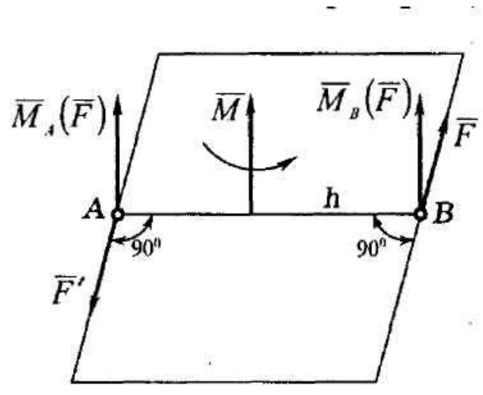
§ 5.4 Қос күш моментінің векторы

Қос күштің денеге әсері, күштің нүктеге қатысты моментіндей үш белгімен (қос күш моментінің модулі, қос күш әсер ететін жазықтық, осы жазықтықта денені бұру бағыты) сипатталады. Осы аталған үш белгіні (5.7-сурет) қос күштің әсер ету жазықтығына перпендикуляр бағытталып, модулі $M = Fh$ қос күш моментіне тең және ұшынан қарағанда қос күштің денені бұру бағыты сағат тілі айналысына қарама-қарсы бағытта көрінетін $\overline{M}$ векторымен кескіндеуге болады. Айырымы күштің нүктеге қатысты моментінің векторы момент центрі арқылы өтетін болса, қос күш моментінің векторы еркін, ешқандай нүктеге қатысы жоқ вектор болып табылады, өйткені қос күшті жұптың эквиваленттлығы туралы теоремалар бойынша денеге әсерін өзгертпей, өзінің әсер ету жазықтығында кез келген орынға немесе әсер ету жазықтығына параллель кез келген жазықтыкка көшіруге болады. Сонымен, қос күш моментінің векторын оның әсер ету жазықтығының кез келген нүктесіне түсіруге болатын еркін сырғымалы вектор деп аламыз.



5.7-сурет

Қос күш моментінің модулі

$$\left|\overline{M}\right| = \left|\overline{F}\right| \cdot h = \left|\overline{F}'\right| \cdot h. \quad (5.5)$$

Жұп күштерінің A және B нүктелеріне қатысты моменттерінің модульдері

$$\left|\overline{M}_A\left(\overline{F}\right)\right| = \left|\overline{F}\right| \cdot h; \quad \left|\overline{M}_A\left(\overline{F}'\right)\right| = \left|\overline{F}'\right| \cdot h; \quad (5.6)$$

(5.5) және (5.6) формулаларын салыстырсақ,

$$\left|\overline{M}\right| = \left|\overline{M}_A\left(\overline{F}\right)\right| = \left|\overline{M}_B\left(\overline{F}'\right)\right| = \left|\overline{F}\right| \cdot h. \quad (5.7)$$

Ал күштің нүктеге қатысты моментінің векторы мына көбейтінді түрінде жазылатыны бізге бұрыннан белгілі:

$$\overline{M}_A\left(\overline{F}\right) = \overline{AB} \cdot \overline{F}.$$

Соңдай-ақ қос күш моменті векторын да осы векторлық көбейтінді түрінде жазуға (жоғарыда айтылған моменттердің үш белгісі бойынша) болады.

$$\overline{M} = \overline{AB} \cdot \overline{F}. \quad (5.8)$$

Сонымен, $\left(\overline{F}, \overline{F}'\right)$ қос күш вектор моменті және осы жұптың бір күшінің екінші күш түсірілген нүктеге қатысты алынған вектор-моментінің модульдері өзара тең болатынын көреміз.

$$M = \left|\overline{M}_A\left(\overline{F}\right)\right| = \left|\overline{M}_B\left(\overline{F}'\right)\right|.$$

Осы $\overline{M}, \overline{M}_A\left(\overline{F}\right), \overline{M}_B\left(\overline{F}'\right)$ векторларының бағыттары бір-біріне дәл келеді. Олай болса,

$$\overline{M} = \overline{M}_A(\overline{F}) = \overline{M}_B(\overline{F'}). \qquad (5.9)$$

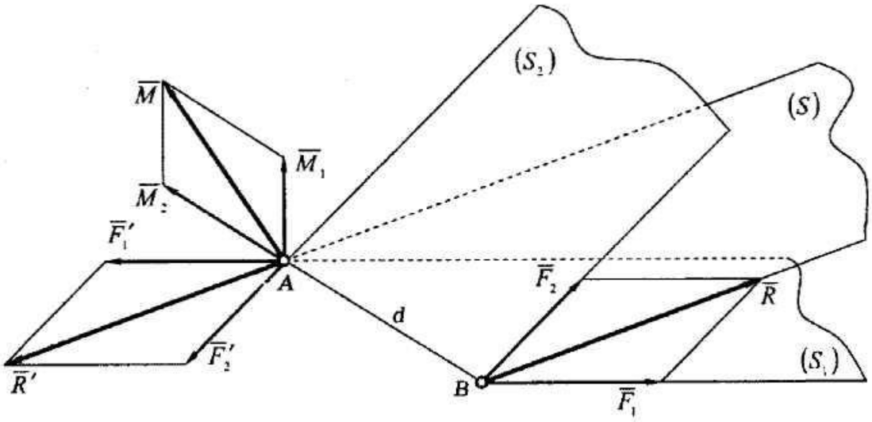
§ 5.5 Қиылысатын жазықтықтарда жататын қос күштерді қосу. Кеңістіктік қос күштер жүйесінің тепе-теңдігі

Бір жазықтықта жатпайтын қос күштерді қосу мынадай теоремамен беріледі: қатты денеге әсер ететін қос күштердің кез келген жүйесі, моменті осы қос күштер моменттерінің геометриялық қосындысына тең бір қос күшке эквивалентлы.

Теореманы алдымен екі жұп үшін дәлелдейік.

S_1 жазықтығында әсер ететін $(\overline{F_1}, \overline{F_1'})$ және S_2 жазықтықтығында әсер ететін $(\overline{F_2}, \overline{F_2'})$ жұптары берілді дейік (5.8-сурет).

Параллелограмм ережесі бойынша А нүктесінде түсірілген $\overline{F_1'}$ және $\overline{F_2'}$ күштерін қосып тең әсер етуші $\overline{R'}$ күшін, ал B нүктесінде түсірілген $\overline{F_1'}$ және $\overline{F_2'}$ күштерін қосып теңәсер етуші $\overline{R}$ күшін аламыз. $\overline{R}$ және $\overline{R'}$ күштерінің модульдері өзара тең, біріне-бірі параллель және қарама-қарсы бағытталған.



5.8-сурет

Сонымен, $(\overline{F_1}, \overline{F_1'})$ және $(\overline{F_2}, \overline{F_2'})$ қос күштері S жазықтығында жататын тең әсерлі $(\overline{R}, \overline{R'})$ қос күшке келтіріледі. Енді $(\overline{R}, \overline{R'})$ жұбының вектор-моментін аныктайық. $\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$ болғандықтан кез келген жұптың, соның ішінде $(\overline{R}, \overline{R'})$ жұбының вектор моменті, осы жұптың бір күшінің екінші күш түсірілген нүктеге қатысты алынған вектор-моментіне тең, яғни

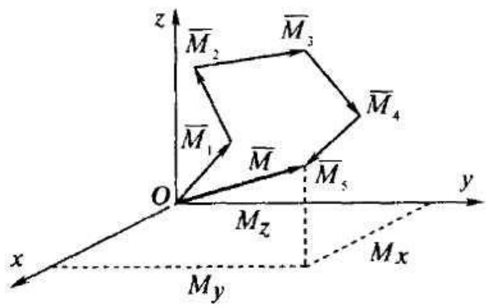
$$\overline{M} = \overline{AB} \cdot \overline{R} = \overline{AB} \cdot (\overline{F}_1 + \overline{F}_2) = \overline{AB} \cdot \overline{F}_1 + \overline{AB} \cdot \overline{F}_2 = \overline{M}_1 + \overline{M}_2. \qquad (5.10)$$

Сонымен, теңәсерлі $(\overline{R}, \overline{R'})$ қос күш моментінің модулі мен бағыты құраушы $(\overline{F_1}, \overline{F_1'})$ және $(\overline{F_2}, \overline{F_2'})$ қос күштердің $\overline{M}_1$ және $\overline{M}_2$ вектор моменттері қабырғалары болып саналатын параллелограмның диагоналімен анықталады Екі жұп үшін теорема дәлелденді.

Егер денеге әр түрлі жазықтықтарда орналасқан моменттері $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \ldots, \overline{M}_n$ болатын n қос күштер жүйесі әсер етсе, онда қос күштерді қосу теоремасы бойынша (5.10) формуланың негізінде берілген қос күштер жүйесі теңәсерлі қос күшпен алмастырылады. Тең әсерлі қос күштің вектор моменті

$$\overline{M} = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \ldots + \overline{M}_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_k. \qquad (5.11)$$

Әр түрлі жазықтықтарда жататын қос күштерді қосу үшін құраушы қос күштердің $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \ldots, \overline{M}_n$ вектор-моменттерінен көпбұрыш салынуы қажет. Осы көпбұрыштың түйықтаушы қабырғасы тең әсерлі $\left(\overline{R}, \overline{R'}\right)$ қос күштің вектор-моментін аныктайды (5.9-сурет).



5.9-сурет

Егер қос күштер жүйесі бір жазықтыкта немесе өзара параллель жазықтықтарда орналасатын болса, онда құраушы қос күштердің вектор-моменттері осы жазықтыққа перпендикуляр түзудің бойымен бағытталады. Бұл жағдайда осы қос күштер жүйесінің теңәсерлі жұбының моменті (5.3) формуласымен анықталады.

Әр түрлі жазықтықтарда орналасқан қос күштер жүйесі тепе-теңдікте болу үшін теңәсерлі кос күш вектор-моменті нөлге тең болуы қажет, яғни кеңістіктік жұптар жүйесінің тепе-теңдік шарты мынадай түрде жазылады:

$$\overline{M} = 0$$

немесе

$$\sum_{k=1}^{n} M_k = 0. \qquad (5.12)$$

Сонымен, әр түрлі жазықтықтарда жататын қос куштер жүйесі тепе-теңдікте болу үшін құраушы қос күштердің вектор-моменттерінің геометриялық қосындысы нөлге тең болуы қажет және жеткілікті немесе осы вектор-моменттерден құрылғап көпбұрыш тұйық болуы қажет.

$\overline{M}$ векторының модулін анықтау үшін теңәсер етуші вектордың өске проекциясы туралы теореманы пайдаланамыз:

$$M_x = \sum_{1}^{n} M_{kx}; \quad M_y = \sum_{1}^{n} M_{ky}; \quad M_z = \sum_{1}^{n} M_{kz} \qquad (5.13)$$

Олай болса

$$\left|\overline{M}\right| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{\left(\sum_{1}^{n} M_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{1}^{n} M_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{1}^{n} M_{kz}\right)^2}. \qquad (5.14)$$

Тепе-теңдік шарты (5.12) теңдеуінің негізінде және (5.13), (5.14) формулаларын ескере отырып, кеңістіктік жұптар жүйесінің тепе-теңдік тендеулерін мынадай түрде жазамыз:

$$M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = 0$$

немесе

$$\sum_{1}^{n} M_{kx} = 0, \quad \sum_{1}^{n} M_{ky} = 0, \quad \sum_{1}^{n} M_{kz} = 0. \qquad (5.15)$$

Сонымен, қос күштер моменттерінің координаталар өстеріне проекцияларының алгебралық қосындылары жеке-жеке нөлге тең болуы қажет және жеткілікті.

VI тарау. КҮШТЕРДІҢ КЕЗ КЕЛГЕН ЖАЗЫҚ ЖҮЙЕСІ

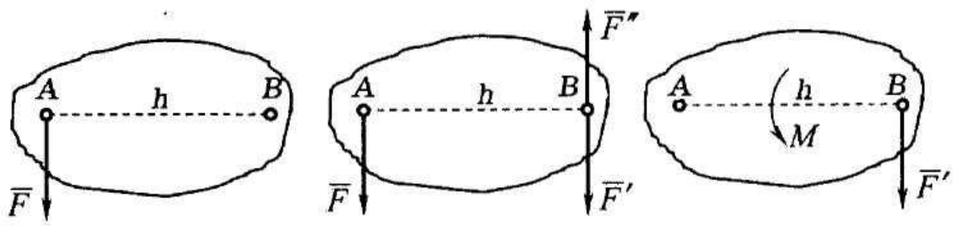
Қатты денеге әсер ететін күштер бір жазықтықта орналасып кез келген ретпен бағытталатын болса, онда мұндай күштер жиынын күштердің кез келген жазық жүйесі деп атаймыз. Статиканың бірінші мақсаты бойынша осы күштер жүйесін қарапайым түрге келтіру қажет, яғни жүйені құрайтын күштерді біртіндеп қосу әдісін қолдануға болады. Француз оқымыстысы Пуансо бірінші болып әсер етуші күштердің барлығын кез келген центрге келтіруге болатын әдісті қолданды. Ең әуелі бір ғана күшті дененің басқа нүктесіне параллель тасымалдауға болатынын қарастырайық.

§ 6.1 Күшті параллель тасымалдау туралы теорема (Пуансо леммасы)

Теорема. Дененің кез келген A нүктесінде түсірілген $\overline{F}$ күші шамасы мен бағыты дәл өзіндей дененің басқа бір B нүктесіне түсірілген $\overline{F'}$ күшіне және моменті берілген күштің B нуктесіне қатысты моментіне тең қос күшке эквивалентлы болады.

Дененің A нүктесіне әсер ететін $\overline{F}$ күші (6.1. а-сурет) берілді дейік.

Дененің кез келген B нүктесіне шамалары берілген $\overline{F}$ күшінің шамасына тең және оған параллель қарама-қарсы бағытталған $\overline{F'}$ және $\overline{F''}$ күштерін түсірейік (6.1, б-сурет). Онда 2-аксиома бойынша берілген $\overline{F}$ күшіне эквивалент болатын жаңа $\left(\overline{F}, \overline{F'}, \overline{F''}\right)$ күштер жүйесін аламыз:



а) б) в)

6.1-сурет

$$\overline{F} \Leftrightarrow \left(\overline{F}, \overline{F'}, \overline{F''}\right).$$

$\left(\overline{F}, \overline{F'}, \overline{F''}\right)$ күштер жүйесін шамасы мен бағыты $\overline{F}$ күшіндей болатын, бірақ B нүктесінде түсірілген $\overline{F'}$ күші және моменті $M = M_B\left(\overline{F}\right)$-ге тең $\left(\overline{F}, \overline{F''}\right)$ қос күш деп қарауға болады. Егер $\left(\overline{F}, \overline{F''}\right)$ қос күш моментін шартты түрде оның айналдыру бағытымен бағытталған нұсқамамен белгілесек, онда осы теореманың нәтижесін 6.1, в-суреттегідей бейнелеуге болады.

Сонымен, теорема дәлелденді.

§ 6.2 Күштердің кез келген жазық жүйесін берілген центрге келтіру. Бас вектор және бас момент

Қатты дененің $A_1, A_2, \ldots, A_n$ нүктелеріне түсірілген $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n)$ күштері бір жазықтықта орналасқан болсын (6.2, а-сурет). Күштер жүйесінің әсер ету жазықтығында орналасқан *O* нүктесін келтіру центрі деп алып, Пуансо леммасы негізінде барлық әсер етуші күштерді *O* нүктесіне өздеріне параллель (6.2, б-сурет) көшірейік. Онда *A_1* нүктесіне түсірілген $\overline{F_1'}$ күші *O* нүктесінде түсірілген күшіне және моменті $M_1 = M_O(\overline{F}_1)$ қосылған $(\overline{F}_1, \overline{F_1''})$ қос күшке эквивалент болады. *A_2* нүктесіне түсірілген $\overline{F}_2$ күші *O* нүктесінде түсірілген $\overline{F_2'}$ күшіне және моменті $M_2 = M_O(\overline{F}_2)$ қосылған $(\overline{F}_2, \overline{F_2''})$ қос күшке эквивалент болады. Осындай ретпен барлық күштерді параллель тасымалдаудың нәтижесінде *O* центріне түсірілген

$$\overline{F_1'} = \overline{F_1},\ \overline{F_2'} = \overline{F_2}\ ,...,\ \overline{F_n'} = \overline{F_n} \tag{6.1}$$

күштер жүйесі мен бір жазықтықта орналасқан моменттері

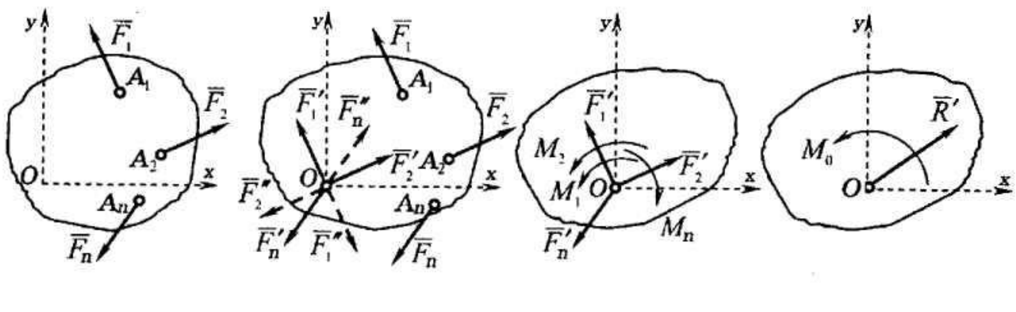
$$M_1 = M_O(\overline{F}_1),\quad M_2 = M_O(\overline{F_2})\ ,...,\ M_n = M_O(\overline{F_n}) \tag{6.2}$$

қосылған $(\overline{F}_1, \overline{F_1''})$, $(\overline{F}_2, \overline{F_2''})$,…, $(\overline{F}_n, \overline{F_n''})$ қос күштер (6.2, в-сурет) жүйесін аламыз.

Күштер көпбұрышы ережесі бойынша *O* нүктесіне түсірілген $\overline{F_1'}, \overline{F_2'}, \ldots, \overline{F_n'}$ күштерін қосып олардың теңәсер етуші $\overline{R'}$ күшін табамыз (6.2, г-сурет):

$$\overline{R'} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F_k'}. \tag{6.3}$$

(6.1) теңдіктерді ескере отырып, (6.3) теңдіктің оң жағын $\overline{F_k}$ күштері арқылы өрнектейміз:



6.2-сурет

$$\overline{R'} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F_k}. \tag{6.4}$$

Денеге әсер ететін күштердің геометриялық қосындысына тең болатын $\overline{R'}$ векторын күштердің кез келген жазық жүйесінің *бас векторы* деп атаймыз.

Бір жазықтықта орналасқан қос күштерді қосу ережесін пайдалана отырып (5.3 формула) барлық қосылған қос күштер жүйесін осы жазықтықта орналасқан бір қорытынды (тең әсерлі) қос күшке келтіруге болады. Осы тең әсерлі қос күштін моменті (6.2) теңдіктері бойынша:

$$M_O = \sum_{k=1}^{n} M_O(\overline{F}_k) \tag{6.5}$$

Әсер етуші күштердің келтіру O центріне қатысты алынған моменттерінің алгебралық қосындысына тең M_o шамасын осы күштер жүйесінің келтіру центріне қатысты бас моменті деп атайды.

Сонымен, мынадай теорема дәлелденді: қатты денеге әсер ететін күштердің кез келген жазық жүйесін келтіру центріне түсірілген осы жуйенің $\overline{R'}$ бас векторына тең бір күш пен және моменті күштер жуйесінің келтіру центріне қатысты бас моментіне тең қос күшке келтіруге болады (6.2, г-сурет), яғни

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n) \Leftrightarrow \overline{R'}, M_O. \tag{6.6}$$

Осы теоремадан бір жазықтықта кез келген ретпен орналасқан екі күштер жүйесінің бас векторлары мен бас моменттері бірдей болса, онда осы күштер жүйесі эквивалентлы күштер жүйесі болатынын көруге болады.

Күштер жүйесінің $\overline{R'}$ бас векторының модулі мен бағытын күштер көпбұрышын құру арқылы немесе аналитикалық әдіспен жинақталатын күштер жүйесінің теңәсер етуші күшінің модулі мен бағытын анықтайтын (2.4) және (2.5) формулаларымен анықтауға болады.

$$\overline{R'} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{ky}\right)}. \tag{6.7}$$

$$\cos\left(\overline{R'} \,^\wedge\, \bar{i}\right) = \frac{R'_x}{R'} = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_{kx}}{R'}; \quad \cos\left(\overline{R'} \,^\wedge\, \bar{j}\right) = \frac{R'_y}{R'} = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_{ky}}{R'}. \tag{6.8}$$

Қатты денеге әсер етуші күштердің барлығы келтіру центріне параллель тасымалданатындықтан $\overline{R'}$ бас векторының модулі мен бағыты келтіру центрінің орнына тәуелсіз, яғни инвариантты болады.

Бас моменттің модулі мен таңбасы (6.5) формуласымен анықталады. Келтіру центрінің орны өзгерген сайын жүйе күштерінің де моменттері өзгеріп отырады. Олай болса, бас моменттің модулі мен таңбасы да өзгеріп отырады.

Сонымен қатар мына жағдайды атап кеткен жөн болады. Қатты денеге әсер етуші $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n)$ күштерінің бас векторы $\overline{R'}$ күштер жүйесі үшін теңәсер етуші күш бола алмайды, өйткені ол бас моментті сипаттайтын қос күшсіз жалғыз өзі денеге берілген күштер жүйесінің әсеріндей әсер жасай алмайды. Оған қосымша, бас векторды еркін вектор деп қарастыруға болса (бас вектордың әсер ету нүктесін кез келген орында алуға болады), ал теңәсер етуші күштің векторы өзінің белгілі бір әсер ету сызығының бойымен ғана бағытталатын сырғымалы вектор болады.