ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим вопрос о зависимости решения задачи Коши от начальных данных.

Пусть дана задача Коши

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x), \qquad (1) \\ x(t_0) &= x_0. \qquad (2) \end{aligned}}$$

Если функция $f(t, x)$ непрерывна по совокупности аргументов и имеет ограниченную производную $\frac{\partial f}{\partial x}$ в некоторой области Ω изменения t, x, содержащей точку (t_0, x_0), то решение задачи Коши (1)–(2) существует и единственно. Если изменять значения t_0 и x_0, то будет меняться и решение. Возникает важный в приложениях вопрос: как оно будет меняться? Вопрос этот имеет и большое принципиальное значение. Действительно, если какая-либо физическая задача приводит к задаче Коши, то начальные значения находятся из опыта и за абсолютную точность измерения ручаться нельзя. И если сколь угодно малые изменения начальных данных способны сильно изменять решение, то математическая модель окажется малопригодной для описания реального процесса.

Справедлива следующая теорема о непрерывной зависимости решения от начальных условий.

Теорема 1. *Если правая часть $f(t, x)$ дифференциального уравнения*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

непрерывна по совокупности переменных и имеет ограниченную частную производную $\frac{df}{dx}$ в некоторой области G изменения t, x, то решение

$$x(t) = x(t; t_0, x_0),$$

удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$, где $(t_0, x_0) \in G$, непрерывно зависит от начальных данных.

Иными словами, пусть через точку (t_0, x_0) проходит решение $x(t)$ уравнения (1), определенное на отрезке $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $|\tilde{t}_0 - t_0| < \delta$, $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta$ решение $\tilde{x}(t)$ уравнения (1), проходящее через точку $(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0)$, существует на отрезке $[\alpha, \beta]$ и отличается там от $x(t)$ меньше чем на ε:

$$\boxed{|x(t) - \tilde{x}(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [\alpha, \beta].}$$

Аналогичная теорема справедлива и для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

При выполнении условий теоремы (1) решение задачи Коши существует, единственно и непрерывно зависит от начальных данных. В этом случае говорят, что задача Коши поставлена корректно. Существенным является то обстоятельство, что отрезок $[a, b]$ изменения t конечен. Однако во многих задачах нас интересует зависимость решения от начальных данных в бесконечном промежутке $t_0 \leqslant t < \infty$. Переход от конечного промежутка, в котором рассматривается непрерывная зависимость решения от начальных значений, к бесконечному существенно меняет характер задачи и методы исследования. Эта проблема относится к теории устойчивости, созданной А. М. Ляпуновым.

Остановимся вкратце на понятии о продолжаемости решения. Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

где t — независимая переменная (время); $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ — искомые функции; $f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функции, определенные для $t \in (a, +\infty)$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из некоторой области $D \subset \mathbb{R}^n$. Если функции

$$f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

в их области определения непрерывны по совокупности аргументов и имеют ограниченные частные производные по $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то для системы (3) справедлива *локальная теорема существования*:

для каждой системы значений

$$(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0), \qquad t_0 \in (a, +\infty), \quad (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in D,$$

существует единственное решение

$$x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$$

системы (3), *определенное в некотором интервале* $(t_0 - h_0, t_0 + h_0) \subset (a, +\infty)$ *изменения* t *и удовлетворяющее начальным условиям*

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Введем следующее понятие. Пусть

$$x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$$

— решение задачи Коши (3)–(4), определенное на некотором интервале $I = (t_1, t_2)$. Это решение может быть продолжено, вообще говоря, на больший интервал времени. Решение

$$y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$$

называется *продолжением решения* $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, если оно определено на большем интервале I_1, $I_1 \supset I$, и совпадает с $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\ldots$, $x_n(t)$ при $t \in I$. Решение называется *неограниченно продолжаемым* (*неограниченно продолжаемым вправо* или *влево*), если его можно продолжить на всю ось $-\infty < t < +\infty$ (на полуось $t_0 \leqslant t < +\infty$ или $-\infty < t \leqslant t_0$ соответственно).

Для дальнейших рассмотрений важен вопрос о существовании решения $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, для $t_0 \leqslant t < +\infty$ (*глобальная теорема существования*). Этим свойством обладает линейная система

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + f_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $a_{ij}(t)$ и $f_i(t)$ — непрерывные функции на $[t_0, +\infty)$. Для нее каждое решение $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, существует на $[t_0, +\infty)$ (неограниченно продолжаемо вправо) и единственно.

Не все системы обладают таким свойством. Например, для скалярного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \tag{5}$$

функция

$$f(t, x) \equiv x^2$$

непрерывна и имеет производные всех порядков по x. Нетрудно проверить, что функция

$$x = \frac{\alpha}{(1 - \alpha t)}$$

является решением задачи

$$\frac{dx}{dt} = x^2, \quad x(0) = \alpha, \quad \alpha > 0.$$

Однако это решение существует только в интервале $\left(-\infty, \frac{1}{\alpha}\right)$, зависящем от начального условия, и непродолжаемо на полуинтервал $\left(-\infty, \frac{1}{\alpha}\right]$.

Уравнение (5) есть уравнение сверхбыстрого размножения, когда прирост пропорционален числу всевозможных пар. Его решение показывает, что при таком законе прироста населения количество населения становится бесконечным за конечное время (в то время как обычный закон прироста — экспоненциальный).

Задача. Показать, что решения уравнения

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + 1$$

нельзя продолжить неограниченно ни вправо, ни влево.

Устойчивость по Ляпунову. Основные понятия и определения

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = f(t, x),} \tag{1}$$

где функция $f(t, x)$ определена и непрерывна для $t \in (a, +\infty)$ и x из некоторой области D и имеет ограниченную частную производную $\frac{\partial f}{\partial x}$. Пусть функция

$$x = \varphi(t)$$

есть решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию

$$x\big|_{t=t_0} = \varphi(t_0), \quad t_0 > a.$$

Пусть, далее, функция

$$x = x(t)$$

есть решение того же уравнения, удовлетворяющее другому начальному условию

$$x\Big|_{t=t_0} = x(t_0).$$

Предполагается, что решения $\varphi(t)$ и $x(t)$ определены для всех $t \geqslant t_0$, т. е. неограниченно продолжаемы вправо.

Определение 1. Решение $x = \varphi(t)$ уравнения (1) называется *устойчивым по Ляпунову* при $t \to +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всякого решения $x = x(t)$ этого уравнения из неравенства

$$|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta \tag{2}$$

следует неравенство

$$|x(t) - \varphi(t)| < \varepsilon \tag{3}$$

для всех $t \geqslant t_0$ (всегда можно считать, что $\delta \leqslant \varepsilon$).

Это значит, что решения, близкие по начальным значениям к решению $x = \varphi(t)$, остаются близкими и при всех $t \geqslant t_0$. Геометрически это означает следующее. Решение

$$x = \varphi(t)$$

уравнения (1) устойчиво, если, какой бы узкой ни была ε-полоска, содержащая кривую $x = \varphi(t)$, все достаточно близкие к ней в начальный момент $t = t_0$ интегральные кривые $x = x(t)$ уравнения целиком содержатся в указанной ε-полоске при всех $t \geqslant t_0$ (рис. 1).

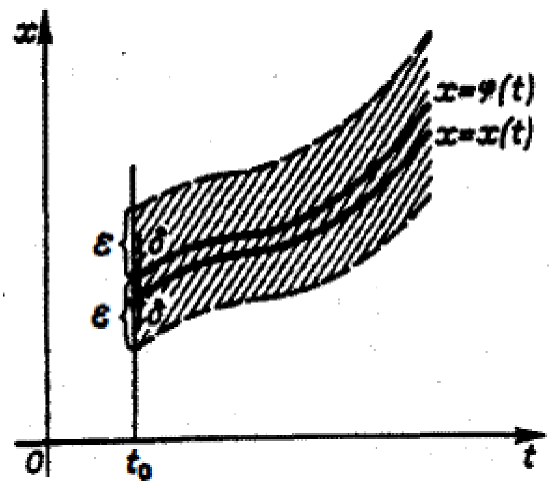

Рис. 1

Если при сколь угодно малом $\delta > 0$ хотя бы для одного решения $x = x(t)$ уравнения (1) неравенство (3) не выполняется, то решение $x = \varphi(t)$ этого уравнения называется *неустойчивым*. Неустойчивым следует считать и решение, не продолжаемое вправо при $t \to \infty$.

Определение 2. Решение $x = \varphi(t)$ уравнения (1) называется *асимптотически устойчивым*, если

1) решение $x = \varphi(t)$ устойчиво;

2) существует $\delta_1 > 0$ такое, что для любого решения $x = x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющего условию $|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta_1$, имеем

$$\lim_{t \to +\infty} |x(t) - \varphi(t)| = 0.$$

Это означает, что все решения $x = x(t)$, близкие по начальным условиям к асимптотически устойчивому решению $x = \varphi(t)$, не только остаются близкими к нему при $t \geqslant t_0$, но и неограниченно сближаются с ним при $t \to +\infty$.

Вот простая физическая модель. Пусть шарик лежит на дне полусферической лунки (находится в положении равновесия). Если малым возмущением вывести шарик из этого положения, то он будет колебаться около него. При отсутствии трения положение равновесия будет устойчивым, при наличии трения колебания шарика будут уменьшаться с возрастанием времени, т. е. положение равновесия будет асимптотически устойчивым.

Пример 1. Исследовать на устойчивость тривиальное решение

$$x \equiv 0$$

уравнения

$$\frac{dx}{dt} = 0. \qquad (*)$$

◀ Решение $x \equiv 0$, очевидно, удовлетворяет начальному условию

$$x\big|_{t=t_0} = 0.$$

Решение уравнения $(*)$, удовлетворяющее начальному условию

$$x\big|_{t=t_0} = x_0,$$

имеет вид

$$x \equiv x_0.$$

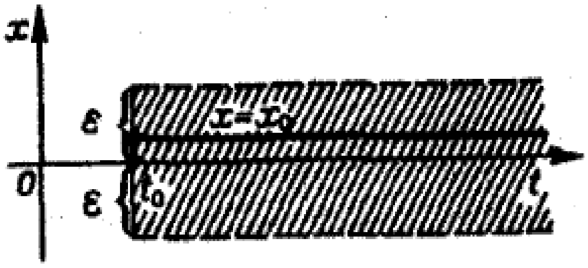

Рис. 2

Легко видеть (рис. 2), что, какова бы ни была ε-полоска вокруг интегральной кривой $x = 0$, существует $\delta > 0$, например, $\delta = \varepsilon$, такое, что любая интегральная кривая $x = x_0$, для которой $|x_0 - 0| < \delta$, целиком содержится в указанной ε-полоске для всех $t \geqslant t_0$. Следовательно, решение $x \equiv 0$ устойчиво. Асимптотической устойчивости нет, поскольку решение $x = x_0$ при $t \to +\infty$ не стремится к прямой $x = 0$. ▶

Пример 2. Исследовать на устойчивость тривиальное решение $x \equiv 0$ уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -a^2 x \quad (a = \text{const}). \qquad (**)$$

◀ Решение уравнения $(**)$, удовлетворяющее начальному условию

$$x\big|_{t=t_0} = x_0,$$

имеет вид

$$x = x_0 e^{-a^2(t-t_0)}.$$

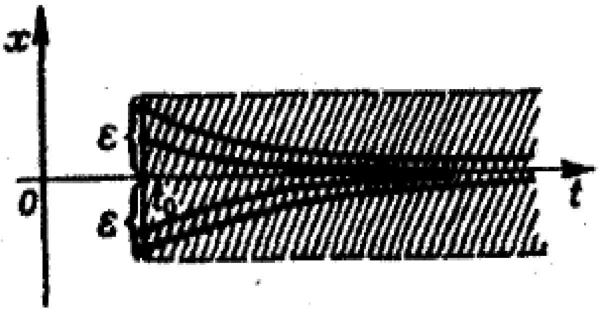

Рис. 3

Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и рассмотрим разность решений $x(t)$ и $\varphi(t) \equiv 0$:

$$x(t) - \varphi(t) = x_0 e^{-a^2(t-t_0)} - 0 = (x_0 - 0)e^{-a^2(t-t_0)}. \qquad (***)$$

Поскольку $e^{-a^2(t-t_0)} \leqslant 1$ для всех $t \geqslant t_0$, из выражения $(***)$ следует, что существует $\delta > 0$, например, $\delta = \varepsilon$, такое, что при $|x_0 - 0| < \delta = \varepsilon$ имеем

$$|x(t) - \varphi(t)| = x_0 e^{-a^2(t-t_0)} < \varepsilon \quad \forall t \geqslant t_0.$$

Согласно определению (1) это означает, что решение $\varphi(t) \equiv 0$ уравнения (**) устойчиво. Кроме того, имеем

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t) - \varphi(t)| = \lim_{t\to+\infty} |x_0| e^{-a^2(t-t_0)} = 0,$$

поэтому решение $\varphi(t) \equiv 0$ асимптотически устойчиво (рис. 3). ▶

Пример 3. Показать, что решение

$$\varphi(t) \equiv 0$$

уравнения

$$\frac{dx}{dt} = a^2 x$$

неустойчиво.

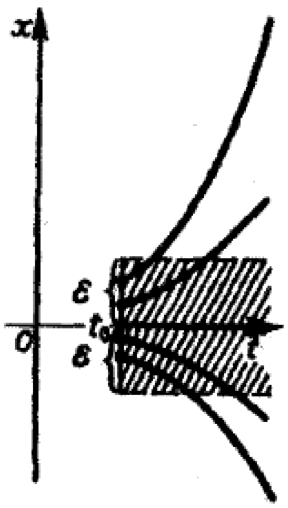

Рис. 4

◀ В самом деле, при сколь угодно малом $|x_0|$ решение

$$x(t) = x_0 e^{a^2(t-t_0)}$$

этого уравнения не удовлетворяет условию

$$|x(t) - 0| = |x_0| e^{a^2(t-t_0)} < \varepsilon$$

при достаточно больших $t > t_0$. Более того, при любых $x_0 \neq 0$ имеем

$$|x(t)|_{t\to+\infty} \to +\infty$$

(рис. 4). ▶

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений

$$\boxed{\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad i = 1, 2, \ldots, n,} \tag{4}$$

где функции f_i определены для $a < t < +\infty$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из некоторой области D изменения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Предположим, что все решения системы (4) неограниченно продолжаемы вправо при $t \geqslant t_0 > a$.

Определение 3. Решение

$$\varphi_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

системы (4) называется *устойчивым по Ляпунову* при $t \to +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всякого решения $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, той же системы, начальные значения которого удовлетворяют условию

$$|x_i(t_0) - \varphi_i(t)| < \delta, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

выполняются неравенства

$$|x_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

для всех $t \geqslant t_0$, т. е. близкие по начальным значениям решения остаются близкими для всех $t \geqslant t_0$.

Если при сколь угодно малом $\delta > 0$, хотя бы для одного решения $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, не все неравенства (5) выполняются, то решение $\varphi_i(t)$ называется *неустойчивым*.

Определение 4. Решение

$$\varphi_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

системы (4) называется *асимптотически устойчивым*, если:

1) решение это устойчиво;

2) существует $\delta_i > 0$ такое, что всякое решение $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, системы, для которого

$$|x_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta_1, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

удовлетворяет условию

$$\lim_{t\to+\infty} |x_i(t) - \varphi_i(t)| = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Пример 4. Исходя из определения устойчивости по Ляпунову, показать, что решение системы

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x, \tag{*}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \tag{**}$$

устойчиво.

◀ Решение системы (*), удовлетворяющее начальным условиям (**), есть

$$x(t) \equiv 0, \quad y(t) \equiv 0.$$

Решение этой системы, удовлетворяющее условиям $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, имеет вид

$$x(t) = x_0 \cos t + y_0 \sin t, \quad y(t) = -x_0 \sin t + y_0 \cos t.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и покажем, что существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|x_0 - 0| < \delta$ и $|y_0 - 0| < \delta$ выполняются неравенства

$$|x(t) - 0| = |x_0 \cos t + y_0 \sin t| < \varepsilon, \quad |y(t) - 0| = |-x_0 \sin t + y_0 \cos t| < \varepsilon$$

для всех $t \geqslant 0$. Это и будет означать, согласно определению, что нулевое решение $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$ системы (*) устойчиво по Ляпунову. Очевидно, имеем:

$$|x_0 \cos t + y_0 \sin t| \leqslant |x_0 \cos t| + |y_0 \sin t| \leqslant |x_0| + |y_0|,$$

$$|-x_0 \sin t + y_0 \cos t| \leqslant |x_0 \sin t| + |y_0 \cos t| \leqslant |x_0| + |y_0|.$$

Если взять

$$\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2},$$

то при $|x_0| < \delta$ и $|y_0| < \delta$ будут иметь место неравенства

$$|x_0 \cos t + y_0 \sin t| < \varepsilon, \quad |-x_0 \sin t + y_0 \cos t| < \varepsilon$$

для всех $t \geqslant 0$, т. е. действительно нулевое решение системы устойчиво по Ляпунову, но эта устойчивость не асимптотическая. ▶

Из устойчивости нетривиального решения дифференциального уравнения не следует ограниченности этого решения.

Рассмотрим, например, уравнение

$$\frac{dx}{dt} = 1.$$

Решением этого уравнения, удовлетворяющим условию $x(0) = 0$, является функция

$$\varphi(t) = t.$$

Решение, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0$, имеет вид

$$x(t) = t + x_0.$$

Геометрически очевидно (рис. 5), что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, например $\delta = \varepsilon$ такое, что любое решение $x(t)$ уравнения, для которого верно неравенство $|x_0 - 0| < \delta$, удовлетворяет условию $|x(t) - t| < \varepsilon \quad \forall t \geqslant 0$. Последнее означает, что решение $\varphi(t) = t$ устойчиво по Ляпунову, однако это решение является неограниченным при $t \to +\infty$.

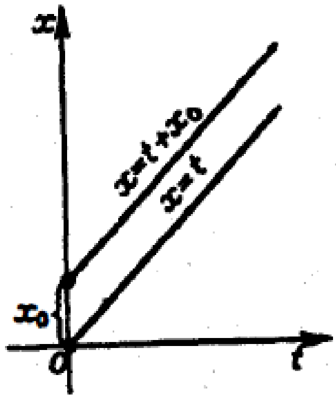

Рис. 5

Из ограниченности решений дифференциального уравнения не следует устойчивости решений.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \sin^2 x. \tag{6}$$

Оно имеет очевидные решения

$$x = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{7}$$

Интегрируя уравнение (6), находим

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0 - t,$$

или

$$x = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x_0 - t), \quad x_0 \neq k\pi. \tag{8}$$

Все решения (7) и (8) ограничены на $(-\infty, +\infty)$. Однако решение $\varphi(t) \equiv 0$ неустойчиво при $t \to +\infty$, так как при любом $x \in (0, \pi)$ имеем

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \pi$$

(рис. 6).

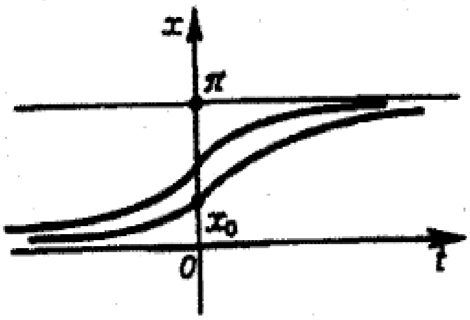

Рис. 6

Таким образом, ограниченность и устойчивость решений являются понятиями, независимыми друг от друга.

Замечание. Исследуемое на устойчивость решение

$$\varphi_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

системы (4) всегда можно преобразовать в тривиальное решение

$$y_i \equiv 0$$

другой системы заменой

$$y_i = x_i(t) - \varphi_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

В самом деле, пусть имеем (для простоты) одно дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{$*$}$$

и пусть требуется исследовать на устойчивость какое-либо решение $\varphi(t)$ этого уравнения. Положим, что

$$y(t) = x(t) - \varphi(t)$$

(величину $x(t) - \varphi(t)$ называют *возмущением*). Тогда

$$x(t) = y(t) + \varphi(t),$$

и подстановка в $(*)$ приводит к равенству

$$\frac{dy}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} = f\left(t, y(t) + \varphi(t)\right). \tag{$**$}$$

Но $\varphi(t)$ — решение уравнения $(*)$, поэтому

$$\frac{d\varphi}{dt} \equiv f\left(t, \varphi(t)\right),$$

и из $(**)$ имеем

$$\frac{dy}{dt} = f\left(t, y(t) + \varphi(t)\right) - f\left(t, \varphi(t)\right).$$

Обозначив здесь правую часть через $F(t, y)$, получим

$$\frac{dy}{dt} = F(t, y). \tag{$***$}$$

Это уравнение имеет решение $y \equiv 0$, так как при $y \equiv 0$ его левая и правая части тождественно по t равны нулю:

$$f(t, 0) = f\left(t, \varphi(t)\right) - f\left(t, \varphi(t)\right) \equiv 0.$$

Таким образом, вопрос об устойчивости решения $\varphi(t)$ уравнения $(*)$ приводится к вопросу об устойчивости тривиального решения $y \equiv 0$ уравнения $(***)$, к которому сводится $(*)$. Поэтому в дальнейшем мы будем, как правило, считать, что на устойчивость исследуется тривиальное решение.