III тарау. КҮШ МОМЕНТТЕРІ ТЕОРИЯСЫ

§ 3.1 Күштің нүктеге (жазықтықтағы) қатысты моменті және оның қасиеттері

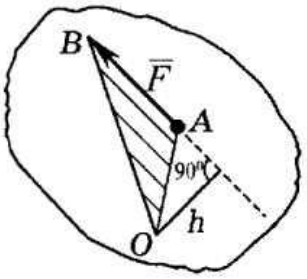
Күштің моменті туралы ұғым күштін денені қозғалмайтын нүкте немесе қозғалмайтын өс төңірегінде айналдыруға тырысатын әсерін сипаттау үшін енгізіледі.

O нүктесінде бекітілген қатты денені (3.1-сурет) қарастырайық. *A* нүктесінде түсірілген $\overline{F}$ күші денені *O* нүктесінен айналдыруға тырысады. *O* нүктесінен $\overline{F}$ күшінің әсер ету сызығына түсірілген *h* перпендикулярының ұзындығы осы күштің иіні деп аталады. $\overline{F}$ күшінің денені *O* центрінен айналдыру қабілетін мынадай сипаттамалармен анықтауға болады:

1) $\overline{F}$ күшінің модулі мен *h* иінінің ұзындығы.

2) *O* нүктесі және $\overline{F}$ күші арқылы өтетін *OAB* айналдыру жазықтығының орны.

3) Осы жазыктықтың айналу бағыты. Денеге жазықтықта орналасқан күштер жүйесі әсер етеді деп алсак, онда жүйе күштерінің әсер ету сызыктары бір жазықтықта жатады. Бұл жағдайда жүйенің барлық күштері үшін айналдыру жазықтығы ортак болады және дененің осы жазықтықтағы айналу бағытын сәйкес таңбалармен сипаттауға болады. Егер күш денені *O* нүктесінен сағат тілі айналысына кері бағытта айналдыруға тырысса, онда айналдыру бағытының таңбасы оң (шартты түрде), ал сағат тілінің айналысымен бағыттас айналдыруға тырысса теріс деп есептелінеді.



3.1-сурет

Енді $\overline{F}$ күшінің жазықтықта орналасқан *O* нүктесіне қатысты моментінің мынадай ұғымын енгізейік: Күштің жазықтықтағы *O* нүктесіне қатысты моменті деп оң не теріс таңбамен алынған күш модулі мен иіннің көбейтіндісіне тең скалярлық шаманы айтады.

$\overline{F}$ күшінің *O* нүктесіне қатысты моментін $M_O(\overline{F})$ символымен белгілейміз. Онда

$$M_O(\overline{F}) = \pm F \cdot h. \qquad (3.1)$$

Күштің *O* нүктесіне қатысты моменті жазықтықта орналасқан күштер жүйесі үшін скалярлық шама болып табылады. *O* нүктесін кейде момент центрі деп атайды.

Сонымен, бір жазықтықта орналасқан жүйе күштерінің моменттері бір-бірінен шамасы мен таңбасы арқылы өзгешілігі болатынын көруге болады. *O* нүктесіне қатысты күш моментінің шамасы күш модулі мен осы нүкте арқылы анықталған иіннің көбейтіндісіне тең.

$\overline{F}$ күшінің *O* нүктесіне қатысты моментінің абсолюттік шамасын *OAB* үшбұрышы ауданының екі еселенген (удвоенная) көбейтіндісіне тең деп есептеуге болады.

$$M_O(\overline{F}) = F \cdot h = 2S_{\Delta OAB}.$$

Күштің нүктеге қатысты моментінің СИ жүйесіндегі өлшем бірлігі

$$|M_O(\overline{F})| = |\overline{F}| \cdot |h| = Н \cdot м.$$

Күштің нүктеге қатысты моментінің МКГСС жүйесіндегі өлшем бірлігі

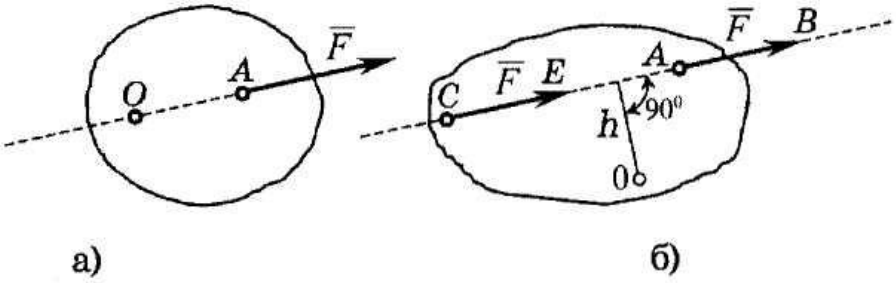
$$|M_O(\overline{F})| = |\overline{F}| \cdot |h| = кГ \cdot м.$$

Күштің нүктеге қатысты моментінің қасиеттері:

1. Егер күш нөлге тең болса, немесе оның әсер ету сызығы момент центрі болып табылатын *O* нүктесі арқылы (3.2, а-сурет) өтсе (күш ииі нөлге тең), онда күштің осы *O* нүктесіне қатысты моменті нөлге айналады.

2. Күштің түсу нүктесін, оның әсер ету сызығы бойымен тасымалдағаннан (3.2, б-сурет) күш моментінің шамасы өзгермейді, яғни $M_O(\overline{F}) = const.$

3. Күштің нүктеге қатысты моментінің денеге әсерін өзгертпей, күштің шамасын, күш моментінің иінін сәйкес түрде көбейтуге немесе кемітуге болады. Күштің нүктеге қатысты моментінің үшінші қасиеті механиканың алтын заңына сәйкес келеді. (Жолдан неше есе ұтсак, күштен сонша есе ұтыламыз және керісінше, жолдан неше есе ұтылсак күштен сонша есе ұтамыз.)

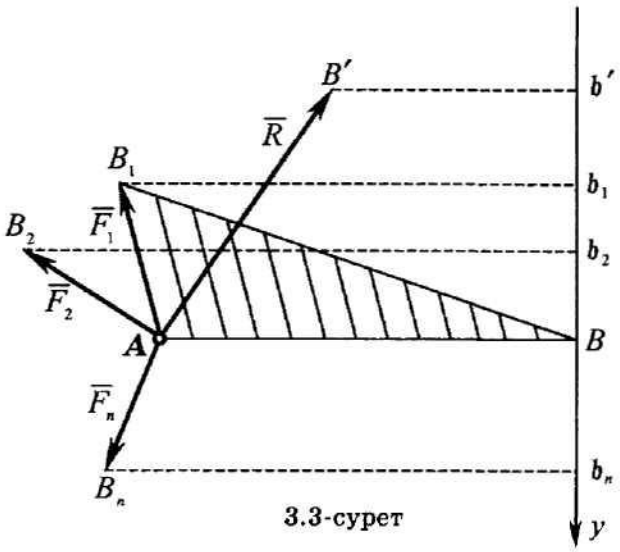


3.2-сурет

§ 3.2 Теңәсер етуші күштің моменті туралы Вариньон теоремасы

Теорема. Бір жазықтықта орналасқан жинақталатын күштер жуйесінің тең әсер етуші күшінің осы жазықтықта жатқан кез келген нүктеге қатысты моменті құраушы күштердің сол нүктеге қатысты моменттерінің алгебралық қосындысына тең.

$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n)$ жинақталатын күштер жүйесі берілді дейік (3.3-сурет). Осы күштер жүйесінің теңәсер етуші $\overline{R}$ күшінің *B* нүктесіне қатысты моментін анықтайық. Ол үшін жинақталатын күштер жүйесінің әсер ету сызықтары қиылысатын *A* нүктесін *B* нүктесімен қосамыз. *B* нүктесінен *BA* кесіндісіне перпендикуляр бағытта *By* өсін жүргізейік. Бұл өстің оң бағыты денеге әсер ететін күштердің осы өске проекцияларының және *B* нүктесіне қатысты моменттерінің таңбаларына сәйкес бағытталған.



3.3-сурет

$\overline{F}_1$ күшінің B нүктесіне қатысты моменті

$$M_B\left(\overline{F}_1\right) = 2S_{\Delta BAB_1} = AB \cdot F_{1y}.$$

Мұнда $F_{1y} = Bb_1 - \overline{F}_1$ күшінің By өсіне проекциясы.

Теңәсер етуші күштің проекциясы туралы теоремаға сүйене отырып, (2.1) теңдігін By өсіне проекциялап және оның екі жағын AB-ға көбейтіп жазсак

$$R_y \cdot AB = \left(F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny}\right) \cdot AB$$

және

$$F_{1y} \cdot AB = M_B\left(\overline{F}_1\right), \quad F_{2y} \cdot AB = M_B\left(\overline{F}_2\right) \ \ldots \ F_{ny} \cdot AB = M_B\left(\overline{F}_n\right)$$

енді

$$M_B\left(\overline{R}\right) = M_B\left(\overline{F}_1\right) + M_B\left(\overline{F}_2\right) + \ldots + M_B\left(\overline{F}_n\right) = \sum_1^n M_B\left(\overline{F}_k\right). \qquad (3.3)$$

Сонымен теорема дәлелденді.

§ 3.3 Иінтірек (рычаг) және оның тепе-теңдік шарты мен теңдеуі

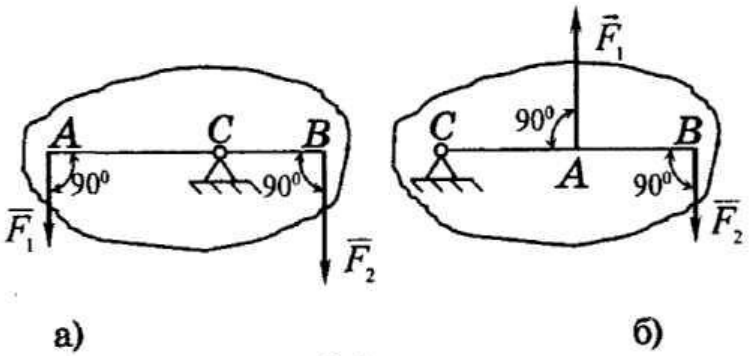
Аристотель және одан кейінірек Архимед берген иінтіректің анықтамасы мен тепе-теңдік шарты бір-біріне сәйкес келеді.

Күштің әсерінен тұрақты өстің төңрегінде айналу мүмкіндігі бар кез келген қатты дене иінтірек деп аталады.

Иінтрек екі текке бөлінеді:

1-текті иінтірек (3.4, а-сурет).

2-текті иінтірек (3.4, б-сурет), мұнда $F_1 > F_2$.



3.4-сурет

Архимед анықтамасы бойынша иінтіректің тепе-теңдік шарты:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}.$$

Тепе-теңдік шарты орындалуы үшін иінтірекке әсер етуші күштердің тең әсер етуші күші *C* нүктесіндегі байланыстың реакциясымен теңгерілуі қажет.

Сондықтан Вариньон теоремасы бойынша:

$$M_C\left(\overline{R}\right) = \sum_{k=1}^{n} M_C\left(\overline{F}_k\right),$$

мұнда

$$\sum_{k=1}^{n} M_C\left(\overline{F}_k\right) = M_C\left(\overline{F}_1\right) + M_C\left(\overline{F}_2\right) = F_1 \cdot AC - F_2 \cdot BC,$$

ал тепе-теңдік шартынан $F_1 \cdot AC = F_2 \cdot BC,$ екенін ескерсек, онда

$$\sum_{k=1}^{n} M_C\left(\overline{F}_k\right) = 0. \qquad (3.4)$$

(3.4) формула иінтірек тепе-теңдігінің теңдеуі болып саналады, яғни иінтірек тепе-теңдікте болуы үшін оған әсер етуші күштердің тұрақты өс өтетін дененің нүктесіне қатысты моменттерінің алгебралық қосындысы нөлге тең болуы қажет және жеткілікті.

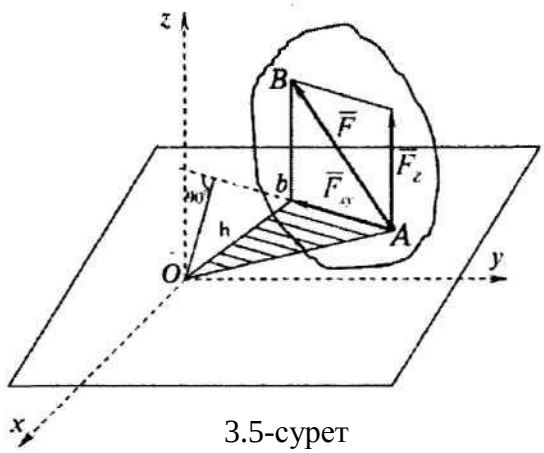
Аударылу әдісі. Егер дененің аударылу (төңкерілу) қаупі болған жағдайда, ол рычагқа айналады да, оған иінтіректің тепе-теңдік теңдеуі қолданылады, яғни әсер етуші күштердің осы аударылу нүктесіне қатысты моменттерінің алгебралық қосындысы нөлге теңестіріледі.

§ 3.4 Күштің өске қатысты моменті және оның қасиеттері

Қатты дененің *A* нүктесіне $\overline{F}$ күші түсірілген дейік (3.5-сурет). Осы берілген күштің түсу нүктесі арқылы *z* өсіне перпендикуляр бағытта *xOy* жазықтығын жүргізіп $\overline{F}$ күшін *z* өсіне параллель $\overline{F}_z$ және *xOy* жазықтығында жататын $\overline{F}_{xy}$ құраушыларына жіктейік, яғни

$$\overline{F} = \overline{F}_z + \overline{F}_{xy}.$$

$\overline{F}_{xy}$ екінші жағынан $\overline{F}$ күшінің *xOy* жазықтығындағы проекциясын аныктайды. *Oz* өсі мен *xOy* жазықтығы қиылысатын *O* нүктесінен $\overline{F}_{xy}$ күшінің әсер ету сызығына түсірілген перпендикулярды *h* деп белгілейік.



3.5-сурет

Көрсетілген жағдайда $\overline{F}$ күшінің $\overline{F}_z$ құраушысы денені z өсінің төңірегінде айналдыра алмайды (өстің бойымен сырғытуға тырысады), ал $\overline{F}_{xy}$ күші денені *O* нүктесінен (*z* өсінің төңірегінде) айналдыруға тырысады, яғни $\overline{F}$ күшінің денені *z* өсінің төңірегінде айналдыру қабілеті, $\overline{F}_{xy}$ күшінің *O* нүктесіне қатысты моментіне келтіріледі. Сондықтан $\overline{F}_{xy}$ күшінің *O* нүктесіне қатысты $M_O\left(\overline{F}_{xy}\right) = F_{xy} \cdot h$ моментін берілген $\overline{F}$ күшінің *z* өсіне қатысты моменті деп санауға болады. Олай болса,

$$M_z\left(\overline{F}\right) = M_z\left(\overline{F}_{xy}\right) = M_O\left(\overline{F}_{xy}\right) = \pm F_{xy} \cdot h = 2S_{\Delta OAb}. \qquad (3.5)$$

Егер $\overline{F}$ күші денені *z* өсінің оң ұшынан қарағанда сағат тілі айналысына кері бағытта айналдыруға тырысса, онда күш моментінің таңбасы оң деп алынады, ал сағат тілінің айналысымен бағыттас айналдыруға тырысса күш моменті теріс таңбамен алынады.

Сонымен, күштің өске қатысты моменті деп, күштің осы өске перпендикуляр жазықтыққа проекциясының, өс пен жазықтықтың қиылысу нүктесіне қатысты моментінің алгебралық шамасын айтады.

Жалпы $\overline{F}$ күшінің кез келген *z* өсіне қатысты моментін аныктау үшін мынадай ережені қолданған жөн:

1. Берілген *z* өсіне перпендикуляр *xy* жазықтығын жүргізу.
2. $\overline{F}$ күшінің осы жазықтықтағы $\overline{F}_{xy}$ проекциясының модулін анықтау.
3. *z* өсі және *xy* жазықтығының қиылысу *O* нүктесінен $\overline{F}_{xy}$ құраушысының әсер ету сызығына перпендикуляр жүргізіп *h* қашықтығын, яғни $\overline{F}_{xy}$ күшінің *O* нүктесіне қарағандағы иінін анықтау.
4. $F_{xy} \cdot h$ көбейтіндісін аныктау.
5. $\overline{F}_{xy}$ күшінің *O* нүктесіне қатысты моментінің таңбасын анықтау.

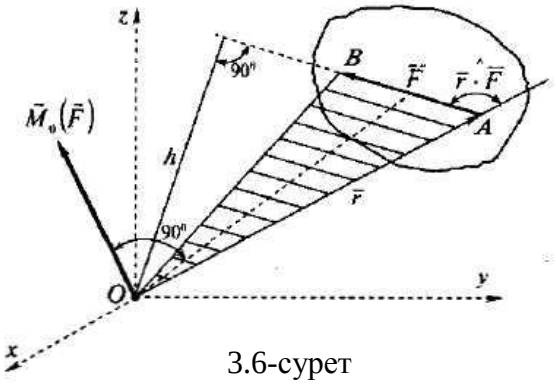
Күштің өске қатысты моменттерінің қасиеттері:

1. Күшті әсер ету сызығы бойымен дененің кез келген нүктесіне тасымалдағаннан, оның өске қатысты моменті өзгермейді, өйткені мұндай тасымалдаудан күштің жазықтыққа проекциясы мен *h* перпендикулярының ұзындығы сол қалпында қалады.

2. Күштің әсер ету сызығы өсті қиып өтсе $(h = 0)$ немесе күш осы өске параллель болса $(F_{xy} = 0)$, күштің өске қатысты моменті нөлге тең болады.

§ 3.5 Күштің нүктеге қатысты моментінің векторы

Жоғарыда күштің денені айналдырушы әсері күш моментімен анықталатыны айтылған болатын. Енді күш моментінің үш сипаттамасының негізінде күш моментін векторлық шама деп алуға болатынын көрсетейік. Бұл вектор аталған үш сипаттама бойынша: 1) $F \cdot h$ көбейтіндісіне тең момент модулімен; 2) $\overline{F}$ күші және O нүктесі арқылы жүргізілген момент жазықтығының кеңістіктегі орнымен (айналдыру жазықтығы); 3) осы жазықтықтың айналу бағытымен анықталады. Осыдан $\overline{F}$ күшінің O нүктесіне қатысты (3.6-сурет) моментінің мынадай векторлық анықтамасын тұжырымдауға болады. $\overline{F}$ күшінің O нүктесіне қатысты моменті деп шамасы күш модулі мен иіннің көбейтіндісіне тең, O нуктесінде момент жазықтығына перпендикуляр түсірілген және ұшынан қарағанда күш әсерінен, денені бұру бағыты сағат тілі айналысына қарама-қарсы бағытта көрінетін векторды айтады.



3.6-сурет

Күштің O нүктесіне қатысты момент векторын $\overline{M}_O(\overline{F})$ деп белгілейік. Осы моменттің модулі $\left|\overline{M}_O(\overline{F})\right| = F \cdot h$, мүнда h - күш иіні (O нүктесінен $\overline{F}$ күшінің әсер ету сызығына жүргізілген перпендикулярдың ұзындығы).

Енді $\overline{F}$ күшінің O нүктесіне қатысты моментінің векторын $\overline{r} \times \overline{F}$ векторлық көбейтіндісі арқылы өрнектейік, мұнда $\overline{r} = \overline{OA}$ векторы A нүктесіне түсірілген $\overline{F}$ күшінің радиус-векторы деп аталады. Осы векторлық көбейтіндінің модулі.

$$\left|\overline{r} \times \overline{F}\right| = F \cdot r \cdot \sin\left(\overline{r} \wedge \overline{F}\right) = F \cdot h = 2S_{\Delta OAB},$$

мұнда $2S_{\Delta OAB}$ - OAB үшбұрыш ауданының екі еселенген көбейтіндісі.

$\overline{F}$ күшінің O нүктесіне қатысты $\overline{M}_O(\overline{F})$ вектор-моментінің модулі $\left|\overline{M}_O(\overline{F})\right| = F \cdot h = 2S_{\Delta OAB}$ болғандықтан,

$$\left|\overline{M}_O(\overline{F})\right| = \left|\overline{r} \times \overline{F}\right|.$$

$\overline{r} \times \overline{F}$ векторы OAB жазықтығына перпендикуляр бағытталған және ұшынан қарағанда біріші $\overline{r}$ көбейткіш F векторынан екінші $\overline{F}$ көбейткіш векторына қарай қысқаша айналу бағыты (векторлар бір нүктеден салынғанда) сағат тілі айналысына кері бағытта көрінеді. $\overline{F}$ күшінің O нүктесіне қатысты $\overline{M}_O(\overline{F})$ вектор-моменті де дәл осылай бағытталады. Олай болса, $\overline{M}_O(\overline{F})$ вектор-моментінің модулі $\overline{r} \times \overline{F}$ векторлық көбейтіндісінің модуліне тең екенін және осы екі вектордың бағыттары бірдей екенін ескере отырып $\overline{M}_O(\overline{F})$ вектор-моментін мынадай формула арқылы жазамыз:

$$\overline{M}_O\left(\overline{F}\right) = \overline{r} \times \overline{F}. \qquad (3.6)$$

Сонымен, $\overline{F}$ күшінің O нуктесіне қатысты моменті деп күш түсірілген нүктенің берілген O нүктесінен жүргізілген радиус-векторы мен күш векторының векторлық көбейтіндісіне тең векторды айтады.

§ 3.6 Күштің өске қатысты моменті және осы өсте жататын нүктеге қатысты моментінің арасындағы байланыс

Дененің A нүктесіне әсер ететін $\overline{F}$ күші (3.7-сурет) берілді дейік. $\overline{F}$ күшінің O нүктесіне қатысты моменті OAB үшбұрышының жазыктығына перпендикуляр бағытталған $\overline{M}_O\left(\overline{F}\right)$ векторымен аныкталады және оның модулі екі еселенген OAB үшбұрыш ауданына тең деп жоғарыда айтылған болатын.

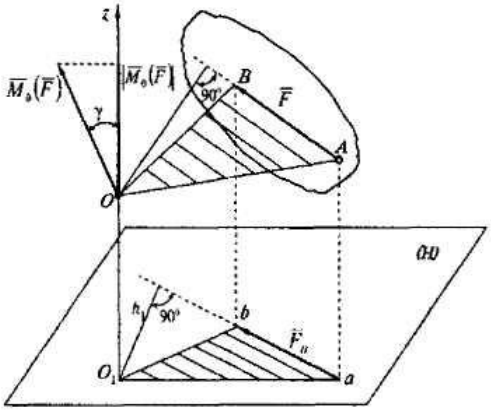
$$\overline{M}_O\left(\overline{F}\right) = 2S_{\Delta OAB}. \qquad (3.7)$$

z өсіне перпендикуляр жүргізілген H жазыктығындағы $\overline{F}$ күшінің проекциясын F_H деп белгілей отырып, $\overline{F}$ күшінің z өсіне қатысты моментін анықтаймыз.

$$M_z\left(\overline{F}\right) = M_{O_1}\left(\overline{F}_H\right) = F_H \cdot h_1 = 2S_{\Delta O_1ab}. \qquad (3.8)$$

OAB және O_1ab үшбұрыштар арасындағы бұрыш оларға жүргізілген перпендикулярлардың арасындағы γ бұрышына тең. Геометриядан белгілі формуланы пайдаланып осы үшбұрыштардың аудандарының арасындағы тәуелділікті былай жазамыз:

$$2S_{\Delta O_1ab} = 2S_{\Delta OAB} \cdot \cos\gamma \qquad (3.9)$$



3.7 - сурет

Осы теңдікті (3.8) формулаға әкеліп қойсақ,

$$M_z\left(\overline{F}\right) = 2S_{\Delta OAA}\cos\gamma. \qquad (3.10)$$

$\overline{M}_O\left(\overline{F}\right)$ вектор моментінің z өсіне проекциясы

$$\left|\overline{M}_O\left(\overline{F}\right)\right|_z = \left|\overline{M}_O\left(\overline{F}\right)\right|\cos\gamma.$$

Осы теңдіктің оң жағын (3.7) формуласы арқылы өрнектесек,

$$\left|\overline{M}_O\left(\overline{F}\right)\right|_z = 2S_{\Delta OAB}\cos\gamma.$$

Осы жазылған теңдікті (3.10) формуласымен салыстыра отырып, мынадай теңдік жазуға болады.

$$M_z\left(\overline{F}\right) = \left|\overline{M}_O\left(\overline{F}\right)\right|_z. \qquad (3.11)$$

Сонымен, $\overline{F}$ күшінің z өсіне қатысты моменті, $\overline{F}$ кушінің осы өсте жататын O нүктесіне қатысты вектор-моментінің өске проекциясына тең болады.

§ 3.7 Күштің координаталар өстеріне және координаталар бас нүктесіне қатысты моменттерінің аналитикалық формулалары

Векторлық алгебрадан белгілі (3.6) формуласын мына түрдегі анықтауыш арқылы жаза аламыз

$$\overline{M}_O\left(\overline{F}\right)=\overline{r}\times\overline{F}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\left(yF_z-zF_y\right)\overline{i}+\left(zF_x-xF_z\right)\overline{j}+\left(xF_y-yF_x\right)\overline{k}. \qquad (3.12)$$

мұнда $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$ - бірлік векторлар (орттар), *x, y, z* - күш түсірілген нүктенің координаттары, F_x, F_y, F_z – күштің өстерге проекциялары.

Енді $\overline{M}_O\left(\overline{F}\right)$ векторын *x, y, z* координаталар өстеріне жіктеп жазайық

$$\overline{M}_O\left(\overline{F}\right)=\left|\overline{M}_O\left(\overline{F}\right)\right|_x\overline{i}+\left|\overline{M}_O\left(\overline{F}\right)\right|_y\overline{j}+\left|\overline{M}_O\left(\overline{F}\right)\right|_z\overline{k}. \qquad (3.13)$$

Осы жазылған теңдікті (3.12) теңдгімен салыстырудан $\overline{M}_O\left(\overline{F}\right)$ вектор-моментінің координаталар өстеріне проекцияларын анықтаймыз

$$\left|\overline{M}_O\left(\overline{F}\right)\right|_x=yF_z-zF_y;\quad \left|\overline{M}_O\left(\overline{F}\right)\right|_y=yF_x-zF_z;\quad \left|\overline{M}_O\left(\overline{F}\right)\right|_z=yF_y-zF_x.$$

3.11 формула бойынша $\overline{F}$ күшінің координаталар өстеріне катысты моменттерінің аналитикалык түрдегі өрнектерін былай жазамыз:

$$M_x\left(\overline{F}\right)=yF_z-zF_y;\quad M_y\left(\overline{F}\right)=yF_x-zF_z;\quad M_z\left(\overline{F}\right)=yF_y-zF_x. \qquad (3.14)$$

Сонымен, қабырғалары проекциялары болып табылатын *F* күшінің координаталар бас нүктесіне қатысты момент векторының модулі

$$\left|M_O\left(\overline{F}\right)\right|=\sqrt{\left[M_x\left(\overline{F}\right)\right]^2+\left[M_y\left(\overline{F}\right)\right]^2+\left[M_z\left(\overline{F}\right)\right]^2}=\sqrt{\left(yF_z-zF_y\right)^2+\left(zF_x-xF_z\right)^2+\left(xF_y-yF_x\right)^2}. \qquad (3.15)$$

$\overline{M}_O\left(\overline{F}\right)$ вектор-моментінің бағыты бағыттаушы косинустар арқылы анықталады

$$\cos\left[\overline{M}_O\left(\overline{F}\right)\wedge\overline{i}\right]=\frac{M_x\left(\overline{F}\right)}{\left|\overline{M}_O\left(\overline{F}\right)\right|};$$

$$\cos\left[\overline{M}_O\left(\overline{F}\right)\wedge\overline{j}\right]=\frac{M_y\left(\overline{F}\right)}{\left|\overline{M}_O\left(\overline{F}\right)\right|}; \qquad (3.16)$$

$$\cos\left[\overline{M}_O\left(\overline{F}\right)\wedge\overline{k}\right]=\frac{M_z\left(\overline{F}\right)}{\left|\overline{M}_O\left(\overline{F}\right)\right|}.$$