Основы теории управления системами

Крак Юрий Васильевич,
доктор физико-математических наук,
профессор

Практические занятия

Практические задания к теме «Принцип максимума Понтрягина»

Пример 7.1. Для системы управления

$$\dot{x}(t) = u(t)$$

с закрепленными концами траекторий

$$x(0) = x(1) = 0$$

найти оптимальные управления и траектории, на которых функционал

$$J = \int_0^1 (u^2(t) + x^2(t))dt$$

достигает своего минимального значения.

Решение.

1) Составляем функцию Гамильтона - Понтрягина

$$H(x,u,t,\psi,\psi_0) = \psi_0(u^2(t) + x^2(t)) + \psi(t)u(t)$$

2) Положим $\psi_0 = -1$.

Тогда $H(x,u,t,\psi,\psi_0) = -(u^2(t) + x^2(t)) + \psi(t)u(t)$.

Находим управление, которое максимизирует функцию Гамильтона - Понтрягина $H = H(x,u,t,\psi,\psi_0)$.

Из необходимого условия экстремума имеем:

$$H'_u = -2u(t) + \psi(t) = 0,$$

откуда $u(t) = \dfrac{\psi(t)}{2}$.

Поскольку функция H как функция переменной u выпуклая вверх, то достаточно воспользоваться лишь необходимым условием экстремума. То есть найденное $u(t)=\dfrac{\psi(t)}{2}$ будет точкой максимума функции H.

3) Составляем дифференциальное уравнение относительно $\psi(t)$:

$$\frac{d\psi}{dt}=-H'_x=-2\psi_0 x(t)\,.$$

Поскольку $\psi_0=-1$ то $\dfrac{d\psi}{dt}=-2\psi_0 x(t)=2x(t)$

4) Подставляем найденное u в уравнение системы:

$$\dot{x}(t)=u(t)=\frac{\psi(t)}{2}\,.$$

Присоединяем к дифференциальному уравнению относительно $\psi(t)$ уравнения системы вместе с краевыми условиями. В результате получаем краевую задачу принципа максимума:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\psi(t)}{2} \\ \dfrac{d\psi}{dt}=2x(t)\end{cases},$$

$$x(0)=x(1)=0\,.$$

Решим ее.

Запишем систему в виде уравнения второго порядка и решим его:

$$\ddot{x}=\left(\frac{\psi(t)}{2}\right)^{/}=\frac{1}{2}\cdot\dot{\psi}(t)=\frac{1}{2}(2x(t))=x(t)\quad\Rightarrow\quad\ddot{x}(t)-x(t)=0\quad\Rightarrow$$

$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$ – общее решение уравнения.

Найдем постоянные C_1, C_2 из краевых условий:

$$x(0) = C_1 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = C_1$$

$$x(1) = C_1(e^{+1} - e^{-1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0 \quad .$$

Отсюда $x(t) \equiv 0$, значить $\psi(t) \equiv 0$.

Тогда $u(t) = \dfrac{\psi(t)}{2} \equiv 0$, $t \in [0,1]$.

Итак, $x(t) \equiv 0$, $u(t) \equiv 0$, $t \in [0,1]$ – решение, подозрительное на оптимальное.

Проверим, будет найден ли подозрительное на оптимальное решение оптимальным.

Поскольку $x^2(t) \geq 0$, $u^2(t) \geq 0$, то $J = \int\limits_0^1 (u^2(t) + x^2(t))dt \geq 0$,

то есть минимальное значение функционала равно нулю.

Впрочем, при $x(t) \equiv 0$, $u(t) \equiv 0$ имеем $\int\limits_0^1 (u^2(t) + x^2(t))dt = 0$.

Таким образом, в задаче получено только одно подозрительное на оптимальное решение, и на нем данный функционал приобретает свое минимальное значение.

Отсюда $x(t) \equiv 0$, $u(t) \equiv 0$ и является оптимальным решением.

Пример 7.2. Для системы управления

$$\dot{x}(t) = u(t)$$

с закрепленными концами траекторий

$$x(0) = A, \quad x(1) = B,$$

где $A \neq 0, \quad B \neq 0,$ – заданные числа, найти оптимальные управления и траектории, на которых функционал

$$J = \int_0^1 (u^2(t) + 2tx(t))dt$$

достигает своего минимального значения.

Решение.

1) $H(x,u,t,\psi,\psi_0) = \psi_0(u^2(t) + 2tx(t)) + \psi(t)u(t)$.

2) Положим $\psi_0 = -1$.

Тогда $H(x,u,t,\psi,\psi_0) = -(u^2(t) + 2tx(t)) + \psi(t)u(t)$.

Поскольку функция H как функция переменной выпуклая вверх, ее максимум находится из условия:

$H'_u = -2u(t) + \psi(t) = 0$, откуда $\quad u(t) = \dfrac{\psi(t)}{2}$

3) Сопряженная система: $\quad \dfrac{d\psi}{dt} = -H'_x = -2\psi_0 t = 2t$.

4) Подставим управление $u(t) = \dfrac{\psi(t)}{2}$ в систему управления:

$$\dot{x}(t) = u(t) = \frac{\psi(t)}{2}.$$

В результате получим краевую задачу принципа максимума:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\psi(t)}{2} \\ \dfrac{d\psi}{dt} = 2t \end{cases},$$

$$x(0) = A, \quad x(1) = B\,.$$

Решим ее:

$$\ddot{x} = \left(\frac{\psi(t)}{2}\right)^{/} = \frac{1}{2}\cdot\dot{\psi}(t) = \frac{1}{2}2t = t \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}(t) - t = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{t^3}{3} + C_1 t + C_2$$

Найдем неизвестные постоянные из краевых условий:

$$x(0) = C_2 = A, \quad x(1) = \frac{1}{6} + C_1 + A = B \quad \Rightarrow \quad C_1 = B - A - \frac{1}{6}$$

Итак, подозрительное на оптимальное решение данной задачи:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^3}{6} + (B - A - \dfrac{1}{6})t + A \\ u(t) = \dfrac{t^2}{2} + (B - A - \dfrac{1}{6}) \end{cases}$$

Поскольку принцип максимума Понтрягина – лишь необходимое условие оптимальности, то, чтобы проверить, будет ли найденное решение оптимальным, необходимо проводить дополнительные исследования.

Пример 7.3. Для системы управления

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = u_2(t) \end{cases}$$

с закрепленным левым концом траекторий $x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0$

при условии, что правый конец траекторий свободный, найти оптимальные управления и траектории, на которых функционал

$$J = \int_0^1 (u_1^2(t) + u_2^2(t) + x_2^2(t))dt + x_1^2(1) + x_2^2(1)$$

достигает своего минимального значения.

Решение.

1) $H(x,u,t,\psi,\psi_0) = \psi_0(u_1^2(t) + u_2^2(t) + x_2^2(t)) + \psi_1 u_1(t) + \psi_2 u_2(t)$

2) Положим $\psi_0 = -1$. Тогда

$$H(x,u,t,\psi,\psi_0) = -(u_1^2(t) + u_2^2(t) + x_2^2(t)) + \psi_1 u_1(t) + \psi_2 u_2(t)$$

Из необходимого условия экстремума имеем:

$$H'_{u_1} = -2u_1(t) + \psi_1(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1(t) = \frac{\psi_1(t)}{2}$$

$$H'_{u_2} = -2u_2(t) + \psi_2(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_2(t) = \frac{\psi_2(t)}{2}$$

Найденные $u_1(t)$, $u_2(t)$ дают точку максимума функции H, поскольку H как функция этих переменных выпуклая вверх.

3) Сопряженное система относительно ψ имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_1}{dt} = -H'_{x_1} = 0 \\ \dfrac{d\psi_2}{dt} = -H'_{x_2} = -2\psi_0 x_2(t) = 2x_2(t) \end{cases}$$

4) Подставим найденные управления $u_1(t)$, $u_2(t)$ в исходную систему:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= u_1(t) = \frac{1}{2}\psi_1(t)\\ \dot{x}_2(t) &= u_2(t) = \frac{1}{2}\psi_2(t)\end{aligned}.$$

Условия трансверсальности на свободном правом конце траектории:

$$\begin{aligned}\psi_1(1) + 2x_1(1) = 0\\ \psi_2(1) + 2x_2(1) = 0\end{aligned}$$

Краевая задача принципа максимума:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \frac{1}{2}\psi_1(t)\\ \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{2}\psi_2(t),\\ \dot{\psi}_1(t) &= 0\\ \dot{\psi}_2(t) &= 2x_2(t)\end{aligned} \qquad \begin{aligned}x_1(0) &= 1\\ x_2(0) &= 0\\ \psi_1(1) + 2x_1(1) &= 0\\ \psi_2(1) + 2x_2(1) &= 0\end{aligned}.$$

Решим эту задачу.

$$\ddot{x}_1(t) = \frac{1}{2}\dot{\psi}_1(t) = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{x}_1(t) = 0 \;\Rightarrow\; x_1(t) = C_1 t + C_2,$$

$$\ddot{x}_2(t) = \frac{1}{2}\dot{\psi}_2(t) = x_2(t) \;\Rightarrow\; \ddot{x}_2(t) = x_2 \;\Rightarrow\; x_2(t) = D_1 e^{t} + D_2 e^{-t},$$

$$\psi_1(t) = 2\dot{x}_1(t) = 2C_1,$$

$$\psi_2(t) = 2\dot{x}_2(t) = 2(D_1 e^{t} - D_2 e^{-t}).$$

Найдем неизвестные постоянные из условий на концах

$$\begin{cases}x_1(0) = C_2 = 1\\ \psi_1(1) + 2x_1(1) = 2C_1 + 2(C_1 + C_2)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}C_2 = 1\\ C_1 = \frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2(0) = D_1 + D_2 = 0 \\ \psi_2(1) + 2x_2(1) = 2(D_1 e - D_2 e^{-1}) + 2(D_1 e + D_2 e^{-1}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} D_2 = 0 \\ D_1 = 0 \end{cases}.$$

Итак, найдены подозрительные на оптимальные траектория и управления:

$$x_1(t) = -\frac{t}{2} + 1, \qquad u_1(t) = -\frac{1}{2}, \qquad t \in [0,1]$$

$$x_2(t) = 0 \qquad\qquad u_2(t) = 0$$

Пример 7.4. Для системы управления

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = u_2(t) \end{cases}$$

со свободными концами траекторий найти оптимальные управления и траектории, на которых функционал

$$J = \int_0^1 (u_1^2(t) + u_2^2(t) + x_2^2(t))dt + x_1^2(1) + x_2^2(1)$$

достигает своего минимального значения.

Решение. Аналогично примеру 7.3, получим

1) $H(x,u,t,\psi,\psi_0) = \psi_0(u_1^2(t) + u_2^2(t) + x_2^2(t)) + \psi_1 u_1(t) + \psi_2 u_2(t)$.

2) Положим $\psi_0 = -1$. Тогда

$$H(x,u,t,\psi,\psi_0) = -(u_1^2(t) + u_2^2(t) + x_2^2(t)) + \psi_1 u_1(t) + \psi_2 u_2(t).$$

Из необходимого условия экстремума имеем:

$$H'_{u_1} = -2u_1(t) + \psi_1(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1(t) = \frac{\psi_1(t)}{2}$$

$$H'_{u_2} = -2u_2(t) + \psi_2(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_2(t) = \frac{\psi_2(t)}{2}$$

Найденные u_1, u_2 дают точку максимума функции H, поскольку H как функция этих переменных выпуклая вверх.

3) Сопряженная система относительно ψ имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= -H'_{x_1} = 0 \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -H'_{x_2} = -2\psi_0 x_2 = 2x_2 \end{aligned}.$$

4) Подставим найденные управления $u_1(t)$, $u_2(t)$ в исходную систему:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= u_1(t) = \frac{1}{2}\psi_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u_2(t) = \frac{1}{2}\psi_2(t) \end{aligned}.$$

Выпишем условия трансверсальности на обоих концах:

$$\begin{aligned} &\psi_1(0) = 0 \\ &\psi_2(0) = 0 \\ &\psi_1(1) + 2x_1(1) = 0 \\ &\psi_2(1) + 2x_2(1) = 0 \end{aligned}$$

Решая краевую задачу принципа максимума (см. пример 7.3), имеем

$$\dot{x}_1(t) = u_1(t) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_1(t) = \dot{u}_1(t) = \frac{1}{2}\dot{\psi}_1(t) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\ddot{x}_1(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1(t) = C_1 t + C_2,$$

$$\dot{x}_2(t) = u_2(t) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_2(t) = \dot{u}_2(t) = \frac{1}{2}\dot{\psi}_2(t) = \frac{1}{2}\cdot 2x_2(t) = x_2(t) \quad \Rightarrow$$

$$\ddot{x}_2(t) - x_2(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2(t) = D_1 e^t + D_2 e^{-t}.$$

$$\psi_1(t) = 2u_1(t) = 2\dot{x}_1(t) = 2C_1,$$

$$\psi_2(t) = 2u_2(t) = 2\dot{x}_2(t) = 2(D_1 e^t - D_2 e^{-t}).$$

Из условий трансверсальности найдем все неизвестные постоянные:

$$\begin{cases} \psi_1(0) = 2C_1 = 0 \\ \psi_1(1) + 2x_1(1) = 2C_1 + 2(C_1 + C_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_2(0) = 2(D_1 - D_2) = 0 \\ \psi_2(1) + 2x_2(1) = 2(D_1 e^t - D_2 e^{-t}) + 2(D_1 e^t + D_2 e^{-t}) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_1 = 0 \\ D_2 = 0 \end{cases}.$$

Отсюда подозрительное на оптимальное решение имеет вид

$$\begin{cases} x_1(t) \equiv 0 \\ x_2(t) \equiv 0 \\ u_1(t) \equiv 0 \\ u_2(t) \equiv 0 \end{cases}, \quad t \in [0,1]$$

Из условия задачи легко видеть, что это решение действительно оптимальное (сравнить с примером 7.3).

Задания для самостоятельной работы.

В примерах 7.5 – 7.10 найти по принципу максимума подозрительные на оптимальность решения задачи оптимального управления

7.5.

$$J=\int_0^T (u^2(t)-x^2(t))dt \to \min;\quad \dot{x}=u;\quad x(0)=x(T)=0 .$$

7.6.

$$J=\int_0^1 u^2(t)dt + x^2(1) \to \min;\quad \dot{x}=u;\quad x(0)=A,$$ правый конец свободный

7.7.

$$J=\int_0^1 (x^2+u^2)dt + x^2(1) \to \min;\quad \dot{x}=u;\quad x(0)=0,$$ правый конец свободен.

7.8.

$$J=\frac{1}{2}\int_0^1 (x^2(t)+u^2(t))dt \to \min;\quad x(0)=0;\quad \dot{x}(t)=-ax(t)+u(t),$$

правый конец свободный.

7.9.

$$J=\int_0^1 (x^2+u^2)dt + x^2(1) \to \min;\ \dot{x}=u;\ x(1)=B;\ x(0) - \text{свободный.}$$

7.10.

$$J=\int_0^1 (u_1^2+u_2^2+x_2^2)dt + x_1^2(1)+x_2^2(1) \to \min;$$

$$\dot{x}_1=u_1;\ \dot{x}_2=u_2;$$

$$x_1(1)=B_1;\ x_2(1)=B_2,$$ левый конец свободный.