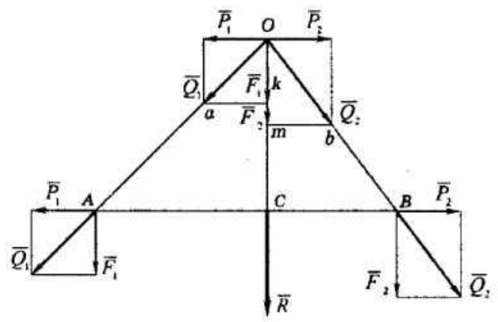
IV тарау. ПАРАЛЛЕЛЬ КҮШТЕР ЖҮЙЕСІ

§ 4.1 Бірыңғай бағытталған параллель екі күш жүйесін тең әсер етуші күшке келтіру

Қатты дененің A және B нүктелеріне әсер ететін $\overline{F}_1$ және $\overline{F}_2$ параллель күштері (4.1-сурет) берілді дейік. Осындай екі күштің әр уакытта тең әсер етушісі болатынын дәлелдейік. Ол үшін денеге AB түзуінің бойымен шамалары тең, бағыттары қарама-қарсы $\overline{P}_1$ және $\overline{P}_2$ күштерін түсірейік. 2-аксиома бойынша $(\overline{P}_1, \overline{P}_2) \Leftrightarrow 0$.



4.1-сурет

Параллелограмм ережесі бойынша A нүктесіндегі $\overline{P}_1$ және $\overline{F}_1$ күштерін өзара қосып $\overline{Q}_1$, ал B нүктесіндегі $\overline{P}_2$ және $\overline{F}_2$ күштерін косудан $\overline{Q}_2$ күшін табамыз:

$\overline{P}_1 + \overline{F}_1 = \overline{Q}_1$ және $\overline{P}_2 + \overline{F}_2 = \overline{Q}_2$.

$\overline{Q}_1$ және $\overline{Q}_2$ күштерін, олардың қиылысу нүктесі болып табылатын O нүктесіне көшіріп, керісінше, бастапқы құраушыларына жіктейміз. Мұндағы $\overline{P}_1 = -\overline{P}_2$ өзара теңесетін күштерді алып тастасақ (2-аксиома), бір түздің бойымен бағытталған $\overline{F}_1$ және $\overline{F}_2$ күштері қалады.

Бір түздің бойымен бағытталған $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ күштері тең әсер етуіші $\overline{R}$ күшіне келтіріледі:

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2) \Leftrightarrow \overline{R}.$$

Сан шамасы жағынан R күші F_1 және F_2 күштерінің алгебралық қосындысына тең болады деп жаза аламыз:

$$R = F_1 + F_2. \qquad (4.1)$$

$\overline{R}$ күшін әсер ету сызығының бойымен жылжыта отырып, O нүктесінен C нүктесіне көшіреміз.

OAC және Oak үшбұрыштарының ұқсастығынан

$$\frac{AC}{OC} = \frac{P_1}{F_1}.$$

Ал OBC және Obm үшбұрыштарының ұқсастығынан

$$\frac{BC}{OC} = \frac{P_2}{F_2}.$$

Бұдан

$$F_1 AC = P_1 OC \text{ және } F_2 BC = P_2 OC.$$

$P_1 = P_2$ екенін ескере отырып соңы екі теңдіктен

$$F_1 AC = F_1 BC \text{ немесе } \frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1}. \qquad (4.2)$$

Бұл теңдік C нүктесі AB кесіндісін $\overline{F}_1$ және $\overline{F}_2$ күштерінің шамаларына кері қатынаста болатындай етіп екіге бөлетінін көрсетеді. $AC + BC = AB$ және $F_1 + F_2 = R$ екенін ескере отырып C нүктесінің орнын аныктайтын теңдікті жазамыз

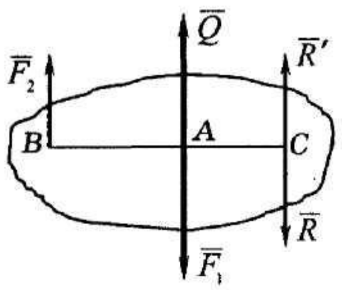
$$\frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AB}{R}. \tag{4.3}$$

Сонымен, бірыңғай бағытталған екі параллелъ күштің тең әсер етуші күшінің модулі берілген күштердің қосындысына тең және күштермен бір жаққа қарай бағытталады. C нүктесі берілген күштердің әсер ету нүктелерін қосатын AB кесіндісін күштердің шамаларына кері қатынаста болатындай етіп екі бөлікке бөледі.

§ 4.2 Қарама-қарсы бағытталған параллель екі күш жүйесін теңәсер етуші күшке келтіру

Қатты дененің A және B нүктелеріне қарама-қарсы бағытталған параллель $\overline{F}_1$ және $\overline{F}_2$ күштері түсірілген болсын. Бұл күштерді өзара тең емес күштер деп алайық, атап айтқанда, $F_1 > F_2$ болсын дейік (4.2-сурет). AB түзуінің созындысында алынған C нүктесіне $\overline{F}_1$ және $\overline{F}_2$ күштеріне параллель өзара теңескен $\overline{R}$ және $\overline{R}'$ күштерін түсіреміз. E күшінің модулі:

$$R = F_1 - F_2 \tag{4.4}$$



4.2-сурет

деп және C нүктесінің орнын 4.3-қатынасты қанағаттандыратын етіп алмыз:

$$AC = \frac{F_2}{R} AB \text{ немесе } BC = \frac{F_1}{R} AB. \tag{4.5}$$

Енді $\overline{F}_2$ және $\overline{R}'$ күштерін қосамыз

$$Q = F_2 + R' = F_2 + F_1 - F_2.$$

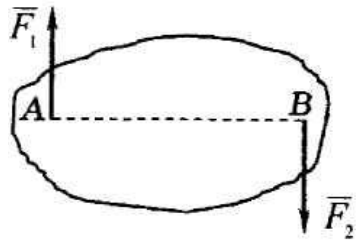
Бұдан $\overline{Q}$ және $\overline{F}_1$ күштерінің модульдері өзара тең және қарама-қарсы бағытталатынын көреміз, яғни $\overline{Q}$ және $\overline{F}_1$ күштер жүйесі нөлге эквивалент болады. Соның нәтижесінде $\overline{F}_1$ және $\overline{F}_2$ күштері бір ғана $\overline{R}$ күшіне эквивалент болады:

$$\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2\right) \Leftrightarrow \overline{R}. \tag{4.6}$$

Модулі мен бағыты (4.4) және (4.5)_формулалармен анықталатын $\overline{R}$ күшін қарама-қарсы бағытталған $\overline{F}_1$ және $\overline{F}_2$ параллель күштер жүйесінің теңәсер етуші күші деп атаймыз.

Сонымен, модульдері тең емес қарама-қарсы бағытталған екі параллелъ күштің тең әсер етуші күшінің модулі берілген күштер айырымына тең және C нүктесінен үлкен күштің әсер ету жағына қарай бағытталады. C нүктесі берілген күштердің әсер ету нүктелерін қосатын AB кесіндісін, күштердің шамаларына кері қатынаста болатындай етіп, екі бөлікке сырттай бөледі.

Жеке жағдай. Модульдері $F_1 = F_2$ қарама-қарсы бағытталған параллель күштерді қарастырайық (4.3-сурет). (4.4) және (4.6) формулаларының негізінде $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2\right) \Leftrightarrow \overline{R} \Leftrightarrow 0$, яғни дененің тепе-теңдік шарты сақталып тұр, бірақ дененің тепе-теңдікте болмайтынына көз жеткізу қиын емес. Осындай модульдері тең қарама-қарсы параллель бағытталған екі күш механикада кос күш деп аталады.



4.3-сурет

§ 4.3 Параллель күштер центрі

Қатты дененің $A_1, A_2, \ldots, A_n$ нүктелеріне бірыңғай бағытталған $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$, параллель күштері әсер ететін болсын (4.4-сурет).

Жүйе күштерін бір бағытта бірдей бұрышқа бұрғаннан жүйенің тең әсер етуші күші $\overline{R}$ тұрақты бір C нүктесі арқылы өтетінін дәлелдейік. Алдымен $\overline{F}_1$ және $\overline{F}_2$ күштерін (4.1) формула бойынша қосамыз:

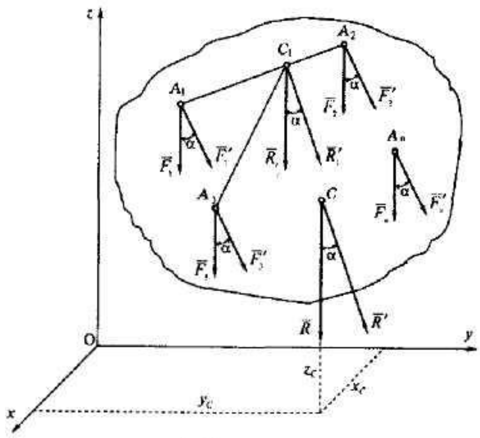
$$R_1 = F_1 + F_2.$$

$\overline{R}_1$ күшінің түсу C_1 нүктесі A_1A_2 кесіндісінің бойында жатады және C_1 нүктесінің орнын (4.2) қатынасты қанағаттандыратын етіп аламыз:

$$\frac{A_1C_1}{F_2} = \frac{C_1A_2}{F_1}. \tag{4.7}$$

Келесіде $\overline{R}_1$ және $\overline{F}_3$ күштерін өзара қосып, $\overline{R}_2$ теңәсер етушісін аламыз:

$$R_2 = F_1 + F_2 + F_3.$$


4.4-сурет

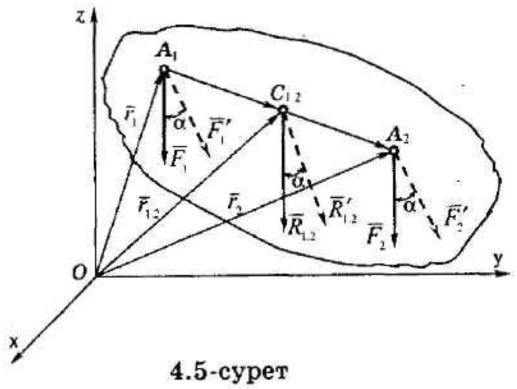
Оның C_2 түсу нүктесі (4.2) формула бойынша мынадай қатынасты қанағаттандырады

$$\frac{C_1C_2}{F_3} = \frac{C_2A_3}{R_1}.$$

Осындай ретпен барлық күштерді қоссак параллель күштер жүйесінің тең әсер етуші $\overline{R}$ күшінің модулі күштердің алгебралық қосындысына тең және C нүктесінен күштерге параллель бірыңғай бағытталатынын көруге болады. Егер жүйедегі параллель күштер саны n болса, онда тең әсер етуші $\overline{R}$ күшінің модулі:

$$R = \sum_{k=1}^{n} F_k.$$

Егер әрбір $\overline{F}_k$ күшін өзінің A_k түсу нүктесінен бір бағытта бірдей бұрышқа бұрсак, онда тең әсер етуші $\overline{R}$ күші де өзінің құраушы күштерге параллельдігін сақтай отырып C нүктесінен осы бағытта сондай бұрышқа бұрылады. Осындай қасиеті бар C нүктесі параллелъ күштер центрі деп аталады.



4.5-сурет

Енді параллель күштер центрінің координаталарын аналитикалық әдіспен аныктайық. C нүктесінің алынған $Oxyz$ санақ жүйесіне қарағандағы орны өзгермейді. Алдымен бірыңғай бағытталған екі $\overline{F}_1$ және $\overline{F}_2$ параллель күштер центрінің орнын аныктайық (4.5-сурет) $\overline{F}_1$ және $\overline{F}_2$ күштерінің түсу нүктелерінің орны O нүктесінен жүргізілген $\overline{r}_1$ және $\overline{r}_2$ радиус-векторларымен анықталсын дейік. Осы күштердің $\overline{R_{12}}$ тең әсер етуші күшінің әсер ету сызығы A_1A_2 кесіндісінің C_{12} нүктесі арқылы өтеді. $\overline{F}_1$ және $\overline{F}_2$ күштерін кез келген бір α бұрышына бұрсақ жаңадан пайда болған $\overline{R'}_{12}$ тең әсер етуші күшінің әсер ету сызығы тағы да C_{12} нүктесі арқылы өтеді. Сондықтан C_{12} нүктесі $\overline{F}_1$ және $\overline{F}_2$ параллель күштерінің центрі болады. C_{12} нүктесінің орнын анықтайтын радиус-векторды $\overline{r}_{12}$ деп алайық. Онда

$$\overline{r}_1 + \overline{A_1C_{12}} = \overline{r}_{12} \text{ және } \overline{r}_{12} + \overline{C_{12}A_2} = \overline{r}_2.$$

$\overline{A_1C_{12}}$ және $\overline{C_{12}A_2}$ векторлары коллениарлы болғандықтан, (4.7) қатынасты мынадай түрде жазуға болады

$$\frac{\overline{A_1C_{12}}}{F_2} = \frac{\overline{C_{12}A_2}}{F_1}$$

немесе

$$\frac{\overline{r}_{12} - \overline{r}_1}{F_2} = \frac{\overline{r}_2 - \overline{r}_{12}}{F_1}. \tag{4.8}$$

(4.8) теңдіктің $\overline{r}_{12}$ арқылы шешімі:

$$\overline{r}_{12} = \frac{\overline{r}_1 F_1 + \overline{r}_2 F_2}{F_1 + F_2}. \tag{4.9}$$

Осы формула екі $\overline{F}_1$ және $\overline{F}_2$ параллель күштері центрінің орнын анықтайды.

Осындай ретпен n санды параллель күштер жүйесі C центрінің $\overline{r}_c$ радиус-векторын табамыз:

$$\overline{r}_c = \frac{\overline{r}_1 F_1 + \overline{r}_2 F_2 + \ldots + \overline{r}_n F_n}{F_1 + F_2 + \ldots + F_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k F_k}{\sum_{k=1}^{n} F_k}$$

Немесе

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} \bar{r}_k F_k}{R}. \qquad (4.10)$$

Мұнда $R = \sum_{k=1}^{n} F_k$ параллель күштер жүйесінің тең әсер етуші күші, $\bar{r}_k - \bar{F}_k$ күшінің түсу нүктесінің радиус-векторы.

(4.10) векторлық теңдіктің координаталар өстеріндегі проекциялары:

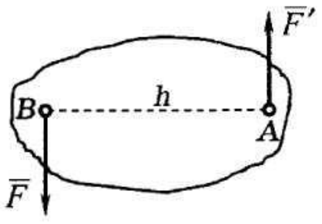
$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k x_k}{R}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k y_k}{R}; \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k z_k}{R}. \qquad (4.11)$$

Осы жазылған (4.10) және (4.11) формулалар қарама-қарсы бағытталған параллель күштер жүйесі үшін де орынды болады (бір бағытта күштер плюс таңбасымен, қарама-қарсы бағытта минус таңбасымен алынады және $R \neq 0$ болуы қажет).

V тарау. ҚОС КҮШ ТЕОРИЯСЫ

§ 5.1 Қос күш. Қос күш моменті

Шамалары тең, бағыттары параллель, қарама-қарсы және әсер ету сызықтары бір түзудің бойында жатпайтын $(\bar{F}, \bar{F}')$ күштер жүйесі (5.1-сурет) қос күш немесе күштер жұбы деп аталады. Мұндай күштер жұбы, яғни екі күштен құралатын жүйе тең әсер етуші күшке келтірілмейді және тепе-теңдікте болмайды. Қос күшті бір күшпен теңгеруге болмайды. Өйткені мұндай теңгеруші күш бар десек, қос күш тең әсер етуші күшке келтірілген болар еді. Сонымен, тепе-теңдікте болмайтын, тең әсер етуші күшке келтірілмейтін және бір күшпен теңгерілмейтін қос күштің басқа күштер жүйесінің арасында өзіндік ерекше орны болатын жаңа статикалык элемент екенін атап өтуге болады.



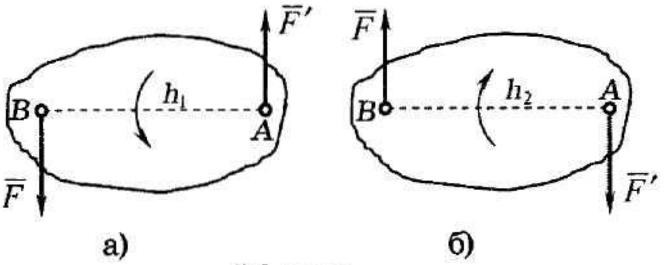
5.1-сурет

Егер денеге жасалынған байланыстар дене қозғалысын шектемесе, онда қос күш денені айналмалы қозғалысқа келтіруге тырысады.

Қос күш орналасқан жазықтыкты қос күш әсерінің жазықтығы, ал жұп күштерінің әсер ету сызықтарының арасындағы ең қысқа қашықтык h қос күш иіні деп аталады. Қос күштің денені айналдыру қабілеті жұп күштерінің шамасы және h иініне тікелей байланысты қос күш моментімен сипатталады. Қос күш моментінің шамасы оң немесе теріс таңбамен алынған күш модулі мен иіннің көбейтіндісіне тең. Қос күш моментін M немесе $M(\bar{F}, \bar{F}')$ деп белгілейміз. Онда

$$M = \pm Fh = \pm F'h. \qquad (5.1)$$

Егер қос күш денені сағат тілі айналысына кері бағытта (5.2, а-сурет) айналдыруға тырысса жұп моментінің таңбасы оң, ал сағат тілі айналысымен бағыттас (5.2, б-сурет) айналдыруға тырысса теріс деп есептелінеді. Демек, қос күштің денеге әсері күштің нүктеге қатысты моменті сияқты, жұп күштерінің модулімен, әсер ету жазықтығымен және осы жазықтықта денені бұру бағытымен сипатталады.



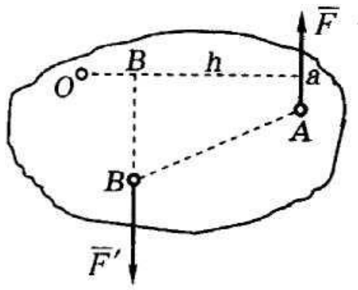
5.2-сурет

5.2-суреттен қос күш моменті оның бір күшінің екінші күш түсірілген нүктеге қатысты алынған моментіне тең болатынын көреміз.

$$M = M_A(\overline{F}) = M_B(\overline{F'}). \tag{5.2}$$

Енді мынадай теореманы дәлелдейік: қос күштің әсер ету жазықтығында орналасқан кез келген нүктеге қатысты алынған жұп күштері моменттерінің алгебралық қосындысы қос күш, моментіне тең.

Қатты денеге $(\overline{F},\overline{F'})$ қос күші (5.3-сурет) әсер ететін болсын. Кез келген бір O нүктесінен жұп күштерінің әсер ету сызықтарына перпендикуляр жүргізейік. Осы перпендикуляр және әсер ету сызыктарының қиылысу нүктелерін ***a*** және ***b*** деп белгілейік. Жұп күштерінің O нүктесіне қатысты моменттері $M_O(\overline{F}) = F \cdot Oa$ және $M_O(\overline{F'}) = -F' \cdot Ob$, $F = F'$ және $Oa - Ob = h$ болатынын ескере отырып жұп күштерінің моменттерінің қосындысын есептейміз:



5.3-сурет

$$M_O(\overline{F}) + M_O(\overline{F'}) = F(Ob + ab) - F' \cdot Ob = F \cdot ab = Fh = M. \tag{5.3}$$

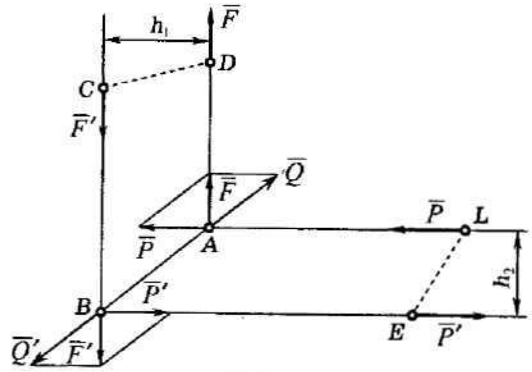
Сонымен, теорема дәлелденді.

§ 5.2 Қос күштің эквиваленттігі (эквивалентлығы) туралы теоремалар

1-теорема. Денеге әсерін сақтай отырып, қос күшті өзінің әсер ету жазықтығында жататын моменті берілген қос күш моментіне тең, басқа қос күшпен алмастыруға болады.

Қатты дененің C және D нүктелерінде (5.4-сурет) иіні h_1-ге тең $(\overline{F},\overline{F'})$ қос күші түсірілген дейік. Теореманы дәлелдеу үшін дененің кез келген E және L нүктелерінен бір-бірінен h_2 қашықтырында орналасқан екі параллель түзулерді $\overline{F}$ және $\overline{F'}$ күштерінің әсер ету сызыктарымен A және B нүктелерінде қиылысқанша созайық. $\overline{F}$ және $\overline{F'}$ күштерін әсер ету сызықтарының бойымен *A* және *B* нүктелеріне көшірейік.

Екінші аксиомадан шығатын салдар бойынша $\overline{F}$ және $\overline{F'}$ күштерінің денеге әсері өзгермейді. Енді $\overline{F}$ күшін *AB* және *AL*, $\overline{F'}$ күшін *AB* және *BE* бағыттарында $\overline{P}, \overline{Q}$ және $\overline{P'}, \overline{Q'}$ құраушыларына жіктейміз, яғни $\overline{F} = \overline{P} + \overline{Q}$, $\overline{F'} = \overline{P'} + \overline{Q'}$. $\overline{F}$ және $\overline{F'}$ күштерінің модульдері өзара тең және бағыттары параллель екендігінен $P = P'$ және $Q = Q'$ болады. $\overline{Q}$ және $\overline{Q'}$ күштерін бір түзудің бойымен қарама-қарсы бағытталып теңескен күштер жүйесін құрайтындықтан, екінші аксиома бойынша алып тастаймыз да, $\overline{P}$ және $\overline{P'}$ күштерін өздерінің әсер ету сызықтарының бойында жатқан *L* және *E* нүктелеріне көшіреміз. Соның нәтижесінде берілген $\left(\overline{F}, \overline{F'}\right)$ қос күш $\left(\overline{P}, \overline{P'}\right)$ қос күшімен алмасады.



5.4-сурет

Осы екі қос күштің моменттері тең екендігін дәлелдеу үшін Вариньон теоремасын колданамыз:

$$M_B\left(\overline{F}\right) = M_B\left(\overline{Q}\right) + M_B\left(\overline{P}\right).$$

Күш моменттерінің модулі:

$$M_B\left(\overline{F}\right) = Fh; M_B\left(\overline{Q}\right) = 0; M_B\left(\overline{P}\right) = Ph_2.$$

Олай болса

$$Fh_1 = Ph_2; \text{ немесе } M_B\left(\overline{F}\right) = M_B\left(\overline{P}\right).$$

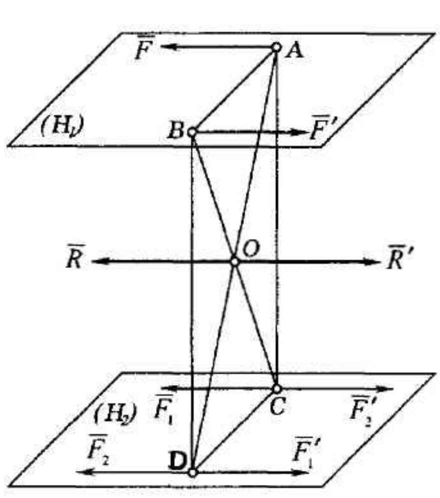
Сонымен, денеге әсер ететін $\left(\overline{F}, \overline{F'}\right)$ қос күшін моменті берілген қос күш моментіне тең басқа $\left(\overline{P}, \overline{P'}\right)$ қос күшімен алмастыруға болатынын дәлелдедік.

Дәлелденген теоремадан қос күштің мынадай қасиеттерін атап кетуге болады:

1. Қос күштің денеге әсерін өзгертпей, өзінің әсер ету жазықтықтығында кез келген орынға көшіруге болады.
2. Берілген жұптың моментін сақтай отырып қос күштің денеге әсерін өзгертпей, жұпты құрайтын күштердің модулін және иінін өзгертуге болады.

2-теорема. Қос күшті өзінің әсер ету жазықтығынан оған параллель басқа жазықтыққа тасымалдағаннан қос күштің денеге әсері өзгермейді.

Қатты денеге H_1 жазықтығында жататын иіні *AB*-ға тең $\left(\overline{F}, \overline{F'}\right)$ қос күшті әсер етеді дейік (5.5-сурет). H_1-ге параллель жүргізілген H_2 жазықтығында ұзындығы *AB*-ға тең және оған параллель *CB* кесіндісін алайық. *C* және *B* нүктелерінде модульдері



5.5-сурет

берілген жұп күштеріне тең және параллель теңескен $\overline{F_1'} = -\overline{F_2'}$; $\overline{F_1'} = -\overline{F_2'}$ күштерін түсіреміз. H_1 және H_2 жазықтықтарында орналасқан қос күштердің иіндерін AB = CD деп аламыз. Параллель күштерді қосу ережесі бойынша модульдері өзара тең және бірыңғай параллель бағытталған $\overline{F}$ және $\overline{F}_2$ күштерінің тең әсер етуші $\overline{R}$ күші оларға параллель және AD кесіндісінің ортасы O нүктесі арқылы $\overline{F}$ және $\overline{F}_2$ күштерінің әсер ету жағына қарай бағытталады. $\overline{R}$ күшінің модулі $R = 2F.$ Модульдері өзара тең және бірыңғай $\overline{F'}$ және $\overline{F'}_2$ параллель күштерінің тең әсер етуші $\overline{R'}$ күші оларға параллель және BC кесіндісінің ортасы O нүктесі арқылы осы күштердің бағытымен бағыттас болады. Тең әсер етуші $\overline{R'}$ күшінің модулі $R' = 2F'.$

5.5-суретте $ABCD$ фигурасы параллелограмм болғандықтан, AD және BC диагональдары қиылысу O нүктесінде қақ бөлінеді. O нүктесіне түсірілген модульдері өзара тең және қарама-қарсы бағытталған $\overline{R}$ және $\overline{R'}$ күштерін теңескен күштер жүйесі болғандықтан алып тастауға болады. Соның нәтижесінде H_1 жазықтығында жататын $\left(\overline{F}, \overline{F'}\right)$ қос күші H_2 жазықтығында жататын дәл осындай $\left(\overline{F}_1, \overline{F_1'}\right)$ қос күшімен алмастырылады.

Сонымен, жоғарыда дәлелденген екі теоремадан шығатын қорытынды: қос күштердің екі жұбы, моменттерінің шамасы және моменттерінің әсерінен дененің бұрылу бағыты бірдей болғанда эквивалентті болады.

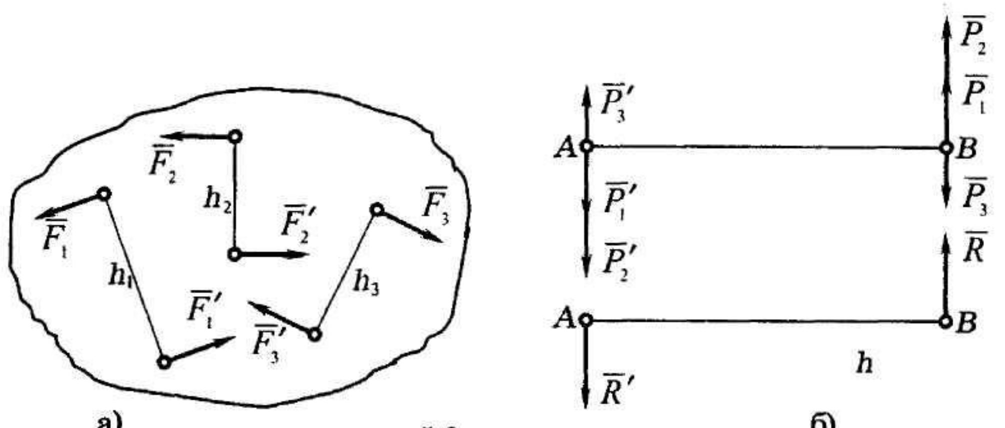
§ 5.3 Бір жазықтықта орналасқан қос күштерді қосу. Қос күштер жүйесінің тепе-теңдігі

Бір жазықтыкта орналасқан қос күштер жүйесінің денеге әсерін алмастыратын қос күшті тең әсерлі қос күш немесе қорытынды қос күш (жұп) дейді.

Теорема. Бір жазықтықта әсер ететін қос күштер жүйесін осы жазықтықта жататын және моменті берілген қос күштер жүйесінің моменттерінің алгебралық қосындысына тең қос күшпен алмастыруға болады.

Қатты денеге иіндері h_1, h_2 және h_3-ке тең (5.6-сурет) $\left(\overline{F}_1, \overline{F_1'}\right)$, $\left(\overline{F}_2, \overline{F_2'}\right)$, $\left(\overline{F}_3, \overline{F_3'}\right)$ қос күштер жүйесі әсер ететін болсын. Осы жұптардың моменттерін M_1, M_2, M_3 деп белгілейік.

$$M_1 = F_1 h_1; M_2 = F_2 h_2; M_3 = -F_3 h_3.$$



5.6-сурет

Қос күштің эквиваленттлығы туралы бірінші теоремаға сүйене отырып берілген қос күштерді, иіні $AB = h$-қа тең жаңа $\left(\overline{P}_1, \overline{P}_1'\right)$, $\left(\overline{P}_2, \overline{P}_2'\right)$, $\left(\overline{P}_3, \overline{P}_3'\right)$ қос күштерімен алмастырамыз.

Осы қос күштердің моменттері

$$M_1 = +P_1 h; M_2 = +P_2 h; M_3 = -P_3 h.$$

Бұдан $$P_1 = \frac{M_1}{h} = \frac{F_1 h_1}{h}; P_2 = \frac{M_2}{h} = \frac{F_2 h_2}{h}; P_3 = \frac{M_3}{h} = \frac{F_3 h_3}{h}.$$

$AB = h$ кесіндісінің A және B нүктелеріне жаңадан пайда болған жұптардың күштерін түсіреміз (5.6, б-сурет). A нүктесінде түсірілген $\overline{P}_1, \overline{P}_2$ және $\overline{P}_3$ күштерінің тең әсер етуші $\overline{R}$ күшінің модулі

$$R = P_1 + P_2 - P_3.$$

B нүктесінде түсірілген тең әсер етуші $\overline{R'}$ күшінің модулі

$$R' = P_1' + P_2' - P_3'.$$

Біріне-бірі параллель және қарама-қарсы бағытталған тең әсер етуші $\overline{R}$ және $\overline{R'}$ күштерінің модульдері өзара тең болады. Сонымен, $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_1'\right)$, $\left(\overline{F}_2, \overline{F}_2'\right)$, $\left(\overline{F}_3, \overline{F}_3'\right)$ қос күштері бір тең әсерлі $\left(\overline{R}, \overline{R'}\right)$ қос күшке келтіріледі. Тең әсерлі қос күштің моменті

$$M = Rh = \left(P_1 + P_2 - P_3\right)h = P_1 h + P_2 h - P_3 h = M_1 + M_2 + M_3.$$

Егер денеге бір жазықтықта жататын моменттері $M_1, M_2, \ldots, M_n$ болатын n қос күштер жүйесі әсер етсе, онда теңәсерлі (қорытынды) қос күштің моментін былай жазуға болады:

$$M = M_1 + M_2 + \ldots + M_n = \sum_{k=1}^{n} M_k. \tag{5.3}$$

Сонымен, теорема дәлелденді.

Енді бір жазықтықта орналасқан қос күштер жүйесінің тепе-теңдік шартын анықтайық.

Егер $P_1 + P_2 - P_3 = 0$ болса, онда $P_1' + P_2' - P_3' = 0$ болады, яғни A және B нүктелерінде түсірілген күштер жүйесі тепе-тендікте болады.

Сондықтан осы жүйеге эквивалентлы $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_1'\right)$, $\left(\overline{F}_2, \overline{F}_2'\right)$, $\left(\overline{F}_3, \overline{F}_3'\right)$ қос күштер жүйесі де нөлге эквивалентлы болады, яғни $M = R \cdot h = 0$. Олай болса

$$M_1 + M_2 + M_3 = 0.$$

Сонымен, бір жазықтықта орналасқан қос күштер жүйесі тепе-теңдікте болу үшін, қос күштер моменттерінің алгебралық қосындысы нөлге тең болуы қажет және жеткілікті:

$$\sum_{k=1}^{n} M_k = 0.$$