:** $y'=\cos ec\,\dfrac{2x+1}{2}.$ **392.** $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}.$ **Ж:** $y'=\dfrac{1}{\cos x}.$

393. $y=tg\,2x+\dfrac{2}{3}tg^3\,2x+\dfrac{1}{5}tg^5\,2x.$ **Ж:** $y'=2\cdot\sec^6 2x.$

394. $y=\dfrac{1}{3}\sin^3\sqrt{x}-\dfrac{2}{5}\sin^5\sqrt{x}+\dfrac{1}{7}\sin^7\sqrt{x}.$ **Ж:** $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin^2\sqrt{x}\cdot\cos^5\sqrt{x}.$

395. $y=\ln\left(3x^2+\sqrt{9x^4+1}\right).$ **Ж:** $y'=\dfrac{6x}{\sqrt{9x^4+1}}.$

396. $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}.$ **Ж:** $y'=\sqrt{a^2-x^2}.$

397. $y=\ln\dfrac{\sqrt{4tgx+1}-2\sqrt{tgx}}{\sqrt{4tgx+1}+2\sqrt{tgx}}.$ **Ж:** $y'=-\dfrac{2\sec^2 x}{\sqrt{tgx\cdot(4tgx+1)}}.$

398. $y=-ctg^2\,\dfrac{x}{2}-2\ln\sin\dfrac{x}{2}.$ **Ж:** $y'=ctg^3\,\dfrac{x}{2}.$

399. $y=arcctg\sqrt{4x^2-1}.$ **Ж:** $y'=\dfrac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}.$

400. $y=arctg\,\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$ **Ж:** $y'=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$

401. $y=arctg\,\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}.$ **Ж:** $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}.$

402. $y=\arcsin\dfrac{2x^3}{1+x^6}$, егер $|x|<1.$ **Ж:** $y'=\dfrac{6x^2}{1+x^6}.$

403. $y=\arccos\dfrac{9-x^2}{9+x^2}.$ **Ж:** $y'=\dfrac{6\,\mathrm{sgn}\,x}{x^2+9}.$

404. $y=e^{-x}-\sin e^x\cdot\cos e^{-x}.$ **Ж:** $y'=-2e^{-x}\cdot\sin^2 e^{-x}.$

405. $y=arctg\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}.$ **Ж:** $y'=-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}.$

406. $y=\ln\dfrac{(x-1)(x-3)^3}{(x-2)^3(x-4)}.$ **Ж:** $y'=-\dfrac{6}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}.$

407. $y=1-e^{\sin^2 3x}\cdot\cos^2 3x.$ **Ж:** $y'=3e^{\sin^2 3x}\cdot\sin 6x\cdot\sin^2 3x.$

408. $y=\ln\dfrac{2\ln^2\sin x+3}{2\ln^2\sin x-3}.$ **Ж:** $y'=-\dfrac{24\ln\sin x\cdot ctgx}{4\ln^4\sin x-9}.$

409. $y = \ln(\sec x + tgx).$ **Ж:** $y' = \sec x.$

410. $y = -\ln(\cos ecx + ctgx).$ **Ж:** $y' = \cos ecx.$

411. $y = e^{\sqrt{2x}}(\sqrt{2x} - 1).$ **Ж:** $y' = e^{\sqrt{2x}}.$ **412.** $y = \ln\frac{x^5}{x^5 + 2}.$ **Ж:** $y' = \frac{10}{x(x^5 + 2)}.$

413. $y = \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x}\right)^2.$ **Ж:** $y' = \frac{2\sin x}{(1 + \cos x)^2}.$

414. $y = \arcsin\frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}.$ **Ж:** $y' = \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}.$

415. $y = -\cos ec^2\frac{x}{2}.$ **Ж:** $y' = \frac{ctg\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}.$

416. $y = \sin(\ln x)\cdot\cos(\ln x) - \ln\frac{1}{x}.$ **Ж:** $y' = \frac{2}{x}\cdot\cos^2(\ln x).$

417. $y = (x^5 + 3)\cdot[\ln(x^5 + 3) - 1].$ **Ж:** $y' = 5x^4\cdot\ln(x^5 + 3).$

418. $y = \arcsin\sqrt{1 - 0{,}2x^2}.$ **Ж:** $y' = -\frac{x}{|x|\cdot\sqrt{5 - x^2}}.$

419. $y = 0{,}5\cdot\left[(x+\alpha)\cdot\sqrt{x^2 + 2\alpha x + \beta} + (\beta - \alpha^2)\cdot\ln\left(x + \alpha + \sqrt{x^2 + 2\alpha x + \beta}\right)\right]$

Ж: $y' = \sqrt{x^2 + 2\alpha x + \beta}.$

420. $y = \arcsin e^x + \arcsin\sqrt{1 - e^{2x}}.$ **Ж:** $y' = 0.$

421. $y = m\sqrt{x^2 + 2\alpha x + \beta} + (n - m\alpha)\cdot\ln\left(x + \alpha + \sqrt{x^2 + 2\alpha x + \beta}\right)$

Ж: $y' = \frac{mx + n}{\sqrt{x^2 + 2\alpha x + \beta}}.$

422. $y = \frac{x}{\sqrt{1 - mx^2}}.$ **Ж:** $y' = \frac{1}{(1 - mx^2)^{3/2}}.$

423. $y = x^2 + 2x\cdot\sin x\cdot\cos x + \cos^2 x.$ **Ж:** $y' = 4x\cdot\cos^2 x.$

424. $y = ctgx\cdot\cos ecx + \ln(ctgx + \cos ecx).$ **Ж:** $y' = -2\cdot\cos ec^3 x.$

425. $y = \frac{\sin x}{1 + \ln\sin x}.$ **Ж:** $y' = \frac{\cos x\cdot\ln\sin x}{(1 + \ln\sin x)^2}.$

426. $y = 3x\cdot\sin^3 x + 3\cos x - \cos^3 x.$ **Ж:** $y' = 9x\cdot\sin^2 x\cdot\cos x.$

427. $y = \ln\frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{\sqrt{1 + x^2} + 1}.$ **Ж:** $y' = \frac{2}{x\cdot\sqrt{1 + x^2}}.$

428. $y = e^x - \sin e^x\cdot\cos^3 e^x - \sin^3 e^x\cdot\cos e^x.$ **Ж:** $y' = 2e^x\cdot\sin^2 e^x.$

429. $y = arctg(x + 1) + \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 2}.$ **Ж:** $y' = \frac{2}{(x^2 + 2x + 2)^2}.$

430. $y = x\cdot(\ln^3 x - 3\cdot\ln^2 x + 6\cdot\ln x - 6).$ **Ж:** $y' = \ln^3 x.$

431. $y=\ln\sin\sqrt{x}\cdot tg\sqrt{x}-\sqrt{x}.$ **Ж:** $y'=\dfrac{\ln\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}}.$

432. $y=arctg\,\dfrac{x^x-x^{-x}}{2}.$ **Ж:** $y'=\dfrac{2\,(1+\ln x)}{x^x+x^{-x}}.$

433. $y=\dfrac{1}{64}\cdot\left(tg^4\dfrac{x}{2}-ctg^4\dfrac{x}{2}\right)+\dfrac{1}{8}\cdot\left(tg^2\dfrac{x}{2}-ctg^2\dfrac{x}{2}\right)+\dfrac{3}{8}\ln tg\dfrac{x}{2}.$ **Ж:** $y'=\dfrac{1}{\sin^5 x}.$

434. $y=\ln tg\dfrac{x}{2}+\cos x+\dfrac{1}{3}\cos^3 x.$ **Ж:** $y'=\dfrac{\cos^4 x}{\sin x}.$

435. $y=-\dfrac{2\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}+3\cos\frac{x}{2}}.$ **Ж:** $y'=\dfrac{1}{3\sin x+4\cos x+5}.$

436. $y=\dfrac{1}{2}tg^2\sin x+\ln\cos\sin x.$ **Ж:** $y'=\cos x\cdot tg^3\sin x.$

437. $y=\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{x}.$ **Ж:** $y'=\dfrac{1}{x^2(x-1)}.$

438. $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}.$ **Ж:** $y'=\dfrac{1}{x\,(x+1)(x+2)}.$

439. $y=2x\cdot tg\,2x+\ln\cos 2x-2x^2.$ **Ж:** $y'=4x\cdot tg^2 2x.$

440. $y=\arccos\,(2e^{2x}-1).$ **Ж:** $y'=-\dfrac{2e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$

441. $y=\ln\ln x\cdot(\ln\ln\ln x-1).$ **Ж:** $y'=\dfrac{\ln\ln\ln x}{x\cdot\ln x}.$

442. $y=\dfrac{x-e^{2x}}{x+e^{2x}}.$ **Ж:** $y'=\dfrac{2e^{2x}(1-2x)}{(x+e^{2x})^2}.$

443. $y=\ln\dfrac{x\ln x-1}{x\ln x+1}.$ **Ж:** $y'=\dfrac{2\,(\ln x+1)}{x^2\ln^2 x-1}.$

444. $y=arctg\,\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}.$ **Ж:** $y'=\dfrac{3}{1+x^2}.$

445. $y=\ln tg\,\dfrac{e^{2\sin x}}{4}.$ **Ж:** $y'=\dfrac{e^{2\sin x}\cdot\cos x}{\sin\frac{e^{2\sin x}}{2}}.$

446. $y=\dfrac{a}{2}\sin^2 x+\dfrac{b}{2}\cos^2 x-\dfrac{a+b}{4}\cos 2x.$ **Ж:** $y'=a\sin 2x.$

447. $y=tg^3 tgx+3tg\,tgx.$ **Ж:** $y'=\dfrac{3}{\cos^2 x\cdot\cos^4 tgx}.$

448. $y=\dfrac{arctgx}{x}-\ln\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$ **Ж:** $y'=-\dfrac{arctgx}{x^2}.$

449. $y=\dfrac{\ln x}{x^5}+\dfrac{1}{5x^5}.$ **Ж:** $y'=-\dfrac{5\cdot\ln x}{x^6}.$

450. $y=\sqrt{2x+1}\cdot[\ln(2x+1)-2].$ **Ж:** $y'=\frac{\ln(2x+1)}{\sqrt{2x+1}}.$

451. $y=\sec x\,(1+\ln\cos x).$ **Ж:** $y'=\frac{tgx\cdot\ln\frac{1}{\cos x}}{\cos x}.$

452. $y=e^{x}\sqrt{1-e^{2x}}-\arcsin e^{x}.$ **Ж:** $y'=-\frac{2e^{3x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$

453. $y=2^{\cos^3 x-3\cos x}.$ **Ж:** $y'=3\cdot 2^{\cos^3 x-3\cos x}\cdot\sin^3 x\cdot\ln 2.$

454. $y=\frac{e^{x}\cdot 2^{5x}}{3^{4x}}.$ **Ж:** $y'=\frac{e^{x}\cdot 2^{5x}\cdot\ln\frac{32e}{81}}{3^{4x}}.$

455. $y=\frac{x+1}{x}-e^{-\ln\frac{x}{x+1}}.$ **Ж:** $y'=0.$

456. $y=x\sin x\cdot\cos x+\frac{1}{2}\cos^2 x.$ **Ж:** $y'=x\cos 2x.$

457. $y=\frac{x^2\cdot e^{x^2}}{x^2+1}.$ **Ж:** $y'=\frac{2e^{x^2}x\,(x^4+x^2+1)}{(x^2+1)^2}.$

458. $y=\ln tg\,\frac{x}{2}-\frac{x}{\sin x}.$ **Ж:** $y'=\frac{x\cdot\cos x}{\sin^2 x}.$

459. $y=2\,(tg\sqrt{x}-\sqrt{x}).$ **Ж:** $y'=\frac{tg^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$

460. $y=\frac{1}{4a}\ln\frac{x-a}{x+a}+\frac{1}{2a}arctg\,\frac{x}{a}.$ **Ж:** $y'=\frac{x^2}{x^4-a^4}.$

461. $y=\ln\frac{\sqrt{x^4+1}-x^2}{\sqrt{x^4+1}+x^2}.$ **Ж:** $y'=-\frac{4x}{\sqrt{x^4+1}}.$

462. $y=e^{\frac{1}{2}tg^2 x}\cdot\cos x.$ **Ж:** $y'=e^{\frac{1}{2}tg^2 x}\cdot\sin x\cdot tg^2 x.$

463. $y=arctg\,\frac{2x^4}{1-x^8}.$ **Ж:** $y'=\frac{8x^3}{1+x^8}.$

464. $y=x^2\cdot e^{x^2}\cdot\ln x.$ **Ж:** $y'=x\cdot e^{x^2}(2x^2\ln x+2\ln x+1).$

465. $y=\arccos\sqrt{1-2^{x}}.$ **Ж:** $y'=\frac{\ln 2}{2}\sqrt{\frac{2^{x}}{1-2^{x}}}.$

466. $y=\log_{x^2}2.$ **Ж:** $y'=-\frac{\ln 2}{2x\cdot\ln^2 x}.$

467. $y=-m\sqrt{-x^2+2\alpha x+\beta}+(m\alpha+n)\cdot\arcsin\frac{x-\alpha}{\sqrt{\alpha+\beta}}.$ **Ж:** $y'=\frac{mx+n}{\sqrt{-x^2+2\alpha x+\beta}}.$

468. $y=\log_2\sin^2 x.$ **Ж:** $y'=\frac{2\,ctgx}{\ln 2}.$

469. $y=\log_a\left(x+\sqrt{x^2+9}\right).$ **Ж:** $y'=\dfrac{1}{\ln a\cdot\sqrt{x^2+9}}.$

470. $y=x^{\arcsin x}.$ **Ж:** $y'=x^{\arcsin x}\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{\arcsin x}{x}\right).$

471. $y=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^4.$ **Ж:** $y'=\dfrac{8\,(x-1)^3}{(x+1)^5}.$

472. $y=\ln\left(\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}\right).$ **Ж:** $y'=-\dfrac{1}{|\,x\,|\sqrt{1+x^2}}.$

473. $y=\dfrac{x^{m+1}}{(m+1)^2+n^2}\cdot\left[(m+1)\cos(n\ln x)+n\cdot\sin(n\ln x)\right].$ **Ж:** $y'=x^m\cdot\cos\,(n\ln x).$

474. $y=3\cdot\sin\,(xe^x-e^x)-\sin^3(xe^x-e^x).$ **Ж:** $y'=3\cos^3(xe^x-e^x)\cdot xe^x.$

475. $y=x^{\frac{1}{\ln x}}.$ **Ж:** $y'=0.$ **476.** $y=x^x.$ **Ж:** $y'=x^x(1+\ln x).$

477. $y=x^{\ln x}.$ **Ж:** $y'=2x^{\ln x-1}\cdot\ln x.$

2. Айқын емес түрде берілген функция туындылары. Егер y пен x айнымалылары арасындағы тәуелділік $F(x,y)=0$ теңдеуімен айқын емес түрде берілсе, онда y'_x туындысын табу үшін теңдеудің екі жағын, y - ті x - тің функциясы деп алып, дифференциалдау керек. Содан соң шыққан теңдеуден y'_x-ті шығарып алу керек.

478. $F(x,y)=x^2+y^2=4$ болса, онда туындысы тең болады

$2x+2yy'=0,$ осыдан $y'=-\dfrac{x}{y}.$ ▲

479. $x^3+\ln y-x^2e^y=0$ теңдеуінен y'_x туындысын табу керек.

Шешуі: Теңдеудің екі жағын да x бойынша дифференциалдайық, сонда:

$$3x^2+\frac{y'}{y}-x^2e^y\cdot y'-2xe^y=0,\quad \text{яғни}\quad y'=\frac{(2xe^y-3x^2)\cdot y}{1-x^2ye^y}.$$ ▲

Айқын емес функциялардың y'_x туындысын табу керек.

480. $x^3+y^3-3xy=0.$ **Ж:** $y'=\dfrac{x^2-y}{x-y^2}.$

481. $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$ **Ж:** $y'=-\dfrac{Ax+By+D}{Bx+Cy+E}.$

482. $x^4-6x^2y^2+9y^4-5x^2+15y^2-100=0.$ **Ж:** $y'=\dfrac{x}{3y}.$

483. $x^y-y^x=0.$ **Ж:** $y'=\dfrac{y\,(y-x\ln y)}{x\,(x-y\ln x)}.$

484. $x \cdot \sin y + y \cdot \sin x = 0.$ **Ж:** $y' = -\dfrac{y\cos x + \sin y}{x\cos y + \sin x}.$

485. $e^x + e^y - 2^{xy} - 1 = 0.$ **Ж:** $y' = -\dfrac{e^x - y \cdot 2^{xy} \cdot \ln 2}{e^y - x \cdot 2^{xy} \cdot \ln 2}.$

486. $\sin(y - x^2) - \ln(y - x^2) + 2\sqrt{y - x^2} - 3 = 0.$ **Ж:** $y' = 2x.$

487. $\dfrac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} - \sqrt[3]{\dfrac{y}{x}} = 0.$ **Ж:** $y' = \dfrac{y}{x}.$

488. $x^{y^2} + y^2 \cdot \ln x - 4 = 0.$ **Ж:** $y' = -\dfrac{y}{2x\ln x}.$

489. $x^2 \sin y + y^3 \cos x - 2x - 3y + 1 = 0.$ **Ж:** $y' = -\dfrac{2x\sin y - y^3 \sin x - 2}{x^2 \cos y + 3y^2 \cos x - 3}.$

3. Параметрлік түрде берілген функция туындылары. y - тің x - ке тәуелділігі t параметрі арқылы $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad t \in [a, в] \end{cases}$ түрінде берілсін. Онда оның туындысы $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}, \ x'_t \neq 0$ формуласымен анықталады.

490. Егер $x = t^3 + 3t + 1, \ y = 3t^5 + 5t^3 + 1$ болса, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ табу керек.

Шешуі: $\dfrac{dx}{dt} = 3t^2 + 3, \ \dfrac{dy}{dt} = 15t^4 + 15t^2.$ Ендеше, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{15t^4 + 15t^2}{3t^2 + 3} = 5t^2.$ ▲

491. $x = a\cos t, \ y = a\sin t$ болса, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ табу керек. **Ж:** $-ctg\, t.$

492. $x = e^{-t}\sin t, \ y = e^t \cos t$ болса, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ табу керек. **Ж:** $e^{2t}.$

493. $\rho = \left(\dfrac{2}{3}\sqrt{\alpha} + 1\right) \cdot \alpha, \ \theta = \sqrt{\alpha} \cdot e^{\sqrt{\alpha}}$ болса, $y' = \dfrac{d\rho}{d\theta}$ табу керек. **Ж:** $2\sqrt{\alpha} \cdot e^{-\sqrt{\alpha}}.$

494. $x = ch\, t, \ y = sh\, t$ болса, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ табу керек. **Ж:** $c\text{th}\, t.$

4. Жоғарғы ретті туындылар. Бірінші ретті туындыдан алынған туынды - *екінші ретті туынды*, сол сияқты $(n-1)$- ші ретті туындыдан алынған туынды - n*-ші ретті туынды* деп аталады және сәйкес мына түрде жазылады

$$y' = f'(x), y'' = (f'(x))' = f''(x), \ldots, y^{(n)} = \left(f^{(n-1)}(x)\right)' = f^{(n)}(x).$$

Егер функция параметрлік түрде берілсе, яғни $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi\ (t), \ t \in (0, T) \end{cases}$ екінші ретті туындысы

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - x''_{tt} \cdot y'_t}{(x'_t)^3}$$

формуласымен есептелінеді.

495. $y = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 0{,}5x + 7.$ Табу керек $y', y'', y''',...$.

Шешуі: $y' = 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 2x - 0{,}5;$

$y'' = 20x^3 + 24x^2 - 18x - 2;$

$y''' = 60x^2 + 48x - 18;$

$y^{IV} = 120x + 48, \quad y^{V} = 120, \quad y^{VI} = y^{VII} = ... = 0.$ ▲

496. $y = \ln x.$ Табу керек: $y^{(n)}.$

Шешуі: $y' = \frac{1}{x} = x^{-1}; \quad y'' = -1 \cdot x^{-2}; \quad y''' = 1 \cdot 2 \cdot x^{-3}; \quad y^{IV} = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^{-4},...;$

$$y^{(n)} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot (-1)^{n-1} \cdot x^{-n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}.$$ ▲

497. $x = 2^x.$ Табу керек: $y^{(n)}.$

Шешуі: $y' = 2^x \ln 2; \quad y'' = 2^x \ln^2 2; \quad y''' = 2^x \ln^3 2; \quad y^{IV} = 2^x \ln^4 2,...; \; y^{(n)} = 2^x \ln^n 2.$ ▲

498. $y = \sin x.$ Табу керек: $y^{(n)}.$

Шешуі: $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$

$y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right);$

$y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right);$

....

$y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$ ▲

499. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ параметрлі түрде берілген функцияның бірінші және екінші ретті туындыларын табу керек.

$$y' = \frac{\left(a\sin^3 t\right)'_t}{\left(a\cos^3 t\right)'_t} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -tgt,$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-tgt)'_t}{\left(a\cos^3 t\right)'_t} = \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}.$$ ▲

Екінші ретті туындыларды табу керек.

500. $y = -\frac{22}{x+5}.$ **Ж:** $y'' = \frac{-44}{(x+5)^3}.$ **501.** $y = \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 3).$ **Ж:** $y'' = \ln x.$

502. $y = \frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{1-x^2} + x \cdot \arcsin x.$ **Ж:** $y'' = 2\sqrt{1-x^2}.$

503. $y = -\frac{1}{9}x\sin 3x - \frac{2}{27}\cos 3x.$ **Ж:** $y'' = x \cdot \sin 3x.$

504. $y = x\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)-\sqrt{x^2+a^2}.$ **Ж:** $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}.$

505. $\begin{cases} x = a\,(t-\sin t), \\ y = a\,(1-\cos t). \end{cases}$ **Ж:** $\dfrac{d^2y}{d^2x} = \dfrac{-1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}.$

506. $\begin{cases} x = \arccos\sqrt{t}, \\ y = \sqrt{t-t^2}. \end{cases}$ **Ж:** $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -4\sqrt{t-t^2}.$

507. $y = \sin\ln x + \cos\ln x$ функциясы $x^2y''+xy'+y=0$ теңдеуін қанағаттандыратындығын көрсету керек.

508. $y = x+\sin 2x$ функциясы $y''+4y=4x$ теңдеуін қанағаттандыратындығын көрсету керек.

509. түзу сызықты қозғалыстағы нүктенің жолының уақытқа тәуелдігі $s=\sqrt{t}$ теңдеуімен берілген. 4-ші секунд соңында нүктенің үдеуін табу керек. **Ж:** $-\dfrac{1}{32}$ м/с^2.

Үшінші ретті туындыларды табу керек.

510. $y = \dfrac{x}{6\,(x+1)}.$ **Ж:** $y''' = \dfrac{1}{(x+1)^4}.$

511. $y = \dfrac{1}{2}\ln^2 x.$ **Ж:** $y''' = \dfrac{2\ln x-3}{x^3}.$

512. $y = (2x+3)^3\cdot\sqrt{2x+3}.$ **Ж:** $y''' = 105\cdot\sqrt{2x+3}.$

513. $y = sh^2 x$ **Ж:** $y''' = 4sh\,2x.$ (мұнда $sh\,2x = 2shxchx$ екенін ескерген жөн).

n-ші ретті туындыларды табу керек.

514. $y = x^n\cdot\sqrt{x}.$ **Ж:** $y^{(n)} = \dfrac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2^n}\sqrt{x}.$

515. $y = \dfrac{1}{2x+1}.$ **Ж:** $y^{(n)} = \dfrac{n!(-2)^n}{(2x+1)^{n+1}}.$

516. $y = 5-3\cos^2 x.$ **Ж:** $y^{(n)} = -1{,}5\cdot2^n\cdot\cos\left(2x+\dfrac{\pi n}{2}\right).$

517. $y = 2^x + 2^{-x}.$ **Ж:** $y' = [2^x + (-1)^n\cdot2^{-x}]\ln^n 2.$

518. $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}.$ **Ж:** $y^{(n)} = \dfrac{n!(ad-bc)\cdot(-c)^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}.$

519. $y = e^{kx}.$ **Ж:** $y^{(n)} = k^n\cdot e^{kx}.$

520. $y = \cos x.$ **Ж:** $y^{(n)} = \cos\left(x+\dfrac{\pi n}{2}\right).$

521. $y = e^x + 2e^{2x}$ функциясы $y'''-6y''+11y'-6y=0$ теңдеуін қанағаттандыратындығын көрсету керек.

522. $y=x^3$ функциясы $y^V+y^{IV}+y^{III}+y^{II}+y^I+y=x^3+3x^2+6x+6$ теңдеуін қанағаттандыратындығын көрсету керек.

5. Бірінші және жоғарғы ретті дифференциалдар. Аргумент өсімшесіне қатысты сызықты болатын $y=f(x)$ функция өсімшесінің басты мүшесі оның *(бірінші ретті) дифференциалы* деп аталады да, $dy, df(x)$ символдарының бірімен белгіленеді. *Аргумент дифференциалы* деп аргумент өсімшесін айтады: $dx=\Delta x.$

Функция дифференциалы оның туындысы мен аргумент дифференциалының көбейтіндісіне тең: $dy=df(x)=f'(x)\Delta x$.

$y=f(x)$ функциясының x_0 нүктесіне Δx өсімше берген кездегі дифференциалының геометриялық мағынасы – функция графигіне $M_0(x_0,f(x_0))$ нүктесіне жүргізілген жанаманың ординатасы болып табылады, ал функция өсімшесі Δy - функция ординатасы, яғни

$$dy=f'(x_0)dx,\ \ \Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

Д и ф ф е р е н ц и а л д ы ң н е г і з г і қ а с и е т т е р і

Егер $f(x)$ және $g(x)$ дифференциалданатын функциялар болса, онда келесі теңдіктер орындалады:

а) $d(af(x)+bg(x))=a\cdot df(x)+b\cdot dg(x)$;

ә) $d(f(x)\cdot g(x))=df(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot dg(x)$;

б) $d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{d\,f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot d\,g(x)}{g^2(x)},\ \ g(x)\neq 0$

Функция дифференциалы функция мәнін жуықтап есептеуде жиі қолданылады. Ол үшін дифференциалдың анықтамасы бойынша

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x=dy$$

теңдігінен $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$ теңдігін алып, кез келген функцияның x нүктесіндегі мәнін жуықтап есептеуге болады.

Функцияның бірінші ретті дифференциалынан алынған дифференциал – екінші, сол сияқты $(n-1)$- ші ретті дифференциалдан алынған дифференциал n- ші ретті дифференциал деп аталады.

$$d^2y=d^2f(x)=d(f'(x)dx)=(f'(x)'dx)'dx=f''(x)dx^2;$$

$$d^3y=d^3f(x)=f'''(x)dx^3;$$

$$d^ny=d^nf(x)=f^{(n)}(x)dx^n$$

523. $y=arctg\ x$ функциясының дифференциалын табу керек.

Шешуі: $dy=(arctgx)'\cdot dx=\frac{dx}{1+x^2}.$ ▲

524. $s=e^{t^2}$ функциясының дифференциалын табу керек.

Шешуі: $ds=(e^{t^2})\cdot dt=e^{t^2}\cdot 2t\cdot dt.$ ▲

525. $y=(2x-3)^3$ функциясының бірінші, екінші және үшінші ретті дифференциалдарын табу керек.

Шешуі: $dy=3(2x-3)^2\cdot 2\,dx=6(2x-3)^2\,dx$;

$d^2y=12(2x-3)\cdot 2dx^2=24(2x-3)\cdot dx^2$;

$d^3y=24\cdot 2\cdot dx^3=48\,dx^3$. ▲

526. $v=e^{2t}$ функциясының бірінші және екінші ретті дифференциалдарын табу керек.

Шешуі: $dv=2e^{2t}\cdot \mathrm{dt}$; $\mathrm{d^2v=4e^{2t}dt^2}$. ▲

527. $y=2x^3+5x^2$ функциясының өсімшесі мен дифференциалын салыстыру керек.

Шешуі:

$$\Delta y=2(x+\Delta x)^3+5(x+\Delta x)^2-(2x^3+5x^2)=(6x^2+10x)\cdot\Delta x+(6x+5)\cdot(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3;$$

$$dy=(6x^2+10x)\,dx.$$

Δy өсімшесі мен dy дифференциалдың айырмасы Δx-пен салыстырғанда жоғарғы ретті шексіз аз шамалар: $(6x+5)\cdot(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3$. ▲

528. $\arcsin 0{,}51$ жуық мәнін есептеу керек.

Шешуі: $y=\arcsin x$ функциясын қарастырайық. $x=0{,}5$ деп алсақ, онда $\Delta x=0{,}01$ және $\arcsin(x+\Delta x)\approx\arcsin x+(\arcsin x)'\cdot\Delta x$ формуласын қолдана отырып,

$$\arcsin 0{,}51\approx\arcsin 0{,}5+\frac{1}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}}\cdot 0{,}01=\frac{\pi}{6}+0{,}011=0{,}513.$$

▲

529. Радиусы 3,02 м болатын дөңгелек ауданының жуық мәнін есептеу керек.

Шешуі: $S=\pi R^2$ формуласын қолданамыз. $R=3$ десек, $\Delta R=0{,}02.$

Сонда $\Delta S\approx dS=2\pi R\cdot\Delta R=2\pi\cdot 3\cdot 0{,}02=0{,}12\pi.$ Ендеше, дөңгелек ауданының жуық мәні: $9\pi+0{,}12\pi=9{,}12\pi\approx 28{,}66$ (м²). ▲

Функция дифференциалдарын табу керек.

530. $y=\frac{x}{2}\sqrt{49-x^2}+\frac{49}{2}\arcsin\frac{x}{7}.$ **Ж:** $dy=\sqrt{49-x^2}\,dx.$

531. $y=\frac{1}{12}\ln\frac{x-6}{x+6}.$ **Ж:** $dy=\frac{dx}{x^2-36}.$

532. $y=2\ln ch\frac{x}{2}.$ **Ж:** $dy=th\frac{x}{2}\,dx.$

533. $y=arctg\, e^{2x}.$ **Ж:** $dy=\frac{2e^{2x}dx}{1+e^{4x}}.$

534. $y=x(\ln x-1)$. Табу керек: $dy, d^2y, d^3y.$

Ж: $dy=\ln x dx,$ $d^2y=\frac{1}{x}(dx)^2,$ $d^3y=-\frac{1}{x^2}(dx)^3.$

535. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$ табу керек: $d^2y.$ **Ж:** $d^2y=\frac{-x(dx)^2}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}.$

536. $y=\frac{1}{x}$ функциясының өсімшесі мен дифференциалын салыстыру керек.

Ж: $\Delta y = -\dfrac{\Delta x}{x\,(x+\Delta x)},\ dy = -\dfrac{\Delta x}{x^2}.$

537. $y = x^2 - 2x$ функциясының $x = 3$ және $\Delta x = 0{,}01$ болғанда Δy және dy есептеу керек.

Ж: $\Delta y = 0{,}0401;\ dy = 0{,}04.$

538. Радиусы 2,01 м шар көлемінің жуық мәнін табу керек. **Ж:** 34,04 м^3.

539. $13\sin x - 15\cos x = 0$ теңдеуінен x-тің жуық мәнін табу керек.

Ж: $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{13}.$

Жуық мәндерін табу керек.

540. $arctg\,1{,}05.$ **Ж:** $0{,}811.$ **541.** $tg\,46^0.$ **Ж:** $1{,}035.$

542. $\ln tg 47^0 15'.$ **Ж:** $0{,}078.$ **543.** $\sqrt[4]{15{,}8}.$ **Ж:** $1{,}9938.$

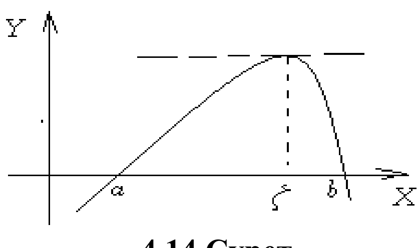
4.6 ФУНКЦИЯНЫ ЗЕРТТЕУ

1. Дифференциалдық есептеудің негізгі теоремалары.

Ф е р м а т е о р е м а с ы. Егер $[a,в]$ сегментінде дифференциалданатын $y = f(x)$ функциясы осы сегменттің ішінде жатқан бір x_0 нүктесінде өзінің ең үлкен немесе ең кіші мәнін қабылдаса, онда оның туындысы x_0 нүктесінде нөлге тең болады, яғни $f'(x_0) = 0.$

Р о л л ь т е о р е м а с ы (туынды түбірі туралы). Егер $[a,в]$ сегментінде үзіліссіз $f(x)$ функциясы $(a,в)$ интервалында дифференциалданатын болса және $f(a) = f(в)$ орындалса, онда $(a,в)$ интервалында жатқан ең болмағанда бір ξ нүктесінде функцияның туындысы нөлге тең болады, яғни $f'(\xi) = 0.$

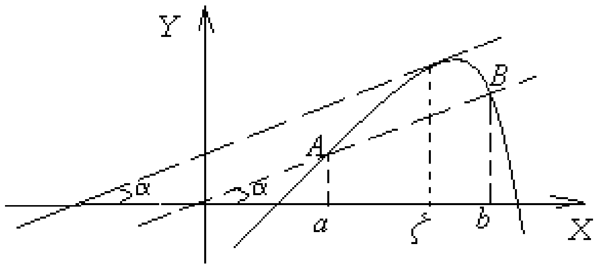
Бұл теореманың геометриялық мағынасы: Үзіліссіз, әрбір нүктесінде жанамасы бар қисық *Ox* осін *x=a, x=b* нүктелерінде қиса, онда бұл қисықтың бойынан жанамасы *Ox* осіне параллель болатын кемінде бір нүкте табылады **(4.14 Сурет).**



4.14 Сурет

Л а г р а н ж т е о р е м а с ы (ақырлы өсімшелер туралы). Егер $[a,в]$ сегментінде үзіліссіз $f(x)$ функциясы $(a,в)$ интервалында дифференциалданатын болса, онда $f(в) - f(a) = f'(\xi)(в - a)$ теңдігі орындалатын $(a,в)$ интервалынан ең болмағанда бір ξ нүктесі табылады.

Бұл теореманың геометриялық мағынасы: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ шамасы АВ қимасының бұрыштық коэффициентіне тең, ал $f'(\zeta)$ - жанаманың бұрыштық коэффициенті. Лагранж теоремасы бойынша z нүктесі табылып, сол $(\zeta; f(\zeta))$ нүктесіндегі жанама AB қимасына параллель болады. Ондай нүкте бірнешеу болуы мүмкін (4.15 Сурет).



4.15 Сурет

К о ш и т е о р е м а с ы (екі өсімшенің қатынасы туралы). Егер $[a,в]$ сегментінде үзіліссіз $f(x)$ және $\varphi(x)$ функциялары (a,b) интервалында дифференциалданатын болса және $\varphi'(x) \neq 0$ болса, $\dfrac{f(в)-f(a)}{\varphi(в)-\varphi(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ теңдігі орындалатын, (a,b) интервалынан ең болмағанда бір ξ нүктесі табылады.

Е с к е р т у. Лагранж теоремасы (егер $\varphi(x)=x$ десек) Коши теоремасының дербес жағдайы болып табылады.

Т е й л о р ж ә н е М а к л о р е н ф о р м у л а л а р ы.

y=f(x) функциясының *x=a* нүктесінің аймағында (n+1)-ші ретті ((n+1)-шіні қоса алғанда) туындыларына дейінгі барлық туындылары бар болсын. Онда

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

функцияның мұндай жіктелуін *Тейлор формуласы*, ал $R_n(x)$ Тейлор формуласының қалдық мүшесі деп аталады.

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)),$$ мұндағы $0 \prec \theta \prec 1$.

Егер a = 0:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

- *Маклорен формуласы*.

Кейбір функциялардың Маклорен формуласы бойынша жіктелуін келтірейік:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, 0 < \theta < 1.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{x^n}{n!}\sin\frac{\pi n}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{x^n}{n!}\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

$$\ln x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^{n+1}).$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^{n+1}).$$

Тейлор көпмүшесінің мәнін есептей отырып, *e* санының жуық мәнін табалық (*n*=8):

$$e = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{8!} \approx 2{,}71828.$$ Мұндағы $R_8 < \frac{1}{9!}\cdot 3 < 10^{-5}.$

544. $f(x) = x^2 - 6x + 100$ функциясы үшін $a=1,\ b=5$ мәндерінде Ролль теоремасы орындала ма? Орындалса ξ-дің қандай мәнінде орындалады?

Шешуі: $f(x)$ функциясы $x-$тің барлық мәндерінде үзіліссіз және дифференциалданатын, әрі оның $[1;5]$-нің шеткі нүктесіндегі мәндері өзара тең: $f(1) = f(5) = 95$ болғандықтан, Ролль теоремасы бұл кесіндіде орындалады. ξ мәнін $f^{/}(x) = 2x - 6 = 0$ теңдеуінен табамыз, я ғни $\xi = 3.$ ▲

545. $f(x) = \sqrt[3]{8x - x^2}$ функциясы үшін $a=0,\ b=8$ болғанда Ролль теоремасы орындала ма? Орындалса ξ-дің қандай мәнінде орындалады?

Шешуі: $f(x) = \sqrt[3]{8x - x^2}$ функциясы x-тің барлық мәндерінде үзіліссіз және $f'(x) = \frac{8-2x}{3\cdot\sqrt[3]{(8x-x^2)^2}},$ $x \neq 0, x \neq 8,$ яғни $(0;8)$ интервалында дифференциалданады. Әрі, $f(0) = f(8) = 0.$ Сонымен, $[0;8]$ кесіндісінде Ролль теоремасы орындалады.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 8 - 2x = 0 \Rightarrow x = \xi = 4.$$ ▲

546. $f(x) = \sqrt[3]{(x-8)^2}$ функциясы берілген. $a=0, b=16$ болсын. Сонда $f(0) = f(16) = 4.$ Бірақ $f'(x) = \frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x-8}}$ туындысы $(0;16)$ интервалының ешбір нүктесінде нөлге тең болмайды. Бұл Ролль теоремасына қайшы бола ма?

Шешуі: Жоқ, себебі $(0;16)$ интервалының $x=8$ нүктесінде туынды болмайды, яғни Ролль теоремасының шарты орындалмайды. ▲

547. $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ көпмүше туындысының $(-1;1)$ интервалында нақты түбірі бар екенін көрсету керек.

Шешуі: Берілген көпмүшенің түбірлерін табайық: $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ немесе $(x-1)^2\cdot(x+1) = 0,$ яғни $x_{1,2} = 1, x_3 = -1.$

Ал $f(-1) = f(1) = 0$ болғандықтан, Ролль теоремасы бойынша $f'(x)$-тің $(-1;1)$ интервалында түбірі бар болады. Туындының түбірін табайық: $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0,$ яғни $x_1 = -\frac{1}{3},\ x_2 = 1.$ Сонымен, -1 мен 1 түбірлерінің арасында туындының $-\frac{1}{3}$-ге тең түбірі бар. ▲

548. $y = 2x - x^2$ қиығы AB доғасының ұштары $A(1;1)$ және $B(3;-3)$ нүктелері болсын. AB доғасының бойынан сол нүктеде жүргізілген жанама AB хордасына параллель болатындай M нүктесін табу керек.

Шешуі: $y = 2x - x^2$ функциясы x-тің барлық мәнінде үзіліссіз және дифференциалданады. Лагранж теоремасы бойынша $a=1$ және $b=3$ мәндерінің арасында $y(b)-y(a)=(b-a)\cdot f'(\xi)$ теңдігін қанағаттандыратын $x=\xi$ мәні бар болады.

$$y(3)-y(1)=(3-1)\cdot y'(\xi),$$

мұнда $y'=2-2x$ болғандықтан,

$$(2\cdot 3-3^2)-(2\cdot 1-1^2)=(3-1)\cdot(2-2\cdot\xi).$$

$$-4=4\cdot(1-\xi).$$

Бұдан, $\xi=2,\ y(2)=0.$ Сонымен, $M(2;0).$ ▲

549. $x=t^2, y=t^3$ параметрлік теңдеулерімен берілген қисықтың AB доғасының бойынан сол нүктеде жүргізілген жанама AB хордасына параллель болатындай M нүктесін табу керек. Мұндағы A және B нүктелеріне $t=1$ және $t=3$ мәндері сәйкес.

Шешуі: AB хордасының бұрыштық коэффициенті $\frac{y(3)-y(1)}{x(3)-x(1)}$ бөлшегіне тең, ал M нүктесіндегі $(t=\xi)$ жанаманың бұрыштық коэффициенті $\frac{y_t'(\xi)}{x_t'(\xi)}$ тең, мұндағы $x_t'=2t,\ \ y_t'=3t^2.$ ξ табу үшін Коши теоремасы бойынша:

$$\frac{y(3)-y(1)}{x(3)-x(1)}=\frac{y_t'(\xi)}{x_t'(\xi)} \text{ немесе } \frac{27-1}{9-1}=\frac{3\xi^2}{2\xi} \text{ және } \frac{13}{4}=\frac{3}{2}\xi, \text{ яғни } \xi=\frac{13}{6}.$$

Табылған ξ мәні $1<\xi<3$ теңсіздігін қанағаттандырады.

$t=\xi$ мәнін қисықтың параметрлік теңдеуіне қоя отырып, $x=\frac{169}{36},\ y=\frac{2197}{216}$ аламыз.

Сонымен, ізделінді нүкте $M\left(\frac{169}{36};\frac{2197}{216}\right).$ ▲

550. $f(x)=\sqrt[3]{x}$ формуласын $(x-1)$ екімүшесінің 5-ші дәрежесіне дейін жіктеу керек.

Шешуі: $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ функциясының және оның 5-ші дәрежелік туындысының $a=1$ нүктесіндегі мәнін есептейік:

$$f(1)=1,\ f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}},\ f'(1)=\frac{1}{3};$$

$$f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}},\ f''(1)=-\frac{2}{9};\quad f'''(x)=\frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}},\quad f'''(1)=\frac{10}{27};$$

$$f^{IV}(x)=-\frac{80}{81}\cdot x^{\frac{-11}{3}},\ f^{IV}(1)=-\frac{80}{81};\quad f^{V}(x)=\frac{880}{243}\cdot x^{-\frac{14}{3}},\quad f^{V}(1)=\frac{880}{243}.$$

Ендеше, Тейлор формуласы бойынша:

$$\sqrt[3]{x}=1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{2}{9\cdot 2!}(x-1)^2+\frac{10}{27\cdot 3!}(x-1)^3-\frac{80}{81\cdot 4!}(x-1)^4+\frac{880}{243\cdot 5!}(x-1)^5+R_5,$$

мұндағы $R_5=\frac{f^{VI}(\xi)}{6!}\cdot(x-1)^6=-\frac{12320}{729\cdot 6!}\cdot\xi^{-\frac{17}{3}}(x-1)^6,\ 1<\xi<x.$ ▲

551. $\sqrt[3]{29}$ жуық мәнін 10^{-3}-ке дейінгі дәлдікпен есептеу керек.

Шешуі: Берілген түбірді түрлендірейік: $\sqrt[3]{29} = \sqrt[3]{27+2} = 3\cdot\left(1+\frac{2}{27}\right)^{\frac{1}{3}}.$

Енді келесі биномдық жіктеуді қолданамыз:

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+...+\frac{m(m-1)\cdot...\cdot(m-n+1)}{n!}x^n+R_n.$$

Бұдан келесі жуық теңдікті аламыз:

$$(1+x)^m \approx 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+...+\frac{m(m-1)\cdot...\cdot(m-n+1)}{n!}x^n,$$

оның қателігі: $$R_n = \frac{m(m-1)\cdot...\cdot(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}\cdot(1+\theta x)^{m-n-1}.$$

R_n қателігі өте үлкен n мен $|x|<1$ үшін өте аз болады.

$x=\frac{2}{27}$ және $m=\frac{1}{3}$ делік, сонда:

$$\sqrt[3]{29} = 3\cdot\left(1+\frac{2}{81}-\frac{2\cdot 2}{81\cdot 81}+\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}{81^3}-\frac{2^5\cdot 5}{81^4}+...+R_n\right).$$

Шамалардың тізбектес қателіктерін бағалайық:

$3|R_1| < \frac{3\cdot 2\cdot 2}{81^2} < 0{,}002,\quad 3|R_2| < \frac{3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}{81^3} < 0{,}0003.$

Ендеше, берілген дәлдікпен есептеу үшін R_2 алдындағы үш мүшені алсақ жеткілікті, яғни $\sqrt[3]{29} \approx 3\cdot(1+0{,}024-0{,}0006) = 3{,}072.$ ▲

552. $\sqrt{e}$ шамасын 0,0001-ге дейінгі дәлдікпен есептеу керек.

Шешуі: e^x функциясы үшін Маклорен формуласын қолданамыз:

$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+R_n,$ мұндағы $R_n = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\cdot x^{n+1},$ $0<\theta<1.$ $x=\frac{1}{2}$ делік, сонда:

$\sqrt{e} = 1+\frac{1}{2\cdot 1!}+\frac{1}{2^2\cdot 2!}+\frac{1}{2^3\cdot 3!}+...+\frac{1}{2^n\cdot n!}+R_n,$ мұндағы $R_n = \frac{e^{\theta/2}}{2^{n+1}(n+1)!},$ $0<\theta<1.$

$0<\theta<1,\ 2<e<3$ болғандықтан, $R_n < \frac{e^{1/2}}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}$ болады. Бірақ $e^{1/2}<2,$ сондықтан $R_n < \frac{1}{2^n(n+1)!}.$ $R_n < 0{,}0001$ орындалатындай n таңдап аламыз.

Егер $n=3,$ онда $R_3 < \frac{1}{8\cdot 24};\quad R_3 < \frac{1}{192}.$

$n=4,$ онда $R_4 < \frac{1}{16\cdot 120};\quad R_4 < \frac{1}{1920}.$

$n=5,$ онда $R_5 < \frac{1}{32\cdot 720};\quad R_5 < 0{,}0001.$

$\sqrt{e}$ шамасын 0,0001 дейінгі дәлдікпен анықтау үшін келесі жуық теңдікті аламыз:

$$\sqrt{e}\approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2\cdot 2!}+\frac{1}{2^3\cdot 3!}+\frac{1}{2^4\cdot 4!}+\frac{1}{2^5\cdot 5!}\approx 1{,}6487.$$ ▲

553. $\frac{1}{x}$ функциясын $(x-x_0)$ екімүшесінің үшінші дәрежесі түрінде жіктеу керек.

Ж: $\frac{1}{x_0}-\frac{x-x_0}{x_0^2}+\frac{(x-x_0)^2}{x_0^3}-\frac{(x-x_0)^3}{x_0^4}+R_3,$ мұндағы $R_3=\frac{(x-x_0)^4}{\xi^5}$ $\left(x_0 \underset{\le}{>} \xi \underset{\ge}{<} x\right)$.

554. $y=x^3-3x$ қисығының AB доғасының ұштары: $A(0;0), B(3;18).$ AB доғасының қандай нүктесінде жүргізілген жанама AB хордасына параллель болады?

Ж: $M(\sqrt{3};0).$

10^{-3} дейінгі дәлдікпен есептеу керек.

555. $\cos 41^0.$ **Ж:** 0,754. **556.** $\sqrt[3]{121}.$ **Ж:** 4,946. **557.** $\sqrt[3]{e}.$ **Ж:** 1,395. **558.** $\sqrt[7]{129}.$ **Ж:** 2,002. **559.** $\sin 36^0.$ **Ж:** 0,587.

2. Лопиталь ережесі. *f(x)* және *g(x)* функциялары [*a;b*] сегментінде Коши теоремасының шартын қанағаттандырса, әрі *f(a)=g(a)=0* болса, онда егер $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ шегі бар болса, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, шегі де бар болады, әрі $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Лопиталь ережесін $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ түрлеріндегі анықталмағандықтарды ашуға қолдануға болады.

Келесі шектерді табу керек.

560. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}.$

Шешуі: $x\to 1$ болғанда бөлшектің алымы мен бөлімі нөлге ұмтылады, сондықтан $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық аламыз. Лопиталь ережесін қолданайық, яғни берілген функциялардың туындыларының қатынасының шегін қарастырамыз:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{2+1}{e}=\frac{3}{e}.$$ ▲

561. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}.$

Шешуі: Бұл - $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{6},$$

себебі $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ - бірінші тамаша шек. Мұнда Лопиталь ережесін екі рет қолдандық. ▲

562. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$, мұндағы n - бүтін оң сан.

Шешуі: Бұл - $\dfrac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандық. Лопиталь ережесін n рет қолданамыз, сонда: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n\cdot x^{n-1}}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n(n-1)\cdot x^{n-2}}{e^x}=...=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n(n-1)\cdot(n-2)...1}{e^x}=0.$ ▲

563. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cdot e^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}.$

Шешуі: Мұнда да $\dfrac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандық:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot e^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}}+\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}}{1+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}}\cdot\left(1+\frac{x}{2}\right)}{1+e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\cdot\left(1+\frac{x}{2}\right)+e^{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}}{e^x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\cdot\left(2+\frac{x}{2}\right)}{e^x}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{x}{2}}}=\frac{1}{\infty}=0.$$

▲

564. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\ln x\right).$

Шешуі: Мұнда $(0\cdot\infty)$ түріндегі анықталмағандық. Функциялардың көбейтіндісін қатынасына түрлендірейік, сонда $\dfrac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандық аламыз. Лопиталь ережесін қолданайық:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2\ln x\right)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-2/x^3}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x^2=-\frac{1}{2}\cdot 0=0.$$ ▲

565. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right).$

Шешуі: Мұнда $(\infty-\infty)$ түріндегі анықталмағандық. Бөлшектерді ортақ бөлімге келтірейік, сонда $\dfrac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық аламыз. Сондықтан Лопиталь ережесін қолдануға болады. Сонымен,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x\cdot(e^x-1)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{e^x-1+x\cdot e^x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x}{e^x+e^x+x\cdot e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x}{e^x(2+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}.$$ ▲

566. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x.$

Шешуі: Бұл – (0^0) түріндегі анықталмағандық. Берілген функцияны y деп белгілейік, яғни $y=(\sin x)^x$, сосын оны логарифмдейміз:

$$\ln y=\ln(\sin x)^x=x\cdot\ln\sin x=\frac{\ln\sin x}{1/x}.$$

Берілген функцияның логарифмінің шегін Лопиталь ережесін қолданып табайық (мұнда $\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандық):

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{1/x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x/\sin x}{-1/x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\sin x}==-\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\cos x\cdot\frac{x}{\sin x}\right)=0\cdot 1\cdot 1=0.$$

Ендеше, $\lim\limits_{x\to 0} y=e^0=1.$ ▲

567. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(tgx)^{2\cos x}.$

Шешуі: Мұнда (∞^0) түріндегі анықталмағандық:

$$\lim_{x\to\pi/2}(tgx)^{2\cos x}=\left|\lim_{x\to\pi/2}\ln(tgx)^{2\cos x}=\lim_{x\to\pi/2}2\cdot\cos x\cdot\ln(tgx)=2\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln tgx}{1/\cos x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\right.$$

$$=2\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{\cos^2 x}\cdot(-\sin x)}=2\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{1}{tgx\cdot\sin x}=2\cdot\frac{1}{\infty\cdot 1}=\frac{2}{\infty}=0.\left|=e^0=1.\right.$$

▲

568. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}.$

Шешуі: Мұнда (1^∞) түріндегі анықталмағандық. Логарифмдеп, сосын Лопиталь ережесін қолданамыз:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}=(1^\infty)=\left|\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\ln x}=\lim_{x\to 0}\ln x\cdot\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{1/\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\right.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\ln^2 x}{1+x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2 x}{1+\frac{1}{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=-\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=2\cdot\lim_{x\to 0}x=2\cdot 0=0\left|=e^0=1.\right.$$

▲

Келесі функциялардың шектерін табу керек.

$\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық.

569. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}.$ **Ж:** $\frac{3}{5}.$ **570.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}.$ **Ж:** 2.

571. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{e^{3/x}-1}.$ **Ж:** $\frac{2}{3}.$ **572.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-(e^x+e^{-x})\cos x}{x^4}.$ **Ж:** $\frac{1}{3}.$

573. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}.$ **Ж:** 0,18. **574.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-3xe^x+3x^2}{arctgx-\sin x-\frac{x^3}{6}}.$ **Ж:** 18.

$\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандық.

575. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$. **Ж:** 1. **576.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}\quad (n>0)$. **Ж:** 0.

577. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$. **Ж:** $\frac{1}{2}$. **578.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\mathrm{tg}\left(\pi x/2\right)}{\ln(1-x)}$. **Ж:** ∞.

579. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{ctg\pi x}$. **Ж:** 0.

$(0\cdot\infty)$ түріндегі анықталмағандық.

580. $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot \mathrm{ctg}\pi x)$. **Ж:** $\frac{1}{\pi}$. **581.** $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x\cdot \mathrm{ctg}x)$. **Ж:** 1.

582. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot \mathrm{ctg}x$. **Ж:** 0.

$(\infty-\infty)$ түріндегі анықталмағандық.

583. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$. **Ж:** $-\frac{1}{2}$. **584.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{p}{1-x^p}-\dfrac{q}{1-x^q}\right)$. **Ж:** $\frac{p-q}{2}$.

585. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-ctg^2x\right)$. **Ж:** $\frac{2}{3}$.

$0^0, \infty^0, 1^\infty$ түріндегі анықталмағандықтар.

586. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\pi-2x)^{\cos x}$. **Ж:** 1. **587.** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}$. **Ж:** e^{-6}.

588. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2^x)^{1/x}$. **Ж:** 2. **589.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}\right)^{1/x^2}$. **Ж:** $e^{\frac{1}{3}}$.

3. Функцияның өсу және кемуі. Егер $x_1<x_2$ теңсіздігін қанағаттандыратын $(a,в)$ интервалында жататын аргумент мәндері үшін $y=f(x)$ функциясының мәндері $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$ теңсіздігін қанағаттандыратын болса, онда берілген $f(x)$ функциясы $(a,в)$ интервалында *өспелі (кемімелі) функция* деп аталады.

Ф у н к ц и я н ы ң ө с у ж ә н е к е м у б е л г і л е р і.

1) Егер $\forall x\in(a;b)$ үшін $f'(x)\succ 0$ болса, онда $f(x)$ функциясы $(a,в)$ интервалында өспелі болады.

2) Егер $\forall x\in(a;b)$ үшін $f'(x)\prec 0$ болса, онда $f(x)$ функциясы $(a,в)$ интервалында кемімелі болады.

4. Функция экстремумы. Егер x_0 нүктесінің $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ аймағында жатқан барлық x-тер үшін $f(x)\le f(x_0)$ ($f(x)\ge f(x_0)$) теңсіздігі орындалса, онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының *максимумы (минимумы)* делінеді.

Максимум жєне минимумды біріктіріп *экстремум* деп атайды.

Э к с т р е м у м н ы ң қ а ж е т т і ш а р т ы. Егер $y=f(x)$ функциясының $x=x_0$ нүктесінде экстремумы бар болса, онда сол нүктеде $f'(x_0)=0$ (немесе $f'(x)$ үзілісті) болады.

$f'(x_0)=0$ (немесе $f'(x)$ үзілісті) болатын $x=x_0$ нүктесі $f(x)$ функциясының *кризистік нүктесі* делінеді.

Э к с т р е м у м н ы ң ж е т к і л і к т і ш а р т т а р ы.

I. Егер $y=f(x)$ функциясы x_0 кризистік нүктеде үзіліссіз және сол нүктеден өткенде $f'(x)$ таңбасын (+)-тен (-)-ке өзгертсе, онда x_0 - максимум нүктесі,

(-)-тен (+)-ке өзгертсе, онда x_0 - минимум нүктесі болады.

II. Егер $f'(x_0)=0$ және $f''(x_0)\prec 0$ болса, онда $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде максимумын, ал $f''(x_0)\succ 0$ болса, онда минимумын қабылдайды.

Функцияның берілген кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табу үшін келесі амалдар орындалады:

а) кесіндідегі барлық кризистік нүктелерін табу керек;

ә) шеткі $(x=a, x=в)$ нүктедегі және $(a,в)$ аралығында жататын кризистік нүктелердегі функцияның мәндері есептелінеді;

б) осы табылған функция мәндерінің ең үлкені $[a,в]$ кесіндісіндегі функцияның ең үлкен мәні болып, ал ең кішісі – ең кіші мәні болып табылады.

590. $x=3,\ x=1,\ x=-1,\ x=0{,}5$ нүктелері берілген. Бұл нүктелердің қайсысында $y=x^3-3x^2$ функциясы өседі (не кемиді)?

Шешуі: Туындысын табайық: $y'=3x^2-6x.$

Егер $x=3,$ онда $y'=9>0$ – функция өседі.

$x=1,$ онда $y'=-3<0$ – функция кемиді.

$x=-1,$ онда $y'=9>0$ – функция өседі.

$x=0{,}5,$ онда $y'=-2{,}25<0$ – функция кемиді. ▲

591. $y=x\cdot\left(1+\sqrt{x}\right)$ функциясының өсу және кему интервалдарын табу керек.

Шешуі: $y'=1+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ туындысын $[0;+\infty)$ аралығында оң болғандықтан, берілген функция анықталу облысында өспелі болады. ▲

592. $y=x-2\sin x$ функциясының $0\le x\le 2\pi$ үшін өсу және кему интервалдарын табу керек.

Шешуі: Туындыны табайық: $y'=1-2\cos x.$

$\left(\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right)$ интервалында $y'>0,$

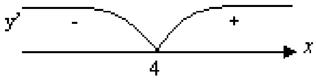
$\left(0;\frac{\pi}{3}\right)$ және $\left(\frac{5\pi}{3};2\pi\right)$ интервалдарында $y'<0.$

Сонымен, $x\in\left(\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right)$-да берілген функция өседі,

$x\in\left(0;\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{3};2\pi\right)$-да функция кемиді. ▲

593. $y=(x-5)e^x$ функциясын экстремумге зерттеу керек.

Шешуі: Туынды табайық: $y' = (x-5)'e^x + (x-5)\cdot(e^x)' = (x-4)e^x$. Оны нөлге теңестіріп, кризистік нүктені табамыз: $(x-4)e^x = 0, x = 4.$



$x = 4$ нүктесінің сол және оң жағында у$^/$ -тің таңбасын қарастырамыз. Ол (-) -тен (+)-ке өзгереді. Ендеше, $x = 4$ нүктесінде функция минимумы болады: $y_{\min} = -e^4$. ▲

594. $y = x\sqrt{1-x^2}$ функциясын экстремумге зерттеу керек.

Шешуі: Функция $-1 \le x \le 1$ аралығында анықталған. Оның туындысы: $y' = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$y' = 0 \Rightarrow 1 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$ - кризистік нүктелер.

$y' = \infty \Rightarrow x = \pm 1,$ яғни анықталу облысының шеткі нүктелері.

Екінші туындысын табайық: $y'' = \dfrac{x(2x^2-3)}{(1-x^2)^{3/2}}$.

Екінші туындының кризистік нүктелердегі мәндерін табайық:

$$y''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1\cdot(1-3)}{\sqrt{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3/2}} < 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} - \max$$ нүктесі, $y\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}.$

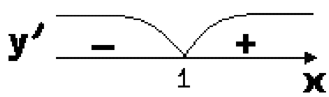
$$y''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-1\cdot(1-3)}{\sqrt{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3/2}} > 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \min$$ нүктесі, $y\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\dfrac{1}{2}} = -\dfrac{1}{2}.$

$x = \pm 1$ нүктелерінде экстремум жоқ, себебі анықтама бойынша анықталу облысының тек ішкі нүктелері ғана экстремум бола алады. ▲

595. $y = (x-1)^4$ функциясын экстремумге зерттеу керек.

Шешуі: $y' = 4(x-1)^3 = 0 \Rightarrow x = 1$ - кризистік нүкте.

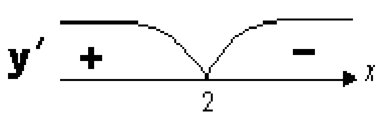
$y'' = 12(x-1)^2\Big|_{x=1} = 12\cdot 0 = 0$ болғандықтан басқа жеткілікті шартты (у′ таңбасына қатысты) қарастырайық: у′ таңбасы (-)-тен (+)-ке өзгереді. Ендеше, $x = 1 - \min$ нүктесі, $y_{\min} = 0.$ ▲



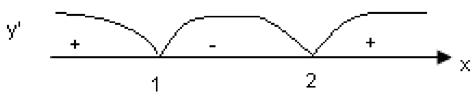
596. $y = 1-(x-2)^{4/5}$ функциясын экстремумге зерттеу керек.

Шешуі: $y' = -\dfrac{4}{5}(x-2)^{-1/5} = -\dfrac{4}{5\cdot\sqrt[5]{x-2}} \neq 0.$ Туынды x-тің еш мәнінде нөлге тең болмайды және $x = 2$ нүктесінде үзілісті болады (кризистік нүкте).

у′ таңбасы $x = 2$ нүктеден өткенде (+)-тен (-)-ке өзгереді. Ендеше $x = 2$ - max нүктесі. $y_{\max} = 1.$ ▲



597. $y=(x-2)^{2/3}\cdot(2x+1)$ функциясын экстремумге зерттеу керек.



Шешуі: $y'=\frac{10}{3}\cdot\frac{x-1}{\sqrt[3]{x-2}}=0 \Rightarrow x=1$ және $x=2$ - кризистік нүктелер ($x=1$ нүктесінде $y'=0,$ ал $x=2$ нүктесінде y'- үзілісті). $x=1-\max$ нүктесі , $y_{\max}=3.$ $x=2-\min$ нүктесі , $y_{\min}=0.$ ▲

598. $f(x)=3x-x^3$ функциясының $[-2;3]$ кесіндісіндегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табу керек.

Шешуі: $f'(x)=3-3x^2=0 \Rightarrow x=\pm1$ - кризистік нүктелер. Осы нүктелердегі және кесіндінің шеткі нүктелеріндегі функция мәндерін есептейік:

$$f(1)=2,\ f(-1)=-2,\ f(-2)=2,\ f(3)=-18.$$

Алынған төрт мәннің ең үлкені мен ең кішісін таңдаймыз.

Сонымен, функцияның ең үлкен мәні 2, ал ең кішісі -18 болады. ▲

599. S толық беті берілген ең үлкен көлемді цилиндрді табу керек.

Шешуі: Цилиндрдің табан радиусы *x*, ал биіктігі *y* болсын. Сонда:

$$S=2\pi x^2+2\pi xy \Rightarrow y=\frac{S-2\pi x^2}{2\pi x}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{S}{x}-2\pi x\right).$$

Ендеше, цилиндр көлемін былайша жазуға болады:

$$V=V(x)=\pi x^2\cdot\frac{1}{2\pi}\left(\frac{S}{x}-2\pi x\right)=\frac{S}{2}x-\pi x^3.$$

Енді $V(x)$ функциясының максимумын табуымыз керек:

$$V'=\frac{S}{2}-3\pi x^2=0 \Rightarrow x=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$$ - кризистік нүкте.

$$V''=-6\pi x\Big|_{x=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}}=-6\pi\cdot\sqrt{\frac{S}{6\pi}}=-\sqrt{6\pi S}<0 \Rightarrow \max$$ нүкте.

Енді биіктігін есептейік:

$$y=\frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{S}{\sqrt{S/6\pi}}-2\pi\cdot\sqrt{\frac{S}{6\pi}}\right)=2\cdot\sqrt{\frac{S}{6\pi}}=2x,$$

яғни цилиндрдің көлемі ең үлкен болу үшін осьтік қимасы квадрат болуы керек. ▲

Функциялардың өсу және кему интервалдарын табу керек.

600. $y=2-3x+x^3.$ **Ж:** $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)y\uparrow;\quad(-1;1)y\downarrow.$

601. $y=(x^2-1)^{3/2}.$ **Ж:** $(-\infty;-1)y\downarrow;\ (-1;+\infty)y\uparrow.$

602. $y=x\cdot e^{-x}.$ **Ж:** $(-\infty;1)y\uparrow;\ (1;+\infty)y\downarrow.$

603. $y=(2-x)\cdot(x+1)^2.$ **Ж:** $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)y\downarrow;\quad(-1;1)y\uparrow.$

Функциялардың экстремумдарын табу керек.

604. $y=x^2(1-x\sqrt{x}).$ **Ж:** $y_{\min}=y(0)=0,\ y_{\max}=y\left(2\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{49}}\right)=\frac{12}{49}\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{7}}.$

605. $y = x + \sqrt{3 - x}.$ **Ж:** $y_{\max} = y\left(\frac{11}{4}\right) = \frac{13}{4}.$

606. $y = \ln(x^2 + 1).$ **Ж:** $y_{\min} = y(0) = 0.$

607. $y = ch^2 x.$ **Ж:** $y_{\min} = y(0) = 1.$

608. $y = \dfrac{x}{\ln x}.$ **Ж:** $y_{\min} = y(e) = e.$

609. $y = x \cdot e^{-x^2/2}.$ **Ж:** $y_{\max} = y(1) = \frac{1}{\sqrt{e}},\ y_{\min} = y(-1) = -\frac{1}{\sqrt{e}}.$

610. $y = (x-1)^{6/7}.$ **Ж:** $y_{\min} = y(1) = 0.$

611. $y = (2x-1) \cdot \sqrt[3]{(x-3)^2}.$ **Ж:** $y_{\min} = y(3) = 0,\ y_{\max} = y(2) = 3.$

612. $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x.$ **Ж:** $y_{\min} = y(1) = -1.$

613. $y = x - 2 \cdot \sin^2 x.$ **Ж:** $y_{\max} = \frac{\pi - 12 + 6\sqrt{3}}{12},\ y_{\min} = \frac{5\pi - 12 - 6\sqrt{3}}{12}.$

614. $y = e^{1{,}5 \cdot \sin x}.$ **Ж:** $y_{\max} = e^{3/2}, y_{\min} = e^{-3/2}.$

615. $y = x^4 - 2x^2 + 3$ функциясының $[-3; 2]$ кесіндісіндегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табу керек. **Ж:** $y = 2$ - ең кіші мәні, $y = 66$- ең үлкен мәні.

616. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ эллипсіне іштей сызылған ең үлкен ауданды тіктөртбұрыштың қабырғаларын табу керек. **Ж:** $5\sqrt{2};\ 3\sqrt{2}.$

617. Ұзындығы l сымнан ең үлкен ауданды тік төртбұрыш жасау үшін оның қабырғалары қандай болуы керек? **Ж:** $\frac{l}{4};\ \frac{l}{4}.$

618. Жасаушысы l-ға тең ең үлен көлемді конусты табу керек.

Ж: $V = \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi l^3.$

619. Толық беті S болатын ең үлкен көлемді цилиндрді табу керек.

Ж: $V = \frac{1}{3} \cdot S\sqrt{\frac{S}{6\pi}}.$

620. Тік төртбұрыш пішінді алаңды үш жағынан темір тормен, ал төртінші жағын тастан қаланған жармен қоршау керек. Тор ұзындығы барлығы l м болса, ең пішінді аудан болу үшін алаңның өлшемдері қандай болу керек?

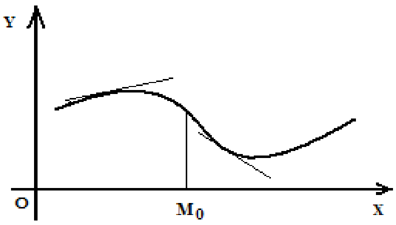
Ж: Тас жарға қарсы жақ ұзындығы көршілесіне қарағанда 2 есе ұзын $\left(\frac{l}{4};\ \frac{l}{2}\right).$

621. Сыйымдылығы V л болатын цилиндр пішінді ашық бак жасағанда ең аз материал жұмсалу үшін оның биіктігі мен табанының радиусы қандай болу керек?

Ж: $R = H = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$

5. Ойыс-дөңестік. Иілу нүктесі. Егер x_0 нүктесінің кез келген аймағында қисық өзіне жүргізілген жанамадан жоғары (төмен) жататын болса, онда қисықты сол аймақта *ойыс (дөңес)* деп атайды.

Қисықтың ойыстығы дөңестікке және, керісінше, дөңестігі ойыстыққа ауысатын нүктесі *иілу нүктесі* делінеді (4.16 Сурет).



4.16 Сурет

Ф у н к ц и я г р а ф и г і н і ң о й ы с – д ө ң е с т і г і н і ң ж е т к і л і к т і ш а р т ы. Егер $(a;b)$ интервалында $f''(x) > 0$ болса, онда осы интервалда функция графигі ойыс болады; егер $f''(x) \prec 0$ болса, онда осы интервалда функция графигі - дөңес.

И і л у н ү к т е с і н і ң қ а ж е т т і ш а р т ы. Егер x_0 нүктесінде $f(x)$ функциясының үзіліссіз екінші ретті туындысы бар және x_0 иілу нүктесі болса, онда $f''(x_0) = 0$ (немесе $f''(x_0)$ анықталмайтын) болады.

$f''(x) = 0$ болатын немесе $f''(x)$ анықталмайтын нүктелер *II текті кризистік нүктелер* делінеді.

И і л у н ү к т е с і н і ң ж е т к і л і к т і ш а р т т а р ы.

I. Егер $y = f(x)$ функциясының x_0 - үзіліссіз II текті кризистік нүктесі болса және сол нүктеден өткенде $f''(x)$ таңбасын (+)-тен (-)-ке, не, керісінше, (-)-тен (+)-ке өзгертсе, онда x_0 иілу нүктесі болады.

II. Егер $f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде үзіліссіз үшінші ретті туындысы бар және $f''(x_0) = 0,\ f'''(x_0) \neq 0$ болса, онда x_0 берілген функцияның иілу нүктесі болады.

622. $y = x^5 + 5x - 6$ функция графигінің ойыс және дөңес аралықтарын табу керек.

Шешуі: $y' = 5x^4 + 5 \Rightarrow y'' = 20x^3.$ Егер $x < 0,$ онда $y'' < 0,$ яғни қисық – дөңес; егер $x > 0,$ онда $y'' > 0,$ ягни қисық – ойыс. Сонымен, қисық $(-\infty; 0)$ аралығында дөңес, ал $(0; +\infty)$ аралығында ойыс. ▲

623. $y = (x+1)^2 \cdot (x-2)$ функциясының экстремумдарын және оның графигінің иілу нүктелерін табу керек.

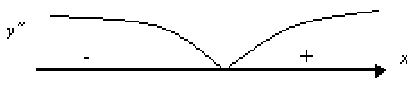
Шешуі: $y' = 2(x+1)\cdot(x-2) + (x+1)^2 = 3(x^2 - 1).$ Бірінші туындының түбірлері: $x_1 = -1; x_2 = 1.$

Екінші туындыны табайық: $y'' = 6x.$ Кризистік нүктелердегі екінші туындының мәндерін табайық:

$$y''(-1) = -6 < 0, \text{ яғни } y_{\max} = 0; \quad y''(1) = 6 > 0, \text{ яғни } y_{\min} = -4.$$

Енді иілу нүктесін табайық, ол үшін екінші туындыны нөлге теңестіреміз:

$6x = 0 \Rightarrow x = 0.$



дөңес 0 ойыс

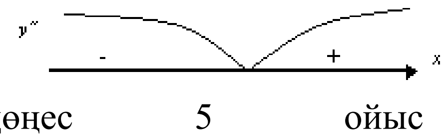
$x = 0$ нүктесінен өткенде y'' таңбасы (-)-тен (+)-ке өзгереді, яғни дөңестік ойыстыққа ауысады, сондықтан $y(0) = -2$ нүктесі – иілу нүктесі болады. ▲

624. $y=(x-5)^{5/3}+2$ қисығының иілу нүктесін табу керек.

Шешуі: $y'=\frac{5}{3}(x-5)^{2/3} \Rightarrow y''=\frac{10}{9\cdot\sqrt[3]{x-5}}.$

Екінші туынды x-тің еш мәнінде нөлге тең болмайды және $x=5$ нүктесінде үзілісті болады. $x=5$ нүктесі – иілу нүктесі болады, себебі $x=5$ нүктесінен өткенде y'' таңбасын (-)-тен (+)-ке өзгертеді.

Сонымен, $(5;2)$ - иілу нүктесі. ▲



625. $y=x\cdot e^{x}$ қисығының ойыс-дөңестік аралықтарын табу керек.
Ж: $(-\infty;-2)$-да дөңес, $(-2;+\infty)$-да ойыс.

626. $y=(x-4)^5+4x+4$ қисығының иілу нүктесін табу керек. **Ж:** (4; 20).

627. $y=(x-1)\cdot\sqrt[7]{(x-1)^6}$ қисығының иілу нүктесін табу керек. **Ж:** (1; 0).

628. $y=x^4-8x^3+24x^2$ қисығының иілу нүктесін табу керек.
Ж: Иілу нүктесі жоқ.

6. Асимптоталар. Егер $x\to\pm\infty$ кезде және үзіліс нүктелерінде $f(x)$ функциясының графигі белгілі бір түзуге мейілінше жақындайтын болса, ондай түзу функцияның асимптотасы деп аталады.

Асимптоталар тік, көлденең (горизонталь), көлбеу болып бөлінеді.

1. Егер $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ немесе $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ болса, онда $x=a$ түзуі $y=f(x)$ қисығының *тік асимптотасы* болады.

2. Егер $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ немесе $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ шегі бар болса, онда $y=b$ түзуі $y=f(x)$ қисығының *көлденең (горизонталь) асимптотасы* болады.

3. $y=kx+в$ түзуі $y=f(x)$ қисығының *көлбеу асимптотасы* болады, мұндағы

$$k=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x} \quad \text{және} \quad b=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left(f(x)-kx\right).$$

629. $y=\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$ қисығының асимптотасын табу керек.

Шешуі: Функция $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$ аралығында анықталған.

1) $\lim\limits_{x\to2+}\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}=+\infty$ болғандықтан $x=2$ түзуі – вертикаль асимптота.

2) Көлбеу асимптоталар болса, соны табайық:

а)
$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x-2}}=\lim_{x\to+\infty}=\sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}}=1.$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-k_1x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-2}\right)}{\sqrt{x-2}}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x(x-x+2)}{\sqrt{x-2}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}\cdot\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)} = \frac{2}{2} = 1.$$

Сонымен, $y = x+1$ - көлбеу (оң жақ) асимптота.

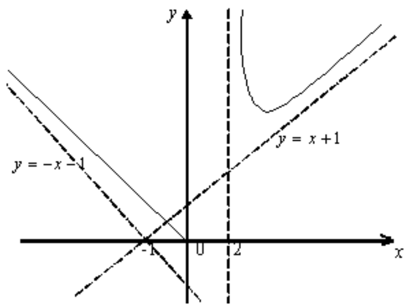
ә) $k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\frac{x}{x-2}}\right)$ (мұнда алым мен бөлімді *(-x)* оң шамаға бөлдік), яғни $k_2 = -\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}} = -1,$ ал

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-k_2x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}+x\right] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{\frac{(-x)^3}{2-x}}+x\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\cdot\sqrt{-x}+x\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}} =$$

$$= -\lim_{x\to-\infty}\frac{x(\sqrt{-x}-\sqrt{2-x})}{\sqrt{2-x}} =$$

$$= -\lim_{x\to-\infty}\frac{x(-x-2+x)}{\sqrt{2-x}\cdot\left(\sqrt{-x}+\sqrt{2-x}\right)} = -1.$$



4.17 Сурет

Сонымен, $y = -x-1$ - көлбеу (сол жақ) асимптота (4.17 Сурет). ▲

630. $y = x + 2\,arctg\,x$ қисығының асимптотасын табу керек.

Шешуі: 1) Қисықтың теңдеуінен вертикаль асимптотасы болмайтындығы көрініп тұр (себебі, $y = arctg\,x$ функциясының вертикаль асимптотасы жоқ).

2) Көлбеу асимптоталарын есептейік:

а) $$k_1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+2\,arctg\,x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2\,arctg\,x}{x}\right) = 1+0 = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}\left(x+2\,arctgx - x\right) = 2\lim_{x\to+\infty} arctgx = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi,$$

$\Rightarrow \quad y = x+\pi$ - оң көлбеу асимптота.

ә) $$k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{x+2arctgx}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2arctgx}{x}\right) = 1+0 = 1,$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}(x+2arctgx - x) = 2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi.$$

$\Rightarrow \quad y = x-\pi$ - сол көлбеу асимптота. ▲

631. $y = x^2\cdot e^{-x}$ қисығының асимптоталарын табу керек.

Шешуі: 1) Вертикаль асимптоталары болмайтындығы көрініп тұр.

2) Көлбеу асимптоталарын табайық:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\cdot e^{-x}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}x^2\cdot e^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x} = 2\cdot 0 = 0,$$

$y = kx+b = 0x+0 = 0.$ Сонымен, тек $y = 0$ - горизонталь асимптота бар. ▲

632. $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x+2}$ қисығының асимптоталарын табу керек.

Шешуі: 1) $\lim\limits_{x\to-2} y=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-2x+3}{x+2}=\dfrac{11}{0}=\infty,$ яғни $x=-2$ түзуі – вертикаль асимптота.

2) Көлбеу асимптоталарды табайық:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x\cdot(x+2)}=1, \qquad b=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-2x+3}{x+2}-x\right]=-4.$$

Сонымен, көлбеу асимптотаның теңдеуі $y=x-4.$ ▲

Қисықтардың асимптоталарын табу керек.

633. $y=2x-\dfrac{\cos x}{x}.$ **Ж:** $x=0;\ y=2x.$

634. $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}-3x.$ **Ж:** $x=0;\ y=-3x.$

635. $y=\sqrt[3]{x^3-6x^2}.$ **Ж:** $y=x-6.$

636. $y=0{,}5x+arctg\ x.$ **Ж:** $y=0{,}5x+\pi;\ y=0{,}5x.$

637. $y=-x\cdot arctg\ x.$ **Ж:** $y=0{,}5\pi\ x+1;\ y=-0{,}5\pi\ x+1.$

7. Функцияны зерттеу және графигін салу. $y=f(x)$ функциясын толық зерттеп, оның графигін салу үшін:

1) функцияның анықталу облысын және үзіліс нүктелерін анықтау;
2) функцияның мәндер облысын табу;
3) функцияның координат осьтерімен қиылысу нүктелерін, таңба тұрақтылық аралығын табу;
4) функцияның тақтығын, жұптығын және периодтылығын анықтау;
5) функцияның экстремумдарын тауып, өспелі және кемімелі болатын аралықтарын табу;
6) функцияның ойыс, дөңес болатын аралықтарын, иілу нүктелерін табу;
7) функцияның асимптоталарын табу;
8) алынған мәліметтер бойынша функция графигін тұрғызу.

Функцияның сипатына және зерттеудің мақсатына байланысты сұлба өзгеруі не пункттермен толықтырылуы мүмкін.

638. $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$ функциясының графигін салу керек.

Шешуі: 1) Функцияның анықталу облысы – бүкіл Ox осі, тек $x=0$ нүктесі қамтылмайды, яғни $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty).$

2) Функцияның координат осьтерімен қиылысу нүктелерін табайық.

$y\bigcap 0y:\quad x=0$ делік $\Rightarrow\quad y=\dfrac{0+4}{0}=\dfrac{4}{0},$ яғни функция графигі Oy осін қимайды.

$y \cap Ox: \quad y=0$ делік $\Rightarrow \quad 0=\dfrac{x^3+4}{x^2}, \quad x=-\sqrt[3]{4}\approx -1{,}6,$ яғни $\left(-\sqrt[3]{4};0\right)$ нүктесінде Ox осін функция қияды.

3) Функция жұп та, тақ та емес; периоды жоқ.

4) Функцияның экстремумын және өсу-кему аралықтарын табайық.

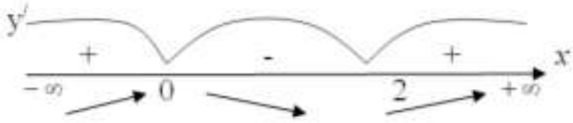
$$y'=\frac{x^3-8}{x^3}=0 \Rightarrow x=2$$

- кризистік нүкте.

$y'=\infty$ болады, егер $x=0$ (функциясының үзіліс нүктесі) болса.

$x=0$ және $x=2$ нүктелері сан осін $(-\infty;0),(0;2),(2;+\infty)$ аралықтарына бөледі:

$$(-\infty;0)\cup(2;+\infty): y\uparrow; \qquad (0;2): y\downarrow.$$



Енді $y''=\dfrac{24}{x^4}$ табамыз, $y''(2)>0 \Rightarrow x=2-\min$ нүктесі, $y_{\min}=3.$

5) Қисықтың ойыс – дөңестік аралықтарын және иілу нүктелерін табайық.

$y''=\dfrac{24}{x^4}>0$ болғандықтан, функция графигі - бүкіл сан осінде ойыс.

Қисықтың иілу нүктесі жоқ.

6) Функцияның асимптоталарын табайық.

1. $\lim\limits_{x\to 0} y=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+4}{x^2}=\dfrac{4}{0}=\infty \Rightarrow x=0$ (яғни Oy осі) – графиктің вертикаль асимптотасы.

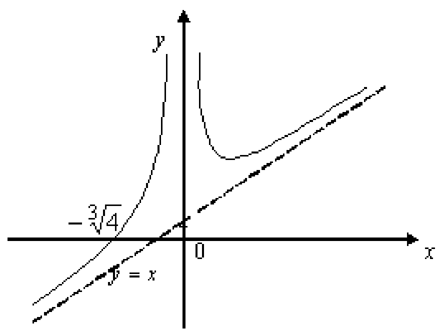
2. Көлбеу асимптоталарды табайық:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3+4}{x^2}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=0.$$

Сонымен, $y=x$ - көлбеу асимптота теңдеуі.

7) Алынған мәліметтер бойынша функция графигін тұрғызамыз (4.18 Сурет). ▲



4.18 Сурет

639. $y=\sqrt[3]{1-x^3}$ функция графигін тұрғызу керек.

Шешуі: 1) Анықталу облысы – бүкіл Ox осі, яғни $D(y)=(-\infty;+\infty).$

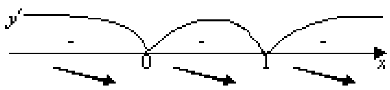
2) Координат осьтерімен қиылысу нүктелері:

егер $x=0 \Rightarrow y=1;$ егер $y=0 \Rightarrow x=1.$ (0; 1) және (1; 0) – координат осьтерімен қиылысу нүктелері.

3) Фунция жұп та, тақ та емес.

4) $y'=-\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}}=0,$ егер $x=0$

$y'=\infty;$ егер $x=1.$



Сонымен, функция бүкіл сан осінде кемімелі; экстремумдары жоқ.

5) $y''=-\dfrac{2x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^5}}=0,\ x=0;$ $y''=\infty,$ егер $x=1.$

Сонымен, $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$ аралығында қисық ойыс, ал (0; 1) аралығында дөңес. (0; 1) және (1; 0) – иілу нүктелері.

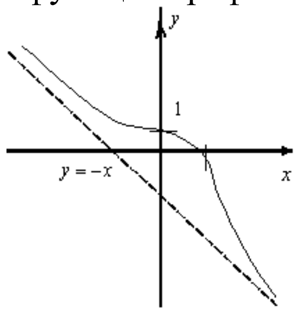
6) 1. Вертикаль асимптоталары жоқ.

2. Көлбеу асимптоталарды табайық: $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}=-1,$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{1-x^3}+x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}-x\cdot\sqrt[3]{1-x^3}+x^2}=0.$$

Сонымен, $y=-x$ түзуі – көлбеу асимптота.

7) Алынған мәліметтер бойынша функция графигін тұрғызамыз (4.19 Сурет). ▲



4.19 Сурет

640. $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ функция графигін тұрғызу керек.

Шешуі: 1) Функция $x=\pm1$ нүктелерінен өзге бүкіл сан түзуінде анықталған, яғни $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty).$

2) Координат осьтерімен қиылысу нүктелері: егер $x=0\Rightarrow y=0,$ егер $y=0\Rightarrow x=0$ болады. $(0;0)$ - *Ox* және *Oy* осьтерімен қиылысу нүктесі.

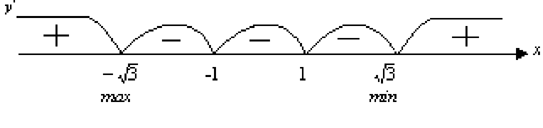
3) $y(-x)=\dfrac{-x}{\sqrt[3]{(-x)^2-1}}=-\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}=-y(x),$ яғни функция – тақ, сондықтан функция графигі (0; 0) – координат бас нүктесіне қарағанда симметриялы (бұл жағдай график тұрғызуды жеңілдетеді).

4) $y'=\dfrac{x^2-3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$ - кризистік нүктелер.

y' туындысы $x=\pm1$ нүктелерінде үзілісті (функцияның үзіліс нүктелері).

$(-\infty;-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};+\infty)-y\uparrow$

$(-\sqrt{3};-1)\cup(-1;1)\cup(1;\sqrt{3})-y\downarrow.$



$x=-\sqrt{3}\Rightarrow y=-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\approx-1{,}37;$ $x=\sqrt{3}\Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\approx1{,}37.$

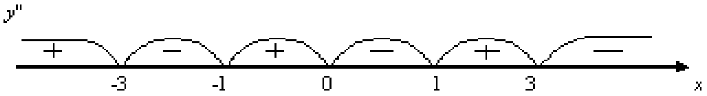
$\left(-\sqrt{3};-1{,}37\right)-\max$ нүктесі, $\left(\sqrt{3};1{,}5\right)-\min$ нүктесі.

5) $y''=\dfrac{2x(9-x^2)}{9\cdot\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^7}}=0\ \Rightarrow\ x=0$ және $x=\pm3$ - II ретті кризистік нүктелер.

y' туындысы $x = \pm 1$ нүктелерінде үзілісті.

$(-\infty; -3) \cup (-1; 0) \cup (1; 3)$ аралықтарында - график ойыс, $(-3; -1) \cup (0; 1) \cup (3; +\infty)$ аралықтарында - график дөңес.

$x = -3 \Rightarrow y = -1{,}5; \; x = 3 \Rightarrow y = 1{,}5.$ $(-3; -1{,}5)$ және $(3; 1{,}5)$ - иілу нүктелері.



6) 1. $\lim\limits_{x \to 1 \pm 0} y = \lim\limits_{x \to 1 \pm 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \pm\infty$ және $\lim\limits_{x \to -1 \pm 0} y = \lim\limits_{x \to -1 \pm 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \pm\infty.$

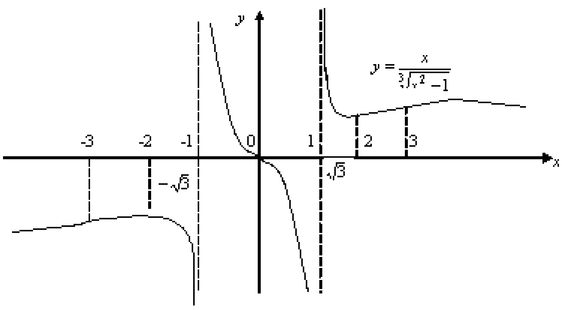
$\Rightarrow$ $x = \pm 1$ түзулері – вертикаль асимптоталар.

2. Көлбеу асимптоталар:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = 0.$$

$b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - kx \right] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \pm\infty,$ яғни көлбеу асимптоталар жоқ.

7) График тұрғызамыз (4.20 Сурет). ▲



4.20 Сурет

641. $y = \dfrac{\ln x}{x}$ функция графигін тұрғызу керек.

Шешуі. 1) Функцияның анықталу облысы: $0 < x < +\infty.$

2) Функция графигінің координат осьтерімен қиылысу нүктелерін табайық:

$Oy: \quad x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{\ln 0}{x}$ - анықталмағандық, яғни график Oy осімен қиылыспайды.

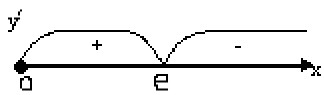
$Ox: \quad y = 0 \Rightarrow y = \dfrac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow x = 1$ (себебі, $\dfrac{\ln 1}{1} = \dfrac{0}{1} = 0$), яғни (1; 0) нүктесінде график Ox осін қияды.

3) Функция жұп та, тақ та емес.

4) $y' = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$ - кризистік нүкте.

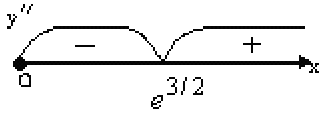
$$(0; e) : y \uparrow, \; (e; +\infty) : y \downarrow$$

$x = e \approx 2{,}7$ үшін $y = \dfrac{\ln e}{e} = \dfrac{1}{e} \approx 0{,}4,$



яғни $\left(e;\frac{1}{e}\right)$ - max нүктесі.

5) $y''=\frac{2\ln x-3}{x^3}=0\Rightarrow \ln x=\frac{3}{2}\Rightarrow x=e^{3/2}$ - II ретті кризистік нүкте.
$\left(0;e^{3/2}\right)$-да қисық дөңес, $\left(e^{3/2};+\infty\right)$-да қисық ойыс.



$x=e^{3/2}\approx 4{,}5$ үшін $y=\frac{\ln e^{3/2}}{e^{3/2}}=\frac{3}{2\sqrt{e^3}}\approx 0{,}3,$ яғни $\left(e^{3/2};\frac{3}{2\sqrt{e^3}}\right)$ - иілу нүктесі.

6) 1. Вертикаль асимптота:

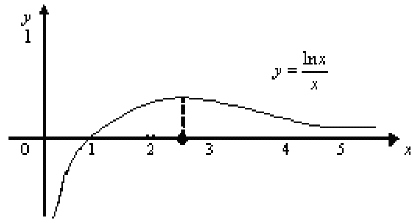
$\lim\limits_{x\to 0} y=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{x}=\frac{-\infty}{0}=-\infty\cdot\frac{1}{0}=-\infty\cdot\infty=-\infty,$ яғни $x=0$ түзуі (ординат осі) – вертикаль асимптота.

2. Көлбеу асимптота: $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1/x}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0,$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Ендеше, $y=0$ түзуі (абсцисса осі) – оң горизонталь асимптота.

7) Графикті тұрғызайық (4.21 Сурет). ▲

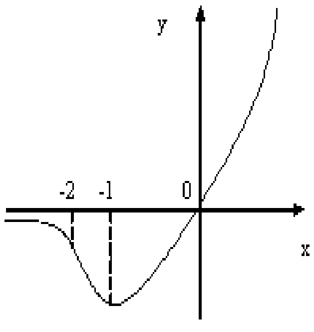


4.21 Сурет

Функциялардың графиктерін тұрғызу керек.

642. $y=3xe^x.$

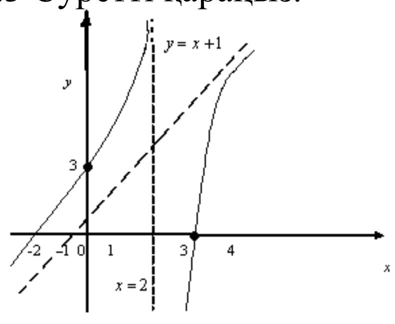
Ж: 4.22 Суретті қараңыз.



4.22 Сурет

643. $y=\frac{x^2-x-6}{x-2}.$

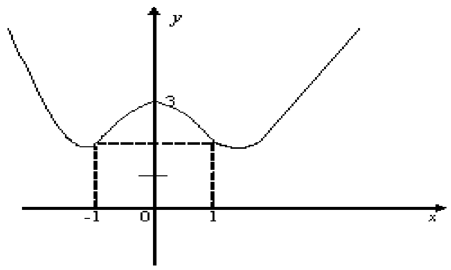
Ж: 4.23 Суретті қараңыз.



4.23 Сурет

644. $y = x^4 - 2x^2 + 3.$

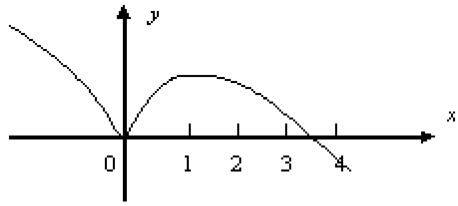
Ж: 4.24 Суретті қараңыз.



4.24 Сурет

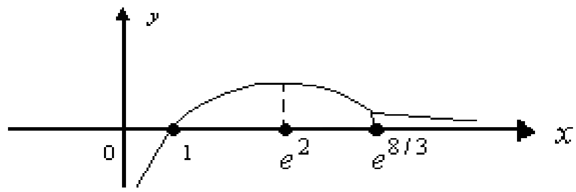
645. $y = 3 \cdot \sqrt[3]{x^2} - 2x.$

Ж: 4.25 Суретті қараңыз.



4.25 Сурет

646. $y = \dfrac{3\ln x}{\sqrt{x}}.$

Ж: 4.26 Суретті қараңыз.	 4.26 Сурет

647. $y = 3 \cdot \sqrt[3]{x} - x.$

Ж: $D(y) = (-\infty; +\infty),$ функция – тақ; $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty) : y \downarrow,$ $(-1; 1) : y \uparrow,$ $(-1; -2) - \min,$ $(1; 2) - \max,$ $(-\infty; 0)$-да ойыс және $(0; +\infty)$-да дөңес, (0; 0) – иілу нүктесі.

648. $y = \ln x - \ln(x-1).$

Ж: $D(y) = (1; +\infty).$ Бүкіл анықталу облысында кемімелі және ойыс. Экстремумдары және иілу нүктелері жоқ. $x = 1$ және $y = 0$ - асимптоталар.

649. $y = \ln \dfrac{x}{x-1}.$

Ж: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty);$ $(-\infty; 0)$-да $y \uparrow$ және $(1; +\infty)$-да $y \downarrow$. Қисық бүкіл анықталу облысында ойыс. Экстремумдары мен иілу нүктелері жоқ. $x = 0,$ $x = 1,$ $y = 0$ - асимптоталар.

650. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}.$

Ж: $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$ функция тақ; $(-\infty; -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}; +\infty)$-да $y \uparrow,$ $(-2\sqrt{3}; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 2\sqrt{3})$-да $y \downarrow.$ $(2\sqrt{3}; 3\sqrt{3}) - \min,$ $(-2\sqrt{3}; -3\sqrt{3}) - \max;$ $(-\infty; -2) \cup (0; 2)$-да дөңес және $(-2; 0) \cup (2; +\infty)$да ойыс. (0; 0) – иілу нүктесі; $x = \pm 2,$ $y = x$ - асимптоталар.

651. $y = 16x \cdot (x-1)^3.$

Ж: $D(y)=(-\infty;+\infty);(-\infty;\frac{1}{4})$-да $y\downarrow$; $\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$-да $y\uparrow$; $\left(\frac{1}{4};-\frac{27}{16}\right)-\min$ нүктесі; $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$-да ойыс және $\left(\frac{1}{2};1\right)$-да дөңес; $\left(\frac{1}{2};-1\right)$ және (1; 0) – иілу нүктелері.

652. $y=(x-1)\cdot\sqrt{x}.$

Ж: $D(y)=[0;+\infty);\left(0;\frac{1}{3}\right)$-да кемімелі, $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$-да өспелі; $\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)-\min.$ Анықталу облысында ойыс.

653. $y=x+e^{-x}.$

Ж: $D(y)=(-\infty;+\infty);(-\infty;0)$-да кемімелі, $(0;+\infty)$-да өспелі; (0; 1) – min. Бүкіл сан түзуінде ойыс, $y=x$-асимптота.

654. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1}).$

Ж: $D(y)=(-\infty;+\infty)$ функция тақ; $(-\infty;+\infty)$-да өспелі, $(-\infty;0)$-да ойыс және $(0;+\infty)$-да дөңес; (0; 0) – иілу нүктесі; $y=\pm1$ - асимптоталар.

655. $y=e^{2x-x^2}.$

Ж: $D(y)=(-\infty;+\infty);(-\infty;1)$-да өспелі, $(1;+\infty)$-да кемімелі, $(1;e)-\max,$ $\left(-\infty;1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$-да ойыс, $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2};1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$-да дөңес, $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{e}\right)$ және $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{e}\right)$ - иілу нүктелері, $y=0$-асимптота.

656. $y=\frac{x^3}{(x-2)^2}.$

Ж: $D(y)=(-\infty;2)\cup(2;+\infty);(-\infty;2)\cup(6;+\infty)$-да өспелі, $(2;6)$-да кемімелі, $(6;\frac{27}{2})-\min,$ $(-\infty;0)$-да дөңес және $(0;2)\cup(2;+\infty)$-да ойыс; $(0;0)$ - иілу нүктесі, $x=2$ және $y=x+4$-асимптоталар.

5 КОМПЛЕКС САНДАР

$z=a+ib$ санын *комплекс сан* дейді, мұндағы a,b- нақты сандар, $i=\sqrt{-1}$ -*жалған бірлік* ($i^2=-1$), a саны z санының *нақты бөлігі*, ал b саны *жалған бөлігі* деп аталады және оларды былай белгілейді: $a=\mathrm{Re}\,z,\ b=\mathrm{Im}\,z.$

$z=a+ib$ және $\bar{z}=a-ib$ сандарын *түйіндес* комплекс сандар дейді.

z комплекс саны $a=0,\ b=0$ болғанда ғана нөлге тең болады, яғни $z=a+ib=0$.

z комплекс санының $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ түрін *тригонометриялық түрде берілген комплекс сан* дейді, мұндағы $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ - комплекс санның *модулі*, $\varphi = \arg z = Arctg\frac{b}{a}$ - *аргументі* деп аталады.

z комплекс санының $z = r e^{i\varphi}$ түрін *көрсеткіштік түрде берілген комплекс сан* дейді, мұндағы $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\cdot\sin\varphi$ формуласын *Эйлер формуласы* деп атайды.

Комплекс сандарға амалдар қолдану.

а) комплекс сандарды қосу. $z_1 = a_1 + ib_1$ және $z_2 = a_2 + ib_2$ комплекс сандарының қосындысы деп $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2)$ теңдігімен анықталатын комплекс санды айтады.

ә) комплекс сандарды азайту. $z_1 = a_1 + ib_1$ және $z_2 = a_2 + ib_2$ комплекс сандарының айырмасы деп $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i\,(b_1 - b_2)$ теңдігімен анықталатын комплекс санды айтады.

б) комплекс сандарды көбейту. $z_1 = a_1 + ib_1$ және $z_2 = a_2 + ib_2$ комплекс сандарының көбейтіндісі деп $z_1 \cdot z_2 = (a_1\,a_2 - b_1\,b_2) + i\,(b_1\,a_2 + a_1\,b_2)$ теңдігімен анықталатын комплекс санды айтады.

Е с к е р т у. $z = a + ib$ және $\bar{z} = a - ib$ түйіндес комплекс сандарының көбейтіндісі $z\bar{z} = a^2 + b^2 = r^2$ нақты санға тең болады.

в) комплекс сандарды бөлу. $z_1 = a_1 + ib_1$ және $z_2 = a_2 + ib_2$ комплекс сандарының бөліндісі деп $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{a_1\,a_2 + b_1\,b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\frac{b_1\,a_2 - a_1\,b_2}{a_2^2 + b_2^2}$ теңдігімен анықталатын комплекс санды айтады.

г) комплекс санды дәрежелеу. $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ комплекс санының n -ші дәрежесі деп $[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n\,(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ түріндегі комплекс санды айтады. Бұл формуланы *Муавр формуласы* дейді.

ғ) комплекс саннан түбір табу. $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ комплекс санының n-ші дәрежелі түбірі деп $\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\,\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$ комплекс санын айтады, мұндағы $k = \overline{0, n-1}$.

657. $(1+i)\cdot(\sqrt{5} - 2i)$ көбейтіндісін табу керек.

Шешуі: Мүшелеп көбейтіп және $i^2 = -1$ екенін ескерсек, онда:

$$(1+i)\cdot(\sqrt{5} - 2i) = \sqrt{5} + i\sqrt{5} - 2i + 2 = (\sqrt{5} + 2) + i(\sqrt{5} - 2). \quad \blacktriangle$$

658. $z = \frac{\sqrt{3} + i}{2 - i\sqrt{3}}$ санын есептеп, $\operatorname{Re} z$ және $\operatorname{Im} z$ көрсетіп жазу керек.

Шешуі: $z = \frac{(\sqrt{3} + i)(2 + i\sqrt{3})}{(2 - i\sqrt{3})(2 + i\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3} + 2i + 3i - \sqrt{3}}{4 + 3} = \frac{\sqrt{3}}{7} + i\,\frac{5}{7}.$

Бұдан $\operatorname{Re} z = \frac{\sqrt{3}}{7}, \ \operatorname{Im} z = \frac{5}{7}.$ ▲

659. $z_1 = 1 + i, \ z_2 = -\sqrt{3} - i, \ z_3 = 2i$ және $z_4 = -5$ комплекс сандарын тригонометриялық түрде жазу керек.

Шешуі: Берілген сандардың модульдерін $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ формуласы бойынша табайық:

$$|z_1| = r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \ |z_2| = r_2 = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2, \ |z_3| = r_3 = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2,$$

$$|z_4| = r_4 = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = 5.$$

Аргументтерін табу үшін, z_1, z_2, z_3, z_4 нүктелерін комплекс жазықтықта белгілейміз (5.1 Сурет). z_1 нүктесі - бірінші ширекте, ал z_2 - үшінші ширекте жататындықтан

$$\varphi_1 = \arg z_1 = Arctg\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4},$$

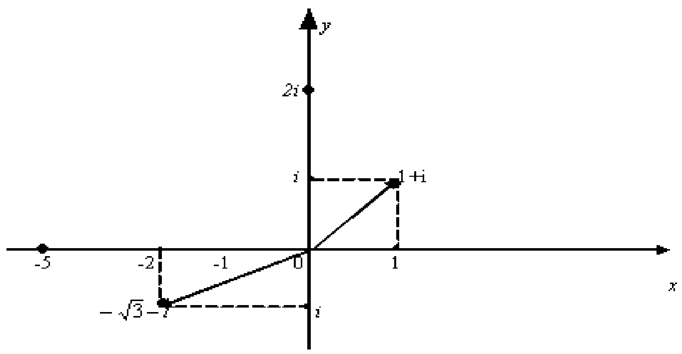
$$\varphi_2 = \arg z_2 = Arctg\frac{-1}{-\sqrt{3}} - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}.$$

z_3 нүктесі жалған осьте жатады, ендеше $\arg 2i = \frac{\pi}{2},$ ал z_4 нүктесі – теріс нақты осьте, сондықтан $\arg z_4 = \pi.$ Сонымен,

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right],$$

$$z_2 = -\sqrt{3} - i = 2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right] = 2\left[\cos\frac{5\pi}{6} - i\sin\frac{5\pi}{6}\right],$$

$$z_3 = 2\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right], \qquad z_4 = 5[\cos\pi + i\sin\pi]. \ ▲$$



5.1 Сурет

660. $\left(-\sqrt{3} - i\right)^5$ есептеу керек.

Шешуі: № 659 -да $-\sqrt{3} - i$ санының тригонометриялық түрін тапқанбыз:

$$-\sqrt{3} - i = 2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right].$$

Дәрежелеу формуласы бойынша:

$$\left(-\sqrt{3} - i\right)^5 = 2^5\left[\cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{25\pi}{6}\right)\right] = 32 \cdot \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] =$$

$$= 32 \cdot \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2}\right] = 16\sqrt{3} - 16i. \ ▲$$

661. $\sqrt[3]{1+i}$ есептеу керек.
Шешуі: $1+i$ саны № 659 -да тригонометриялық түрде жазылды:

$$1+i=\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{4}\right].$$

Куб түбірінің барлық мәндерін табу үшін түбір табу формуласын қолданамыз. Түбірдің үш әртүрлі мәнін табайық:

$$\sqrt[3]{1+i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\cdot\left[\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}\right],\qquad \mathrm{k}=0,1,2,$$

яғни

$$k=0:\quad \mathrm{z}_1=\sqrt[6]{2}\cdot\left[\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right],$$

$$k=1:\quad \mathrm{z}_2=\sqrt[6]{2}\cdot\left[\cos\frac{9\pi}{12}+i\sin\frac{9\pi}{12}\right],$$

$$k=2:\quad \mathrm{z}_3=\sqrt[6]{2}\cdot\left[\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right].$$ ▲

662. 1 санының куб түбірінің барлық мәндерін табу керек.
Шешуі: 1 санының тригонометриялық түрі $1=\cos 0+i\sin 0.$

$$\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\frac{0+2k\pi}{3}+\sin\frac{0+2k\pi}{3}$$ **,** мұндағы $k=0,1,2.$

Сонда $k=0$ болғанда $z_1=1,$

$k=1$ болғанда $z_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},$

$k=2$ болғанда $z_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$ ▲

663. $z=\frac{2}{1+i}-\frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{2-2i}{1-2i}$ санын есептеп, $\operatorname{Re} z$ және $\operatorname{Im} z$ бөліктерін көрсету керек.

Ж: $\operatorname{Re} z=\frac{4}{5},\ \operatorname{Im} z=-\frac{7}{6}.$

664. Амалдарды орындау керек.

а) $(1+i)\cdot(1-3i);$ б) $\frac{2}{-i}+i(1+i);$ в) $\frac{1}{1+2i}+\frac{i}{2-i}.$

Ж: а) $4-2i;$ б) $-1+3i;$ в) 0.

665. Келесі сандарды тригонометриялық түрде жазу керек:

$$3i,\ 1+\sqrt{3}i,\ -7,\ \sqrt{3}-i,\ 2-2i.$$

Ж: $3\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right),\ 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right),\ 7\cdot(\cos\pi+i\sin\pi),$

$2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right),\quad 2\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right).$

666. Муавр формуласын қолдана отырып, дәрежелерді есептеу керек.

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^3,\left(\sqrt{3}+i\sqrt{3}\right)^8,(-2+2i)^6.$$

Ж: $8i,\ 1296,\ 512i.$

667. Барлық түбірлерді тауып және оларды комплекс жазықтықта тұрғызу керек. $\sqrt[3]{1},\ \sqrt[3]{27i},\ \sqrt[5]{-2+2i},\ \sqrt[6]{-8}.$

Ж: $\left(\cos\frac{2\pi}{3}k+i\sin\frac{2\pi}{3}k\right),\ k=0,1,2.$

$\sqrt{3}\cdot\left(\cos\pi\frac{4k+1}{6}+i\sin\pi\frac{4k+1}{6}\right),\ \ k=0,1,2.$

$\sqrt[10]{8}\cdot\left(\cos\pi\frac{8k+3}{20}+i\sin\pi\frac{8k+3}{20}\right),\ k=0,1,2,3,4.$

$\sqrt{2}\cdot\left(\cos\pi\frac{2k+1}{6}+i\sin\pi\frac{2k+1}{6}\right),\ k=0,1,2,3,4,5.$

668. Теңдеулерді шешу керек.

а) $z^2+i=0;$ ә) $z^4-16=0;$ б) $z^6-4z^3+8=0.$

Ж: а) $z_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}, z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}.$

ә) $z_1=2,\ z_2=2i,\ z_3=-2,\ z_4=-2i.$

б) $z_{1-6}=\sqrt{2}\cdot e^{\left(\pm\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}k\right)}, k=0,1,2.$

6 АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛ

6.1 АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛДА АЙНЫМАЛЫНЫ АЛМАСТЫРУ ЖӘНЕ БӨЛШЕКТЕП ИНТЕГРАЛДАУ

1. Анықталмаған интеграл анықтамасы. Егер [a;b] кесіндісінің кез келген нүктесі үшін $F'(x)=f(x)$ теңдігі орындалса, онда осы кесіндіде $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының *алғашқы функциясы* деп аталады.

$f(x)$ функциясының *анықталмаған интегралы* деп $F(x)$+C алғашқы функциялардың жиынтығы аталады және ол былай белгіленеді:

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$, мұндағы C - тұрақты.

Анықталмаған интеграл қасиеттері:

1^0. $\left(\int f(x)dx\right)'=(F(x)+C)'=f(x)$.

2^0. $d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx$.

3^0. $\int dF(x)=F(x)+C$.

4^0. $\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$.

5^0. $\int kf(x)dx=k\cdot\int f(x)dx$, мұндағы k - тұрақты.

6^0. Егер $\int f(x)dx=F(x)+C,$ онда $\int f(kx+b)dx=\frac{1}{k}F(kx+b)+C$.

Негізгі интегралдар кестесі

1. $\int dx=x+C$.

2. $\int x^{\alpha}dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, x>0, \alpha>-1$.

3. $\int \dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C, x>0$.

4. $\int a^{x}dx=\dfrac{a^{x}}{\ln a}+C, a>0, a\neq 1$

4/. $\int e^{x}dx=e^{x}+C$.

5. $\int \sin xdx=-\cos x+C$.

6. $\int \cos xdx=\sin x+C$.

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^{2}x}=tgx+C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^{2}x}=-ctgx+C$.

9. $\int tgxdx=-\ln|\cos x|+C$.

10. $\int ctgxdx=\ln|\sin x|+C$.

11. $\int \dfrac{dx}{\sin x}=\ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right|+C$

12. $\int \dfrac{dx}{\cos x}=\ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|+C$

13. $\int \dfrac{dx}{1+x^{2}}=arctgx+C$

13/. $\int \dfrac{dx}{a^{2}+x^{2}}=\dfrac{1}{a}arctg\dfrac{x}{a}+C$

14. $\int \dfrac{dx}{x^{2}-a^{2}}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C$

15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}=\arcsin x+C$

15/. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}=\arcsin\dfrac{x}{a}+C$

16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^{2}+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^{2}+a}\right|+C$

17. $\int \sqrt{x^{2}+A}\,dx=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^{2}+A}+\dfrac{A}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^{2}+A}\right|+C$.

18. $\int \sqrt{a^{2}-x^{2}}\,dx=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^{2}-x^{2}}+\dfrac{a^{2}}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}+C$.

669. $\int\left(x^{2}-2\sin x+1\right)dx$ интегралын табыңыз.
Шешуі: 4^{0} және 5^{0} қасиеттерін қолдана отырып, аламыз:

$$\int\left(x^{2}-2\sin x+1\right)dx=\int x^{2}dx-2\int\sin xdx+\int dx=\frac{1}{3}x^{3}+2\cos x+x+C.$$

Мұндағы үш интегралды табу үшін интегралдар кестесіндегі 2, 5 және 1 формулаларды қолдандық. ▲

670. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{8-2x-x^{2}}}$ интегралын табыңыз.

Шешуі:
$$\int\frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^{2}}}=\int\frac{dx}{\sqrt{9-1-2x-x^{2}}}=\int\frac{dx}{\sqrt{9-(x+1)^{2}}}=\arcsin\frac{x+1}{3}+C.$$

Мұнда 6^{0} қасиет пен 15/ формуласын қолдандық. ▲

671. $\int\dfrac{dx}{x^{2}-6x+25}$ интегралын табыңыз.

Шешуі: Бөлімдегі үшмүшелікте толық квадратты шығарып аламыз:

$$\int\frac{dx}{x^{2}-6x+25}=\int\frac{dx}{(x-3)^{2}+16}=\frac{1}{16}\int\frac{dx}{\left(\frac{x-3}{4}\right)^{2}+1}=\frac{1}{16}arctg\left(\frac{x-3}{4}\right)+C.$$

Мұнда интегралды табу үшін 13/ формуласын қолдандық. ▲

672. $\int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx$ интегралын табыңыз.

Шешуі: Бөлшектің бөлімін көбейткіштерге жіктеп, сосын алымын мүшелеп бөлеміз.

$$\int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx = \int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2}\sqrt{2+x^2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right| +$$

$$+\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

Мұнда интегралдарды табу үшін $15'$ және 16 формулаларды қолдандық. ▲

2. Айнымалыны алмастыру. Егер $\int f(x)dx$ интегралын есептеу керек, бірақ алғашқы функциясын табу қиын болса, онда $x=\varphi(t)$ алмастыру жасаймыз $\Rightarrow$ $dx=\varphi'(t)dt$

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Келесі анықталмаған интегралдарды табыңыз:

673. $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$ интегралын табыңыз.

Шешуі: Мұнда *t = sinx, dt = cosxdt* алмастыруын жасаймыз. Сонда

$$\int \sqrt{\sin x}\cos x dx = \left|t=\sin x, dt=\cos x dx\right| = \int \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}t^{3/2}+C = \frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x}+C.$$ ▲

674. $\int \frac{xdx}{x^2+A}$ интегралын табыңыз.

Шешуі: $\int \frac{xdx}{x^2+A} = \left|t=x^2+A, dt=2xdx\right| = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t|+C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+A\right|+C.$ ▲

675. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}dx$ интегралын табыңыз.

Шешуі: $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}dx = \left|\sin x = t, \cos x dx = dt\right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^3}} = -\frac{2}{\sqrt{t}}+C = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}}+C.$ ▲

676. $\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40}dx$ интегралын табыңыз.

Шешуі:

$$\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40}dx = \int \frac{5(x+3)-18}{(x+3)^2-49}dx = 5\int\frac{(x+3)dx}{(x+3)^2-49} - 18\int\frac{dx}{(x+3)^2-49} = \frac{5}{2}\ln\left|(x+3)^2-49\right| -$$

$$-\frac{9}{7}\ln\left|\frac{x+3-7}{x+3+7}\right| + C = \frac{5}{2}\ln\left|x^2+6x-40\right| - \frac{9}{7}\ln\left|\frac{x-4}{x+10}\right|+C.$$ ▲

677. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{7+6x-x^2}}dx$ интегралын табыңыз.

Шешуі: $\int \frac{3x+4}{\sqrt{7+6x-x^2}}dx = \int \frac{3x-9+13}{\sqrt{16-(x-3)^2}}dx = 3\int\frac{x-3}{\sqrt{16-(x-3)^2}}dx + 13\int\frac{dx}{\sqrt{16-(x-3)^2}} =$

$$= -3\sqrt{16-(x-3)^2} + 13\arcsin\frac{x-3}{4} + C = -3\sqrt{7+6x-x^2} + 13\arcsin\frac{x-3}{4}+C.$$ ▲

678. $\int x(x^2+1)^{3/2}dx.$ интегралын табыңыз.
Шешуі: Келесі алмастыру жасаймыз:

$$t=x^2+1;\quad dt=2xdx,\quad dx=\frac{dt}{2x};.$$

Сонда:

$$\int t^{3/2}\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int t^{3/2}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2}+C=\frac{t^{5/2}}{5}+C=\frac{(x^2+1)^{5/2}}{5}+C;$$ ▲

679. $\int(2x+1)^{20}dx$ интегралын табыңыз.
Шешуі:

$$\int(2x+1)^{20}dx=\{2x+1=t;\quad dt=2dx;\}=\int t^{20}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{21}t^{21}\cdot\frac{1}{2}+C=\frac{t^{21}}{42}+C=\frac{(2x+1)^{21}}{42}+C$$ ▲

680. $\int e^{\cos^2 x}\sin 2xdx$ интегралын табыңыз.
Шешуі:

$$\int e^{\cos^2 x}\sin 2xdx=\left\{t=e^{\cos^2 x};\quad dt=-e^{\cos^2 x}\cdot 2\cos x\sin x=-\sin 2x\cdot e^{\cos^2 x}dx;\right\}=-\int dt=-t+C=$$

$$=-e^{\cos^2 x}+C.$$ ▲

681. $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ интегралын табыңыз.
Шешуі:

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}=\left\{\sqrt{x}=t;\quad \frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2t}\right\}=\int\frac{2tdt}{(t^2+1)t}=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2arctgt+C=2arctg\sqrt{x}+C.$$ ▲

682. $\int\frac{5x-3}{x^2+6x-40}dx$ интегралын табыңыз.
Шешуі:

$$\int\frac{5x-3}{x^2+6x-40}dx=\int\frac{5x-3}{(x+3)^2-49}dx=\left\{\begin{array}{l}u=x+3;\quad du=dx;\\ x=u-3;\end{array}\right\}=\int\frac{5u-15-3}{u^2-49}du=5\int\frac{udu}{u^2-49}-$$

$$-18\int\frac{du}{u^2-49}=\frac{5}{2}\ln\left|u^2-49\right|-\frac{18}{14}\ln\left|\frac{u-7}{u+7}\right|+C=\frac{5}{2}\ln\left|x^2+6x-40\right|-\frac{9}{7}\ln\left|\frac{x-4}{x+10}\right|+C.$$ ▲

683. $\int\frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}}dx$ интегралын табыңыз.
Шешуі:

$$\int\frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}}dx=\int\frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}}dx=\left\{\begin{array}{l}u=x-3;\quad du=dx;\\ x=u+3;\end{array}\right\}=\int\frac{3u+9+4}{\sqrt{16-u^2}}du=3\int\frac{udu}{\sqrt{16-u^2}}+$$

$$+13\int\frac{du}{\sqrt{16-u^2}}=-3\sqrt{16-u^2}+13\arcsin\frac{u}{4}+C=-3\sqrt{7-x^2-6x}+13\arcsin\frac{x-3}{4}+C.$$

▲

3. Бөлшектеп интегралдау. $u=u(x)$, $v=v(x)$ дифференциалданатын функциялар болсын, онда

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

Бұл формуланы *бөлшектеп интегралдау формуласы* деп атайды.

Бұл формулада соңғы интеграл берілген интегралдан оңай болатындай u және dv өрнектерін таңдап алу керек. Көп жағдайда интеграл астындағы функция алгебралық және трансцендентті функциялардың көбейтіндісі түрінде болса, онда бөліктеп интегралдау формуласы қолданылады. Мысалы,

$$\int x^k \cdot e^{mx}dx,\ \int x^k \sin bxdx,\ \int x^k \cos bxdx$$

интегралдарын есептеген кезде $u = x^k$ деп таңдап алу керек. Ал,

$$\int x^k \ln^m xdx,\ \int x^k \arcsin^m xdx,\ \int x^k arctg^m xdx$$

интегралдарын есептеген кезде сәйкес $u = \ln^m x,\ u = \arcsin^m x,\ u = arctg^m x$ деп таңдап алу керек.

684. $\int x \ln xdx$ интегралын табыңыз.

Шешуі:

$$\int x\ln xdx = \begin{Bmatrix} u = \ln x; & dv = xdx, \\ du = \frac{1}{x}dx; & v = \frac{x^2}{2}; \end{Bmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C =$$

$$= \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C.$$

▲

685. $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$ интегралын табыңыз.

Шешуі:

$$\int \frac{\ln x}{x^3}dx = \begin{Bmatrix} u = \ln x; & dv = \frac{1}{x^3}dx; \\ du = \frac{1}{x}dx; & v = -\frac{1}{2x^2}; \end{Bmatrix} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int -\frac{1}{2x^2}\cdot\frac{1}{x}dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right] + C = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

▲

686. $\int x^2 \sin xdx$ интегралын табыңыз.

Шешуі: Бұл интегралды табу үшін бөлшектеп интегралдау формуласын екі рет қолданамыз:

$$\int x^2 \sin xdx = \begin{Bmatrix} u = x^2; & dv = \sin xdx, \\ du = 2xdx, & v = -\cos x \end{Bmatrix} = -x^2\cos x + \int \cos x \cdot 2xdx =$$

$$= \begin{Bmatrix} u = x; & dv = \cos xdx, \\ du = dx; & v = \sin x \end{Bmatrix} = -x^2\cos x + 2\left[x\sin x - \int \sin xdx\right] = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

▲

687. $\int x^2 e^{5x}dx$ интегралын табыңыз.

Шешуі: Бұл интегралды табу үшін бөлшектеп интегралдау формуласын екі рет қолданамыз:

$$\int x^2e^{5x}dx=\left\{\begin{matrix}u=x^2; & dv=e^{5x}dx;\\ du=2xdx, & v=\dfrac{e^{5x}}{5};\end{matrix}\right\}=\frac{1}{5}e^{5x}x^2-\int\frac{1}{5}e^{5x}2xdx=\frac{x^2e^{5x}}{5}-\frac{2}{5}\int xe^{5x}dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix}u=x; & dv=e^{5x}dx;\\ du=dx; & v=\dfrac{1}{5}e^{5x};\end{matrix}\right\}=\frac{x^2e^{5x}}{5}-\frac{2}{5}\left[\frac{xe^{5x}}{5}-\int\frac{1}{5}e^{5x}dx\right]=\frac{x^2e^{5x}}{5}-\frac{2xe^{5x}}{25}+\frac{2}{25}\int e^{5x}dx=$$

$$=\frac{x^2e^{5x}}{5}-\frac{2xe^{5x}}{25}+\frac{2e^{5x}}{125}=\frac{e^{5x}}{5}\left(x^2-\frac{2x}{5}+\frac{2}{25}\right).$$

▲

688. $\int e^{2x}\cos xdx$ интегралын табыңыз.

Шешуі:

$$\int e^{2x}\cos xdx=\left\{\begin{matrix}u=e^{2x}; & du=2e^{2x}dx;\\ dv=\cos xdx, & v=\sin x\end{matrix}\right\}=e^{2x}\sin x-\int\sin x\cdot 2e^{2x}dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix}u=e^{2x}; & du=2e^{2x}dx;\\ dv=\sin xdx, & v=-\cos x;\end{matrix}\right\}=e^{2x}\sin x-2\left[-e^{2x}\cos x-\int-\cos x\cdot 2e^{2x}dx\right]=e^{2x}\sin x+$$

$$+2e^{2x}\cos x-4\int\cos xe^{2x}dx$$

Мұнда бөлшектеп интегралдау формуласын екі рет қолдансақ та кестедегі интегралға келтіре алмадық. Бірақ, соңғы алынған интеграл берілген интегралмен бірдей. Сондықтан, оны теңдеудің сол жағына шығарайық. Сонда

$$5\int e^{2x}\cos xdx=e^{2x}(\sin x+2\cos x)$$

$$\int e^{2x}\cos xdx=\frac{e^{2x}}{5}(\sin x+2\cos x)+C.$$

Сонымен, интегралды интегралдар кестесін пайдаланбай таптық. ▲

6.2 РАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАРДЫ ИНТЕГРАЛДАУ

1. Жәй бөлшектерді интегралдау. Келесі берілген төрт бөлшек *жәй бөлшектер* деп аталады:

I. $\dfrac{1}{ax+b}$; II. $\dfrac{1}{(ax+b)^m}$; III. $\dfrac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$; IV. $\dfrac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$

n, m – натурал сандар ($n>2,\ m>2$) және $b^2-4ac<0$.

Алғашқы екі жәй бөлшектің интегралы $t=ax+b$ алмастыруы арқылы кестелік интегралға келтіріледі.

I. $\displaystyle\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{a}\ln|t|+C=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C;$

II. $\displaystyle\int\frac{dx}{(ax+b)^m}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^m}=-\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}}+C=-\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}}+C;$

III. III түрдегі бөлшектің интегралын есептеу үшін мынадай түрлендірулер жасалады:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\left(B+\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+$$

$$+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

689. $\int\frac{dx}{x^2-6x+25}$ интегралын табыңыз.

Шешуі: $\int\frac{dx}{x^2-6x+25}=\int\frac{dx}{(x-3)^2+16}=\frac{1}{4}arctg\frac{x-3}{4}+C$. ▲

690. $\int\frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx$ интегралын табыңыз.

Шешуі:

$$\int\frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx=\int\frac{84x-24}{36x^2-60x+48}dx=\int\frac{14(6x-5)+46}{(6x-5)^2+23}dx=14\int\frac{6x-5}{(6x-5)^2+23}dx+$$

$$+46\int\frac{dx}{(6x-5)^2+23}=\frac{7}{6}\ln\left((6x-5)^2+23\right)+\frac{\sqrt{23}}{3}arctg\frac{6x-5}{\sqrt{23}}+C.$$ ▲

2. Рационал бөлшектерді интегралдау. Рационал бөлшектерді интегралдау үшін оларды төмендегідей жәй бөлшектерге жіктеу керек:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+...+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+...+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+$$

$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+...+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}+...+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2}+...+\frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu},$$

мұндағы A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i – тұрақты сандар.

A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i шамаларының мәндерін анықтау үшін белгісіз коэффициенттер әдісін қолданыламыз (екі көпмүше тең болуы үшін x-тің бірдей дәрежесіндегі коэффициенттердің тең болуы қажетті және жеткілікті).

691. $\int\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}dx$ интегралын табыңыз.

Шешуі: $\int\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}dx=\int\left(\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}+\frac{Dx+E}{x^2+4}\right)dx$

Ортақ бөлімге келтіре отырып, алымдарын теңестіреміз:

$$A(x-4)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Dx+E)(x-2)(x-4)=9x^3-30x^2+28x-88$$

$$\begin{cases}A+B+D=9\\-4A-2B-6D+E=-30\\4A+4B+8D-6E=28\\-16A-8D+8E=-88\end{cases}\qquad\begin{cases}D=9-A-B\\E=-30+4A+2B+54-6A-6B\\2A+2B+4D-3E=14\\2A+B-E=11\end{cases}$$

$$\begin{cases} D = 9 - A - B \\ E = 24 - 2A - 4B \\ 4A + 10B = 50 \\ 4A + 5B = 35 \end{cases} \qquad \begin{cases} D = 9 - A - B \\ E = 24 - 2A - 4B \\ 4A + 10B = 50 \\ 5B = 15 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 5 \\ B = 3 \\ D = 1 \\ E = 2 \end{cases}$$

Сонымен,

$$\int \frac{5dx}{x-2} + \int \frac{3dx}{x-4} + \int \frac{x+2}{x^2+4} dx = 5\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + arctg\frac{x}{2} + C \text{ . } \blacktriangle$$

692. $\int \frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx$ интегралын табыңыз.

Шешуі: Бөлшек бұрыс болғандықтан, алдын ала бүтін бөлігін шығарып аламыз:

$$\begin{array}{r|l} 6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7 & 3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 \\ 6x^5 - 8x^4 - 34x^3 + 12x^2 \quad\quad\quad\quad & \\ \hline 9x^3 + 8x^2 - 76x - 7 & 2x^2 + 3 \\ 9x^3 - 12x^2 - 51x + 18 & \\ \hline 20x^2 - 25x - 25 & \end{array}$$

Сонымен,

$$\int\left[2x^2 + 3 + \frac{20x^2 - 25x - 25}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6}\right]dx = \int 2x^2 dx + \int 3dx + 5\int \frac{4x^2 - 5x - 5}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6}dx = \frac{2}{3}x^3 + 3x +$$

$$+5\int \frac{4x^2 - 5x - 5}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6}dx$$

Алынған бөлшектің бөлімін көбейткіштерге жіктейік. $x=3$ болғанда бөлшектің бөлімі нөлге айналатындығы көрініп тұр. Сонда:

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 & x - 3 \\ 3x^3 - 9x^2 \quad\quad\quad\quad\quad & \\ \hline 5x^2 - 17x & 3x^2 + 5x - 2 \\ 5x^2 - 15x & \\ \hline -2x + 6 & \\ -2x + 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Сонымен, $3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 = (x - 3)(3x^2 + 5x - 2) = (x - 3)(x + 2)(3x - 1)$. Сонда:

$$\frac{4x^2 - 5x - 5}{(x-3)(x+2)(3x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{3x-1}$$

$$A(x+2)(3x-1) + B(x-3)(3x-1) + C(x-3)(x+2) = 4x^2 - 5x - 5 \cdot$$

Анықталмаған коэффициенттерді табу кезінде жақшаларды ашып, ұқсас мүшелерді топтастырып, сосын теңдеулер жүйесін (кейде теңдеулер саны өте көп болуы мүмкін) шешпеу үшін *кез келген мәндер әдісі* деп аталатын әдіс қолдануға болады. Бұл әдістің мәні мынада: жоғарыда алынған өрнекте x-ке (саны анықталмаған коэффициенттер санына тең) кез келген мәндерді біртіндеп береді. Есептеулер оңай болу үшін бұл мәндер ретінде бөлшектің бөлімі нөлге айналатын нүктелерді, яғни 3, -2, 1/3 аламыз. Сонда:

$$\begin{cases}40A=16\\35B=21\\C=1\end{cases}\ \begin{cases}A=2/5\\B=3/5\\C=1\end{cases}$$

Сонымен:

$$\int\frac{6x^5-8x^4-25x^3+20x^2-76x-7}{3x^3-4x^2-17x+6}dx=\frac{2}{3}x^3+3x+3\int\frac{dx}{x+2}+2\int\frac{dx}{x-3}+5\int\frac{dx}{3x-1}=$$

$$=\frac{2}{3}x^3+3x+3\ln|x+2|+2\ln|x-3|+\frac{5}{3}\ln|3x-1|+C.$$ ▲

693. $\int\frac{3x^4+14x^2+7x+15}{(x+3)(x^2+2)^2}dx$ интегралын табыңыз.

Шешуі:

$$\int\frac{3x^4+14x^2+7x+15}{(x+3)(x^2+2)^2}dx=\int\frac{A}{x+3}dx+\int\frac{Bx+C}{(x^2+2)^2}dx+\int\frac{Dx+E}{x^2+2}dx$$

Анықталмаған коэффициенттерді табайық:

$$A(x^2+2)^2+(Bx+C)(x+3)+(Dx+E)(x+3)(x^2+2)=3x^4+14x^2+7x+15$$

Бұдан,

$$Ax^4+4Ax^2+4A+Bx^2+3Bx+Cx+3C+Dx^4+2Dx^2+3Dx^3+6Dx+Ex^3+2Ex+3Ex^2+6E=$$

$$=(D+A)x^4+(3D+E)x^3+(A+B+2D+3E+4A)x^2+(3B+C+6D+2E)x+(2A+3C+6E+4A)$$

$$\begin{cases}D+A=3\\3D+E=0\\B+2D+3E+4A=14\\3B+C+6D+2E=7\\3C+6E+4A=15\end{cases}\ \begin{cases}D=3-A\\E=-9+3A\\B+6-2A-27+9A+4A=14\\3B+C+18-6A-18+6A=7\\3C-54+18A+4A=15\end{cases}$$

$$\begin{cases}D=3-A\\E=-9+3A\\B+11A=35\\3B+C=7\\3C+22A=69\end{cases}\ \begin{cases}D=3-A\\E=-9+3A\\11A=35-B\\C=7-3B\\21-9B+70-2B=69\end{cases}\ \begin{cases}A=3\\B=2\\C=1\\D=0\\E=0\end{cases}$$

Сонда берілген интегралдың мәні:

$$3\int\frac{dx}{x+3}+\int\frac{2x+1}{(x^2+2)^2}dx=3\int\frac{dx}{x+3}+2\int\frac{x}{(x^2+2)^2}dx+\int\frac{dx}{(x^2+2)^2}=3\ln|x+3|-\frac{1}{x^2+2}+$$

$$+\frac{x}{4(x^2+2)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$ ▲

6.3 ИРРАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАРДЫ ИНТЕГРАЛДАУ

$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n},...,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}\right)dx$ интегралын қарастырайық. Осы интеграл $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$ алмастыруын қолдану арқылы рационал функцияның интегралына келтіріледі, мұндағы k саны $m/n,...,r/s$ бөлшектерінің ортақ бөліміне тең.

694. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ интегралын есептеу керек.

Шешуі: $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \left| \sqrt{x} = t, \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2t} \right| = \int \frac{2tdt}{(t^2+1)t} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2arctgt + C = 2arctg\sqrt{x} + C$. ▲

6.4 КЕЙБІР ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫ ИНТЕРАЛДАУ

$$\int R(\cos x, \sin x)dx$$

Интегралдың бұл түрін есептеу үшін $t = tg\frac{x}{2}$ *универсал алмастыру* деп аталатын алмастыру қолданылады. Сонда $R(\cos x, \sin x)$ - тригонометриялық функциялардың рационал функциясы жаңа t айнымалысының рационал функциясына түрленеді.

$$x = 2arctgt, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Тригонометриядан белгілі формулалар бойынша:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1-tg^2x}{1+tg^2x} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Сондықтан $\int R(\cos x, \sin x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2dt}{1+t^2},$

мұндағы интегралданатын функция t айнымалысы бойынша рационал функция.

695. $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$ интегралын табыңыз.

Шешуі:

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2\int \frac{dt}{8t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} = 2\int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 4} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{tg\frac{x}{2} + 2} + C.$$

▲

696. $\int \frac{dx}{9 + 8\cos x + \sin x}$ интегралын табыңыз.

Шешуі:

$$\int \frac{dx}{9 + 8\cos x + \sin x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left[9 + \frac{8(1-t^2)}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}\right]} = 2\int \frac{dt}{t^2 + 2t + 17} = 2\int \frac{dt}{(t+1)^2 + 16} =$$

$$= \frac{1}{2}arctg\frac{t+1}{4} + C = \frac{1}{2}arctg\frac{tg\frac{x}{2} + 1}{4} + C.$$

▲

Кейбір жағдайларда осындай алмастырулар күрделі есептеулерге әкеледі, сондықтан басқа алмастырулар қолдануға болады. Солардың кейбіреулерін қарастырайық:

1) $\int R(\sin x)\cos xdx$ болса, онда $\sin x = t$.
2) $\int R(\cos x)\sin xdx$ болса, онда $\cos x = t$.
3) $\int R(tgx)dx$ болса, онда $tgx = t$.
4) $\int R(\sin x, \cos x)dx$ интегралында $\sin x, \cos x$ функциялары тек жұп дәрежелерімен берілсе, онда $tgx = t$;
5) $\int \sin^m x\cos^n xdx$ интегралында егер:
а) m - тақ болса, онда $\cos x = t$;
ә) n - тақ болса, онда $\sin x = t$;
б) n, m - жұп, теріс емес болса, онда $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ формулалары қолданылады;
в) n, m - жұп, ең болмаса біреуі теріс болса, онда $tgx = t$ немесе $ctgx = t$;
6) Әртүрлі аргументтердің синус және косинустарының көбейтіндісінің интегралы берілсе, онда бұл жағдайда төмендегі 3 формуланың біреуін қолданамыз:

$$\int \cos mx\cos nxdx = \frac{1}{2}\int [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right];$$

$$\int \sin mx\cos nxdx = \frac{1}{2}\int [\sin(m-n)x + \sin(m+n)x]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m-n)x}{m-n} - \frac{\cos(m+n)x}{m+n}\right];$$

$$\int \sin mx\sin nxdx = \frac{1}{2}\int [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right].$$

697. $\int \frac{\cos^7 xdx}{\sin^4 x}$ интегралын табыңыз.

Шешуі:

$$\int \frac{\cos^7 xdx}{\sin^4 x} = \left\{\begin{array}{l} \sin x = t \\ dt = \cos xdx \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{array}\right\} = \int \frac{(1-t^2)^3}{t^4}dt = \int \frac{1-3t^2+3t^4-t^6}{t^4}dt = \int \frac{dt}{t^4} - 3\int \frac{dt}{t^2} +$$

$$+3\int dt - \int t^2 dt = -\frac{1}{3t^3} + \frac{3}{t} + 3t - \frac{1}{3}t^3 = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{3}{\sin x} + 3\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$ ▲

698. $\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx$ интегралын табыңыз.

Шешуі:

$$\int\frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx=\left\{\begin{matrix}\cos x=t\\ dt=-\sin x dx\end{matrix}\right\}=-\int\frac{1-t^2}{2+t}dt=\int\frac{t^2+4t+4-4t-5}{t+2}dt=\int\left[\frac{(t+2)^2-4t-5}{t+2}\right]dt=$$

$$=\int\left[t+2-\frac{4t}{t+2}-\frac{5}{t+2}\right]dt=\int tdt+\int 2dt-4\int\frac{tdt}{t+2}-5\int\frac{dt}{t+2}=\frac{t^2}{2}+2t-5\ln|t+2|-4\int\frac{t}{t+2}dt=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\frac{t}{t+2}=\frac{A}{t+2}+B\\ A+Bt+2=t\\ B=1,\quad A=-2\\ \frac{t}{t+2}=\frac{-2}{t+2}+1\end{matrix}\right\}=\frac{t^2}{2}+2t-5\ln|t+2|+8\int\frac{dt}{t+2}-4\int dt=\frac{t^2}{2}+2t-5\ln|t+2|+8\ln|t+2|-4t=$$

$$=\frac{t^2}{2}-2t+3\ln|t+2|+C=\frac{\cos^2 x}{2}-2\cos x+3\ln(\cos x+2)+C.$$

▲

699. $\int\sin 7x\sin 2xdx$ интегралын табыңыз.

Шешуі:

$$\int\sin 7x\sin 2xdx=\frac{1}{2}\int\cos 5xdx-\frac{1}{2}\int\cos 9xdx=\frac{1}{10}\sin 5x-\frac{1}{18}\sin 9x+C.$$ ▲

700. $\int\sin 10x\cos 7x\cos 4xdx$ интегралын табыңыз.

Шешуі:

$$\int\sin 10x\cos 7x\cos 4xdx=\int\sin 10x[\cos 7x\cos 4x]dx=\frac{1}{2}\int\sin 10x\cos 11xdx+\frac{1}{2}\int\sin 10x\cos 3xdx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\sin 21xdx-\frac{1}{4}\int\sin xdx+\frac{1}{4}\int\sin 13xdx+\frac{1}{4}\int\sin 7xdx=-\frac{1}{84}\cos 21x-\frac{1}{4}\cos x-\frac{1}{52}\cos 13x-$$

$$-\frac{1}{28}\cos 7x+C.$$

▲

701. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$ интегралын табыңыз.

Шешуі: $$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{4dx}{\sin^2 2x}=\left|dctg\,2x=-\frac{2dx}{\sin^2 2x}\right|=-2\int dctg\,2x=-2ctg\,2x+C.$$ ▲

Кейде тригонометриялық функцияларды интегралдағанда бұрыннан белгілі дәрежені төмендететін формулаларды қолданған жөн.

702. $\int\sin^4 xdx$ интегралын табыңыз.

Шешуі:

$$\int\sin^4 xdx=\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)^2dx=\frac{1}{4}\int(1-\cos 2x)^2dx=\frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2xdx+\frac{1}{4}\int\cos^2 2xdx=\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\int\frac{1}{2}(1+\cos 4x)dx=\frac{x}{4}-\frac{\sin 2x}{4}+$$

$$+\frac{1}{8}\left[\int dx+\int\cos 4xdx\right]=\frac{x}{4}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{\sin 4x}{32}=\frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2}-\sin 2x+\frac{\sin 4x}{8}\right]+C.$$ ▲

7 АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛ

7.1 АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛДЫ ЕСЕПТЕУ

1. Анықталған интегралдың анықтамасы. $f(x)$ функциясының $[a;b]$ аралығындағы *анықталған интегралы* деп $S=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ - интегралдық қосындының $(\max\Delta x_i\to 0)$ шегін айтады және былай белгіленеді: $\int_a^b f(x)dx$ мұндағы a - төменгі, $в$ - жоғарғы шегі, x – айнымалы шама, $[a;b]$–интегралдау аралығы.

Егер $f(x)$ функциясы $[a;b]$ аралығында үзіліссіз болса, онда осы аралықта интегралданады.

А н ы қ т а л ғ а н и н т е г р а л қ а с и е т т е р і:

1) $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$;

2) $\int_a^b (f_1(x)\pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$;

3) $\int_a^a f(x)dx = 0$;

4) егер $[a;b]$-де $m\le f(x)\le M$ болса, онда:

$$m(b-a)<\int_a^b f(x)dx < M(b-a);$$

5) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;

6) $\int_a^b f(x)dx$ =- $\int_b^a f(x)dx$.

2. Анықталған интегралды есептеу.

1. Н ь ю т о н – Л е й б н и ц ф о р м у л а с ы. Егер F(x) функциясы – f(x) функциясының қандай да бір алғашқы функциясы болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

2. Б ө л ш е к т е п и н т е г р а л д а у ф о р м у л а с ы. Егер $u=u(x)$ және $v=v(x)$ функциялары және олардың туындылары $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса,онда анықталған интеграл үшін бөліктеп интегралдау формуласы тура болады:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

3. А й н ы м а л ы н ы а л м а с т ы р у:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

мұндағы □*(t)* и □ □*(t)* функциялары [□, □] кесіндісінде үзіліссіз, әрі □ *(□)= a,* □ *(□) = b, f(□(t))* функциясы [□, □] кесіндісінде үзіліссіз.

703. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ интегралын табыңыз.

Шешуі: Айнымалыны алмастырып, сонан соң Ньютон-Лейбниц формуласы бойынша есептейміз:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{Bmatrix} x=\sin t; \\ \alpha = 0;\ \beta = \pi/2 \end{Bmatrix} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

▲

704. $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$ интегралын табыңыз.

Шешуі: Бөлшектеп интегралдау формуласын қолданып, сонан соң Ньютон-Лейбниц формуласы бойынша есептейміз:

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = \begin{vmatrix} x=u;\ dx=du \\ \sin x dx = dv; \\ -\cos x = v \end{vmatrix} = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x dx = -\pi\cos\pi + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi$$

. ▲

705. $\int_1^{e} x\ln x dx$ интегралын табыңыз.

Шешуі: Бөлшектеп интегралдау формуласын қолданамыз:

$$\int_1^{e} x\ln x dx = \begin{vmatrix} \ln x = u; & \frac{dx}{x}=du \\ xdx = dv; & \frac{x^2}{2}=v \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1}{2}\int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$$

▲

7.2 МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛДАР

1. Шегі ақырсыз интегралдар. Егер $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ шегі бар болса, онда осы шекті $f(x)$ функциясының $[a,\infty)$ интервалындағы *меншіксіз интегралы* дейді және оны былай белгілейді

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Егер осы шек бар болса меншіксіз интеграл *жинақты*, қарсы жағдайда *жинақсыз* дейді. Осы сияқты

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to\infty}\int_a^b f(x)dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$$

интегралдарын да *меншіксіз интегралдар* дейді.

2. Үзілісті функцияның интегралы. $x=c$ нүктесінде үзілісті болатын $f(x)$ функциясының $\int_a^c f(x)dx$ интегралы былай анықталады: $\int_a^c f(x)dx=\lim_{b\to c-0}\int_a^b f(x)dx.$
Егер осы шек бар болса, онда меншіксіз интеграл *жинақты*, қарсы жағдайда *жинақсыз* дейді.
Осы сияқты

$$\int_c^b f(x)dx=\lim_{a\to c+0}\int_a^b f(x)dx, \qquad \int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx,$$ мұндағы $a\prec c\prec b,$

интегралдарын да *меншіксіз интегралдар* дейді.

706. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}$ меншіксіз интегралын есептеу керек.
Шешуі:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}=\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{(x+1)^2+1}=\lim_{b\to\infty} arctg(x+1)\Big|_0^b=\lim_{b\to\infty}\left(arctg(b+1)-arctg1\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

Интеграл жинақты. ▲

707. $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ меншіксіз интегралын табыңыз.

Шешуі: $\int_1^\infty \frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\ln x\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}(\ln b-\ln 1)=\infty.$ Интеграл жинақсыз. ▲

708. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ меншіксіз интегралын есептеу керек.
Шешуі:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}=\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2}+\int_0^1 \frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to-0}\int_{-1}^b \frac{dx}{x^2}+\lim_{a\to+0}\int_a^1 \frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to-0}(-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^b)+\lim_{a\to+0}(-\frac{1}{x}\Big|_a^1)==\lim_{b\to-0}(1-\frac{1}{b})+\lim_{a\to+0}(\frac{1}{a}-1)=\infty.$$

Интеграл жинақсыз. ▲

7.3 АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛДЫ ҚОЛДАНУ

1. Жазық фигураның ауданы. 1) $y=f(x)$ қисығымен, $y=0,\ x=a,\ \ x=b$ түзулерімен шектелген «қисық сызықты» трапециясының ауданы $S=\int_a^b f(x)dx$ формуласымен есептеледі.

2) $\acute{o}=f_1(x),\ y=f_2(x)$ қисықтарымен ($f_2(x)>f_1(x)$) және $x=a, x=b$ түзулерімен шектелген жазық фигураның ауданы $S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx$ формуласымен есептеледі.

3) Параметрлік түрде берілген $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),$ мұндағы $\alpha\le t\le\beta,\ \varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b,$ қисықпен шектелген жазық фигураның ауданы $S=\int_\varepsilon^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt$ формуласымен есептеледі.

4) $r = f(\varphi), \varphi = \alpha, \varphi = \beta$ теңдеулерімен шектелген «қисық сызықты» сектордың ауданы $S = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx$ формуласымен есептеледі.

2. Қисық доғасының ұзындығы. 1) Жазықтықта $y = f(x)$ теңдеуімен өрнектелген AB доғасының ұзындығы, мұндағы $a \prec x \prec b$, $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$ формуласымен есептеледі.

2) Параметрлік түрде берілген $x = \varphi(t), y = \psi(t),$ мұндағы $\alpha \le t \le \beta,$ AB доғасының ұзындығы $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi''(t)]^2}dt$ формуласымен есептеледі.

3) AB қисығы $r = f(\varphi)$ теңдеуімен берілсе, мұндағы $\alpha \le \varphi \le \beta,$ онда AB доғасының ұзындығы $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2}d\varphi$ формуласымен есептеледі.

3. Қимасының ауданы бойынша дененің көлемі. Параллель қимасының $Q(x)$ауданы бойынша дененің көлемі $V = \int_A^B Q(x)dx,$ формуласымен есептеледі, мұндағы $a \le x \le b$

4. Айналу денесінің көлемі. $y = f(x)$ қисығы және $y = 0,\ x = a,\ \ x = b$ түзулерімен шектелген қисық сызықты трапециясын $0X$ осімен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

,

ал бетінің ауданы $S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$ формуласымен есептеледі.

709. $y = 4x - x^2$ қисығымен және абсцисса осімен шектелген фигура ауданын есептеу керек.

Шешуі: Қисықтың абсцисса осін қиятын нүктелерін табамыз. Ол үшін $4x - x^2 = 0$ теңдеуін шешеміз. $x = 0; x = 4$ Ендеше

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_0^4 (4x - x^2)dx = (2x^2 - \frac{x^3}{3})\Big|_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}.$$

▲

710. $y = x^3;\ y = 8$ сызықтарымен және ординат осімен шектелген фигура ауданын табу керек.

Шешуі: Берілген сызықтардың қиылысу нүктесін табамыз.

$$\begin{cases} y = x^3; \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow x = 2$$

Берілген фигура сол жағынан ордината осімен шектелгендіктен, төменгі шек $x = 0$ болады. Сонымен формула бойынша

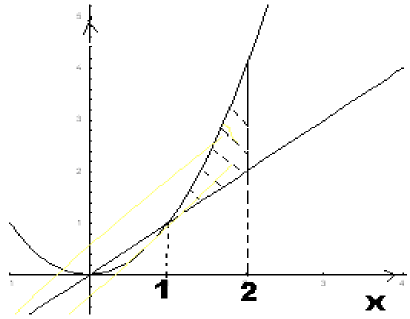
$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx=\int_0^2 (8-x^3)dx=(8x-\frac{x^4}{4})\Big|_0^2=16-4=12$$. ▲

711. y = x, y = x^2, x = 1, x = 2 сызықтарымен шектелген фигураның ауданын табу керек (7.1 Сурет).

Шешуі:

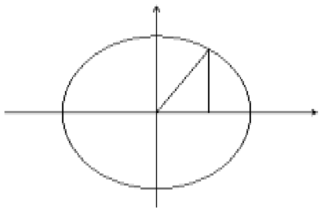
$$S=\int_1^2 x^2dx-\int_1^2 xdx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]\Big|_1^2=\frac{8}{3}-\frac{4}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

(кв. бірлік)▲



7.1 Сурет

712. Радиусы R шардың көлемін табу керек.
Шешуі:



$$Q(x)=\pi\left(R^2-x^2\right).$$

Көлем:

$$V=\int_{-R}^{R}\pi(R^2-x^2)dx=\pi(R^2x-\frac{x^3}{3})\Big|_{-R}^{R}=\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)-\pi\left(-R^3+\frac{R^3}{3}\right)=\frac{4\pi R^3}{3}$$.▲

713. $r=a(1+\cos\varphi)$ кардиоида қисығымен шектелген ауданды табу керек.
Шешуі: Қисықтың симметриялылығын ескеріп, берілген ауданның жартысын есептеп, шыққан нәтижені екі еселейміз:

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\pi a^2(1+\cos\varphi)^2d\varphi=\frac{1}{2}a^2\int_0^\pi(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2}a^2\left[\varphi\Big|_0^\pi+2\sin\varphi\Big|_0^\pi+\frac{1}{2}\int_0^\pi(1+\cos2\varphi)d\varphi\right]=$$

$$=\frac{1}{2}a^2\left(\pi+\frac{1}{2}(\varphi+\frac{1}{2}\sin2\varphi)\Big|_0^\pi\right)=\frac{1}{2}a^2(\pi+\frac{\pi}{2})=\frac{3}{4}a^2\pi.$$

$$S=\frac{3}{2}a^2\pi.$$ ▲

714. $x^2+y^2=r^2$ теңдеуімен берілген шеңбердің ұзындығын табу керек.
Шешуі:

I тәсіл. Теңдеуден у айнымалыны өрнектейміз $y=\sqrt{r^2-x^2}$
Туындысын табамыз:

$$y'=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

Сонда

$$\frac{1}{4}S=\int_0^r\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}dx=\int_0^r\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx=r\cdot\arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r=r\frac{\pi}{2}$$

Олай болса S = 2□ r.Шеңбер ұзындығының таныс формуласын алдық.

II тәсіл. Полярлық алмастырулар жасасақ: $r^2 cos^2$□ $+ r^2 sin^2$□ $= r^2$, яғни □ $= f($□$) = r$

$$\rho' = \frac{df(\varphi)}{d\varphi} = 0$$ онда

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{0 + r^2}\, d\varphi = r\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi r$$ ▲

715. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ астроидасының ұзындығын табу керек.
Шешуі: Астроиданың теңдеуін дифференциалдаймыз:

$$y' = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Қисықтың симметриялылығын ескеріп, берілген ұзындықтың ширегін есептеп, шыққан нәтижені төрт еселейміз:

$$\frac{1}{4}L = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}\, dx = \int_0^a \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\, dx = a^{\frac{1}{3}} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\Bigg|_0^a = \frac{3}{2} a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} a.$$

$$L = 6a.$$ ▲

716. $x = a(t - \sin t);\ y = a(1 - \cos t)$ циклоиданың бір аркасының ұзындығын табу керек.
Шешуі: $x' = a(1 - \cos t);\quad y' = a\sin t$. Сондықтан,

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\, dt = \sqrt{2}a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, dt =$$

$$= 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4a(\cos\pi - \cos 0) = 8a.$$

▲

717. $y^2 = x^3$ жартыкубтық параболасымен , абсцисса осімен және $x = 1$ түзуімен шектелген фигура OX осі бойынша айналады. Шыққан айналу денесінің көлемін табу керек.
Шешуі:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx = \pi\int_0^1 x^3 dx = \pi\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \pi\frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}.$$ ▲

Математика 1 пәні бойынша тест сұрақтары

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ анықтауышты есептеңіз.
A) 0
B) 6
C) 8
D) 12
E) 24
2. n-ші ретті анықтауыштың дұрыс емес қасиетін көрсетіңіз**.**
A) Егер анықтауыштың біржолы 0- ден құралса, онда анықтауыш 0- ге тең
B) Екі бірдей жолы бар анықтауыш 0- ге тең
C) Анықтауыштың екі жолын алмастыру барысында ол таңбасын қарама – қарсы таңбаға өзгертеді
D) Сол нөмері бойынша анықтауыштың жолын бағанмен ауыстыруға болады
E) Екі пропоциональды жолы бар анықтауыш 0- ге тең
3. Анықтауыштың A_{ij} алгебралық толықтауышы тең
A) $A_{ij} = (-1)^{i-j} M_{ij}$;
B) $A_{ij} = -M_{ij}$;
C) $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$;
D) $A_{ij} = (-1)^{i} M_{ij}$;
E) $A_{ij} = M_{ij}$.
4. $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ анықтауышын есептеңіз.
A) 16
B) 43
C) 47
D) 74
E) 15
5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ матрицасының рангын есептеңіз.
A) r =0
B) r =1
C) r =2
D) r =3
E) r =4

6. A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ матрицасының A^{-1} кері матрицасы тең

A) $A^{-1} = \Delta A \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$;

B) $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$;

C) $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$;

D) $A^{-1} = \dfrac{1}{A}$;

E) 2/A.

7. Егер $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ болса, онда 2A+5B тең

A) $\begin{pmatrix} 16 & 24 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}$;

B) $\begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 13 & -8 \end{pmatrix}$;

C) $\begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 15 & 16 \end{pmatrix}$;

D) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

E) $\begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}$.

8. Компланар векторлар деп...
A) бір немесе параллель жазықтықта жататын векторлар
B) бір –біріне перпендикуляр векторлар
C) перпендикуляр түзуде жататын векторлар.
D) бір-біріне параллель векторлар
E) параллель жазықтықтар

9. Бағыттаушы косинустардың арасындағы қатыс
A) $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + tg^2\gamma = 1$;
B) $\cos^2 \alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$;
C) $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$;
D) $\sin^2 \alpha - \sin^2\beta = 1$;
E) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1$.

10. $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$; $\vec{в}=\{в_x;в_y;в_z\}$ векторларының векторлық көбейтіндісі тең

A) $\vec{a}\times\vec{в}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$;

B) $a\times b=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$;

C) $a\times b=a_xb_xi+a_yb_yj+a_zb_zk$;

D) $a\times b=(a_x-b_x)(a_y-b_y)(a_z-b_z)$;

E) 12.

11.: $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2 \\ 2x_1-3x_2+2x_3=2 \\ 3x_1+x_2+x_3=8 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешіңіз

A) $x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=5$

B) $x_1=0,\ x_2=-1,\ x_3=0$

C) $x_1=1, x_2=2, x_3=3$

D) $x_1=x_2=x_3=1$

E) 0

12. Белгісіздерді жою әдісі

A) Крамер әдісі

B)Үшбұрыштық түрге келтіру әдісі

C) Гаусс әдісі

D) Саррюс әдісі

E) Ньютон әдісі

13. Сызықтық теңдеулер жүйесінің матрицалық түрі :

A) $B=A^{-1}$;

B) $AX=1$;

C) $AX=B$;

D) $A=0$;

E) A=1.

14. M(1,0,-1) нүктесі және $\vec{p}$ {2,3,0} параллель векторы арқылы өтетін түзудің параметрлік теңдеуін жазыңыз

A) $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{0}$

B) $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{0}$

C) $\begin{cases} x=1+2t \\ y=3t \\ z=-1 \end{cases}$

D) $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=3t \\ z=1 \end{cases}$

E) $\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}y = \frac{-1}{0}z$

15. $x + 3y - 4 = 0$ түзуін нормальдық түрге келтіру керек.

A) $\frac{2}{\sqrt{15}}x + \frac{3}{\sqrt{20}}y - \frac{1}{\sqrt{10}} = 0$;

B) $\frac{3}{\sqrt{18}}x + \frac{13}{\sqrt{30}}y + \frac{2}{\sqrt{10}} = 1$;

C) $\frac{1}{\sqrt{25}}x - \frac{4}{\sqrt{20}}y - \frac{5}{\sqrt{10}} = 2$;

D) $\frac{1}{\sqrt{10}}x + \frac{3}{\sqrt{10}}y - \frac{4}{\sqrt{10}} = 0$;

E) x+3y-1=0 .

16. $\frac{x - x_0}{l_1} = \frac{y - y_0}{m_1} = \frac{z - z_0}{n_1}$ және $\frac{x - x_1}{l_2} = \frac{y - y_1}{m_2} = \frac{z - z_1}{n_2}$ түзулерінің параллельдік шарты

A) $l_2 l_1 + m_2 m_1 + n_2 n_1 = 0$;

B) $l_2 = m_2 = n_2$;

C) $l_1 / l_2 = m_1 / m_2 = n_1 / n_2$;

D) $n = m = l = 1$;

E) $l_1 l_2 - m_1 m_2 - n_1 n_2 = 0$.

17. $M(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінен $Ax + By + Cz + D = 0$ жазықтығына дейінгі қашықтық тең

A) $d = \frac{| Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D |}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$;

B) $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$;

C) $d = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{| Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D |}$;

D) $d = \sqrt{A^2 + B^2 + C}$;

E) $d = \frac{| Ax_0 + By_0 + C |}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

18. Екінші тамаша шек

A) $\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 = e$;

B) $\lim_{y \to 0} \left(2 + \frac{2}{y}\right)^y = 1$;

C) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^X = e$;

D) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$;

E) $\dfrac{\lim}{n\to 0}\left(2+\dfrac{1}{y}\right)=e$

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^2+2n-3}{5n^2-4n+4}$ шегін есептеу керек

A) $\frac{5}{2}$;

B) $\frac{7}{5}$;

C) $\frac{2}{5}$;

D) $\frac{3}{7}$;

E) 1.

20. $\lim\limits_{n\to\infty} 7^{\frac{3n}{6n-5}}$ шегін есептеу керек

A) $\sqrt{2,5}$;

B) $\sqrt{4}$;

C) $\sqrt{5}$;

D) $\sqrt{7}$;

E) 2.

21. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}\right)$ шегін есептеу керек

A) $\frac{1}{6}$;

B) $\frac{1}{2}$;

C) $\frac{2}{3}$;

D) $\frac{5}{3}$;

E) 3.

22. y = $\sqrt{3x+1}$ функциясының дифференциалын табыңыз.

A) $dy=\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}}dx$

B) $dy=\dfrac{dx}{\sqrt{3x+1}}$

C) $dy = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}dx$

D) $dy = \frac{3}{\sqrt{3x+1}}$

E) $dy = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

23. $Shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ гиперболалық синус функциясының туындысы тең

A) $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$

B) $\frac{e^{-x}}{2}$

C) $\frac{e^x}{2}$

D) $-\frac{e^{-x}}{2}$

E) $-\frac{e^x - e^{-x}}{2}$

24. $y = tg(3x^2 + 5)$ функциясының туындысы тең

A) $\frac{6x}{\cos^2(3x^2+5)}$;

B) $\frac{61x-1}{\cos x}$;

C) $\cos^2 x + \sin x + 61x$;

D) $\frac{61x}{\sin(3x+5)}$;

E) sinx+c.

25. $y^5 - 5axy + x^5 = 0$ функциясының туындысы тең

A) $y' = 2ax - y^2 - 1$;

B) $y' = \frac{xy - a^2}{y^2 - ax}$;

C) $y' = \frac{y - x^2}{y^4 - ax}$;

D) $y' = \frac{ay - x^4}{y^4 - ax}$;

E) 1.

26.: $\int \frac{x^2}{4+3x^3}dx$ интегралын есептеңіз

A) $\ln\left(4+3x^3\right)+c$;

B) $\ln\left(4+3x^3\right)+cx+c$;

C) $4+3x^3$;

D) $\frac{1}{9}\ln|4+3x^3|+c$;

E) 5.

27. $\int \frac{10x+8}{\sqrt{5x^2+8x+1}}dx$ интегралын есептеңіз

A) $\frac{3}{5}\sqrt{5x^2+8x+1}-\frac{47}{5\sqrt{5}}\ln|10x+8+2\sqrt{5(5x^2+8x+1}|+c$;

B) $\sqrt{5x^2+8x+1}-\ln|5x^2+8x+1|+x^3(10x+8)+c$;

C) $\frac{3}{5}\sqrt{5x^2+8x+1}+c$;

D) $47\sqrt{5}\ln|5x^2+8x+1|-10x+c$;

E) $2\sqrt{5x^2+8x+1}+c$.

28. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^2 x}$ интегралын есептеңіз

A) $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

B) $1-\frac{\sqrt{3}}{3}$

C) 1

D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

E) 0

29.Бөліктеп интегралдау формуласын табыңыз:

A) $\int\limits_a^b ud\vartheta = u\vartheta\Big|_a^b+\int\limits_a^b \vartheta du$

B) $\int ad\vartheta = \vartheta du-\int\limits_a^b \vartheta du$

C) $\int\limits_a^b ud\vartheta = u\vartheta\Big|_a^b-\int\limits_a^b \vartheta du$

D) $\int_a^b u d\vartheta = u\vartheta$

E) $\int_a^b u d\vartheta = u\vartheta \Big|_a^b - \int_a^b \vartheta du$

30.Айналу бетінің ауданын табыңыз:

A) $S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x_t^{'}) + (y_t^{'})} dt$

B) $S = 2\pi f(x)$

C) $S_x = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + (y')^2}\, dx$

D) $S = f(x)$

E) $S = x$

Жауаптары

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E	D	C	C	C	B	B	A	B	A

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	C	C	C	D	C	A	C	B	D

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A	C	A	A	D	D	E	B	C	C

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Айдос Е.Ж. Жоғары математика (қысқаша курс). - Алматы: «Иль-Тех-Кітап». ЖШС, 2000. - 744 б.
2. Әубәкір С.Б. Жоғары математика. – Алматы: ҚазТУ, 2000. – 254 б.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - М., Наука, 1975.
4. Божанов Е.Т. Конспект лекции по высшей математике. Часть I, II. -1992.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. - М., Наука, 1980.
6. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисления. - М., Наука, 1980.
7. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть1,2. - М., Высшая школа, 1998.
8. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнении по математическому анализу. - М., Наука, 1985.
9. Дүйсек А.К., Қасымбеков С.К. Жоғары математика. - Алматы: КБП, 2004. - 409 б.
10. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. - М. - 1992-1995г.
11. Қабдықайыров Қ. Жоғары математика. - Алматы: РБК, 1993.
12. Қасымов Қ.А., Қасымов Е.А. Жоғары математика курсы. - Алматы: Санат, 1994.
13. Пискунов Н. С. Дифференциальные и интегральные исчисления. Часть I, II. - 1972.
14. Сборник индивидуальных задании по высшей математике. Под ред. Рябушка А. П. - Минск, 2001.

Мазмұны

Пішімі 60х84 1/12
Көлемі 144 бет, 12 шартты баспа табағы
Таралымы 500 дана.
Ш.Есенов атындағы КМТжИУ
Редакциялық - баспа бөлімінде басылды.
Ақтау қаласы, 27 ш/а.