Основы теории управления системами

Крак Юрий Васильевич,
доктор физико-математических наук,
профессор

Практические занятия

Практические задания к теме «Аналитическое конструирование регуляторов»

Пример 3.1. Решить задачу аналитического конструирования регулятора линейной системы

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

<u>Решение.</u> Поскольку имеем линейную стационарную систему, то управление можно выбрать в виде: $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Найдем $A + BC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+c_1 & -1 \\ -4 & 1+c_2 \end{pmatrix}$

.

Запишем характеристическое уравнение:

$$\det(A + BC - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1+c_1-\lambda & -1 \\ -4 & 1+c_2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\lambda^2 - (2 + c_1 + c_2)\lambda + ((1+c_1)(1+c_2) - 4) = 0$$

Построим матрицу Гурвица:

$$G = \begin{bmatrix} -(2 + c_1 + c_2) & 1 \\ 0 & (1+c_1)(1+c_2) - 4 \end{bmatrix}$$

Согласно теореме 3.2 имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} \Delta_1 = -(2 + c_1 + c_2) > 0 \\ \Delta_2 = -(2 + c_1 + c_2)((1 + c_1)(1 + c_2) - 4) > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 + c_2 < -2 \\ (1 + c_1)(1 + c_2) > -4 \end{cases}$$

Таким образом, искомые элементы матрицы C, определяемые последним неравенством, дают решение поставленной задачи. Область устойчивости зачеркнута прямыми, пересекающимися в третьем октанте (рис. 3.1).

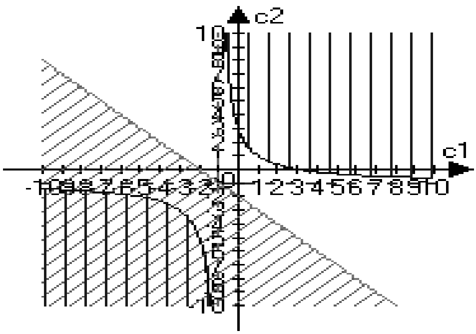

Рис.3.1. Область устойчивости

Пример 3.2. Решить задачу модального управления, то есть найти управления вида $u(t) = c^T x(t)$ такое, чтобы характеристическое уравнение системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + 2u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

имело заранее заданные корни $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2.$

<u>Решение</u>.

В нашем случае имеем $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$.

Тогда $Ab=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$.

Соответственно $S=(b,Ab)=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

$\det S=6-2=4\neq 0$, то есть система вполне управляемая.

Вычислим $S^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $A^2b=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix}$.

Тогда

$$\begin{pmatrix}p_2\\ p_1\end{pmatrix}=-S^{-1}A^2b=-\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix}==\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$$

По известным значениям собственных чисел запишем характеристическое уравнение

$$(\lambda+1)(\lambda+2)=\lambda^2+3\lambda+2.$$

Найдем вектор-столбец $p-a=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\ -1\end{pmatrix}$.

Окончательно вычислим значения коэффициентов управления

$$c = (S^{-1})^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_1 & 1 \end{pmatrix} (p - a) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{3} - \frac{18}{6} \\ \frac{6}{3} + \frac{18}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Итак искомое модальное управление имеет вид

$$u(t) = -6x_1(t) + 7x_{2.}(t) .$$

Задания для самостоятельной работы.

В примерах 3.3 – 3.6, ища управления в виде

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

решить задачу аналитического конструирования регулятора следующих линейных систем:

3.3.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

3.4.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

3.5.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

3.6.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

3.7.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 3x_1(t) - x_2(t) + 2u_1(t) \\ \dot{x}_2 = x_1(t) + x_2(t) + u_2(t) \end{cases}$$

3.8. Решить задачу модального управления, то есть найти управление вида $u(t) = c^T x(t)$ такое, чтобы характеристическое уравнение системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2 = -x_1(t) + 2x_2(t) + 2u(t) \end{cases}$$

имело заранее заданные корни $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -5.$

3.9. Решить задачу модального управления, то есть найти управление вида $u(t) = c^T x(t)$ такое, чтобы характеристическое уравнение линейной системы управления, заданноя через матрицу

$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ и вектор $b=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$, имело заранее заданные корни $\lambda_1=-2;\quad \lambda_2=-2;\quad \lambda_3=-1.$

3.10. Построить регулятор $u(t)$, который обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого решения системы управления, описанной дифференциальным уравнением

$$x'''(t)-2x''(t)+3x'(t)-2x(t)=u(t)\,.$$

Регулятор искать в виде

$$u(t)=c_1x''(t)+c_2x'(t)+c_3x(t)\,.$$