№11 дәріс сабағы

Еселі интегралдар, қасиеттері және оларды есептеу жолдары. Еселі интегралдарда ауыстыру енгізу.

G шектелген тұйық облысында $z = f(x, y)$ функциясы анықталсын, G облысын аудандары $\Delta S_i,\ i=\overline{1,n}$ болатын n элементар аудандарға бөлеміз. Әрбір пайда болған элементар аудандардан (ξ_i, η_i) нүктелерін таңдап және $f(\xi_i, \eta_i),\ i=\overline{1,n}$ мәндерін анықтаймыз.

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\Delta S \qquad (1)$$

- қосындысын тұрғызамыз. (1) – интегралдық қосынды деп аталады.

$\Delta\lambda_i = \max\{\lambda_i\}$, λ_i - ΔS_i элементар аудандардың диаметрі.

Анықтама 1. $\Delta\lambda_i \to 0$, (1) интегралдық қосындысының шегі бар болса, онда G облысы бойынша $f(x, y)$ функциясынан алынған екі еселі интеграл деп аталады және төмендегідей белгіленеді

$$\iint\limits_{(G)} f(x, y)dxdy, \text{ яғни } \lim_{\max\{\Delta\lambda_i\}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\cdot \Delta S_i = \iint\limits_{(G)} f(x, y)dxdy$$

$f(x, y)$ функциясы интеграл астындағы функция деп аталады.

Екі еселі интегралдың геометриялық мағынасы:

$V = \iint\limits_{(G)} f(x, y)dG$ – жоғары жағынан $z = f(x,y)$ функциясымен, төмен жағынан G фигурасымен, бүйірінен Oz осіне параллель түзулермен шектелген цилиндрлік пішінді дененің көлемін береді.

T тұйық денесінің барлық нүктелерінде $f(x,y,z)$ функциясы анықталған.

1) Екі тік бұрышты координаталар және олардан (G) және (W) шектелген тұйық облыстары берілсін.

Өзара бірмәнді сәйкестіктері бар $\begin{cases} x = x(U,V) \\ y = y(U,V) \end{cases}$ функциялары, ал (G) облысында $\begin{cases} U = U(x, y) \\ V = V(x, y) \end{cases}$ функциялары анықталған. Өзара бірмәнді сәйкестіктері бар болуының қажетті және жеткілікті белгісі (W) облысында түрлендіру якобианы $J(U,V) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial U} & \frac{\partial x}{\partial V} \\ \frac{\partial y}{\partial U} & \frac{\partial y}{\partial V} \end{vmatrix} \neq 0$ немесе $\frac{\partial(x, y)}{\partial(U,V)} \neq 0$. Онда екі еселі интегралдарда айнымалыны ауыстыру

$$\iint\limits_{(G)} f(x, y)dydx = \iint\limits_{(W)} f(U,V)|J(U,V)|dUdV$$ формуласы орынды.

<u>Дербес жағдай</u>. Екі еселі интегралдарда полярлық координаталарға көшу:

$$x = \rho\cos\varphi \qquad J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \rho\cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho > 0$$
$$y = \rho\sin\varphi$$

$$\iint\limits_{(G)} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{(W)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho .$$

Дербес жағдай:

а)Үш еселі интегралдарда цилиндрлік координаталарға көшу:

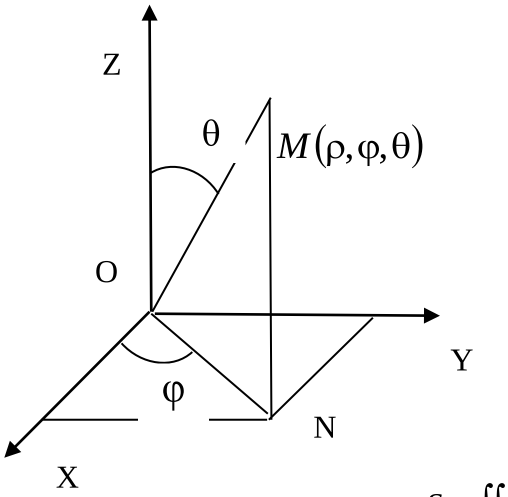
$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \qquad J(\rho,\varphi,z) = \rho \\ z = z \end{cases}$$

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz == \iiint\limits_{(D)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\cdot\rho \cdot d\rho\cdot d\varphi\cdot dz$$

б) Үш еселі интегралдарда сфералық координаталарға көшу:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\cos\theta \qquad J(\rho,\varphi,\theta) = \rho^2\cos\theta \\ z = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz == \iiint\limits_{(D)} f(\rho\cos\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\theta)\cdot\rho^2\cdot\cos\theta\cdot d\rho\cdot d\theta\cdot d\varphi.$$



1. Жазық фигуралардың ауданын есептеу: $S = \iint\limits_{(G)} dxdy$.

2. Денелердің(цилиндрлік пішінді) көлемдерін есептеу:

$$V = \iint\limits_{(G)} f(x,y)dxdy,\ f > 0,$$

$$V = \iint\limits_{(G)} |f(x,y)|dxdy,\ f < 0.$$

Денелердің көлемдерін есептеу: $V = \iiint\limits_{(T)} dxdydz$.

Егер f – таңбасы ауыспалы функция болса, онда f функциясын таңбасы тұрақты аралықтарға бөлу керек.

3. Беттің ауданы.

Егер (G) облысында $f(x,y)$ функциясының x және y айнымалылары бойынша үзіліссіз дербес туындылары бар болса, онда Oxy жазықтығына проекциясы (G) облысы болатын $z=f(x,y)$ теңдеуімен берілген беттің ауданы

$$\sigma = \iint\limits_{(G)} \sqrt{1+[f'_x]^2+[f'_y]^2}\,dxdy$$

формуласымен есептеледі.

4. Жазық пластинкалар мен денелердің массасын, статикалық моменттерін, инерция моменттерін, ауырлық центрінің координаталарын есептеу.

4$_1$) Жазық пластинканың массасы: $m = \iint\limits_{(G)} \mu(x, y)dxdy$, мұндағы $\mu=\mu(x,y)$ – жазық пластинканың тығыздығы.

4$_2$) Кеңістіктегі денелердің массасы: $m = \iiint\limits_{(T)} \mu(x, y, z)dxdydz$, мұндағы $\mu=\mu(x,y,z)$ – денелердің тығыздығы.

5$_1$**.** Жазық пластинканың координата осьтеріне қарағандағы статикалық моменттері:

$$S_x = \iint\limits_{(G)} y\mu(x, y)dxdy,$$
$$S_y = \iint\limits_{(G)} x\mu(x, y)dxdy.$$

5$_2$. Кеңістіктегі денелердің координата жазықтықтарына қарағандағы статикалық моменттері:

$$M_{yz} = \iiint\limits_{(T)} x\mu(x, y, z)dxdydz$$
$$M_{zx} = \iiint\limits_{(T)} y\mu(x, y, z)dxdydz$$
$$M_{xy} = \iiint\limits_{(T)} z\mu(x, y, z)dxdydz.$$