Основы теории управления системами

Крак Юрий Васильевич,
доктор физико-математических наук,
профессор

Практические занятия

Практические задания к теме «Решение задач управления методами вариационного исчисления»

Приклад 4.1. Найти кривые, на которых может достигаться экстремум функционала, и исследовать характер экстремума:

$$J[x(t)] = \int_0^{\pi/2} ((\dot{x})^2 - x^2)dt, \text{ концы закреплены } x(0) = 0,\ x\left(\pi/2\right) = 1.$$

Решение. Имеем: $G(x, \dot{x}, t) = (\dot{x})^2 - x^2$ – дважды дифференцированная по всем аргументами функция. Воспользуемся необходимым условием экстремума. Для этого составим и решим уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial \dot{x}} = 0.$$

Тут $G'_x = -2x;\ G'_{\dot{x}} = 2x'$.

Получим уравнение Эйлера-Лагранжа в виде:

$$-2x - \frac{d}{dt}2x' = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x - 2x'' = 0 \quad \Rightarrow \quad x + x'' = 0$$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 1 = 0: \quad \lambda_{1,2} = \pm i.$$

Тогда $x(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)$ – составим и решим характеристическое уравнение.

Из граничных условий находим неизвестные константы C_1, C_2:

$$x(0)=C_1=0;\ x\left(\pi/2\right)=C_2=1.$$

Итак, $x^o(t)=\sin(t)$ – кривая, подозрительная на экстремум.

Проверим достаточные условия экстремума. Для проверки условия Якоби составим и решим уравнение Якоби. Найдем: $G_{xx}=-2$ $G_{xx}=-2,\quad G_{x\dot{x}}=0, G_{\dot{x}\dot{x}}=2$. Тогда уравнение Якоби будет иметь вид:

$$-2w-2\dot{w}=0.$$

Отсюда $w(t)=C_1\cos(t)+C_2\sin(t)$. Учитывая граничные условия, получим решение $w(t)=\sin(t)$. Тогда $w(0)=0,\quad w(t)=\sin(t)\neq 0$ при $0<t\leq\dfrac{\pi}{2}$, то есть крива $x^o(t)=\sin(t)$ может быть включена в поле. Условие Якоби выполняется.

Условие Лежандра: $G_{\dot{x}\dot{x}}\geq 0$. Имеем: $G_{\dot{x}}=2x';\ G_{\dot{x}\dot{x}}=2\geq 0$ для произвольных значений $\dot{x}$.

Итак, условие Лежандра выполняется в сочетании с условием Якоби. Таким образом, на кривой $x^o(t)$ функционал достигает сильного минимума.

Пример 4.2. Найти кривые, на которых может достигаться экстремум, и исследовать характер экстремума функционала $Q=\int_{t_0}^{t_1}u^2(t)dt,$ для уравнения $\dfrac{d^2x}{dt^2}=u$. Концы закреплены: $x(t_0)=x_0, \dot{x}(t_0)=\dot{x}_0$, $x(t_1)=x_1, \dot{x}(t_1)=\dot{x}_1$; интервал времени $[t_0,t_1]$ – фиксированный.

<u>Решение</u>.

Подставим уравнение в функционал: $Q=\int_{t_0}^{t_1}\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2 dt$.

Итак, здесь $G = G(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) = \ddot{x}^2$.

Воспользуемся необходимым условием экстремума – уравнением Эйлера -Пуасона для $n = 2$:

$$\frac{dG}{dx} - \frac{d}{dt}\frac{dG}{d\dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{dG}{d\ddot{x}} = 0.$$

Находим $\frac{dG}{dx} = 0$; $\frac{dG}{d\dot{x}} = 0$; $\frac{dG}{d\ddot{x}} = 2\ddot{x}$.

Следовательно, уравнение Эйлера - Пуассона имеет вид:

$$\frac{d^2}{dt^2}(2\ddot{x}) = 0 \text{, або } x^{(4)} = 0.$$

Следовательно, уравнение Эйлера - Пуассона имеет вид:

$$x(t) = \frac{C_1}{6}t^3 + \frac{C_2}{2}t^2 + C_3 t + C_4.$$

Отсюда $\quad u(t) = \ddot{x}(t) = C_1 t + C_2$.

Неизвестные постоянные $C_1, \ldots, C_4$ определяются из заданных условий на концах отрезка $[t_0, t_1]$. Имеем систему уравнений относительно неизвестных $C_1, \ldots, C_4$:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6}t_0^3 & \frac{1}{2}t_0^2 & t_0 & 1 \\ \frac{t_0^2}{2} & t_0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6}t_1^3 & \frac{1}{2}t_1^2 & t_1 & 1 \\ \frac{t_1^2}{2} & t_1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \\ x_1 \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix}.$$

Обозначим $\begin{bmatrix} \frac{1}{6}t_0^3 & \frac{1}{2}t_0^2 & t_0 & 1 \\ \frac{t_0^2}{2} & t_0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6}t_1^3 & \frac{1}{2}t_1^2 & t_1 & 1 \\ \frac{t_1^2}{2} & t_1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = T$, $\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = C$, $\begin{bmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \\ x_1 \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} = X$.

Тогда имеем уравнение $TC = X$. Отсюда вектор неизвестных постоянных величин находится по формуле $C = T^{-1}X$.

Для найденных постоянных получим кривую $x^o(t)$, на которой может достигаться экстремум функционала.

Проверим достаточные условия экстремума. Отрезок $[t_0, t_1]$ не содержит точек, сопряженных с точкой t_0. Далее имеем, что: $G_{\dddot{x}\dddot{x}} = 2 > 0$. Итак, на полученной кривой $x^o(t)$ данный функционал достигает своего минимума.

Задания для самостоятельной работы.

В примерах 4.3 – 4. 10 найти кривые, на которых может достигаться экстремум функционала, и исследовать характер экстремума:

4.3.

$$I[x(t)] = \int_{-1}^{0} (12tx(t) - (\dot{x}(t))^2)dt;\ \ x(-1) = 1,\ x(0) = 0\,.$$

4.4.

$$I[x(t)] = \int_{0}^{1} ((\dot{x}(t))^2 + 12tx(t))dt;\quad x(0) = 0,\quad x(1) = 1$$

4.5.

$$I[x(t)] = \int_{0}^{1} (x^2(t) + 2\dot{x}^2(t) + \ddot{x}^2(t))dt;$$

$$x(0) = 0,\ x(1) = 0,\ \dot{x}(0) = 1,\ \dot{x}(1) = -sh1\,.$$

4.6.

$$I[x(t)] = \int_{0}^{1} (x^2(t) + \ddot{x}^2(t))dt;$$

$$x(0) = y_0,\ x(1) = y_1,\ \dot{x}(0) = y_0',\ \dot{x}(1) = y'.$$

4.7.

$$I[x(t), y(t)] = \int_{o}^{\pi/4} (2y(t) - 4x^2(t) + \dot{x}^2(t) - \dot{y}^2(t))dt;$$

$$x(0) = 0, x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,\ y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

4.8.

$$I[x(t), y(x)] = \int_0^{\pi/2} (\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) - 2x(t)y(t))dt; \;\; ,$$

$$x(0) = 0,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

4.9.

$$I[x(t), y(x)] = \int_0^{\pi/2} (\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + 2x(t)y(t))dt;$$

$$x(0) = 0,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

4.10.

$$I[x(t)] = \int_0^1 (\dot{x}^2(t) + x^2(t))dt; \quad x(0) = 0,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$