

## Лекция 1

### **Основные понятия ортогонального проецирования. Метод проекций, прямоугольное проецирование точки на две и три плоскости проекций. Создание комплексных чертежей (эпюр Монжа).**

#### **1.1 Содержание и цель изучения начертательной геометрии как раздела курса**

Начертательная геометрия – одна из дисциплин, составляющих основу инженерного образования

Начертательная геометрия излагает правила, которыми руководствуются при составлении и чтении чертежей. Являясь теоретической основой черчения, начертательная геометрия ставит целью: ознакомить изучающих с ее методами построения изображений пространственных форм на плоскости, т.е. научить составлять чертеж; развить способность мысленного воспроизводства пространственных форм, изображенных на чертеже, то есть научить читать чертеж; дать знания и необходимые навыки для графического решения задач, связанных с пространственными формами. Основным методом в начертательной геометрии является метод проекций.

#### **1.2 Краткая историческая справка**

Первые построения проекционных изображений были предприняты еще до нашей эры. Потребность в них возникла в связи со строительством различных сооружений – укреплений, пирамид и т.д. Первые упоминания по данному вопросу содержатся в трактате римского архитектора Марка Витрувия («Десять книг об архитектуре» 1 в. до н.э.)

Более стройная теория построения изображений была разработана значительно позже, как результат труда многих ученых различных стран. В этой связи можно назвать итальянского ученого Леона Баттиста Альберта (1404 – 1472), итальянского ученого, инженера и художника Леонардо да Винчи (1452-1519), немецкого живописца, скульптора и архитектора Альбрехта Дюрера (1471-1528), английского математика Тейлора (1685-1731) и ряд других. Выдающуюся роль в развитии начертательной геометрии как науки сыграл знаменитый французский геометр и инженер Гаспар Монж (1746-1818), давший систематическое изложение общего метода изображения пространственных форм на плоскости. В России курс начертательной геометрии впервые стал читаться в 1810 г. в Петербургском институте корпуса инженеров путей сообщения.

Много сделал для развития начертательной геометрии и распространения изучения ее в России Яков Александрович Севастьянов (1796-1849), которому в 1824 г. было присвоено звание первого русского профессора начертательной геометрии.

Из крупных русских ученых-геометров следует отметить Н.И.Макарова (1824-1904), В.И.Курдюмова (1853-1904), Н.А.Рынина (1887-1943), А.И.Добрякова (1895-1947), Н.Ф.Четверухина и многих других.

### 1.3 Образование проекций. Понятие о центральном проецировании

Латинское *proiectio* – бросание вперед, в даль.

Пусть  $\Pi_0$  – некоторая плоскость в пространстве – плоскость проекций.

$S$  – точка в пространстве, не лежащая в плоскости  $\Pi_0$  – центр проекций (полюс проекций).  $A, B, C, D$  – некоторые точки в пространстве (рисунок 1)

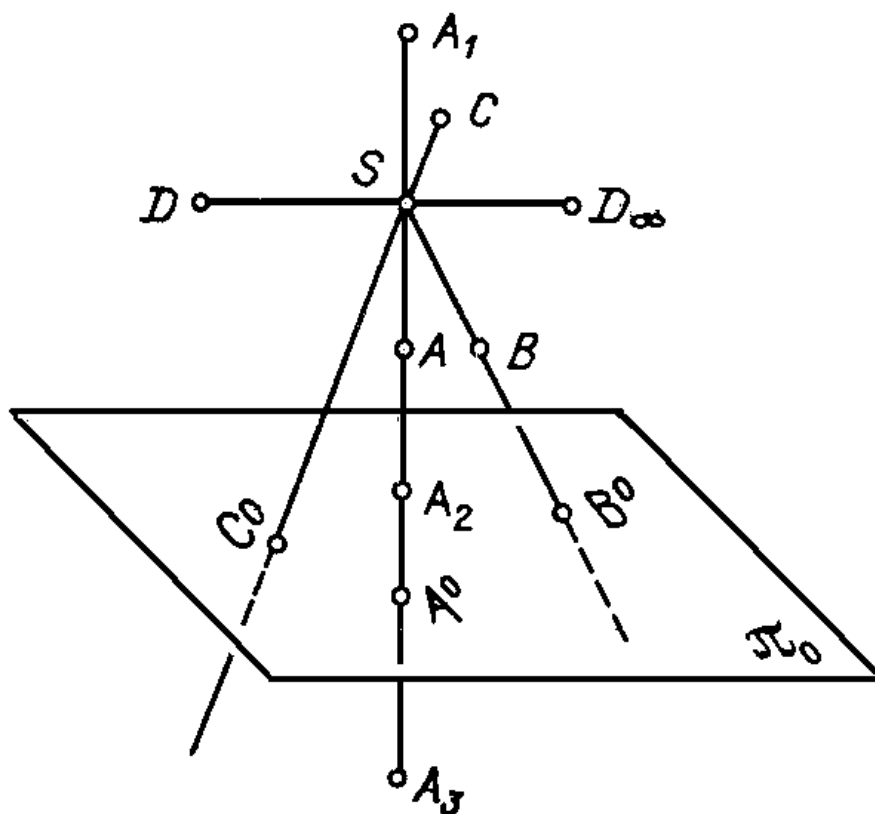


Рисунок 1- Центральное проецирование

Проведем через точки прямую линию до пересечения ее с плоскостью  $\Pi_0$  в точке  $A_0$ .  $SA$  – проецирующая прямая (луч). Точка  $A_0$  называется центральной проекцией точки  $A$  на плоскость  $\Pi_0$ .

Следовательно, центральной проекцией точки называется точка пересечения прямой, проведенной через заданную точку и центр проекций, с плоскостью проекций.

Аналогично может быть построена центральная проекция и каких-либо других точек, например, точек  $B, C, D$  и т.д.

Но имея проекцию (например,  $A_0$ ), нельзя по ней определить положение самой точки  $A$  в пространстве, так как любая точка проецирующей прямой  $SA$  проецируется в одну и ту же точку; для единственного решения, необходимы дополнительные условия.

Изображение, полученное по способу центрального проецирования, называется перспективным изображением или перспективой.

Примеры центрального проецирования в быту – изображение предметов на картинах, фотографические снимки, кинопроекция и т.д. Достоинства центрального проецирования – большая наглядность. Недостатки – изображение предметов по методу центрального проецирования весьма сложно, при этом затрудняется простановка размеров, ухудшается возможность воспроизведения формы и размеров изображаемого предмета. Поэтому при составлении технических чертежей получил распространение и метод параллельного проецирования.

#### **1.4 Понятие о методе Монжа.**

В течение продолжительного периода плоские изображения выполнялись преимущественно как изображения наглядные. С развитием техники первостепенное значение приобрел вопрос о применении метода, обеспечивающего точность и удобоизмеримость изображений, то есть возможность точно установить место каждой точки изображения относительно других точек или плоскостей и путем простых приемов определить размеры отрезков линий и фигур. В 1799 г. французский ученый Гаспар Монж в своем труде изложил метод – метод параллельного проецирования (причем берутся прямоугольные проекции на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций), - обеспечивая выразительность, точность и удобоизмеримость изображений предметов на плоскости. Этот метод был и остается основным методом составления технических чертежей. Положение точки, линии или фигуры будет полностью определяться в пространстве проекциями их на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций.

Слово «прямоугольный» часто заменяют словом «ортогональный». Ортогональный – образован из слов древнегреческого языка, обозначающих «прямой угол».

В дальнейшем преимущественно будут рассматриваться прямоугольные проекции.

## 2 ТОЧКА

### 2.1 Проекция точки на две плоскости проекций (точка в системе плоскостей $\Pi_2, \Pi_1$ )

Проекция точки на одну плоскость не определяет её положения в пространстве. Изобразим неподвижную систему двух взаимно перпендикулярных плоскостей  $\Pi_2$  и  $\Pi_1$  (рисунок 2). Вертикально расположенную плоскость  $\Pi_2$  называют фронтальной плоскостью проекций. Горизонтально расположенную плоскость  $\Pi_1$  – горизонтальной плоскостью проекций.

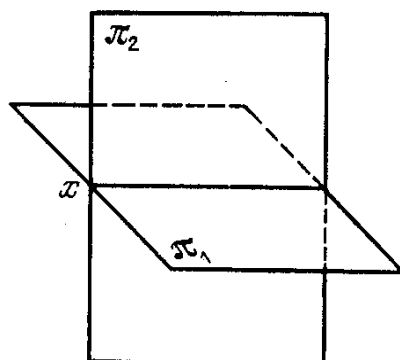


Рисунок 2- Система двух взаимно перпендикулярных плоскостей

Линия пересечения плоскостей  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  называется осью проекций и обозначается буквой  $X$  (ось  $OX$ ).

Зададим некоторую пространственную точку  $A$  в системе двух плоскостей  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  (рисунок 3). Чтобы получить прямоугольные (ортогональные) проекции точки  $A$  в системе плоскостей проекций на две плоскости проекций, надо из точки  $A$  провести проецирующие прямые, перпендикулярные плоскостям проекций  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  и точки пересечения этих прямых с плоскостями проекций дадут проекции точки  $A$  на плоскости  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ .

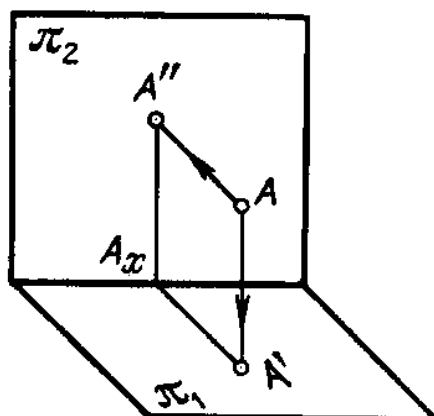


Рисунок 3- Точка  $A$  в системе двух плоскостей

$A'$  - фронтальная проекция точки  $A$ , а  $A''$  - горизонтальная проекция точки  $A$ .

Фронтальная и горизонтальная проекции точки  $A$  в системе плоскостей располагаются на прямых, перпендикулярных  $OX$  – оси проекции и пересекающих эту ось в одной и той же точке.

Если даны проекции  $A'$  и  $A''$  некоторой точки  $A$ , то проведя перпендикуляры через  $A'$  к  $\Pi$  и  $A''$  к  $\Pi_2$  получим в пересечении этих перпендикуляров определенную точку (рисунок 4).

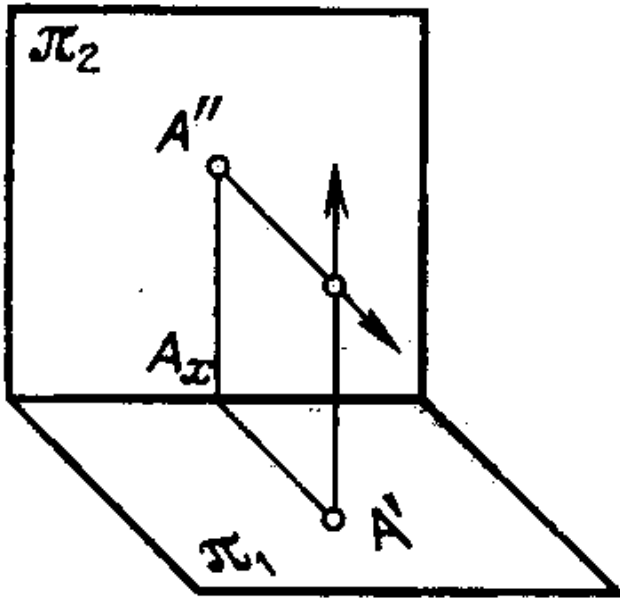


Рисунок 4- Точка  $A$  в системе

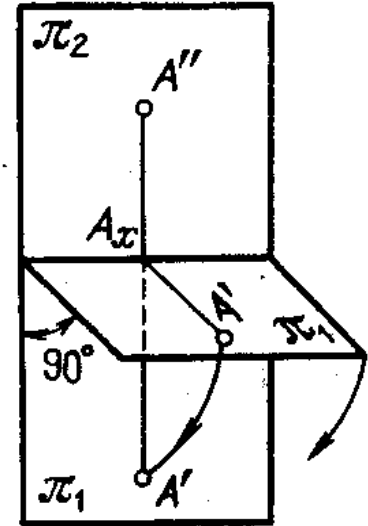


Рисунок 5- Получение эюра

Повернув плоскость  $\Pi_1$  вокруг оси  $X$  на угол  $90^\circ$  до совмещения с плоскостью  $\Pi_2$  получим плоский чертёж-эпюр (рисунок 5).

Проекции  $A'$  и  $A''$  располагаются на одном перпендикуляре к оси проекции – на линии связи. На эюре  $A''A_x$  (рисунок 6) - расстояние от точки  $A$  от плоскости  $\Pi_1$ .  $A'A_x$  –расстояние точки  $A$  от плоскости  $\Pi_2$ , это значит, что проекции точки на две плоскости проекций полностью определяют положение ее в пространстве.

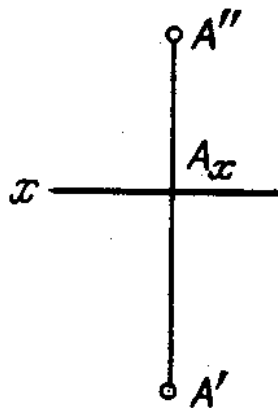


Рисунок 6- Эпюр точки  $A$

## 2.2 Проекция точки на три плоскости проекций

Изобразим три взаимно перпендикулярные плоскости проекций  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ , и  $\Pi_3$ . Плоскость  $\Pi_3$  перпендикулярна к плоскостям  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  и называется профильной плоскостью проекций. Прямая пересечения плоскостей  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  называется осью  $X$ , прямая пересечения плоскостей  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  называется осью  $Y$ , прямая пересечения плоскостей  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$  называется осью  $Z$ . Точка  $O$  – точка пересечения осей проекций. На рисунке 7 показана схема совмещения плоскостей  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$  в одну плоскость.

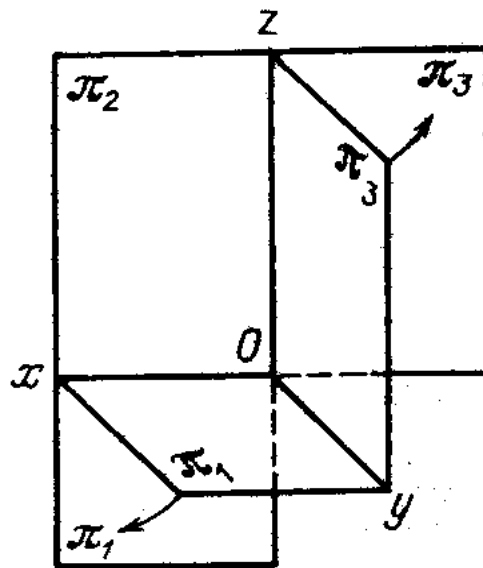


Рисунок 7- Схема совмещения плоскостей

На рисунке 8 изображена точка  $A$ , находящаяся в пространстве и помещенная в систему плоскостей  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$ . Методом прямоугольного проецирования построены ее проекции на эти плоскости. Проекция  $A'''$  – профильная проекция точки  $A$ .

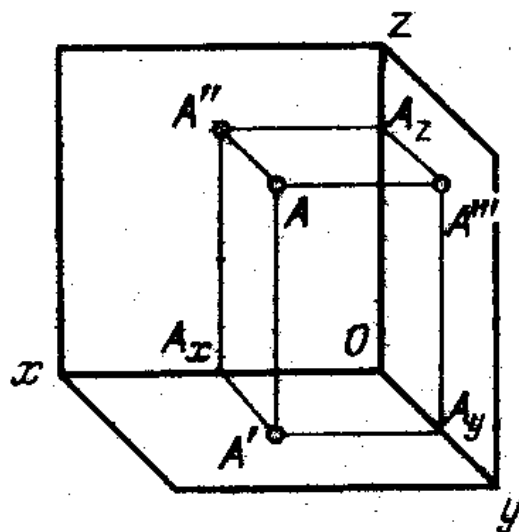


Рисунок 8- Параллелепипед координат

Построенный параллелепипед называют параллелепипедом координат данной точки  $A$ . Координаты точки - это числа, выражающие ее расстояние от каждой из трех плоскостей проекций, называемых еще плоскостями координат.

Соответственно, координаты называются абсциссой, ординатой и аппликатой и обозначаются  $X, Y, Z$ .

Координата  $X$  точки  $A$  определяет расстояние от точки  $A$  до плоскости  $\Pi_1$ , это отрезок  $AA'''$  или  $A_xO$ . Координата  $Y$  точки  $A$  определяет расстояние от точки  $A$  до плоскости  $\Pi_2$ , это отрезок  $AA''$  или  $A_yO$ . Координата  $Z$  точки  $A$  определяет расстояние от точки  $A$  до плоскости  $\Pi_3$ , это отрезок  $AA'$  или  $A_zO$ .

На рисунке 9 показано построение точки  $A$  по ее координатам  $A(X, Y, Z)$ .

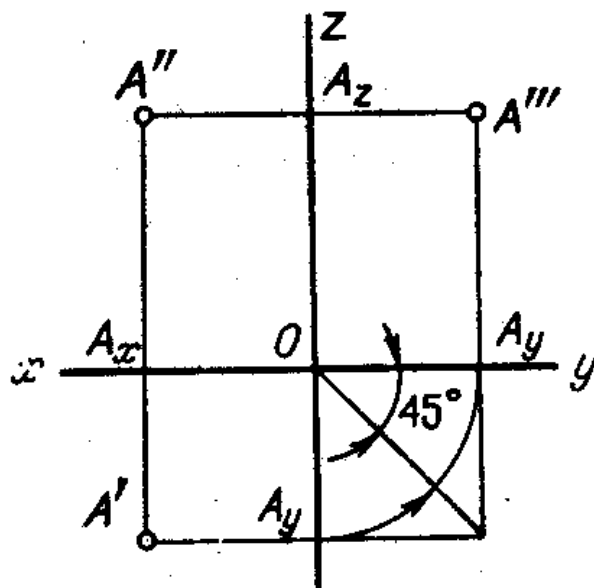


Рисунок 9- Построение точки  $A$

Горизонтальная и фронтальная проекции лежат на линии связи, перпендикулярной к оси  $X$ , фронтальная и профильная проекции лежат на одной линии связи, перпендикулярной к оси  $Z$ .

**Пример**

Построить эпюр точки  $A$ , если известны ее координаты  $A(20, 20, 30)$ .

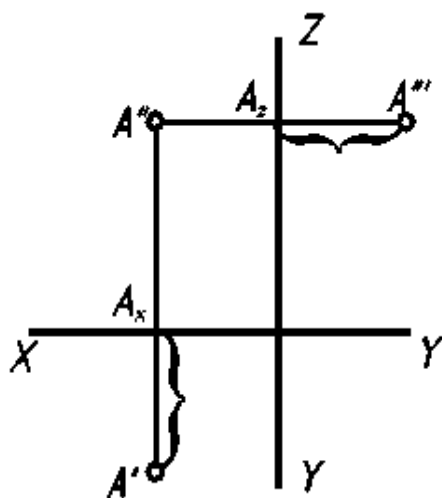


Рисунок 10-Эпюр точки  $A$

## 2.3 Особенности эпюров точек, расположенных в различных четвертях пространства

Плоскости проекций  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  являются безграничными и могут быть продлены в любом направлении до бесконечности.

Поэтому плоскости  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , пересекаясь между собой, образуют четыре двугранных угла, называемые четвертями. На рисунке 11 изображен принятый порядок отсчета четвертей. Оси проекций делят каждую из плоскостей проекций на две полуплоскости-полю. При переходе от пространственного изображения к эпюру, то есть при совмещении плоскостей проекций, меняются направления осей. Поэтому полуплоскость  $\Pi_1$  вращается вокруг оси  $X$  вниз в первой и четвертой четвертях (при положительном значении  $Y$ ), и перемещается вверх, совмещаясь с  $\Pi_2$  (при отрицательном значении  $Y$ ) во второй и третьей четвертях.

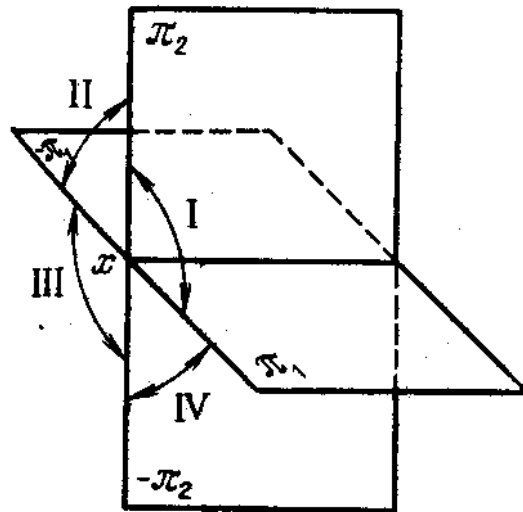


Рисунок 11- Порядок отсчета четвертей

Эпюры точек, находящихся в различных четвертях пространства, будут определяться расположением осей (положительным или отрицательным). В соответствии с этим эпюры точек в различных четвертях пространства выглядят следующим образом: А ( $x, y, z$ ) – 1<sup>я</sup> четверть (Рисунок 12), В ( $x, -y, z$ ) – 2<sup>я</sup> четверть, С ( $x, -y, -z$ ) – 3<sup>я</sup> четверть, Д ( $x, y, -z$ ) – 4<sup>я</sup> четверть.

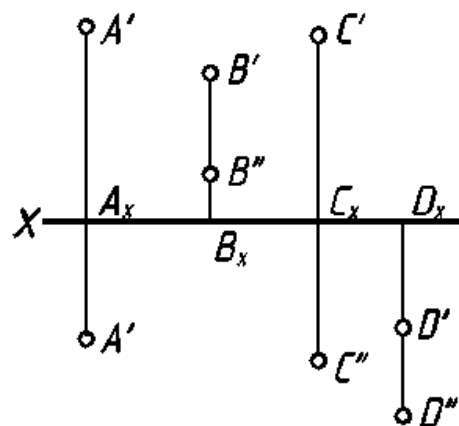


Рисунок 12- Эпюры точек



