3. Динамика
3.1. Материялық нүкте динамикасы.
3.1.1. Кіріспе. Негізгі түсініктер және анықтамалар

Динамикада материялық нүктелер мен материялық денелердің күш әсеріндегі қозғалыстары қарастырылады.

Динамиканың өзі екі бөлімге бөлінеді: *бірінші бөлімі материялық нүкте динамикасы болса, екінші материялық нүктелер жүйесінің динамикасы.*

Материялық нүкте деп қозғалыстың берілген жағдайларында өлшемдерін ескермеуге болатын денені айтамыз. Мұндай дененің кеңістіктегі орны массасы дененің массасына тең массамен жабдықталған геометриялық нүкте орнымен анықталады.

Әрбір денені материялық нүктелердің жиынтығы деп карауға болады. Ендеше динамиканы материялық нүкте динамикасынан бастаған жөн. Динамиканың бұл бөлімінде бір ғана материялық нүкте қозғалысының зандылығы анықталады. Материялық нүкте қозғалысы үшін анықталған заңдылықтарды бірнеше материялық нүктелер жағдайына жалпылай отырып материялық нүктелер жүйесінің заңдылығын аламыз. Осының нәтижесінде қатты дене қозғалысы толық сипаттайтын заңдылықтарды да табуға болады.

3.1.2. Динамиканың негізгі заңдары.
Динамиканың бірінші және екінші есептері

Динамика негізіне, аксиомалар ретінде қабылданатын, бірнеше қағидалар жатады. Бұл қағидалар табиғаттағы құбылыстарға жасалған көптеген жылғы бақылаулар мен тәжірибелерді және қоғамдық практика нәтижелерін жалпылап қорытындылаудан алынған. Механика аксиомаларын ең толық және ақырғы түрінде айтып берген И.Ньютон еді. Сондықтан да оларды Ньютон заңдары деп атайды.

Ньютоның бірінші заңы (инерция заңы). *Егер материялық нүктеге ешбір күш әсер етпесе, онда ол өзінің тыныштық күйін немесе түзу сызықты бірқалыпты қозғалысын сақтайды.*

Бұл заң, басқа денелерден жеке дара алынған, материялық нүктеге арнап айтылған. Жеке дара нүкте басқа денемен әсерлескенге дейін өзінің тыныштық күйінде қала береді немесе алғашқы қозғалысын сақтайды. Жеке дара (оңаша) алынған материялық нүкте деп отырған денеміз өз бетінше өзінің жылдамдығын өзгерте алмайды, немесе тыныштық күйінен өз бетінше қозғалысқа келе алмайды. Бұл өзгеріс тек оған басқа бір дене әсер етсе, яғни бір күш әсер етсе пайда болады.

Ньютонның бірінші заңы материялық денелердің негізгі бір қасиетін, яғни өзін-өзі қозғалысқа келтіре алмайтын қасиетін сипаттайды. Ал, екінші жағынан бұл заң денелер өзіне түсірілген сыртқы күштердің әсерінен бірден қозғалысқа келе қоймай өзінің тыныштық күйін немесе түзу сызықты бірқалыпты қозғалысын бірден өзгерте қоймай, ондай күйін сақтап қалуға тырысатын да қасиеті бар екенін көрсетеді. Оны денелердің инерциясы немесе материяның инерттігі дейді. Инерттілік – барлық денелерге тән қасиет. Дене (нүкте) жылдамдығын берілген шамаға дейін өзгерту үшін оған түсірілген күш әсері белгілі бір уақытқа созылуы керек. Ол уақыт аралығы неғұрлым көп болса, дене солғұрлым инерттірек келеді. Өзара әсерлесетін екі дененің қайсысы жылдамдығын баяуырақ өзгертсе, сонысы инерттілеу болады. *Ньютонның 1–заңын инерция заңы деп те атайды.*

Инерция заңында айтылған материялық нүктенің түзу сызықты бірқалыпты қозғалысын инерциялық қозғалыс дейміз.

Ньютон заңдары әсіресе инерция заңы орынды болатын координаттар өстерінің жүйелерін *инерциялық жүйелер деп атайды.* Бұдан былай үнемі инерциялық жүйелер қолданылады. Мұндай жүйелерге қатысты қаралатын денелердің, материялық нүктелердің қозғалыстарын абсолют қозғалыстар деп атайды.

Ньютонның екінші заңы (негізгі заң*).* *Материялық нүктеге әсер етуші күш осы нүкте үдеуімен бағытталады және шамасы үдеуге пропорционал болады.*

Материялық нүктеге түсірілген күшті $\bar{F}$ деп, ал осыдан пайда болатын нүкте үдеуін $\bar{a}$-деп белгілейік онда екінші заңды векторлық теңдеу түрінде жаза аламыз:

$$m'\bar{a} = \bar{F}\,, \tag{3.1}$$

мұндағы m' –тұрақты шама. Тәжірибеге қарағанда әртүрлі материялық нүктелер үшін m' тұрақтысының шамасы да әртүрлі болады. Басқаша айтқанда, әрбір материялық нүктенің өзіне сай m' тұрақтысы болады:

$$\bar{a} = \frac{1}{m'}\bar{F} \tag{3.2}$$

Берілген $\bar{F}$ күшінің әсерінен болатын материялық нүктенің үдеуі m' тұрақтысына пропорционал болады. m' тұрақтысының шамасы неғұрлым көп болса, берілген $\bar{F}$ күшінің әсерінен болатын үдеу соғұрлым аз болады. Басқаша айтқанда m' тұрақтысы неғұрлым көп болса, материялық нүктенің инерттілігі (инерциясы) соғұрлым көп болады. Материялық нүктенің инерттілігінің өлшемі ретінде алынатын m' тұрақты шамасын материялық нүктенің инерттілік көрсеткіші, яғни инерттік массасы дейді.

Қысқаша айтқанда, дененің массасы – оның инерттілігін өрнектейтін шама. Екінші жағынан денелердің инерттілігінің әртүрлі, әр дәрежеде болуы ол денелерде материяның бірдей мөлшерде болмайтындығында. Әрбір дененің өзінде белгілі мөлшерде материя немесе материялық зат болады. Күнделікті өмірде денедегі материя мөлшерін дене салмағына қарай анықтайды. Бірақ дене салмағы, оның Жердің қай ендiлiгiнде екендігіне және теңіз бетінен саналатын биіктіктің өзгеруіне қарай өзгеріп отырады. Ал денедегі заттар мөлшері, яғни ондағы материя бұл жағдайларға тәуелді емес, ол тек дененің өзіне ғана тән қасиет. Сондықтан да салмақты денедегі заттар мөлшерінің өлшеуіші ретінде алуға болмайды. Бірақ дененің салмағының дененің еркін түсу үдеуіне қатынасы ауасыз ортада тұрақты болатыны, басқа ештеңеге тәуелді еместігі тек берілген дененің өзіне ғана тән шама екендігі тәжірибеден белгілі. Егер берілген дененің салмағы *P* деп, ал еркін түсу үдеуін g деп белгілесек, онда осы дене үшін тұрақты қатынасты былай жазамыз:

$$\frac{P}{g} = const = m. \tag{3.3}$$

Тек дененің өз қасиетіне ғана тәуелді болатын m шамасын дененің ауырлық массасы дейді. *Денедегі материя мөлшерінің өлшемі ретінде алынатын, (3.3) – қатынаспен анықталатын, шаманы дененің ауырлық (гравитациялық) массасы дейді.*

(3.3)–формула Жер бетіндегі денелердің массаларын анықтауға қолданылады. Сүйтіп Жер бетіндегі денелердің ауырлық массалары олардың салмақтарына пропорционал шама екенін анықтадық.

Көптеген тәжірибелердің нәтижелері ауырлық массасының инерттілік массасына тең болатынын көрсетеді. Олай болса, (3.1)–формуладағы m' шамасы мен (3.3)–формуладағы m шамасын теңестіреміз:

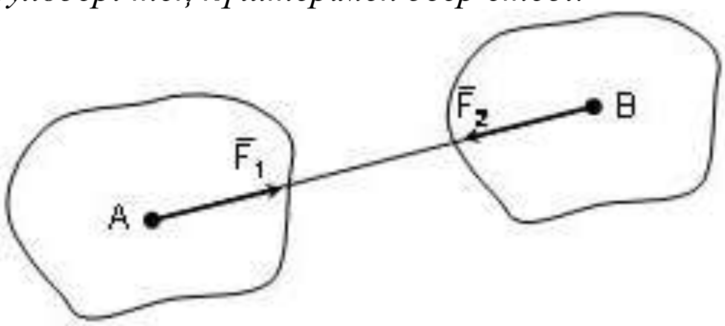
$$m' = m. \tag{3.4}$$

Бұдан массаның дене инерциясының өлшемі болуымен қатар ол дененің гравитациялық қасиетін де анықтайтын физикалық шама екенін көреміз. Сондықтан да материялық және инерциялық қасиеттер Ньютон механикасында эквивалентті қасиеттер болып табылады.

Егер (3.4) теңдігін ескерсек, (3.1) қатынасын қайтадан былай жазуға болады:

$$m\bar{a} = \bar{F}. \tag{3.5}$$

Ньютонның үшінші заңы (әсер және қарсы әсер заңы). *Материялық екі нүкте бір–біріне оларды қосатын түзу бойымен қарама-қарсы бағытталған, модульдері тең күштерімен әсер етеді.*



3.1-сурет

Екі планетаның өзара тартылу күштерін алсақ олардың да бірі біріне тең болып, бір түзудің бойымен қарама-қарсы бағытталатынын көреміз. Мысалға Ай мен Жердің өзара тартылысын алайық (3.1-сурет).

Ай *A*-ны өзіне тартатын жердің $\overline{F}_1$ күші мен Жер *B*–ны өзіне тартатын Айдың $\overline{F}_2$ күші мынадай шартты қанағаттандырады:

$$\overline{F}_1 = -\overline{F}_2, \quad \left|\overline{F}_1\right| = \left|\overline{F}_2\right|.$$

Егер бір күшті әсер деп, ал екіншісін қарсы әсер деп атасақ, онда үшінші заңды басқаша былай да айтуға болады.

Әрбір әсерге тең және қарама-қарсы бағытталған қарсы әсер болады.

Ньютонның төртінші заңы (күш әсерінің тәуелсіздігі туралы заң). *Егер материялық нүктеге бір мезгілде бірнеше күш әсер етсе, онда олардың әрқайсысының нүктеге беретін үдеуі сол күш шамасына пропорционал болып, күштердің өзгелеріне және кинематикалық күйіне тәуелсіз болады.*

Толық үдеу жеке күштер әсерлерінен болатын үдеулердің векторлық қосындысына тең болады.

Егер материялық нүктеге бір мезгілде $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$ күштері әсер ететін болса, онда бұл күштердің әрқайсысы массасы m-ге тең нүктеге өзінің шамасына пропорционал болатын үдеу береді:

$$\overline{a}_1 = \frac{\overline{F}_1}{m}, \overline{a}_2 = \frac{\overline{F}_2}{m}, ..., \overline{a}_n = \frac{\overline{F}_n}{m}.$$

Демек, $\overline{a}_k$ үдеулерінің әрқайсысы тек өзіне сәйкес $\overline{F}_k$ күші арқылы анықталады да, нүктедегі өзге күштерге тәуелсіз болып келеді.

Осылайша материялық нүкте бір мезгілде үдеулері әр түрлі n қозғалысқа келеді. Кинематикада тағайындалған ереже бойынша бұл қозғалыс үдеулерін өзара геометриялық әдіспен қосуға болады:

$$\overline{a} = \overline{a}_1 + \overline{a}_2 + ... + \overline{a}_n.$$

Ал мұндағы әрбір үдеудің орнына олардың күш арқылы анықталатын, жоғарыда көрсетілген өрнектерін қойсақ, сонда:

$$\overline{a} = \frac{\overline{F}_1}{m} + \frac{\overline{F}_2}{m} + ... + \frac{\overline{F}_n}{m} = \frac{1}{m}(\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + ... + \overline{F}_n).$$

Бір нүктеге түсірілген күштердің теңәсерлі күші болады, ол күштердің геометриялық қосындысына тең:

$$\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + ... + \overline{F}_n = \overline{R}.$$

Демек, нүктенің толық үдеуі:

$$\overline{a} = \frac{1}{m}\overline{F}.$$

Осыдан:

$$m\overline{a} = \overline{R}.$$

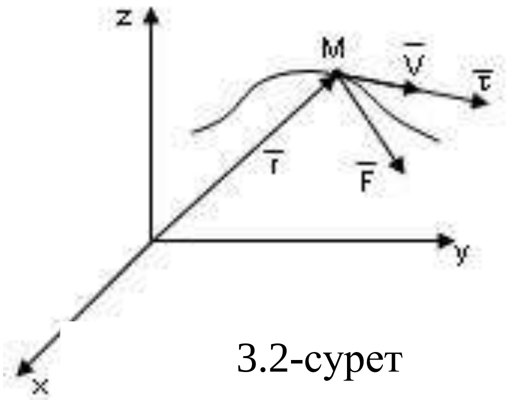
Сонымен Ньютонның екінші заңы материялық нүктеге бір мезгілде бірнеше күштер әсер еткенде де орынды болады. Ондағы $\overline{R}$ күшін енді материялық нүктедегі барлық күштердің тең әсерлі күші деп түсіну керек.

3.1.3. Материялық нүкте қозғалысының дифференциялдық теңдеулері

Радиус векторы $\bar{r}$ -ге тең материялық нүктеге әсер етуші күш $\bar{F}$ болсын. Нүкте қозғалысына негізгі заңды қолдансақ алатынымыз:

$$m\bar{a} = \bar{F} \ , \tag{3.6}$$

мұндағы *m* нүкте массасы, $\bar{a}$ -оның үдеуі. (3.6.)–теңдеуі нүкте динамикасының негізгі теңдеуі деп аталады. Бұл– векторлық теңдеу. Оны әр түрлі координаттар өстеріне проекциялап жазуға болады. Мысалы, оны қозғалмайды деп алынған (3.2- сурет), декарттық координаттар жүйесіндегі өстерге проекциялайық:



3.2-сурет

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \ m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \ m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z,$$

немесе

Fx. Fy. Fz нүктеге әсер етуші күштің осы өстердегі проекциялары. (3.7) - теңдеулер материялық нүкте қозғалысының декарттық координаттар өстеріне қатысты алынған дифференциялдық теңдеулері деп аталады.

3.1.4. Динамиканың бірінші және екінші есептері

Нүкте динамикасында негізгі екі есеп бар. Оның біріншісінде материялық нүкте қозғалысының заңы және оның массасы *m* беріледі. Осы заңдылықта болатын қозғалысты тудыратын күшті табу керек болады. Екінші мәселеде берілген күш бойынша массасы *m*-ге тең нүкте қозғалысының заңын анықтау керек.

Динамиканың бірінші есебі. Нүкте динамикасының бірінші есебін шешу көп қиыншылық тудырмайды. Бірінші есепте нүкте массасы *m* және оның қозғалысының кинематикалық теңдеулері

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \, .$$

берілген болады. Осы берілгендер арқылы (3.7) теңдеулерінен іздеп отырған күштің проекциялары табылады:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \ m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z \ .$$

Осы күш проекциялары арқылы күштің өзін анықтап аламыз.

Нүкте динамикасының екінші есебі. Нүкте динамикасының екінші есебін шешу екінші ретті үш дифференциалдық теңдеулер жүйесі (3.7)-ні интегралдауға келтіріледі. Дифференциалдық теңдеулердің мұндай жүйесінің жалпы шешімі әлі табылмаған. Сондықтан біз ол жүйені шешудің жалпы сұлбасын көрсетіп өтейік. Бізге массасы *m*-ге тең материялық нүктенің берілген $\overline{F}$ күші әсерінен болатын қозғалысының дифференциалдық теңдеулері (3.7) берілсін:

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= F_x(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\
m\ddot{y} &= F_y(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\
m\ddot{z} &= F_z(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t).
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Берілген $\overline{F}(F_x, F_y, F_z)$ әсерінен болатын нүкте қозғалысын табу (3.8) дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешуге келтіріледі. Ол теңдеулерді түрлендіру нәтижесінде мынадай үш теңдеулер алдық дейік:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varphi_1(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) &= 0, \\
\frac{d}{dt}\varphi_2(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) &= 0, \\
\frac{d}{dt}\varphi_3(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) &= 0,
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Онда (3.9)-ды интегралдау арқылы, мынадай бірінші интегралдарды алған болар едік.

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) &= C_1, \\
\varphi_2(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) &= C_2, \\
\varphi_3(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) &= C_3.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

(3.10)-дағы C_1, C_2, C_3-тұрақтылары, интегралдаудың кез келген тұрақтылары деп аталады.

(3.10) теңдеулерін тағы да бір рет интегралдап шығуымыз керек. Сол мақсатпен оларды қалай да түрлендіре отырып, мынадай түрге келтіре алдық дейік:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\psi_1(x, y, z, t; C_1, C_2, C_3) &= 0, \\
\frac{d}{dt}\psi_2(x, y, z, t; C_1, C_2, C_3) &= 0, \\
\frac{d}{dt}\psi_3(x, y, z, t; C_1, C_2, C_3) &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Онда бұларды оңай интегралдаған болар едік те, мынадай қатынастар алар едік:

$$
\begin{aligned}
\psi_1(x, y, z, t; C_1, C_2, C_3) &= C_4, \\
\psi_2(x, y, z, t; C_1, C_2, C_3) &= C_5, \\
\psi_2(x, y, z, t; C_1, C_2, C_3) &= C_6.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

мұндағы C_4, C_5, C_6 - интегралдау тұрақтыларының келесі үшеуі.

Уақыт, координаттар, кез келген тұрақты шамалар арасындағы тәуелділікті беретін және қозғалыс теңдеулері негізінде орынды болатын, (3.12) түріндегі қатынастарды қозғалыс теңдеулерінің екінші интегралдары деп атайды. (3.12) қатынастарынан x, y, z -терді табуға болады:

$$
\begin{aligned}
x &= f_1(t; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)\,, \\
y &= f_2(t; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\
z &= f_3(t; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)\,.
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

(3.13) теңдіктері (3.8) қозғалыс теңдеулерінің жалпы шешімі болып табылады. Мұнда нүкте координаттары уақытқа және алты кез келген тұрақты шамаларға тәуелді функциялар ретінде анықталған.

Сонымен, жалпы жағдайда нүкте координаттары алты кез келген тұрақты шамаларға тәуелді болып шықты.

Басқаша айтқанда, қозғалыс теңдеулерін интегралдау арқылы материялық нүктенің берілген күш әсерінен мүмкін болатын қозғалыстарының барлығының да заңдарын табуға болады екен.

Мысалы, біз материялық нүктені ауасыз ортада бір орыннан әр түрлі бағыттағы жылдамдықпен ұшыруымызға болады. Онда ол нүкте ауырлық күші әсерінен бастапқы жылдамдықтың қалай бағытталуына байланысты түзу сызық бойымен немесе әр түрлі параболалар бойымен қозғалуы мүмкін.

Сол себепті күштің өзгеру заңдылығын

$$\bar{F} = \bar{F}(t, \bar{r}, \bar{v})\,,$$

көрсетумен қатар, нүктенің бастапқы орны мен жылдамдығын да нақтылы көрсетіп отыруымыз қажет.

Уақыт $t = t_0$ болғанда , нүктенің бастапқы орнын анықтайтын координаттар мынадай болды дейік:

$$x = x_0 \quad y = y_0, \quad z = z_0, \tag{3.14}$$

Ал бастапқы жылдамдық проекциялары мынадай болсын:

$$\dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0 \tag{3.15}$$

(3.14) және (3.15) қатынастарының жиынын бастапқы шарттар деп атаймыз. Осы бастапқы шарттар арқылы интегралдау тұрақтылары табылады. Ол үшін (3.10) және (3.12) теңдеулердегі $t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ айнымалылары орнына олардың (3.14) және (3.15)-теңдеулерде көрсетілген бастапқы мәндерді қоямыз. Сонда:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \varphi_1(t_0; x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\
C_2 &= \varphi_2(t_0; x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\
C_3 &= \varphi_3(t_0; x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\
C_4 &= \psi_1(t_0; x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\
C_5 &= \psi_2(t_0; x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0),
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

$$C_6=\psi_3(t_0;x_0,y_0,z_0;\dot{x}_0,\dot{y}_0,\dot{z}_0).$$

(3.16) бойынша анықталатын интегралдау тұрақтыларының мәндерін (3.13) –теңдеуге қойсақ, мынаны аламыз:

$$x=x(t_0;x_0,y_0,z_0;\dot{x}_0,\dot{y}_0,\dot{z}_0,t),$$
$$y=y(t_0;x_0,y_0,z_0;\dot{x}_0,\dot{y}_0,\dot{z}_0,t),\qquad(3.17)$$
$$z=z(t_0;x_0,y_0,z_0;\dot{x}_0,\dot{y}_0,\dot{z}_0,t).$$

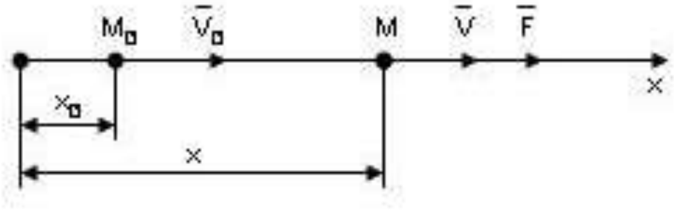
(3.17)-теңдіктер берілген күш әсерінен болатын және бастапқы шарттарға сәйкес орындалатын нүкте қозғалысының заңын анықтайды. Сонымен нүкте динамикасының екінші есебінің шешілуі осы сұлба бойынша жүргізіледі.

3.1.5 Материялық нүктенің түзу сызықты қозғалысының квадратураға келтірілетін кейбір түрлері

Массасы *m*-ге тең материялық нүкте түзу сызықты қозғалыста болсын делік. Бойымен нүкте қозғалатын түзуді *OX* өсі ретінде алайық. Нүктенің түзу сызық бойымен қозғалуы үшін оған әсер етуші күштің бағыты үнемі тұрақты болып және нүктенің бастапқы жылдамдығы осы күштің бойымен бағытталуы (немесе нольге тең) болуы қажет және жеткілікті.

Нүктенің *OX* өсі бойымен болатын түзу-сызықты қозғалысының дифференциалдық теңдеуін жалпы жағдайда мына түрде жазамыз:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x(t,x,\dot{x}).\qquad(3.18)$$



3.4-сурет

Бастапқы шарттарды былай деп алуға болады (3.4-сурет):

$$t=0,\quad x=x_0,\quad \dot{x}_0=v_0.\qquad(3.19)$$

(3.18)–екінші ретті дифференциалдық теңдеу. Оның жалпы шешімі екі интегралдау тұрақтысына тәуелді:

$$x=f(t,c_1,c_2).\qquad(3.20)$$

C_1 және C_2 интегралдау тұрақтыларын бастапқы шарттарды (3.19) –ны пайдалана отырып, (3.20)–теңдеу мен оның туындысынан шығатын теңдеуден табамыз. Осылайша есептеуден табылған C_1 және C_2 мәндерін (3.20)-теңдеуіне апарып қойсақ мынаны табамыз:

$$x=f(t;x_0;v_0).\qquad(3.21)$$

Бұл (3.21) бастапқы шарттарға сай келетін (3.18) теңдеуінің дербес шешімі болып табылады. Сөйтіп, нүктенің қозғалыс заңын өрнектейтін (3.21) теңдеуін осылайша тапқан болар едік. Бірақ (3.18) теңдеуінің шешімін табу жалпы жағдайда, математикалық көп қиындықтар туғызады. Дегенмен кейбір жеке жағдайларда оны квадратураға келтіре аламыз.

Күш тек уақытқа ғана тәуелді болып келетін жағдай. Қозғалыстың дифференциалдық теңдеуі бұл жолы былай жазылады:

$$m\ddot{x} = F_x(t). \tag{3.22}$$

Бұдан

$$d\dot{x} = \frac{1}{m} F_x(t)dt.$$

Осыны интегралдау арқылы мынаны аламыз:

$$\dot{x} = \frac{1}{m}\int F_x(t)dt + C_1. \tag{3.23}$$

Тағы бір рет интегралдасақ алатынымыз:

$$x = \frac{1}{m}\int \left[F_x(t)dt\right]dt + C_1 t + C_2. \tag{3.24}$$

Күш тек жылдамдыққа ғана тәуелді болып келетін жағдай.

Бұл жағдай көбіне кедергілі ортада қозғалған кезде сай келеді. Орта кедергісі тек нүкте жылдамдығына ғана тәуелді $F = F_x(\dot{x})$ түріндегі функциямен беріледі дейік. Онда нүкте қозғалысының дифференциалдық теңдеуін мына түрде алуға болады:

$$m\ddot{x} = F(\dot{x}). \tag{3.25}$$

(3.25) теңдеуіндегі $\dot{x}$ және t айнымалыларына ажырату әдісін қолданайық:

$$\frac{d\dot{x}}{F_x(x)} = \frac{1}{m}dt.$$

Бұл теңдеуді интегралдай отырып алатынымыз:

$$\int \frac{d\dot{x}}{F_x(x)} = \frac{1}{m}t + C_1.$$

Егер мынадай белгілеу енгізсек

$$\varphi(\dot{x}, C_1) = m\int \frac{dx}{F_x(x)} - mC_1. \tag{3.26}$$

Онда осының алдындағы теңдеуді былай жазар едік: $t = \varphi(\dot{x}, C_1)$.

Осы соңғы теңдеуден $\dot{x}$ – ні таба алатын болсақ, онда:

$$\dot{x} = f(t, C_1). \tag{*}$$

Бұл теңдеуден:

$$x = \int f(t, C_1)dt + C_2 \, . \tag{3.27}$$

Ал егер $\dot{x}-$ні уақыт t және C_1 тұрақты арқылы (*-түрінде) анықтай алмасақ, онда (3.25) теңдеуін басқаша түрлендіре отырып шешеміз. (3.25)-теңдеудің сол жағын түрлендірейік:

$$m\ddot{x} = m\frac{d\dot{x}}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = m\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}.$$

Олай болса (3.25) теңдеуі енді былай жазылады:

$$m\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = F_x(\dot{x}). \tag{3.28}$$

(3.28) теңдеуіндегі $\dot{x}$ және x айнымалыларын ажыратып, біреуін теңдіктің бір жағына, ал екіншісін оның оң жағына шығарып оны қайталап жазайық. Сонда:

$$m\dot{x}\frac{d\dot{x}}{F_x(\dot{x})} = dx \, .$$

Мұны интегралдаймыз:

$$x = m\int \frac{\dot{x}d\dot{x}}{F_x(\dot{x})} + C_1' \, . \tag{3.29}$$

Егер (3.29) теңдеуден $\dot{x}-$ті уақыт t функциясы ретінде анықтай алсақ, онда мынадай теңдікті анықтауға болар еді:

$$\dot{x} = \psi(x, C_1') \, .$$

Ал бұл теңдікті мына түрге келтіруге болады: $\dfrac{dx}{\psi(x, C_1')} = dt$.

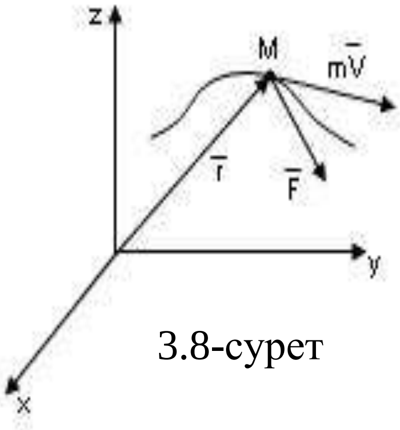
Енді осыны интегралдаймыз:

$$t = \int \frac{dx}{\psi(x, C_1')} + C_2 \, . \tag{3.30}$$

(3.30)-теңдеуден нүкте қозғалысының заңын, яғни $x-$тің уақытқа тәуелділігін табуға болады.

3.1.6. Материялық нүктенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теорема

Нүкте динамикасының үш жалпы теоремасы бар. Олардың бәрі де осындағы негізгі заңнан қорытылып шығарылады. Осы теоремаларға тоқталайық.



3.8-сурет

Материялық нүктенің m массасы мен $\bar{v}$ жылдамдығының көбейтіндісіне тең $\bar{q} = m\bar{v}$ векторын оның қозғалыс мөлшері дейміз. $\bar{q}$-векторы нүктеге түсірілген $\bar{F}$- күші әсерінен уақыт өткен сайын өзгеріп отырады (3.8-сурет). Бұл вектордың бір уақыт ішіндегі өзгерісінің әсер етуші күшпен қандай байланыста болатындығын табайық. Ол үшін негізгі теңдеуді түрлендіру керек:

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}\ , \text{ немесе } \frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{F} \tag{3.31}$$

Бұл теңдеудің екі жағын да dt –ға көбейтеміз:

$$d(m\bar{v}) = \bar{F}dt\,. \tag{3.32}$$

(3.32) –теңдеудің оң жағындағы $\bar{F}\ dt$ көбейтіндісін күштің элементар импульсі деп атайды, олай болса (3.18)–теңдеу теорема түрінде былай айтылады:

Материялық нүктенің қозғалыс мөлшерінің дифференциалы күшінің элементар импульсіне тең.

Уақыт t = to болғанда нүкте жылдамдығы $\bar{v} = \bar{v}_0$ болады дейік. (3.32) – теңдіктің сол жағынан $\bar{v}_0$-ден $\bar{v}$-ға дейінгі шектерде, ал оң жағынан t_0-ден t-ға дейінгі шектердегі интегралдар алайық:

$$\int_{v_O}^{V} d(m\bar{v}) = \int_{t_O}^{t} \bar{F}dt,\quad m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \int_{t_O}^{t} \bar{F}\ dt\,. \tag{3.33}$$

Элементар импульстерден t = to уақыт аралығында алынған интегралмен анықталатын $\bar{S}$ векторын күштің сол уақыт аралығындағы импульсі деп атайды:

$$\bar{S} = \int_{t_O}^{t} \bar{F}dt\,.$$

Күш импульсінің координаттар өстеріндегі проекциялары мынадай теңдіктермен анықталынады:

$$S_x = \int_{t_O}^{t} F_x dt,\quad S_y = \int_{t_O}^{t} F_y dt,\quad S_z = \int_{t_O}^{t} F_z dt\,. \tag{3.34}$$

(3.33) теңдігінің оң жағында тұрған интеграл күштің t –to уақыт аралығындағы импульсін анықтайды, сондықтан да оны мына түрде қайталап жазайық:

$$m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \bar{S}\ . \tag{3.35}$$

(3.33) және (3.35) теңдіктері материялық нүктенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теореманың айырым түріндегі өрнегін береді:

Қандай да уақыт аралығындағы нүктенің қозғалыс мөлшерлерінің өзгеруі сол уақыт аралығындағы күш импульсіне тең.

Векторлық теңдеу (3.33)–ді координаттық өстерге проекцияласақ осындай үш скалярлық теңдеуді аламыз:

$$mv_x - mv_{0x} = \int_{t_O}^{t} F_x dt, \qquad mv_y - mv_{0y} = \int_{t_O}^{t} F_y dt, \qquad mv_z - mv_{0z} = \int_{t_O}^{t} F_z dt.$$

(3.36)

Күш импульсінің координаттық өстердегі проекцияларының (3.34) теңдеулерінде көрсетілген анықтамаларын пайдалансақ, онда соңғы скалярлық теңдеулерді мына түрде жазамыз:

$$mv_x - mv_{0x} = S_x, \qquad mv_y - mv_{0y} = S_y, \qquad mv_z - mv_{0z} = S_z.$$

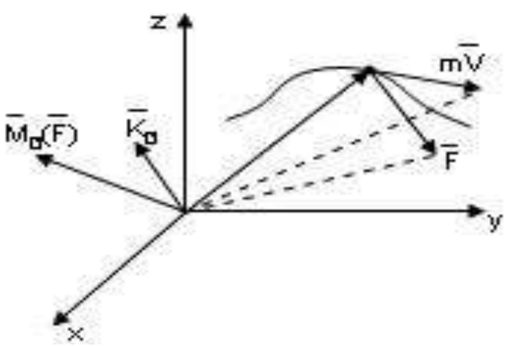
(3.24)

Теореманың координаттық өстерге проекциясы былай айтылады: *нүктнің қозғалыс мөлшерінің берілген өстегі проекциясының қандайда бір уақыт аралығындағы өзгеруі сол уақыт аралығындағы күш импульсінің осы өстегі проекциясына тең.*

3.1.7. Материялық нүктенің кинетикалық моментінің өзгеруі туралы теорема

Материялық нүктенің қозғалыс мөлшерінің қандайда бір центрге қатысты алынған моментін оның сол центрге қатысты кинетикалық моменті дейді.

O центріне қатысты алынған кинетикалық моменті $\bar{K}_0$ әрпімен белгілейік. Сонда ол $\bar{K}_0 = \bar{r} \times m\bar{v}$ немесе $\bar{K}_0 = \bar{M}_0(m\bar{v})$ түріндегі өрнекпен беріледі. Кинетикалық момент күш әсерінен уақыт өткен сайын өзгеріп тұрады (3.12 -сурет).



3.12-сурет

Оның өзгерісінің күшке тәуелділігін табайық. Ол үшін негізгі теңдеудің екі жағын да нүктенің $\bar{r}$ радиус-векторына векторлық түрде көбейтейік:

$$\bar{r} \times m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{r} \times \bar{F}. \qquad (3.38)$$

Бұл теңдеудің сол жағындағы векторлық көбейтіндіні түрлендірейік:

$$\bar{r} \times m\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) - \frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}). \qquad (3.39)$$

Бұл арада азайтқыш векторлық көбейтіндінің нөлге айналатынын ескердік. Ол екі коллинеарлық вектордың векторлық көбейтіндісі болуы себепті нөлге айналады. (3.38) - теңдіктің сол жағындағы векторлық көбейтіндіні (3.39) түрінде аламыз:

$$\frac{d(\bar{r} \times m\bar{v})}{dt} = \bar{r} \times \bar{F} . \tag{3.40}$$

Осы теңдік материялық нүкте қозғалыс мөлшері моментінің өзгеруі туралы немесе басқаша айтқанда, нүктенің кинетикалық моментінің өзгеруі туралы теореманы өрнектейді. Жоғарыда берілген материялық нүктенің кинетикалық моменті деген анықтаманы қолдану арқылы (3.40) теңдігін басқа түрде де жазуға болады:

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \bar{M}_0(\bar{F}_0) . \tag{3.41}$$

(3.40) не (3.41) теңдігімен өрнектелетін теорема былай айтылады: *қандай да бір центрге қатысты алынған нүкте кинетикалық моментінің уақыт бойынша туындысы сол центрге қатысты күш моментіне тең.*
(3.41)- теңдеуді координаттық үш өске проекциялап жазайық:

$$\frac{dK_{0x}}{dt} = M_x(\bar{F}), \quad \frac{dK_{0y}}{dt} = M_y(\bar{F}), \quad \frac{dK_{0z}}{dt} = M_z(\bar{F}) . \tag{3.42}$$

(3.42) –теңдіктері нүктенің координаттар өстеріне қатысты алынған кинетикалық моменттерінің өзгеруін сипаттайды: *координаттар өстеріне қатысты алынған нүкте кинетикалық моменттерінің уақыт бойынша туындылары сол өстерге қатысты алынған күш моменттеріне тең.*

3.1.8. Материялық нүктенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теорема

Нүктенің кинетикалық энергиясы деп оның массасы мен жылдамдығының квадратының көбейтіндісінің жартысына тең болатын скаляр шаманы айтады. Егер нүктенің кинетикалық энергиясын *T* деп алсақ, онда ол мынадай формуламен анықталады:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 . \tag{3.43}$$

Күш әсерінен нүктенің жылдамдығы $\bar{v}$ өзгерді. Сол себепті кинетикалық энергия да уақыт өткен сайын өзгеріп отырады.

Енді кинетикалық энергияның өзгерісінің күшпен байланысың беретін теоремаға тоқталайық. Ол теореманы негізгі теңдеуден қорытып шығарамыз.

Сол мақсатпен негізгі теңдеуді алайық та оның екі жағын да $d\bar{r}$ элементар орын ауыстыруға көбейтейік:

$$m\frac{d\bar{v}}{dt}d\bar{r} = \bar{F}d\bar{r}\ .$$

Бұл теңдеудің сол жағын түрлендірейік:

$$m\frac{d\bar{v}}{dt}d\bar{r} = md\,\bar{v}\frac{d\bar{r}}{dt} = md\bar{v}\times\bar{v} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right).$$

Осы түрлендіру нәтижесін пайдаланып, алдыңғы теңдеуді мына түрде қайта жазайық:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \bar{F}d\bar{r}\ . \qquad (3.44)$$

күшінің $d\bar{r}$ элементар орын ауыстыруға көбейтіндісін күштің элементар жұмысы деп атайды. Элементар жұмысты *d'A* деп белгілейміз:

$$d'A = \bar{F}d\bar{r}\ . \qquad (3.45)$$

Мұндағы штрих элементарлық жұмыстың жалпы жағдайда қандай да бір функцияның толық дифференциялы емес екендігін көрсетеді.

Кинетикалық энергия мен элементар жұмыс белгілеулерін пайдаланып (3.44) теңдігін қайта жазайық:

$$dT = d'A. \qquad (3.46)$$

(3.44) не болмаса (3.46) теңдігі дифференциялдық түрдегі теореманың өрнегін береді. Оны былай айтамыз: *материялық нүктенің кинетикалық энергиясының дифференциялы оған әсер ететін күштің элементар жұмысына тең.*

Енді материялық нүкте өзінің траекториясы, *AB* қисығы бойымен M_0M_1 жолын жүріп өтсін. Бұл жолда материялық нүкте жылдамдығы $\bar{v}_0$-ден $\bar{v}_1$-ге дейін өзгереді. (3.44) теңдігінің екі жағынан да $\overset{\cup}{M_0M_1}$ доғасы бойымен қисық сызықты интеграл алайық:

$$\int_{V_O}^{V} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_{\overset{\cup}{M_OM_1}} \bar{F}d\bar{r}\ .$$

Бұл теңдіктің сол жағындағы қисық сызықты интеграл кинетикалық энергияның соңғы және бастапқы мәндерінің айырмасына тең:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{M_OM_1} \bar{F}d\bar{r}\ . \qquad (3.47)$$

$\overset{\cup}{M_0M_1}$ жолындағы күштің толық жұмысы *A*, қисықтың $\overset{\cup}{M_0M_1}$ доғасы бойындағы элементар жұмыстарынан алынған қисық сызықты интегралға тең:

$$A = \int_{M_OM_1} \bar{F}d\bar{r}\ . \qquad (3.48)$$

Егер материялық нүктенің бастапқы орындағы кинетикалық энергиясын T_0 деп, ал соңғы орындағысын T_1 деп белгілесек және күш жұмысының (3.48) –теңдіктегі анықтамасын ескерсек, (3.48) теңдігін қысқа түрде былай жазамыз:

$$T_1 - T_0 = A. \qquad (3.49)$$

Нүктенің қандай да бір орын ауыстыруындағы кинетикалық энергиясының өзгеруі сол орын ауыстырудағы оған әсер етуші күштің жұмысына тең.

Кинетикалық энергияның өзгеруі туралы теоремадан қай жағдайда бірінші интеграл алуға болатынын анықтау үшін алдымен күш жұмысының негізгі қасиеттерін зерттеп білуіміз керек.

3.1.9. Күш жұмысы

Алдымен элементар жұмыстың математикалық өрнегінің әр түріне тоқтап өтейік. Элементар жұмыстың векторлардың скалярлық қөбейтіндісі түрінде алынған (3.32) өрнегінен сол векторлардың проекциялары арқылы жазылуына көшуге болады

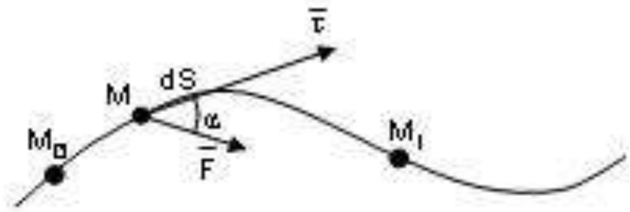
$$d'A = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \qquad (3.50)$$

Элементар жұмысты жолдың dS дифференциалы және күш $\bar{F}$ пен $\bar{v}$-ның нүкте жылдамдығы бағытының арасындағы α бұрышы арқылы да өрнектей аламыз (3.14сурет):

$$d'A = F|d\bar{r}|\cos(\bar{F}, d\bar{r}) = F|dS|\cos(\bar{F}, \bar{v}) = FdS\cos\alpha.$$

(3.51)

Бұл формуладағы F және dS оң шамалар $d'A$ элементар жұмыстың таңбасы cosα таңбасымен бірдей. Егер α сүйір болса, $d'A$ оң , α доғал болса, $d'A$ теріс таңбалы болады.



3.14-сурет

Күштің элементар жұмысын есептеу үшін керекті тағы бір формуланы көрсетейік. Бұл арада $d\bar{r} = \bar{v}dt$ екенін еске аламыз да, элементар жұмыс өрнегін жаңа түрге келтіреміз:

.

$$d'A = \bar{F}d\bar{r} = \bar{F}\bar{v}dt \qquad (3.52)$$

Элементар жұмыстың әр түрлі өрнегіне сәйкес, күштің толық жұмысы да әр түрлі формулалар мен сипатталады:

$$A = \int_{M_O M_1} F_x dx + F_y dy + F_z dz, \qquad A = \int_{M_O M_1} (F\cos\alpha)dS, \qquad A = \int_{M_O M_1} \bar{F}\bar{v}dt.$$

(3.53)

Жұмыс өлшемінің бірлігі үшін (*БҚЖ*) жүйесінде 1 Джоуль алынады (*1ДЖ = 1Н М*), ал техникалық жүйеде *–1кГм* (*1кГм* = 9,8 *1ДЖ*).

Уақыт бірлігіне қатысты алынған жұмыс қуат деп аталады. Қуатты *N* деп алсақ, онда оны мына формуламен анықтаймыз:

$$N = \frac{d'A}{dt}. \qquad (3.54)$$

Мұндағы $d'A$ элементар жұмысты (3.45) формуласымен алатын болсақ, онда қуат күш пен жылдамдықтың скалярлық көбейтіндісіне тең:

$$N = \overline{F}\overline{v}. \qquad (3.55)$$

Қуат бірлігі үшін (*БХЖ*) жүйесінде 1-ватт (*1Вт =1Дж/сек*) алынады. Практикада қуаттың ірі бірлік өлшемі киловатт (*1квт = 10³ Вт*) жиі қолданылады.

3.2. Механикалық жүйе динамикасы
3.2.1. Механикалық жүйе. Ішкі және сыртқы күштер

Материялық нүктелердің механикалық жүйесі деп қозғалыстары өзара тәуелді болып келетін материялық нүктелер жиынтығын айтады. Мұндай жиынтықтағы әрбір жеке нүкте қозғалысы ондағы барлық басқа нүктелердің қозғалыстары мен олардың орындарына тәуелді анықталады. Материялық нүктелердің механикалық жүйесі мысал ретінде күн жүйесін алуға болады. Күн жүйесіндегі әрбір жеке планета қозғалысы Күннің және бұл жүйе құрамына енетін барлық қалған планеталардың қозғалыстарына және орындарына байланысты анықталады.

Егер қозғалыс кезінде жүйедегі нүктелердің бір-бірінен ара қашықтықтары өзгермей сақталатын болса, онда бұл жүйені өзгермейтін механикалық жүйе дейміз. Абсолют қатты дене өзгермейтін механикалық жүйе ретінде қарастырылады. Демек, механикалық жүйенің айрықша белгісі - оның нүктелерінің арасында өзара әсерлесу күшінің бар екендігі. Осыған қарағанда материялық нүктелердің кез келген жиынтығы механикалық жүйе құра алмайтындығы белгілі. Механикалық жүйедегі әрбір нүктенің қозғалысы біріне – бірі тәуелді. Бұдан былай материялық нүктелердің механикалық жүйесі деп толық айтып жатпай, оны қысқаша нүктелер жүйесі немесе механикалық жүйе деп атайтын боламыз.

Нүктелердің кеңістікте орын ауыстыру еркіндіктері шектелмеген материялық нүктелердің механикалық жүйесін еркін жүйе дейміз. Еркін механикалық жүйе нүктелері кеңістіктің кез келген жерінде бола алады және кез келген жылдамдықты қабылдай алады. Еркін механикалық жүйенің мысалы ретінде Күн жүйесін алуға болады.

Егер нүктелердің еркін қозғалуын тежеп отыратындай алдын ала жүйеге қосымша шарттар қойылған болса, онда оны еркін емес механикалық жүйе деп атаймыз.

Динамиканың барлық заңдары еркін материялық нүкте үшін орынды болғандықтан, олар тек еркін механикалық жүйеге ғана арнайы қолданылады. Ал оларды еркін емес механикалық жүйе динамикасының мәселелерінде де қолдану мүмкіндігін туғызу үшін жүйені байланыстардан ажырату (бастау) аксиомасын пайдалануымыз керек. Жүйені байланыстардан ажырату аксиомасын (принципін) былай айтамыз: *қандай да бір қозғалыстағы еркін емес материялық нүктелердің механикалық жүйесінің әрбір нүктесінде берілген (актив) күштермен қатар байланыстар реакцияларын да түсіруіміз керек. Сонда бұл жүйені актив күштер мен байланыстар реакциялары әсер ететін еркін механикалық жүйе деп қарауға болады.* Қатты денеге әсер етуші күштерді актив (берілген) және пассив (байланыстар реакциялары) күштер деп аталатын екі топқа бөліп келдік. Жүйе динамикасында күштерді топтарға бөлудің тағы бір тәсілі қолданылады. Ол – механикалық жүйе нүктелеріне әсер ететін барлық күштерді сыртқы және ішкі күштерге бөлу жөніндегі тәсіл.

Берілген механикалық жүйенің сыртқы күштері деп осы жүйе құрамына енбейтін сыртқы жүйе нүктелеріне жасайтын әсерлерінен туатын күштерді айтамыз және $\overline{F}^e$ *деп белгілейміз.*

Берілген механикалық жүйе нүктелерінің арасында болатын өзара әсерлесу күштерін ішкі күштер дейміз және $\overline{F}^i$ *деп белгілейміз.*

Ішкі күштер берілген жүйе нүктелерінің арасындағы өзара әсер етуші күштер болғандықтан оларға Ньютонның 3-ші заңын қолдана аламыз. Осыдан жүйенің қос – қостан алынған ішкі күштері шама жағынан тең, бір түзу бойымен бір–біріне қарама-қарсы бағытталған күштер жүйесінің бас векторы және кез келген центрге қатысты алынған, олардың бас моменті үнемі нөлге тең болады:

$$\bar{R}^i = \sum \bar{F}_k^i = 0\,,\ \bar{M}_0^i = \sum \bar{M}_0(\bar{F}_k^i) = 0\,.$$

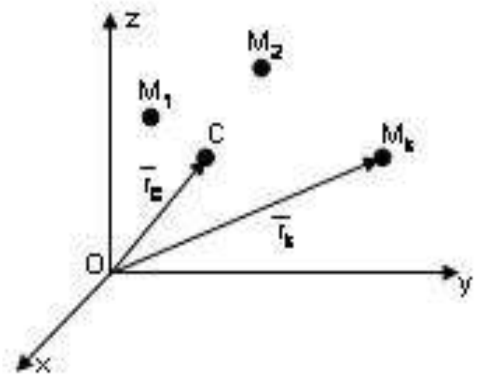
Бұл ішкі күштердің маңызды қасиеті болып табылады.

3.2.2. Массалар центрі

Механикалық жүйе динамикасында жиі қолданылатын негізгі ұғымдардың бірі массалар центрі туралы ұғым. Енді осы ұғымға тоқталып өтейік. Ол үшін материялық нүктелерден тұратын механикалық жүйе алайық. Оның қозғалысы *OXYZ* инерциялық өстер жүйесіне қатысты қарастырылатын болсын. Массасы m_K, ал радиус-векторы $\bar{r}_K$-ға тең, M_K нүктесін алайық.

Механикалық жүйе массасы деп ондағы нүктелер массаларының қосындысына тең болатын шаманы айтамыз:

$$M = \sum m_K .$$



3.17-сурет

Механикалық жүйе массаларының центрі деп радиус векторы:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum m_K \bar{r}_K}{M}. \qquad (3.56)$$

формуласымен анықталатын геометриялық нүктені (*C*-ны) айтамыз (3.17-сурет). Егер жүйе нүктелерінің координаттары X_K, Y_K, Z_K деп алсақ, онда оның массалары центрі *C*-ның координаттары мынадай формулаларымен анықталады:

$$X_C = \frac{\sum m_K X_K}{M},\ \ Y_C = \frac{\sum m_K Y_K}{M},\ \ Z_C = \frac{\sum m_K Z_K}{M}. \qquad (3.57)$$

Кейде бұл нүктені механикалық жүйенің инерциялар центрі деп атайды. Сонымен, жүйе динамикасында, статикада анықталған ауырлық центрі деген ұғымнан басқа, массалар (инерциялар) центрі-ауырлық центріне қарағанда кең мағыналы ұғым. Жоғарыдағы анықтамасына қарағанда механикалық жүйенің массалары центрінің әрбір уақыт кезеңінде кеңістіктегі орны тек жүйедегі нүктелер массалары мен ол нүктелердің кеңістіктегі орналасуларына ғана тәуелді. Егер жүйе нүктелері үшін еркін түсу үдеуі g тұрақты шама болса, онда нүктелердің массаларын олардың салмақтары арқылы анықтаймыз: $m_K = \dfrac{P_K}{g}$ $(k = \overline{1,n})$. Жүйе массасы M және оның салмағы $\bar{P}$ мынадай қатынаста болатындығын, яғни $M = \dfrac{P}{g}$ формуласын ескере отырып, (3.56) формуласын мына түрге келтіре аламыз:

$$\bar{r}_k = \frac{\sum \frac{P_k}{g}}{\frac{P}{g}} = \frac{\sum P_k \bar{r}_k}{P}. \qquad (3.58)$$

Сөйтіп, бұл дербес жағдайда (g = const) (3.56) формуласы статикада ауырлық центрін анықтайтын (3.58) формуласына айналады.

3.2.3. Механикалық жүйе қозғалысының дифференциалдық теңдеулері

1. Еркін механикалық жүйе. Қандайда инерциялық координаттар жүйесіне қатысты алынған n материялық нүктелерден тұратын механикалық жүйе қозғалысын қарастырайық. Осындағы массасы m_k -ға тең нүкте M_k -ны жекелеп алайық та, оған әсер ететін сыртқы күштер мен ішкі күштердің тең әсерлі күштерін $\overline{F}_k^{\,e}$, $\overline{F}_k^{\,i}$, және бұл нүктенің радиус-вектор $\overline{r}_k$ болсын. M_k – нүктесінің қозғалыс теңдеуін вектор түрінде жаза аламыз:

$$m_k = \frac{d^2\overline{r}_k}{dt^2} = \overline{F}_k^{\,e} + \overline{F}_k^{\,i}. \qquad (3.46)$$

Мұндай теңдеу жүйедегі әрбір нүкте үшін де жазылады. Сонда (4.4) – теңдеулер жүйесі еркін механикалық жүйе қозғалысының векторлық түрдегі дифференциалдық теңдеулері. Егер осы векторлық теңдеулердің әрқайсысын *OX, OY, OZ* қозғалмайтын координаттық өстерге проекциялайтын болсақ, онда еркін механикалық жүйе қозғалысының координаттық түрдегі дифференциалдық теңдеулерін аламыз:

$$\begin{aligned} m_k\ddot{X}_k &= F_{kx}^{e} + F_{kx}^{i}, \\ m_k\ddot{Y}_k &= F_{ky}^{e} + F_{ky}^{i}, \\ m_k\ddot{Z}_k &= F_{kz}^{e} + F_{kz}^{i}. \end{aligned} \qquad (3.60)$$

2. Еркін емес механикалық жүйе. Бізге *n* материялық нүктелердің еркін емес механикалық жүйесі берілген болсын. Оның қандай да бір M_k нүктесіне әсер ететін сыртқы және ішкі актив күштердің тең әсерлі күшін $\overline{F}_k^{\,a}$ -деп алайық. Байланыстардан ажырату туралы аксиомаға сүйене отырып берілген еркін емес механикалық жүйенің әрбір нүктесіне байланыстар реакцияларын түсіреміз. M_k нүктесіне түсетін байланыстар реакцияларының барлығына тең әсерлі күш $\overline{R}_k$ болсын. Жүйе нүктелерінің әрқайсысына актив күштерге қоса осылайша байланыстар реакцияларын түсіргеннен соң оны еркін механикалық жүйе деп алуға болады. Сол себепті бұл механикалық жүйенің әрбір нүктесіне Ньютонның II және III заңдарын қолдана аламыз. Сонда еркін емес механикалық жүйе қозғалысының векторлық теңдеулері мына түрде жазылады:

$$m_k\,\frac{d^2\overline{r}_k}{dt^2} = \overline{F}_k^{\,a} + \overline{R}_k. \ \ (k = \overline{1,n}) \qquad (3.61)$$

Бұл векторлық теңдеулердің әрбіреуінің екі жағын да қозғалмайтын *OX, OY, OZ* координаттар өстеріне проекциялау арқылы еркін емес механикалық жүйе қозғалысының дифференциалдық теңдеулерін координаттық түрде аламыз:

$$\begin{aligned} m\ddot{X}_k &= F_{kx}^{a} + R_{kx}, \\ m\ddot{Y}_k &= F_{ky} + R_{ky}, \qquad (k = \overline{1,n}) \\ m\ddot{Y} &= F_{kz} + R_{kz}. \end{aligned} \qquad (3.62)$$

3.2.4. Механикалық жүйенің массалары центрінің қозғалысы туралы теорема

Бұл теореманы дәлелдеу үшін механикалық жүйе қозғалысының дифференциалдық теңдеулерін еске түсірейік:

$$m_k \frac{d^2\bar{r}_k}{dt_2} = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i, \qquad (k = \overline{1,n}).$$

Осы теңдеулердің барлығын бір-біріне қосайық, сонда алатынымыз:

$$\sum m_k \frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2} = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i . \qquad (3.63)$$

Бұл теңдіктің оң жағындағы қосындылардың екіншісі, ішкі күштер қосындысы, нөлге тең. Ал оның сол жағындағы қосындыны (3.56) формуласын ескере отырып, мына түрге келтіре аламыз:

$$\sum m_k \frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2} = \frac{d^2}{dt}\sum m_k\bar{r}_k = M\frac{d^2\bar{r}_c}{dt^2}. \qquad (3.64)$$

Сондықтан (3.50) – теңдеуден іздеп отырған теореманың өрнегі мына түрге келеді:

$$M\frac{d^2\bar{r}_c}{dt^2} = \sum \bar{F}_k^e \text{ немесе } M\bar{a}_c = \bar{R}^e . \qquad (3.65)$$

(3.65) теңдігі жүйенің массалар центрінің қозғалысы туралы теореманы өрнектейді. Ол теорема былай айтылады: *механикалық жүйенің массалары центрі материялық нүкте сияқты қозғалады. Бұл нүктенің массасы тұтас жүйенің массасына тең, ал оған әсер етуші күш механикалық жүйенің сыртқы күштерінің бас векторына тең болады.* (3.65) векторлық теңдеуді координаттық өстерге проекцияласақ, мынадай үш скаляр теңдеу аламыз:

$$M\ddot{X}_c = R_x^e,\ M\ddot{Y}_c = R_y^e,\ M\ddot{Z}_c = R_z^e, \qquad (3.66)$$

мұндағы *Xc, Yc, Zc* – массалар центрінің үдеуінің координаттар өстеріндегі проекциялары. (3.66) үш скаляр теңдеу -массасы *M*-ге тең және $\bar{R}^e$ күші әсер ететін массалар центрі *C* нүктесінің қозғалысының дифференциалдық теңдеулері. Өзінің құрамы жағынан бұл теңдеулер нүкте динамикасының осыған сәйкес теңдеулерінен ешқандай айырмашылығы жоқ. Соңдықтан да жүйе массалары центрінің қозғалысын зерттеу мәселесі нүкте динамикасының мәселесіне жатады.

Егер жүйенің сыртқы күштерінің бас векторы нөлге тең болса, онда массалар центрі тұрақты жылдамдықпен қозғалады. Шынында $\bar{R}^e = 0$ болса, (3.66) - теңдіктен:

$$\bar{a}_c = 0. \qquad (3.67)$$

Осыдан:

$$\bar{v}_c = const. \qquad (3.68)$$

(3.68) - векторлық теңдікті жүйенің массалары центрі *C*-ның жылдамдығының сақталу заңы деп атайды.

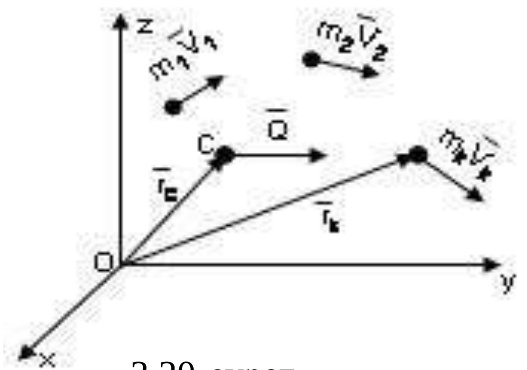
3.2.5. Механикалық жүйенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теорема

1. Механикалық жүйенің қозғалыс мөлшері

Берілген механикалық жүйе *n* материялық нүктелерден құралады. Жүйенің массасы m_k және жылдамдығы $\bar{v}_k$ тең M нүктесінің қозғалыс мөлшері $\bar{q}_k = m_k \bar{v}_k$ векторымен беріледі (3.20-сурет). Жүйедегі нүктелер қозғалыс мөлшері $\bar{q}_k$ векторларының бас векторы механикалық жүйенің қозғалыс мөлшері ретінде алынады.

Басқаша айтқанда, механикалық жүйенің қозғалыс мөлшері деп, ондағы барлық материялық нүктелердің қозғалыс мөлшерлерінің геометриялық қосындысына тең болатын $\bar{Q}$ векторын айтамыз:

$$\bar{Q} = \sum m_k \bar{v}_k . \tag{3.69}$$



3.20-сурет

$\bar{Q}$ векторының координаттар өстеріндегі проекцияларын (3.69) –векторлық теңдікті сәйкес өстерге проекциялау арқылы табамыз:

$$Q_x = \sum m_k v_{kx},$$
$$Q_y = \sum m_k v_{ky}, \tag{3.70}$$
$$Q_z = \sum m_k v_{kz} .$$

Жүйенің қозғалыс мөлшері мен массалар центрінің жылдамдығы арасында тәуелділік бар. Оны табу үшін жүйе массаларының центрін анықтайтын қатынастың екі жағынан да уақыт бойынша туынды табамыз:

$$\frac{d\bar{r}_c}{dt} = \frac{\sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt}}{M} = \frac{\sum m_k \bar{v}_k}{M} .$$

Осы теңдіктен мынау шығады:

$$\bar{Q} = M\bar{v}_c . \tag{3.71}$$

2. Механикалық жүйенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теорема

Жүйенің қозғалысы кезінде оның $\overline{Q}$ қозғалысы мөлшері күштердің әсерінен уақыт өткен сайын өзгеріп отырады. $\overline{Q}$ векторы өзгеруінің жүйеге әсер етуші күштерге тәуелділігі мынадай теоремамен анықталады: *механикалық жүйенің қозғалыс мөлшерінен уақыт бойынша алынған туынды жүйеге әсер етуші барлық сыртқы күштердің бас векторына тең.*

Бұл теореманы дәлелдеу үшін механикалық жүйе қозғалысының дифференциалдық теңдеулерін еске түсірейік:

$$m_k \frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2} = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i, \ k = (\overline{1,n}).$$

Осы теңдеулердің барлығын бір-біріне қосайық, сонда алатынымыз:

$$\sum m_k \frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2} = \sum F_k^e + \sum F_k^i \ . \tag{3.72}$$

Бұл теңдіктің оң жағындағы қосындылардың екіншісі, ішкі күштер қосындысы, нөлге тең. Ал оның сол жағындағы қосынды $\overline{Q}$ векторынан уақыт бойынша алынған туындыға тең:

$$\sum m_k \frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\sum m_k \bar{v}_k\right) = \frac{d\overline{Q}}{dt}. \tag{3.73}$$

Сондықтан (3.72) –теңдеуден іздеп отырған теореманың өрнегі мына түрге келеді:

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum \overline{F}_k^e \quad \text{немесе} \quad \frac{d\overline{Q}}{dt} = \overline{R}^e. \tag{3.74}$$

Осымен жоғарыда айтылған теорема дәлелденді (3.74) теңдігі жүйенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теореманың дифференциалдық өрнегін береді. Теореманың (3.74) өрнегіне жүйенің ішкі күштері қатынаспайды. Бұл оның қолайлы жағы. Өйткені ішкі күштер әуел баста белгісіз болады. Мұнда олар өздігінен жойылған. Демек, ішкі күштер $\overline{Q}$ вектордың өзгеруіне бірден қатыспайды.

Векторлық теңдеу (3.74) декарттық координаттар өстеріне проекциялаудан 3 скаляр теңдеу аламыз:

$$\frac{dQ_x}{dt} = R_x^e, \ \frac{dQ_y}{dt} = R_y^e, \ \frac{dQ_z}{dt} = R_z^e. \tag{3.75}$$

(3.75) – теңдеулер, механикалық жүйенің қозғалыс мөлшерінің координаттық өстердегі проекцияларынан уақыт бойынша алынған туындылары жүйенің сыртқы күштерінің бас векторының сол өстердегі проекцияларына тең болатындығын көрсетеді.

Қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теореманың (3.74) дифференциялдық өрнегінен оның интегралдық өрнегіне көшуге болады. Ол үшін векторлық теңдік (3.74) –дің екі жағында *dt*-ға көбейтіп, содан кейін оның екі жағынан да $t = t_0$ ден $t = t_1$- ге дейінгі аралықта интеграл алу керек:

$$\int_{t_0}^{t_1} d\overline{Q} = \int_{t_0}^{t_1} \overline{R}^e dt.$$

Бұдан:

$$\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \int \overline{R}^e dt, \qquad (3.76)$$

мұндағы $\overline{Q}_1$- t_1 уақытқа, ал $\overline{Q}_0 - t_0$ уақытқа сәйкес келетін жүйенің қозғалыс мөлшері $\overline{Q}$ векторының мәндері. (3.76) теңдігіндегі интеграл сыртқы күштердің бас векторы $\overline{R}^e$-нің $t_1 - t_0$ уақыт аралығындағы импульсі деп аталады. Оны $\overline{S}^e$ деп белгілейік, сонда алатынымыз:

$$\overline{S}^e = \int_{t_0}^{t_1} \overline{R}^e dt. \qquad (3.77)$$

Бұл анықтаманы әрбір жеке $\overline{F}_k^e$ сыртқы күштердің импульстері арқылы да өрнектей аламыз:

$$\overline{S}^e = \int_{t_0}^{t_1} \sum \overline{F}_k^e dt = \sum \int_{t_0}^{t_1} \overline{F}_k^e dt.$$

Оң жақтағы қосындының белгісі ішіндегі интегралды жүйенің k -шы нүктесіне әсер ететін, $\overline{F}_k^e$ сыртқы күшінің $t_1 - t_0$ уақыт аралығындағы импульсі деп атаймыз:

$$\overline{S}_k^e = \int_{t_0}^{t_1} \overline{F}_k^e dt.$$

Бұл теңдікті ескере отырып, (4.21) – анықтаманы мына түрде жазуға болады:

$$\overline{S}^e = \sum \overline{S}_k^e. \qquad (3.78)$$

(3.78) теңдігі сыртқы күштердің бас векторының қандай да бір уақыт аралығындағы импульсі (3.77) жүйеге әсер етуші сыртқы күштердің сол уақыт аралығындағы барлық импульстерінің геометриялық қосындысына тең екендігін көрсетеді. Егер күштер импульсінің анықтамасы болып табылатын (3.77) немесе (3.78) теңдіктерін пайдалансақ, онда (3.76) – теореманы былай жазамыз:

$$\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \overline{S}^e \text{ немесе } \overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \sum \overline{S}_k^e. \qquad (3.79)$$

Сонымен жүйенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теореманың интеграл түріндегі өрнегі (3.76) немесе (3.79) теңдіктерімен беріледі . Бұл теңдіктермен берілетін теорема былай айтылады: *жүйенің қозғалыс мөлшерінің қандай да бір уақыт аралығындағы өзгеруі, сыртқы күштердің бас векторының сол уақыт аралығындағы импульсіне тең.* (3.79) векторлық үш скаляр теңдеуге эквивалентті:

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \int_{t_0}^{t_1} R_x^e dt, \qquad Q_{1y} - Q_{0y} = \int_{t_0}^{t_1} R_y^e dt, \qquad Q_{1z} - Q_{0z} = \int_{t_0}^{t_1} R_z^e dt,$$
(3.80)

немесе

$$Q_{1x} - Q_{0x} = S_x^e,\ Q_{1y} - Q_{0y} = S_y^e,\ Q_{1z} - Q_{0z} = S_z^e. \qquad (3.81)$$

3. Қозғалыс мөлшерінің сақталу заңы. Егер механикалық жүйеге әсер ететін сыртқы күштерінің бас векторы нөлге тең болып келетін болса $\overline{R}^e = 0$ онда теорема өрнегі (3.79) теңдеуінен мынадай теңдік шығады:

$$\overline{Q} = const = \overline{Q}_0, \qquad (3.82)$$

мұндағы $\overline{Q}_0$ жүйенің қозғалыс мөлшерінің бастапқы мәні. (3.82) –теңдік қозғалыс мөлшерінің сақталу заңы былай айтылады: *егер сыртқы күштердің бас векторы* $\overline{R}^e = 0$ *болып келсе, онда механикалық жүйенің* $\overline{Q}$ *векторы қозғалыс кезінде өзінің шамасы мен бағытын өзгертпей сақтайды.*

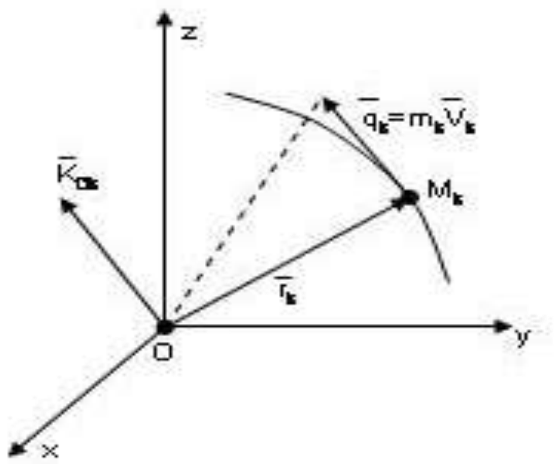
3.2.6. Механикалық жүйенің кинетикалық моменттерінің өзгеруі туралы теорема

1. Механикалық жүйенің кинетикалық моменті. n материялық нүктеден тұратын механикалық жүйе қозғалысын *OXYZ* инерциялық өстер жүйесіне қатысты қарастырайық (3.23-сурет). Жүйедегі әрбір нүктенің козғалыс мөлшері:

$$\overline{q}_k = m_k \overline{v}_k, (k = \overline{1,n}). \qquad (3.83)$$

және оның *O* центріне қатысты алынған кинетикалық моменті:

$$\overline{K}_{0k} = \overline{r}_k \times m_k \overline{v}_k, (k = \overline{1,n}). \qquad (3.84)$$



3.23-сурет

$\overline{K}_{0k}$ векторы *O* нүктесінде $\overline{r}_k$ және $\overline{q}_k$ -векторларының жазықтығына перпендикуляр бағытталады. $\overline{K}_{0k}$ векторларының бас векторын алайық.

Жүйе нүктелерінің О центрге қатысты алынған кинетикалық моменттерінің бас векторын (геометриялық қосындысын) сол О центріне қатысты алынған механикалық жүйенің кинетикалық моменті деп атаймыз. Жүйенің О центріне қатысты кинетикалық моментін $\overline{K}_0$ деп белгілесек, онда ол анықтама бойынша мынаны аламыз:

$$\overline{K}_0 = \sum \overline{K}_{ok} = \sum \overline{M}_o(m_k \overline{v}_k), \tag{3.85}$$

немесе (3.84) теңдігін ескерсек шығатыны:

$$\overline{K}_o = \sum \overline{r}_k \times m_k \overline{v}_k \,. \tag{3.86}$$

векторының бас нүктесі *O* центрінде жатады. Кинетикалық момент механикалық жүйенің айнала қозғалысын сипаттайды.

Жүйенің $\overline{K}_0$ кинетикалық моментін *OXYZ* координаттық өстерге проекциялайық:

$$\begin{aligned}
K_x &= \sum M_x(m_k \overline{v}_k) = \sum m_k(y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k),\\
K_y &= \sum M_y(m_k \overline{v}_k) = \sum m_k(z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k),\\
K_z &= \sum M_z(m_k \overline{v}_k) = \sum m_k(x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k).
\end{aligned} \tag{3.87}$$

Проекциялары (3.87) теңдіктерімен анықталатын векторының модулі мынадай:

$$K_o = \sqrt{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2}\,. \tag{3.88}$$

Оның бағыттаушы косинустары:

$$\cos(\overline{K}_o, x) = \frac{K_x}{K},\ \cos(\overline{K}_o, y) = \frac{K_y}{K},\ \cos(\overline{K}_o, z) = \frac{K_z}{K}. \tag{3.89}$$

3.2.7. Механикалық жүйенің қозғалмайтын центрге қатысты алынған кинетикалық моментінің өзгеруі туралы теорема

Теорема: *Қандай да бір қозғалмайтын центрге қатысты алынған механикалық жүйенің кинетикалық моментінің уақыт бойынша алынған туындысы сол центрге қатысты алынған жүйедегі сыртқы күштердің бас моментіне тең.*

Теореманы дәлелдеу мақсатымен берілген механикалық жүйенің қандай да бір нүктесін M_k алайық та, оған әсер ететін сыртқы $\overline{F}_k^e$ және ішкі $\overline{F}_k^i$ күштерді ескере отырып оның қозғалысының дифференциалдық теңдеуін құрайық:

$$m_k \frac{d^2 \overline{r}_k}{dt^2} = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i, (k = \overline{1,n})\,. \tag{3.90}$$

Мұндай теңдеулерді әрбір нүкте үшін құруға болатындықтан олардың жалпы саны n, жүйедегі нүктелер санына тең болады. Осы (3.90) – тегі n теңдеудің әрқайсысын сәйкес нүктелердің радиус –векторлары $\overline{r}_k$ -ге векторлық түрде көбейтіп, оларды бір-біріне қосамыз:

$$\sum \bar{r}_k \times m_k \frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2} = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^e + \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^i . \qquad (3.91)$$

(3.91)–теңдіктің сол жағындағы қосындыны түрлендіреміз:

$$\sum \bar{r}_k \times m_k \frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\sum \bar{r}_k \times m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt}) - \sum \frac{d\bar{r}_k}{dt} \times m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt}(\sum \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k).$$

(3.92)

Жүйенің ішкі күштерінің қасиеті бойынша ішкі күштердің бас моменті әр уақытта нөлге тең болады. Сондықтан да (3.92)–теңдіктің оң жағындағы екінші қосындысы нөлге тең:

$$\sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^i = 0 . \qquad (3.93)$$

(3.92) және (3.93) теңдіктерін пайдалана отырып (3.91) –теңдігін мына түрге келтіреміз:

$$\frac{d}{dt}(\sum \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^e . \qquad (3.94)$$

Егер (3.94) теңдігінің сол жағындағы қосынды жүйенің кинетикалық моменті $\bar{K}_o$-ге, ал оның оң жағындағы қосынды сыртқа күштердің *O* центріне қатысты алғандағы бас моменті $\bar{M}_o^e$ векторына тең екенін ескерсек, онда бұл теңдікті мына түрде ықшамдап жазуға болады:

$$\frac{d\bar{K}_o}{dt} = \bar{M}_o^e . \qquad (3.95)$$

Осымен теорема дәлелденді. Теорема (3.94) немесе (3.82) түріндегі бір векторлық теңдікпен беріледі.

Жоғарыдағы тағайындалған (3.81) және (3.95) векторлық теңдіктерді координаттық түрге келтірейік. Ол үшін кинетикалық моментті және күштер бас моментін үш құраушыға жіктейміз.

$$\bar{K}_o = K_x\bar{i} + K_y\bar{j} + K_z\bar{k} \qquad \text{және} \qquad \bar{M}_o^e = M_x^e\bar{i} + M_y^e\bar{j} + M_z^e\bar{k} .$$

(3.96)

Енді (3.96) теңдіктеріне сүйене отырып (3.95) векторлық теңдікті мынадай үш скаляр теңдіктерімен алмастыра аламыз:

$$\frac{dK_x}{dt} = M_x^e, \ \frac{dK_y}{dt} = M_y^e, \ \frac{dK_z}{dt} = M_z^e . \qquad (3.97)$$

Кинетикалық моменттің сақталу заңы. Егер *O* нүктесіне қатысты алынған сыртқы күштер бас моменті $\bar{M}_o^e = 0$ болса, онда жүйенің сол нүктеге қатысты алынған кинетикалық моментінің шамасы да, бағыты да өзгермейді, тұрақты қалпында қалады.

$$\frac{d\bar{K}_o}{dt} = 0, \ \bar{K}_o = const . \qquad (3.98)$$

Бұл (3.98) теңдігі *O* центріне қатысты алынған кинетикалық моменттің сақталу заңын береді.

Егер сыртқы күштердің *O* центріне қатысты алғандағы бас моменті нөлге тең болса, онда оның осы центрден өтетін координаттар өстеріндегі проекциялары да нөлге тең болады:

$$M_x^e = 0,\ \ M_y^e = 0,\ \ M_z^e = 0.$$

Сондықтан да (4.41)- теңдіктерден алатынымыз:

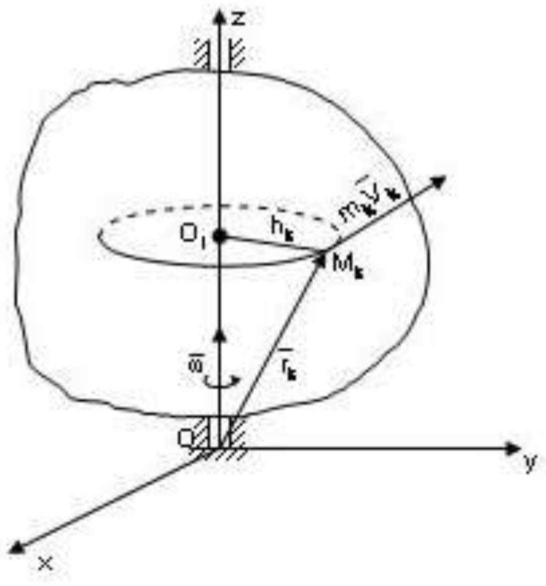
$$K_x = const,\ K_y = const,\ K_z = const. \tag{3.99}$$

3.2.8. Кинетикалық моменттің өзгеруі туралы теореманы қатты дененің айналмалы қозғалысына қолдану

Қозғалмайтын өстен айналатын қатты дененің кинетикалық моменті. Қатты дене қозғалмайтын *OZ* өсін $\overline{\omega}$ бұрыштық жылдамдықпен айнала қозғалатын болсын (3.24-сурет). Осы дененің *O* центріне қатысты кинетикалық моментін анықтайық. Анықтама бойынша:

$$\overline{K}_o = \sum \overline{M}_o(m_k \bar{v}_k) = \sum \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k. \tag{3.100}$$

Кординаттық өстердегі $\overline{K}_o$ векторының проекциялары (4.87) формулаларымен анықталады. Жылдамдық $\bar{v}_k$ векторының проекцияларын анықтауға Эйлер формуласы қолдануға болады:



3.24-сурет

$$\bar{v}_k = \overline{\omega} \times \bar{r}_k. \tag{3.101}$$

Осы теңдіктен: $v_{kx} \equiv \dot{x}_k = -\omega y_k$,

$$v_{ky} \equiv \dot{y}_k = \omega x_k,$$

$$v_{kz} \equiv \dot{z}_k = 0. \tag{3.102}$$

жылдамдықтар проекцияларының өрнектерін (3.87) формуладағы жылдамдықтар проекцияларының өрнектерін (3.87) формуладағы орындарына қоямыз:

$$K_x = -\omega \sum m_k z_k x_k, K_y = -\omega \sum m_k y_k z_k, K_z = \omega \sum m_k (x_k^2 + y_k^2).$$

(3.103)

Осы (3.103) формуладағы қосындыларды мына төмендегідей етіп белгілейміз:

$$I_{xz} = I_{zx} = \sum m_k z_k x_k, \qquad I_{yz} = I_{zy} = \sum m_k y_k z_k, \qquad I_z = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2).$$

(3.104)

Осыларға ұқсас формулалармен анықталатын, бірақ (3.104) өрнегінде жоқ тағы бір үш шаманы көрсетейік:

$$I_{xy} = I_{yx} = \sum m_k x_k y_k\,,\; I_y = \sum m_k (z_k^2 + x_k^2),\; I_x = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2)\,.$$
(3.105)

(3.104), (3.105) теңдіктерімен анықталатын шамалар инерция моменттері деп аталады. Олардың ішіндегі I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} үш шаманы дененің центрден тепкіш инерция моменттері деп, ал қалғандары I_x, I_y, I_z дененің өстік инерция моменттері деп аталады.

Енді осы анықтамаларды пайдалансақ (3.103) формулаларын мына түрге келтіреміз:

$$K_x = -\omega I_{xz},\; K_y = -\omega I_{yz},\; K_z = \omega I_z\,. \tag{3.106}$$

3.2.9. Қатты дененің бекітілген өс төңірегіндегі айналмалы қозғалысының дифференциялдық теңдеуі

Дененің қозғалмайтын өс төңірегіндегі айналмалы қозғалысының дифференциялдық теңдеуін алу үшін кинетикалық моменттің өзгеруі туралы теореманы (3.97) теңдеулерінің үшінші түріне сәйкес қолдануымыз керек:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z(\overline{F}_k^e)\,. \tag{3.107}$$

Дененің Z айналу өсіне қатысты алынған кинетикалық моменті (3.106) формулаларының 3 – сі бойынша анықталады:

$$\frac{d(I_z\omega)}{dt} = \sum M_z(\overline{F}_k^e)\,. \tag{3.108}$$

Дене абсолют қатты дене болған жағдайда I_z инерция моменті тұрақты шама болады. Олай болса (3.108) теңдеуін былайша өзгерте аламыз:

$$I_z\frac{d\omega}{dt} = \sum M_z(\overline{F}_k^e)\,, \tag{3.109}$$

немесе

$$I_z\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum M_z(\overline{F}_k^e)\,. \tag{3.110}$$

Осы соңғы теңдеу қатты дененің қозғалмайтын өс төңірегіндегі айналмалы қозғалысының дифференциалдық теңдеуі болып табылады.

3.2.10. Механикалық жүйенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теорема

Механикалық жүйесінің кинетикалық энергиясы және есептеуге керекті формулалар

Аныктама. *Механикалық жүйенің кинетикалық энергиясы деп ондағы барлық материялық нүктелердің кинетикалық энергияларының қосындысына тең скаляр шаманы айтамыз*.

Массасы m_k әрбір материялық нүктенің кинетикалық энергиясы:

$$T_k = \frac{m_k v_k^2}{2}. \qquad (k = \overline{1,n}) \tag{3.111}$$

Онда, аныктама бойынша, n материялық нүктеден тұратын механикалық жүйенің кинетикалық энергиясы осылардын арифметикалық қосындысына тең:

$$T = \frac{1}{2}\sum m_k v_k^2. \tag{3.112}$$

немесе

$$T = \frac{1}{2}\sum m_k (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2). \tag{3.113}$$

Кинетикалық энергия қозғалыс мөлшерімен қатарлас келетін жүйе қозғалысының негізгі екі өлшемінің бірі болып табылады. Жоғарыда айтқанымыздай, жүйенің қозғалыс мөлшері оның ілгерілемелі қозғалысын сипаттайды. Ал кинетикалық энергия механикалық қозғалысты толық көлемінде тереңірек сипаттайды.

Өзгермейтін механикалық жүйенің (абсолют катты дене) қозғалысы үшін (3.111) өрнегін қолдануға ыңғайлы түрге келтіруге болады.

Ілгерілемелі қозғалыстағы катты дененің кинетикалық энергиясы. Ілгерілемелі қозғалыстағы дене нүктелерінің жылдамдықтары өзара тең болғандықтан (3.111) формуладағы жылдамдық квадратын ортақ көбейткіш ретінде қосынды белгісінің алдына шығады:

$$T = \frac{1}{2}v^2 \sum m_k .$$

Дене нүктелерінің массаларының қосындысы $M = \sum m_k$ дене массасын береді. Олай болса ілгерілемелі қозғалыстағы қатты дене кинетикалық энергиясы:

$$T = \frac{1}{2}Mv^2. \tag{3.114}$$

Сонымен, *ілгерілемелі қозғалыстағы қатты дененің кинетикалық энергиясы дененің массасы мен оның жылдамдығының квадратының көбейтіндісінің жартысына тең.*

Қозғалмайтын өсті айнала қозғалатын қатты дененің кинетикалық энергиясы. Айналмалы қозғалыстағы дене нүктелерінің жылдамдықтары олардың айналу өсінен қашықтықтарына пропорционал болып келеді

$$v_k = \omega \cdot h_k, (k = \overline{1,n}).$$

Осыларды (3.112) формуласына қойсақ алатынымыз:

$$T = \frac{1}{2}\sum m_k \omega^2 h_k^2 .$$

Мұндағы ω^2 ортақ көбейткішті қосынды белгісінің алдына шығарсақ және дене нүктелерінің массалары мен олардың айналу өсінен қашықтықтарының квадраттары көбейтінділерінің қосындысы $I_z = \sum m_k h_k^2$ - айналу өсіне қатысты алынған дененің инерция моментін анықтайтынын ескерсек, онда мынадай формула аламыз:

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2 . \tag{3.115}$$

Айналмалы қозғалыстағы қатты дененің кинетикалық энергиясы дененің айналу өсіне қатысты алынған инерция моменті мен оның бұрыштық жылдамдығының квадратына көбейтіндісінің жартысына тең.

Кенигтің теоремасы. Механикалық жүйенің күрделі қозғалысының кинетикалық энергиясын есептеуде Кенигтің теоремасы қолданылады. Механикалық жүйенің күрделі қозғалысын екі жәй қозғалысқа жіктеуге болады. Оның бірі – массалар центрінің қозғалысымен анықталатын ілгерілемелі қозғалыс, ал екіншісі жүйенің массалар центрі төңірегіндегі салыстырмалы қозғалысы. Осыған байланысты M_k нүктенің жылдамдығы да екі жылдамдық қосындысына тең болады:

$$\bar{v} = \bar{v}_c + \bar{v}'_k, (k = \overline{1,n}), \tag{3.116}$$

мұндағы $\bar{v}_c$ - жүйенің массалары центрінің жылдамдығы, $\bar{v}'_k$ жүйемен бірге массалар центрі төңірегіндегі қозғалуынан туатын M_k нүктенің жылдамдығы. Бұл (3.116) формуламен анықталатын жылдамдықтарды (3.112) теңдігіне апарып қою арқылы мынадай нәтиже аламыз:

$$T = \frac{1}{2}\sum m_k (\bar{v}_c + \bar{v}'_k)^2 = \frac{1}{2}\sum m_k v_c^2 + \bar{v}_c \sum m_k \bar{v}'_k + \frac{1}{2}\sum m_k \bar{v}'^2_k .$$

(3.117)

Бұл (3.117) -теңдігіндегі:

$$\sum m_k = M, \sum m_k \bar{v}'_k = \frac{d}{dt}(\sum m_k \bar{\rho}_{k)} = \frac{d}{dt}(M\bar{\rho}_c) = 0 .$$

(3.118)

Мұндағы $\bar{\rho}_c = 0$, өйткені массалар центрі C –қозғалмалы $CXYZ$ координаттық өстер жүйесінің бас нүктесі. Осы (3.118) теңдіктерін еске ала отырып, (3.117) теңдігін ақырғы түрде былай жазамыз:

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2}\sum m_k v'^2_k . \tag{3.119}$$

Соңғы қосынды механикалық жүйенің массалар центріне, яғни ілгерілемелі қозғалыстағы $CX'Y'Z'$ -санақ жүйесіне қатысты алынғандағы салыстырмалы қозғалыстың кинетикалық энергиясы, сондықтан оны T'_c деп белгілейік, ол:

$$T'_c = \frac{1}{2}\sum m_k v'^{\,2}_k\,. \qquad (3.120)$$

Сонда (3.119) теңдігін қысқаша мына түрде жазуға болады:

$$T = \frac{1}{2}Mv_c^2 + T'_c\,. \qquad (3.121)$$

Кенигтің теоремасы былай айтылады: *күрделі қозғалыстағы механикалық жүйенің кинетикалық энергиясы массалар центрінің қозғалысымен анықталатын ілгерілемелі қозғалыстың кинетикалық энергиясына, жүйенің массалар центрінің төңірегінде орындалатын салыстырмалы қозғалысының кинетикалық энергиясын қосқаннан шығатын қосындыға тең.*

Жазық–параллель қозғалыстағы қатты дененің кинетикалық энергиясы. Дененің жазық параллель қозғалысын массалар центрінің қозғалысымен анықтайтын ілгерілемелі қозғалыс пен массалар центрі төңірегіндегі, ω лездік бұрыштық жылдамдықпен орындалатын, лездік айналыстан тұрады деп есептеуге болады. Массалар центрі C арқылы өтетін және қозғалыс жазықтығына үнемі перпендикуляр болып келетін дененің лездік айналу өсін CZ деп белгілесек, онда (3.120) формуласы бойынша анықталатын T'_c бұл жолы мынадай болады:

$$T'_c = \frac{1}{2}I_{cz}\omega^2\,. \qquad (3.122)$$

T'_c табылған мәнін (3.122) формуласындағы Кенигтің (3.121) теоремасындағы орнына апарып қойсақ, жазық параллель қозғалыстағы қатты дененің кинетикалық энергиясын есептеуге қолданылатын формула аламыз:

$$T = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}I_{cz}\omega^2\,. \qquad (3.123)$$

Еркін қозғалыстағы қатты дененің кинетикалық энергиясы. Еркін қатты дененің массалар центрі жанында орындалатын қозғалыстары C нүктесінен өтетін лездік айналыстарға келтірілгендіктен T_c салыстырмалы қозғалыс энергиясы мынадай формуламен анықталады:

$$T'_c = \frac{1}{2}I_{c\omega}\omega^2\,. \qquad (3.124)$$

Мұндағы $I_{c\omega}$ - массалар центрі C нүктесінен өтетін және $\overline{\omega}$ лездік бұрыштық жылдамдық векторымен бірдей бағытталатын лездік бұрыштық жылдамдық векторымен бірдей бағытталатын лездік айналу өсіне қатысты алынған дененің инерция моменті. (3.124) теңдігін Кенигтің теоремасын өрнектейтін (3.119) формуладағы орнына қойсақ, онда мынаны аламыз:

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I_{c\omega} \omega^2 . \qquad (3.125)$$

Сонымен, еркін қозғалыстағы қатты дененің кинетикалық энергиясы (3.125) формуласымен анықталады. Жалпы алғанда, $I_{c\omega}$ инерция моменті айнымалы шама болып келеді.

3.2.11 Механикалық жүйенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теорема

Бізге n материялық нүктелердің механикалық жүйесі берілсін жүйенің M_k нүктесіне әсер етуші барлық сыртқы күштердің теңәсерлі күшін $\overline{F}_k^e$ деп, ол ондағы ішкі күштердің теңәсерлі күшін $\overline{F}_k^i$ деп белгілейміз. Сонда массасы m_k -ға тең бұл M_k нүктесінің қозғалысының дифференциалдық теңдеуін мынадай түрде жаза аламыз:

$$m_k \frac{d\overline{v}_k}{dt} = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i, (k = \overline{1, n}) . \qquad (3.126)$$

Бұл теңдеудің әрқайсысын $\overline{v}_k dt = d\overline{r}_k$ шамасына көбейтіп, өзара қоссақ. Сонда:

$$\sum m_k \overline{v}_k d\overline{v}_k = \sum \overline{F}_k^e d\overline{r}_k + \sum \overline{F}_k^i d\overline{r}_k . \qquad (3.127)$$

Бұл соңғы теңдеудің сол жағындағы қосынды:

$$\sum m_k \overline{v}_k d\overline{v}_k = d\left(\frac{\sum m_k v_k^2}{2}\right) = dT .$$

болғандықтан (3.127) теңдігін мына түрде аламыз:

$$dT = \sum \overline{F}_k^e d\overline{r}_k + \sum \overline{F}_k^i d\overline{r}_k . \qquad (3.128)$$

Егер $\overline{F}_k^e, \overline{F}_k^i$ күштерінің элементар жұмыстарына сәйкес

$$d'A_k^e = \sum \overline{F}_k^e d\overline{r}_k , \; d'A_k^i = \sum \overline{F}_k^e d\overline{r}_k . \qquad (3.129)$$

деп белгілесек, онда (3.128) теңдігін қайтадан мына түрде жазған болар едік:

$$dT = \sum d'A_k^e + \sum d'A_k^i . \qquad (3.130)$$

(3.128) немесе (3.130) формуласы механикалық жүйенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теореманың дифференциалдық түрдегі математикалық өрнегін көрсетеді.

Бұл теорема сөзбен былай айтылады: *механикалық жүйенің кинетикалық энергиясының дифференциялы жүйеге әсер етуші барлық сыртқы және ішкі күштердің элементарлық жұмыстарының қосындысына тең болады.*

Жүйенің алғашқы орналасу жағдайына сәйкес кинетикалық энергиясы T_0 деп, ал оның ақырғы жағдайындағы кинетикалық энергиясы T деп белгілейік.

(3.130) теңдігінің екі жағынан да жүйенің осы екі орналасу аралығында сәйкес шектерде интеграл алайық:

$$T - T_0 = \sum \int_{M_{KO}M_1} \overline{F}_k^{\,e} d\overline{r}_k + \sum \int_{M_{KO}M_1} \overline{F}_k^{\,i} d\overline{r}_k \,. \tag{3.131}$$

немесе

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i \,. \tag{3.132}$$

Бұл теңдіктегі A_k^e және A_k^i жүйенің M_k нүктесіндегі $\overline{F}_k^{\,e}$ және $\overline{F}_k^{\,i}$ - күштердің сол нүктенің траектория бойымен жүрген $M_{KO}\overset{\cup}{}M$ жолындағы жұмысы:

$$A_k^e = \int_{\overset{\cup}{M_{KO}M_1}} \overline{F}_k^{\,e} d\overline{r}_k \,, \quad A_k^i = \int_{\overset{\cup}{M_{KO}M_1}} \overline{F}_k^{\,i} d\overline{r}_k \,. \tag{3.133}$$

Сөйтіп, жүйенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теореманың интегралдық түрдегі өрнегі (3.131) немесе (3.132) теңдігімен беріледі. Теорема бұл түрінде былай айтылады: *механикалық жүйенің бір орналасу жағдайынан екінші бір орналасу жағдайына көшу кезінде жасаған орын ауыстыруындағы кинетикалық энергиясының өзгеруі жүйеге әсер етуші барлық сыртқы және ішкі күштердің сол орын ауыстыруындағы жұмыстарының қосындысына тең болады.*