Основы теории управления системами

Крак Юрий Васильевич,
доктор физико-математических наук,
профессор

Практические занятия

Практические задания к теме «Метод динамического программирования для дискретных систем управления»

Пример 5.1. Найти оптимальные управления и траекторию, на которых функционал

$$Q = \sum_{i=0}^{2} (x_1(i) + u(i)) + x_2(3)$$

достигает своего минимального значения для дискретной системы управления

$$\begin{cases} x_1(i+1) = x_1(i) + 2u(i) + x_2(i) \\ x_2(i+1) = x_1(i) + u(i) \end{cases}$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0$$

с начальными условиями $|u(0)| \le 2, \quad |u(1)| \le 3, \quad |u(2)| \le 5$.

Решение. Применим метод динамического программирования.

Здесь $N = 3$.

Прямой ход.

1. $k = 2$.

$$S_2(x_1(2), x_2(2), t(2)) = \min_{|u(2)| \le 5} \{x_1(2) + u(2) + x_2(3))\} =$$

$$= \min_{|u(2)| \le 5} \{x_1(2) + u(2) + u(2) + x_1(2))\} = \min_{|u(2)| \le 5} \{2x_1(2) + 2u(2)\}$$

Отсюда оптимальное управление $u^o(2) = -5$.

2. $k=1$. Из предыдущего шага имеем:

$$S_2(x_1(2), x_2(2), t(2)) = 2x_1(2) - 10$$

Разностное уравнение Беллмана будет иметь вид

$$S_1(x_1(1), x_2(1), t(1)) =$$

$$= \min_{|u(1)|\le 3} \{x_1(1) + u(1) + 2(x_1(1) + 2u(1) + x_2(1)) - 10\} =$$

$$= \min_{|u(1)|\le 3} \{3x_1(1) + 5u(1) + 2x_2(1) - 10\}$$

Отсюда оптимальное управление $u^o(1) = -3$.

3. $k=0$. Имеем:

$$S_1(x_1(1), x_2(1), t(1)) = 3x_1(1) + 2x_2(1) - 25$$

Тогда

$$S_0(x_1(0), x_2(0), t(0)) =$$

$$= \min_{|u(0)|\le 2} \{x_1(0) + u(0) + 3(x_1(0) + 2u(0) + x_2(0)) + 2(x_1(0) + u(0)) - 25\} =$$

$$= \min_{|u(0)|\le 2} \{6x_1(0) + 3x_2(0) + 9u(0) - 25\}$$

Отсюда оптимальное управление

$$u^o(0) = -2.$$

Итак, минимальное значение функционала будет

$$S_0(x_1(0), x_2(0), t(0)) = -37 = Q^O$$

Обратный ход.

1. $k = 0$. Имеем: $u^o(0) = -2$. Значения $x_1^O(0), x_2^O(0)$ берем из начальных условий. Тогда из уравнений системы имеем

$$x_1^O(1) = x_1^O(0) + 2u^O(0) + x_2^O(0) = -3$$
$$x_2^O(1) = u^O(0) + x_1^O(0) = -1$$

.

2. $k = 1$.

$$u^o(1) = -3$$
$$x_1^O(2) = x_1^O(1) + 2u^O(1) + x_2^O(1) = -10$$
$$x_2^O(2) = u^O(1) + x_1^O(1) = -6$$

.

3. $k = 2$.

$$u^o(2) = -5$$
$$x_1^O(3) = x_1^O(2) + 2u^O(2) + x_2^O(2) = -26$$
$$x_2^O(2) = u^O(2) + x_1^O(2) = -15$$

.

Ответ:

оптимальное управление

$$u^o(0) = -2, \quad u^o(1) = -3, \quad u^o(2) = -5.$$

оптимальная траектория

$$x_1^O(0) = 1, \quad x_2^O(0) = 0$$

$$x_1^O(1) = -3, \quad x_2^O(1) = -1$$
$$x_1^O(2) = -10, \quad x_2^O(2) = -6$$
$$x_1^O(3) = -26, \quad x_2^O(3) = -15$$

Пример 5.2. Решить методом динамического программирования задачу оптимального управления:

$$J = \int_0^1 (-xu + u^2)dt + x(1), \text{ якщо}$$
$$\dot{x} = u, \;\; x(t) \in [0;1]; \;\; t \in [0;1]; \;\; u(t) \in \mathrm{R}.$$

Решение.

Дискретизируем данную задачу, считая, что на временных интервалах h_0, h_1 та h_2 система движется под влиянием управлений u_0, u_1, u_2 соответственно. Причем имеют место равенства $x_{k+1} = x_k + u_k h_k; \;\; k = \overline{0,2},$ где x_0, x_1, x_2 – состояния системы. Записанный в условии функционал примет вид:

$$J = \sum_{k=0}^{2} (-x_k u_k + u_k^2) h_k + x_3$$

Используя метод динамического программирования, минимизируем его по управлениям u_0, u_1 та u_2.

1) $k = N - 1 = 2.$

Выпишем уравнения Беллмана. Учитывая, что $x_3 = x_2 + u_2 h_2,$ получаем

$$S_2(x_2, t_2) = \min_{u_2}\{(-x_2 u_2 + u_2^2) h_2 + x_3\} =$$
$$= \min_{u_2}\{u_2^2 h_2 - u_2 x_2 h_2 + x_2 + u_2 h_2\} =$$
$$= \min_{u_2}\{u_2^2 h_2 + u_2(1 - x_2) h_2 + x_2\}$$

Эта функция выпуклая вниз по u_2, поэтому минимум находится просто:

$$(u_2^2 h_2 + u_2(1-x_2)h_2 + x_2)'_{u_2} = 2u_2 h_2 + (1-x_2)h_2 + (1-x_2)h_2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$u_2 = \frac{x_2 - 1}{2},$$

$$S_2(x_2, t_2) = \frac{(x_2-1)^2}{4}h_2 + \frac{x_2-1}{2}(1-x_2)h_2 + x_2 = x_2 - \frac{(x_2-1)^2 h_2}{4}.$$

2) $k = N - 2 = 1.$

Уравнение Беллмана для k=2 имеет вид

$$S_1(x_1, t_1) = \min_{u_1}\{(-x_1 u_1 + u_1^2)h_1 + S_2(x_2, t_2)\} =$$

$$= \min_{u_1}\left\{(-x_1 u_1 + u_1^2)h_1 + x_2 - \frac{(x_2-1)^2}{4}\right\} =$$

$$= \min_{u_1}\left\{u_1^2 h_1 - h_1 x_1 u_1 + x_1 + u_1 h_1 - u_1^2 \frac{h_1^2 h_2}{4} - \frac{h_1 h_2 (x_1 - 1)}{2} u_1 - \frac{(x_1-1)^2 h_2}{4}\right\} =$$

$$= \min_{u_1}\left\{u_1^2\left(h_1 - \frac{h_1^2 h_2}{4}\right) + u_1\left(h_1 - h_1 x_1 - \frac{h_1 h_2 (x_1-1)}{2}\right) + x_1 - \frac{(x_1-1)^2 h_2}{4}\right\} =$$

$$= \min_{u_1}\left\{ u_1^2\left(h_1\frac{4-h_1^2h_2}{4}\right) + u_1\left(h_1(1-x)\cdot\frac{2+h_2}{2}\right) + x_1 - \frac{(x_1-1)^2h_2}{4}\right\}$$

Поскольку $h_1<1, h_2<1,$ то $h_1\frac{4-h_1^2h_2}{4}>0.$ Поэтому функция в фигурных скобках выпуклая вниз по u_1, и ее минимум можно найти через производную.

$$\left(u_1^2\left(h_1\frac{4-h_1^2h_2}{4}\right) + u_1\left(h_1(1-x)\cdot\frac{2+h_2}{2}\right) + x_1 - \frac{(x_1-1)^2h_2}{4}\right)_{u_1}^{/} =$$

$$= 2u_1\left(h_1\frac{4-h_1h_2}{4}\right) + \left(h_1(1-x_1)\frac{2+h_2}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$u_1 = \frac{(x_1-1)(2+h_2)}{4-h_1h_2},$$

$$S_1(x_1,t_1) = \frac{(x_1-1)^2(2+h_2)^2}{(4-h_1h_2)^2}h_1\cdot\frac{4-h_1h_2}{4} +$$

$$+\frac{(x_1-1)(2+h_2)}{4-h_1h_2}\cdot\frac{h_1(1-x_1)(2+h_2)}{2} + x_1 - \frac{(x_1-1)^2h_2}{4} =$$

$$= \frac{(x_1-1)^2(2+h_2)^2h_1}{4\,(4-h_1h_2)} - \frac{(x_1-1)^2(2+h_2)}{2\,(4-h_1h_2)} + x_1 - \frac{(x_1-1)^2h_2}{4} =$$

$$= x_1 - \frac{(x_1-1)^2}{4}\left(h_2 - \frac{(2+h_2)^2h_1}{4-h_1h_2}\right) =$$

$$= x_1 - (x_1 - 1)^2 \left(\frac{h^2}{4} - \frac{(2+h_2)^2 h_1}{4\,(4 - h_1 h_2)} \right)$$

Положим $\qquad A = \dfrac{h^2}{4} - \dfrac{(2+h_2)^2 h_1}{4\,(4 - h_1 h_2)}.$

3) $k = N - 3 = 0.$

$$S_0(x_0, t_0) = \min_{u_0} \{ (-x_0 u_0 + u_0^2) h_0 + S_1(x_1, t_1) \} =$$

$$= \min_{u_0} \{ (-x_0 u_0 + u_0^2) h_0 + x_1 - (x_1 - 1)^2 A \} =$$

$$= \min_{u_0} \{ (-x_0 u_0 + u_0^2) h_0 + x_0 + u_0 h_0 - (u_0 h_0 + (x_0 - 1))^2 A \} =$$

$$= \min_{u_0} \{ u_0^2 h_0 - x_0 h_0 u_0 + x_0 + u_0 h_0 - u_0^2 h_0^2 A - 2 A h_0 (x_0 - 1) u_0 - (x_0 - 1)^2 A \} =$$

$$= \min_{u_0} \{ u_0^2 (h_0 - h_0^2 A) + u_0 (h_0 (1 - x_0)(1 + 2A)) + x_0 - (x_0 - 1)^2 A \}$$

Если предположить, что $h_0 - h_0^2 A > 0$, функция тоже будет выпуклой вниз.

$$\left(u_0^2 (h_0 - h_0^2 A) + u_0 h_0 (1 - x_0)(1 + 2A) \right)'_{u_0} =$$

$$= 2 u_0 (h_0 - h_0^2 A) + h_0 (1 - x_0)(1 + 2A) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$u_0 = \frac{(x_0 - 1)(1 + 2A)}{1 - h_0 A}.$$

x_0, h_0, h_1, h_2 – заданные величины.

Набор оптимальных управлений u_0, u_1, u_2 и состояния системы x_1, x_2, x_3 определяются так:

$$A = \frac{h^2}{4} - \frac{(2+h_2)^2 h_1}{4\,(4-h_1 h_2)};$$

$$u_0 = \frac{(x_0-1)(1+2A)}{1-h_0 A}; \quad x_1 = x_0 + h_0 u_0;$$

$$u_1 = \frac{(x_1-1)(2+h_2)}{4-h_1 h_2}; \quad x_2 = x_1 + h_1 u_1;$$

$$x_3 = x_2 + h_2 u_2.$$

Задания для самостоятельной работы.

5.3 Найти оптимальные управления и траекторию, на которых функционал

$$Q = \sum_{i=0}^{3} (x_1(i) + 2u(i)) + x_2(4)$$

достигает своего минимального значения для дискретной системы управления

$$\begin{cases} x_1(i+1) = x_1(i) + x_2(i) + u(i), \\ x_2(i+1) = x_1(i) + 2x_2(i) + 2u(i) \end{cases}$$

с начальными условиями $x_1(0) = 2, \quad |x_2(0)| = 1$

i и ограничениями на управление

$|u(0)| \le 1, \quad |u(1)| \le 2, \quad |u(2)| \le 5, \quad |u(3)| \le 4$.

5.4 Найти оптимальные управления и траекторию, на которых функционал

$$Q = \sum_{i=0}^{2} (x_1(i) + u(i)) + x_1(3)$$

достигает своего минимального значения для дискретной системы управления

$$\begin{cases} x_1(i+1) = x_1(i) + x_2(i) + 2u(i), \\ x_2(i+1) = x_1(i) + u(i) \end{cases}$$

с начальными условиями $|x_1(0)| \le 9, \quad |x_2(0)| \le 19$

и ограничениями на управление $|u(0)| \le 3, \quad |u(1)| \le 1, \quad |u(2)| \le 4$.

5.5 Найти оптимальные управления и траекторию, на которых функционал

$$Q = \sum_{i=0}^{2} (x_1(i) + x_2(i) + u(i)) + x_1(3) + x_2(3)$$

достигает своего минимального значения для дискретной системы управления

$$\begin{cases} x_1(i+1) = 2x_1(i) - x_2(i) + u(i), \\ x_2(i+1) = x_1(i) - u(i) \end{cases}$$

с начальными условиями $x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 0$

и ограничениями на управление $|u(0)| \le 1, \quad |u(1)| \le 2, \quad |u(2)| \le 3$.

5.6 Найти оптимальные управления и траекторию, на которых функционал

$$Q = \sum_{i=0}^{3} (x_1(i) + 2u(i)) + x_2(4)$$

достигает своего минимального значения для дискретной системы управления

$$\begin{cases} x_1(i+1) = x_1(i) + x_2(i) + u(i), \\ x_2(i+1) = x_1(i) + 2x_2(i) + 2u(i) \end{cases}$$

с начальными условиями $x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 1$

и ограничениями на управление
$|u(0)| \le 4, \quad |u(1)| \le 3, \quad |u(2)| \le 2, \quad |u(3)| \le 1$.

Практические задания к теме «Метод динамического программирования для непрерывных систем управления»

Пример 6.1. Найти оптимальные управления и траекторию, для которых функционал

$$Q(u) = \int_0^T u^2(t)dt + \lambda x^2(T),$$

принимает свое минимальное значение для системы

$$\dot{x}(t) = u(t)$$

с начальным условием $x(0)=x_0$. Здесь $\lambda>0$ – заданная постоянная величина, T – заданное $0\le t\le T$.

Решение. Поскольку время фиксировано, то уравнение Беллмана в дифференциальной форме для этой задачи запишем в виде (+). Имеем

$$-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}=\min_u\{u^2(t)+\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}u(t)\},$$

$$S(x,T)=\lambda x^2(T).$$

Отсюда

$$\min_u\{\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}u^2(t)+\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}u(t)\}=0$$

Из необходимого условия минимума по управлению имеем

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}+2u(t)=0$$

Итак, найденное управления будет функцией от x, t и будет иметь вид:

$$u^0(t)=-\frac{1}{2}\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}$$

Подставив это выражение в уравнение Беллмана

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}=0,$$

получим

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\right)^2=0$$

Получили нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных. Решение этого уравнения – функцию $S(x,t)$ – будем искать в виде полинома с неизвестными коэффициентами, которые зависят от времени t:

$$S(x,t) = c_0(t) + c_1(t)x + c_2(t)x^2 .$$

Подставим последнее выражение $S(x,t)$ в уравнение Беллмана и в условие для $S(x,t)$:

$$\begin{cases} c_0'(t) + c_1'(t)x + c_2'(t)x^2 - \dfrac{1}{4}(c_1(t)x + 2c_2(t)x)^2 = 0 \\ c_0(T) + c_1(T)x + c_2(T)x^2 = \lambda x^2 \end{cases}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях х получим систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} c_0'(t) - \dfrac{1}{4}c_1^2(t) = 0 \\ c_1'(t) - c_1(t)c_2(t) = 0 \\ c_2'(t) - c_2^2(t) = 0 \end{cases}$$

с условиями

$$\begin{cases} c_0(T) = 0 \\ c_1(T) = 0 \\ c_2(T) = \lambda \end{cases} .$$

Отсюда, учитывая, что $c_1^2(t) \ge 0$, находим

$$c_0(t) \equiv 0,\ c_1(t) \equiv 0,\ 0 \le t \le T .$$

Решим последнее уравнение системы:

$$\frac{dc_2(t)}{dt} - c_2^2(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dc_2(t)}{c_2^2(t)} = dt \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{c_2(t)}=t+C \quad \Rightarrow \quad c_2(t)=-\frac{1}{t+C}$$

где C – постоянная интегрирования.

Учитывая условие $c_2(T)=-\frac{1}{T+C}=\lambda$, имеем $C=-\frac{1+\lambda T}{\lambda}$.

Итак, $c_2(t)=\frac{\lambda}{1-\lambda(t-T)}$.

Таким образом, $S(x,t)=\frac{\lambda^2}{1-\lambda(t-T)}$.

Тогда функция управления $u^0=-\frac{\lambda x}{1-\lambda(t-T)}$, $0\le t\le T$ как функция координат системы, является решением задачи синтеза оптимального управления.

Далее подставим u^0 в систему:

$$\dot{x}(t)=-\frac{\lambda x}{1-\lambda(t-T)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt}=-\frac{\lambda x}{1-\lambda(t-T)} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{x}=-\frac{d(1-\lambda(t-T))}{1-\lambda(t-T)} \quad \Rightarrow \quad \ln x=\ln C(1-\lambda(t-T))$$

где C – постоянная интегрирования.

Таким образом, траектория имеет вид $x = C(1-\lambda(t-T))$. Неизвестную константу определим из условия: $x(0) = 1+\lambda TC = x_0$. Отсюда $C = \dfrac{x_0}{1+\lambda T}$.

Итак, оптимальная траектория будет выглядеть

$$x^0(t) = \frac{(1-\lambda(t-T))x_0}{1+\lambda T}$$

Тогда $u^0(t) = \dfrac{\lambda x_0}{1+\lambda T}$ – оптимальное управление, $0 \le t \le T$.

Пример 6.2. Найти оптимальные управления и траекторию, для которых функционал

$$Q(u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{1} u^2(t)dt + \frac{1}{2}x_2^2(1),$$

где $t \in [t_0, 1]$, для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases}$$

с начальным условием

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_{10} \\ x_2(t_0) = x_{20} \end{cases}$$

достигает своего минимального значения.

Решение. Запишем уравнение Беллмана для функции $S(x,t)$:

$$-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = \min_u \{\frac{1}{2}u^2(t) + \frac{\partial S(x,t)}{\partial x_1}x_2(t) + \frac{\partial S(x,t)}{\partial x_2}u(t)\}$$

При условии

$$S(x_1, x_2, 1) = \frac{1}{2} x_2^2(1)$$

Из необходимого условия минимума имеем

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial x_2} + u(t) = 0$$

Отсюда $$u^0(x_1, x_2, t) = -\frac{\partial S(x,t)}{\partial x_2} \quad .$$

Подставим это $u^O(x_1, x_2, t)$ в уравнение Беллмана. Итак, для решения задачи надо найти функцию $S(x_1, x_2, t)$, что удовлетворяет уравнение

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial S(x,t)}{\partial x_1} x_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x_2}\right)^2 = 0$$

при условии, что $S(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2} x_2^2(1)$

Функцию $S(x_1, x_2, t)$ будем искать в виде квадратичной формы:

$$S(x_1, x_2, t) = c_{11}(t) x_1^2 + 2c_{12}(t) x_1 x_1 + c_{22}(t) x_2^2$$

Подставим это изображение функции $S(x_1, x_2, t)$ в уравнение и условие для функции $S(x_1, x_2, t)$ и для определения коэффициентов полинома получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} c'_{11}(t) - 2c_{12}^2(t) = 0 \\ c'_{12}(t) + c_{11}(t) - 2c_{12}(t)c_{22}(t) = 0 \\ c'_{22}(t) + 2c_{12}(t) - 2c_{22}^2(t) = 0 \end{cases}$$

с условиями

$$\begin{cases} c_{11}(1) = 0 \\ c_{12}(1) = 0 \\ c_{22}(1) = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Выполнив необходимые вычисления, находим:

$$c_{11}(t) = c_{12}(t) \equiv 0; \quad c_{22}(t) = \frac{1}{2(2-t)}, \quad t \in [t_0, 1].$$

Следовательно, в данном случае

$$S(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2} \frac{x_2^2(t)}{2-t}.$$

Тогда $u^0(x_1, x_2, t) = \dfrac{x_2(t)}{t-2}$ – решение задачи синтеза оптимального управления.

Таким образом, система управления будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \dfrac{x_2}{t-2} \end{cases}$$

Интегрируем систему

$$\frac{dx_2}{x_2} = \frac{dt}{t-2} \quad \Rightarrow \quad \ln x_2 = \ln C(t-2) \quad \Rightarrow \quad x_2 = C(t-2)$$

$$\dot{x}_1(t) = C(t-2), \quad x_1(t) = Ct(\frac{1}{2}t-2)+D$$

где C, D – постоянные интегрирования.

Из начальных условий найдем неизвестные постоянные интегрирования.

$$x_1(t_0) = Ct_0(\frac{1}{2}t_0-2)+D = x_{10}$$

$$x_2(t_0) = C(t_0-2) = x_{20}$$

Отсюда

$$C = \frac{x_{20}}{(t_0-2)}, \; D = x_{10} - \frac{x_{20}t_0(\frac{1}{2}t_0-2)}{(t_0-2)}.$$

Итак, оптимальная траектория системы будет иметь вид

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{x_{20}}{(t_0-2)}t(\dfrac{1}{2}t-2)+x_{10} - \dfrac{x_{20}t_0(\frac{1}{2}t_0-2)}{(t_0-2)} \\ x_2(t) = \dfrac{x_{20}}{t_0-2}(t-2) \end{cases}$$

Тогда оптимальное управление $u^0(x_1, x_2, t) = \dfrac{x_{20}}{t_0-2}$.

Задания для самостоятельной работы.

6.1. Найти оптимальные управления и траекторию, для которых функционал

$$Q(u)=\int_0^T u^2(t)dt+x^2(T),$$

принимает свое минимальное значение для системы

$$\frac{dx}{dt}=ax(t)+u(t),$$

с начальным условием $x(0)=x_0$.