5-тарау. ОРТАША ШАМАЛАР ЖӘНЕ ВАРИАЦИЯ КӨРСЕТКІШТЕРІ

5.1. Орташа шаманың жалпы сипаттамасы

Статистикалық мәліметтерді жинақтау нәтижесінде жиынтықтың біртекті топтарын сипаттайтын абсолютті көрсеткіштер анықталады. Мысалы, жеке бір топтағы кәсіпорындардың шығарған жалпы өнімі, олардың негізгі капиталдарының жалпы мөлшері, қызметкерлердің жалпы саны сияқты көрсеткіштерді статистикалық топтау әдісі арқылы есептеуге болады. Бірақ бұл көрсеткіштер жиынтықтың әр бірлігін сипаттай алмайды. Жиынтықтағы бірліктерді сипаттау үшін орташа шама қолданылады.

Орташа шаманың статистикалық тәжірибедегі және ғылымдағы маңызын көптеген ғалымдар өз еңбектерінде зерттеген. Мысалы ағылшын ғалымы В. Петти (1623–1677) экономикалық мәселелерді зерттегенде орташа шамаларды кеңінен қолданған. Ол орташа шамалардың тұрақтылығын зерттелетін құбылыс заңдылығының көрінісі деп санаған. Г.Кинг (1648–1712) Англия халқы туралы мәліметтерге талдау жасағанда орташа және қатысты шамаларды қолданып, бір отбасының және жан басына шаққандағы орташа табысты зерттеген. Бельгия статистигі А.Кетле (1796–1874) – статистикалық көрсеткіштер тұрақтылығы теориясына қомақты үлес қосқан ғалым. А.Кетле тұрақты себептердің зерттелетін құбылыстарға тигізетін әсері тұрақты болады және олар (тұрақты себептер, факторлар) құбылыстарға тән ортақ заңдылықты тудырады деп санаған. Оның жеке және жалпы себептерді зерттеуінің нәтижесінде орташа шамалар статистикалық талдаудың негізгі әдісіне айналды. Кетле орташа шамаларды математикалық өлшем ғана емес, сонымен қатар объективті шындық категориясы деп таныды. Оның осындай көзқарасынан «орташа адам» теориясы қалыптасты. Орташа шамалар теориясының дамуына ағылшын ғалымы А.Боули (1869–1957) де өз үлесін қосты. Оның «Статистика элементтері» деген кітабында орташа шамалар концепциясы туралы жазылған.

Орташа шама деп біртекті құбылыстардың жиынтығын бір вариациялық белгі бойынша сипаттайтын қорытынды көрсеткішті айтады.

Орташа шаманы есептегенде кездейсоқ факторлар әсерінен болған белгі мәндерінің ауытқулары бірін-бірі жояды, ал негізгі факторлар әсерінен болған өзгерістер есепке алынады. Яғни орташа шама жиынтықтың жекелеген бірліктеріне ғана тән ерекшеліктерді дерексіздендіреді де, белгінің типтік деңгейін көрсетеді. Орташа шама типтік деңгейді көрсету үшін жиынтық біртекті болу керек. Егер жиынтық әртекті болса, онда берілген жиынтықты біртекті топтарға бөліп алады. Содан кейін орташа шаманы әр топ үшін есептейді. Яғни орташа шамаларды қолданғанда мына шарттар орындалуы тиіс:

1. Орташа шама тек біртекті жиынтық үшін есептелуі керек.
2. Жиынтық бірліктері толық қамтылуы тиіс. Ал орташа шама жартылай бақылау мәліметтері бойынша есептелген жағдайда, типтік үрдісті

айқындау үшін іріктеліп алынатын бірліктер саны үлкен сан болуы қажет.

3. Орташаның түрі дұрыс анықталуы керек.

Орташа шаманы есептеу үшін, ең алдымен, әрбір нақты жағдайда осы орташа шама нені білдіетінін, қандай шамалардың қатынасы арқылы есептелінетінін, яғни ***орташаның негізгі қатынасын*** анықтап алу керек. Мысалы, орташа жалақыны есептеу үшін жалпы жалақыны жұмыс істейтіндер санына бөледі:

$$\text{орташа жалақы} = \frac{\text{жалпы жалақы}}{\text{жұмысшы саны}}$$

Ал банктегі орташа салым мөлшерін анықтау қажет болса, жалпы салым сомасын салым санына бөледі:

$$\textit{орташа салым м}\text{өлшері} = \frac{\text{салымдардың жалпы } \textit{сомасы}}{\textit{салым } \text{саны}}$$

Әлеуметтік-экономикалық талдауларда қолданылатын әр көрсеткіш үшін орташаның бір ғана негізгі қатынасын анықтауға болады, алайда негізгі қатынастың қалай қолданылғаны бастапқы мәліметтердің қандай түрде берілгеніне тікелей байланысты болады. Әр нақты жағдайда негізгі қатынасты жүзеге асыру үшін орташалардың бір ғана түрі қолданылады.

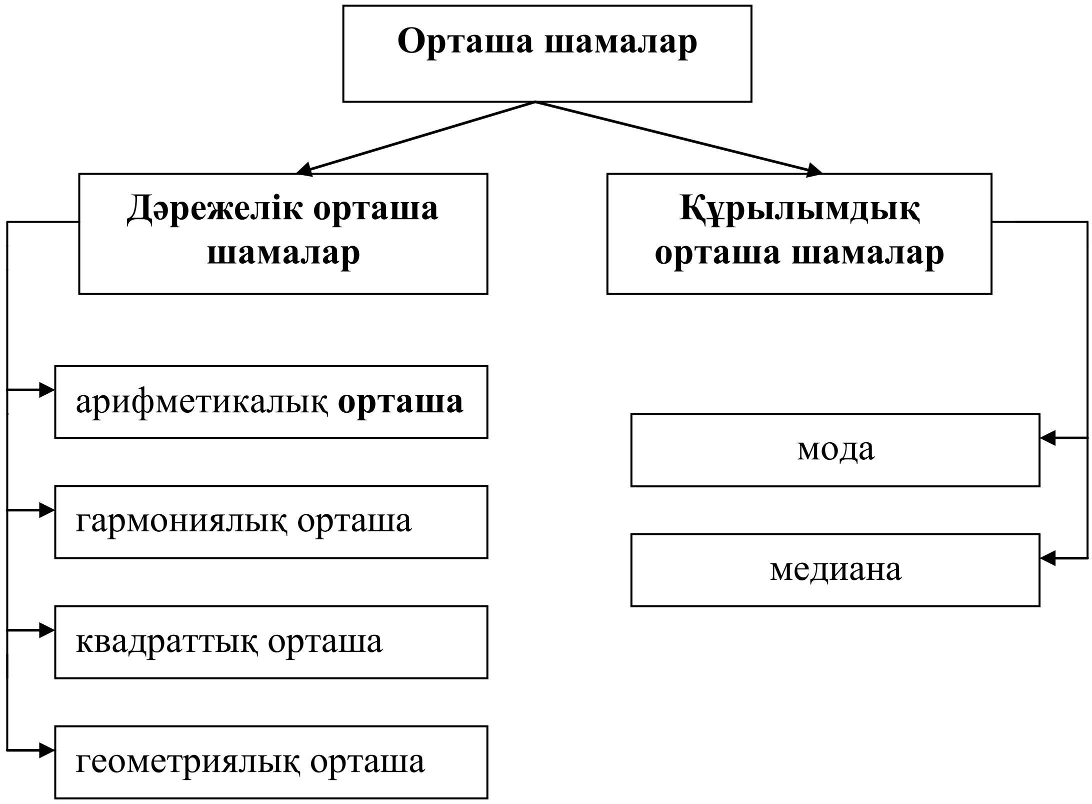
Орташа шамалар мынадай екі үлкен класқа бөлінеді:

- дәрежелік орташа шамалар
- құрылымдық орташа шамалар

Құрылымдық орташа шамаларға мода мен медиана жатады. Оларды вариациялық қатарларды сипаттау үшін қолданады. Дәрежелік орташа шамалардың мынадай түрлері болады:

- арифметикалық орташа шама
- гармониялық (үйлесімді) орташа шама
- квадраттық орташа шама
- геометриялық орташа шама

Осы аталған орташа шамаларды мынадай үлгімен көрсетуге болады:



5.1-сурет. Орташа шамалардың түрлері

Берілген мәліметтердің ерекшеліктеріне байланысты дәрежелік орташалар ***жай*** және ***салмақталған*** болып екіге бөлінеді. Дәрежелік орташа шамалардың жай түрі мәліметтер топтастырылмай, белгінің әр варианты жеке берілгенде қолданылады. Оларды мынадай формуламен есептейді:

$$\bar{x} = \sqrt[m]{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^m}{n}}, \quad (1)$$

мұндағы :

$\bar{x}$ – орташа шама;

x_i – белгі варианттары;

ò – дәреже көрсеткіші;

n – варианттар саны.

Дәрежелік орташа шамалардың салмақталған түрі топтастырылған мәліметтер үшін қолданылады және олардың жалпы формуласы мынадай түрде болады:

$$\bar{x} = \sqrt[m]{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^m \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}} \qquad (2)$$

мұндағы: f_i – белгі жиіліктері.

Дәреже көрсеткіші m кез-келген мәнді қабылдайды, бірақ тәжірибе жүзінде 0; 1; -1; 2 мәндері ғана қолданылады. Дәреже көрсеткіші орташаның түрін анықтайды. $m=1$ болғанда арифметикалық орташа, $m=-1$ болғанда гарманиялық орташа, $m=0$ болғанда геометриялық орташа, $m=2$ болғанда квадраттық орташа анықталады. 5.1-кестеде дәрежелік орташа шамаларды есептеу формулалары көрсетілген.

5.1-кесте

Дәрежелік орташа шамаларды есептеу формулалары

Дәрежелік орташаның түрі	Дәреже көрсеткі ші (m)	Есептеу формуласы	
		Орташаның жай түрі	Орташаның салмақталған түрі
Гармониялық	-1	$\bar{x}=\frac{n}{\sum\frac{1}{x}}$	$\bar{x}=\frac{\sum x\cdot f}{\sum\frac{x\cdot f}{x}}$
Геометриялық	0	$\bar{x}=\sqrt[k]{\prod x}=$ $=\sqrt[k]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_k}$	$\bar{x}=\sqrt[\sum f]{\prod_{i=1}^{k} x_i^{f_i}}=$ $=\sqrt[\sum f]{x_1^{f_1}\cdot x_2^{f_2}\cdot\ldots\cdot x_k^{f_k}}$
Арифметикалық	1	$\bar{x}=\frac{\sum x}{n}=$ $=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$	$\bar{x}=\frac{\sum x\cdot f}{\sum f}=$ $=\frac{x_1\cdot f_1+x_2\cdot f_2+\ldots+x_n\cdot f_n}{f_1+f_2+\ldots+f_n}$
Квадраттық	2	$\bar{x}=\sqrt{\frac{\sum x^2}{n}}=$ $=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}$	$\bar{x}=\sqrt{\frac{\sum x^2\cdot f}{\sum f}}=$ $=\sqrt{\frac{x_1^2\cdot f_1+x_2^2\cdot f_2+\ldots+x_n^2\cdot f_n}{f_1+f_2+\ldots+f_n}}$

Егер берілген бір мәліметтерге дәрежелік орташалардың барлық түрін қолданса, онда есептелген орташаның мәні әртүрлі болады. Мұндай жағдайда дәрежелік көрсеткіш жоғарлаған сайын, орташа шаманың сандық мәні өседі:

$$\bar{x}_{\text{гар}} \le \bar{x}_{\text{геом}} \le \bar{x}_{\text{ариф}} \le \bar{x}_{\text{квад}}$$

Дәрежелік орташа шамалардың осы қасиеті ***орташалардың мажоранттық қасиеті*** деп аталады. Бұл қасиет орташа шаманың түрі оның сандық мәніне айтарлықтай әсер ететінін көрсетеді. Сондықтан орташаның түрін дұрыс таңдаудың маңызы зор. Орташаның түрін таңдау әрбір жеке жағдайда зерттелетін жиынтықты талдау, құбылыстың мазмұнын зерттеу арқылы анықталады.

5.2. Арифметикалық орташа шамалар

Орташа шамалардың ішінде ең көп тарағаны – арифметикалық орташа шама. Барлық дәрежелік орташалар сияқты арифметикалық орташа шамалардың да екі түрі болады:

- жай арифметикалық орташа
- салмақталған арифметикалық орташа

Жай арифметикалық орташа шама белгінің варианттары жинақталмаған жиынтықтар үшін қолданылады. Оны мынадай формуламен есептейді:

$$\tilde{o} = \frac{\sum \tilde{o}_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

мұндағы: x_i – белгінің мәндері (варианттары),

n – вариант саны.

Мысал: Төмендегі 5.2-кестеде Қазақстандағы оқу орындарының саны туралы мәліметтер берілген:

5.2 – кесте

Қазақстандағы жоғары оқу орындары

оқу жылының басына

	2005-2006	2006-2007	2007-2008	2008-2009	2009-2010
Жоғары оқу орындарының саны, барлығы	181	176	167	143	148

Осы мәліметтер бойынша берілген уақыт аралығы үшін жоғары оқу орындарының орташа санын анықтау керек.

Шешуі: Бұл мысалда жай арифметикалық орташа формуласын қолданамыз.

$$\tilde{o} = \frac{181 + 176 + 167 + 143 + 148}{5} = \frac{815}{5} = 163,$$

яғни 2005–2006 және 2009–2010 оқу жылдары аралығында Қазақстанда жылына орташа есеппен 163 жоғары оқу орны жұмыс істеген.

Салмақталған арифметикалық орташа шамалар әр вариант бірнеше рет қайталанған жағдайда қолданылады және оны мына формуламен есесптейді:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \ldots + x_n \cdot f_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n},$$

мұндағы: x_i – белгі варианттары

f_i – белгі жиіліктері.

Белгі жиілігі әр варианттың неше рет қайталанғанын көрсетеді.

Мысал: Қызметкерлердің айлық жалақысы туралы мынадай мәліметтер берілген:

5.3-кесте

Қызметкерлердің айлық жалақы мөлшері бойынша бөлінуі

Айлық жалақы, теңге	Қызметкерлер саны, адам	Жалпы жалақы, теңге
x	f	$x \cdot f$

70000	7	490000
75000	8	600000
80000	15	1200000
85000	11	935000
90000	9	810000
Барлығы	50	4035000

Осы мәліметтер бойынша бір қызметкерге шаққандағы орташа жалақыны есептеу қажет.

Шешуі: Белгінің әр варианты (х) бірнеше рет қайталанатындықтан, арифметикалық орташаның салмақталған түрін қолданамыз.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_{if_i}}{\sum f_i} = \frac{70000 \times 7 + 75000 \times 8 + 80000 \times 15 + 85000 \times 11 + 90000 \times 9}{7 + 8 + 15 + 11 + 9}$$
$$= 80700 \text{ теңге}$$

Интервалды вариациялық қатардың орташа шамасын есептеу үшін ең алдымен интервал ортасын анықтайды, содан кейінгі есептеулер арифметикалық орташаның салмақталған түрінің формуласы бойынша жүргізіледі.

Мысал: Шаруа қожалықтарының пайдаланылатын жері туралы мынадай шартты мәліметтер берілген:

5.4-кесте

Шаруа қожалықтарының пайдаланылатын жер мөлшері бойынша бөлінуі

Топ №	Пайдаланылатын жер мөлшері бойынша анықталған шаруашылық топтары, га $\tilde{o}$	Шаруашылық саны f	Интервал ортасы x	xf
I	30-ға дейін	15	25	375
II	30 – 40	25	35	875
III	40 – 50	40	45	1800
IV	50 – 60	15	55	825
V	60 және одан жоғары	5	65	325
		100	-	4200

Осы мәліметтер бойынша бір шаруа қожалығына шаққандағы пайдаланылатын жердің орташа мөлшерін анықтау керек.

Шешуі: Алдымен әр топтың интервал ортасын анықтаймыз. Жабық интервал түрінде берілген топтарда (II–IV топтар) интервал ортасы топтың төменгі және жоғарғы шектерінің арифметикалық орташасына тең болады, атап айтқанда: II топтың интервал ортасы $\tilde{o}_2 = \frac{30+40}{2} = 35$ га, III топтың интервал ортасы $\tilde{o}_3 = \frac{40+50}{2} = 45$ га, IV топтың интервал ортасы $x_4 = \frac{50+60}{2} = 55$ га болады.

Бұл мысалда I, V топтар ашық интервал түрінде берілген. Мұндай топтарда интервал ортасы былай анықталады: I топта топтың жоғарғы шегінен II топтың интервал ұзындығының жартысы шегеріледі, яғни $x_1 = 30 - \frac{10}{2} = 25$ га, ал соңғы топта топтың төменгі шегіне IV топтың интервал ұзындығының жартысы қосылады, сонда $x_5 = 60 + \frac{10}{2} = 65$ га болады. Енді орташаны формула бойынша анықтаймыз:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{25\cdot 15 + 35\cdot 25 + 45\cdot 40 + 55\cdot 15 + 65\cdot 5}{15+25+40+15+5} = \frac{4200}{100} = 42(га)$$

Арифметикалық орташа шамалардың есептеуді жеңілдететін мынадай ***математикалық қасиеттері*** бар:

1. Егер әр вариантқа (x_i) белгілі бір тұрақты санды (A) қосса немесе вариантты белгілі бір санға азайтса, онда қосындыдан немесе айырмадан есептелген орташа шама нақты орташадан сол тұрақты шама мөлшеріне көп не аз болады.

Дәлелдеу: $$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i \pm A)}{n} = \frac{(x_1 \pm A)+(x_2 \pm A)+\ldots+(x_n \pm A)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \pm nA}{n} = \bar{x} \pm A.$$

Бұл қасиетті көп орынды сандардың бір бірімен салыстырғандағы өзгерістері аз болған жағдайда олардың орташасын есептеу үшін қолданған ыңғайлы. Мысалы, автомобильдердің жүрген жолдарының ұзындығы мынадай түрде берілсін:

$x_1 = 263\,км,\ x_2 = 257\,км,\ x_3 = 269\,км,\ x_4 = 249\,км,\ x_5 = 265\,км.$

Жүрілген жолдың орташа шамасын анықтау үшін көрсеткіштің барлық мәндерінен 260 километрді шегереміз де, қалдықтан орташа шаманы есептейміз: (3 – 3 + 9 – 11 +5) : 5 = 0,6. Енді 260-қа осы мәнді қосамыз: $\bar{x} = 260 + 0{,}6 = 260{,}6\,(км)$, яғни автобильдердің жүрген жолдарының орташа шамасы 260,6 километрге тең.

2. Егер әр вариантты (x_i) белгілі бір тұрақты санға (d) көбейтсе (бөлсе), онда онда жаңа варианттан есептелген орташа шама сонша есе көбейеді (азаяды).

Дәлелдеу:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i : d)}{n} = \frac{\frac{x_1}{d}+\frac{x_2}{d}+\ldots+\frac{x_n}{d}}{n} = \frac{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{d}}{n} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} : d = \bar{x} : d$$

Орташаның бұл қасиетін қолданғанда, алдымен белгінің жеке мәндерін тұрақты санға (d) қысқартып алады, содан кейін өзгерген варианттар бойынша орташаны есептейді де, шыққан нәтижені d -ға көбейтеді.

3. Егер вариант жиілігін (f_i) белгілі бір тұрақты санға (c) көбейтсе (бөлсе), онда орташа шама өзгермейді.

Дәлелдеу: $$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{f_i}{c}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{c}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i\right):c}{\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right):c} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \bar{x}$$

Бұл қасиетті белгі жиіліктерінің ортақ көбейткіші болғанда қолданған ыңғайлы.

4. Варианттардың орташа шамадан ауытқуларының қосындысы нольге тең болады.

Дәлелдеу:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = (x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \ldots + (x_n - \bar{x}) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n - n \cdot \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i - n \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 0 .$$

Бұл қасиет варианттардың орташа шамадан ауытқулары (оң, теріс) бірін-бірі жоятынын көрсетеді.

5. Орташа шама мен белгі жиіліктерінің қосындысының көбейтіндісі ($\bar{x} \cdot \sum f$) белгі варианттары мен жиіліктерінің көбейтіндісінің қосындысына ($\sum xf$) тең болады.

Дәлелдеу: $\bar{x} \cdot \sum f = \frac{\sum x \cdot f}{\sum f} \cdot \sum f = \sum x \cdot f$

Арифметикалық орташалардың осы қасиеттерін пайдаланып, орташаны ***ықшамдалған тәсілмен*** есептеуге болады. Бұл тәсілді ***моменттер тәсілі*** деп те атайды. Моменттер тәсілін бірдей интервалмен берілген вариациялық қатарлар үшін қолданады. Мұндай жағдайда орташа шаманы мына формуламен есептейді: $\boldsymbol{\bar{x} = m_1 \cdot d + A}$

мұндағы A – қатардың ортасында орналасқан және ең үлкен жиілікке сәйкес келетін вариант;

d – интервал ұзындығы;

m_1 – бірінші дәрежелі момент.

Бірінші дәрежелі моментті мына формуламен есептейді:

$$m_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - A}{d}\right) \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} ,$$

яғни, m_1– варианттары орташаның математикалық қасиеттеріне сәйкес өзгертілген жаңа вариациялық қатардың орташа шамасы. Енді осы тәсілді қолдануға мысал келтірейік.

Мысал. Кәсіпорындардың қызметкерлер саны бойынша бөлінуі туралы мынадай мәліметтер берілген:

5.5-кесте

Кәсіпорындардың қызметкерлер саны бойынша бөлінуі

Қызметкерлер саны, адам	Кәсіпорын саны f_i
100-ге дейін	10
10–200	25
200–300	40
300–400	15
400 және одан жоғары	10
Барлығы	100

Осы мәліметтер бойынша кәсіпорындардағы қызметкерлердің орташа санын анықтау керек.

Шешуі:

1. Интервалды қатар берілгендіктен, ең алдымен әр топ үшін интервал ортасын анықтаймыз (5.6-кестенің 2-бағаны).

2. Ең үлкен жиілікке сәйкес келетін және қатардың ортасында орналасқан варианттың мәнін c деп белгілейміз де, әр варианттан осы шаманы шегереміз. 5.6-кестеде бұл айырма ($x_i - A$) 3-бағанда көрсетілген.

3. ($x_i - A$) айырмасын интервал ұзындығына бөлеміз (5.6-кестенің 4-бағаны).

4. Өзгертілген жаңа варианттардың $\left(\frac{x_i - A}{d}\right)$ әрқайсысын өз жиілігіне көбейтеміз (5.6-кестенің 5-бағаны).

5. 5.6-кестенің соңғы бағанындағы мәліметтерді пайдаланып, бірінші дәрежелі моментті немесе жаңа варианттардан есептелген орташаны мына формуламен анықтаймыз:

$$m_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - A}{d}\right)\cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{-10}{100} = -0{,}1$$

6. Кәсіпорындардағы қызметкерлерді орташа санын төмендегі формула бойынша анықтаймыз:

$$\bar{x} = m_1 \cdot d + A = (-0{,}1)\cdot 100 + 250 = 240 \ \text{адам}$$

Бұл мысалдағы есептеу нәтижелері 5.6-кестеде көрсетілген.

5.6-кесте

Кәсіпорындардың қызметкерлер саны бойынша бөлінуі

Қызметкерлер саны, адам	Кәсіпорын саны f_i	Интервал ортасы x_i	$x_i - A$ $A = 250$	$\frac{x_i - A}{d}$ $d = 100$	$\frac{x_i - A}{d}\cdot f_i$
А	1	2	3	4	5

100-ге дейін 100–200 200–300 300–400 400 және одан жоғары	10 25 40 15 10	50 150 250 350 450	-200 - 100 0 100 200	-2 -1 0 1 2	-20 -25 0 15 20
Барлығы	100	-	-	-	-10

Ықшамдалған тәсілді бірдей интервалмен берілген вариациялық қатарлар үшін қолданады. 5.5-кесте мәліметтері бойынша орташа шаманы салмақталған арифметикалық орташа формуласын пайдаланып та анықтауға болады:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i} == \frac{50 \cdot 10 + 150 \cdot 25 + 250 \cdot 40 + 350 \cdot 15 + 450 \cdot 10}{10 + 25 + 40 + 15 + 10} = \frac{24000}{100} = 240 \; адам.$$

Есептеу нәтижелері екі тәсілмен анықталған орташа шаманың мәндері бірдей болатынын көрсетеді, бірақ моменттер тәсілін қолданғанда берілген қатардың варианттары түрлендіру нәтижесінде ықшамдалып, кіші сандарға келтірілетіндіктен, бұл тәсіл есептеуге өте ыңғайлы.

5.3. Гармониялық орташа шамалар

Орташа шамалардың ең қарапайым және жиі қолданылатын түрі болып арифметикалық орташа саналады. Алайда зерттелетін көрсеткіштің орташа шамасын есептеу үшін барлық жағдайда арифметикалық орташаны қолдану дұрыс емес екендігі теория жүзінде де, тәжірибе жүзінде де дәлелденген. Мысалы, мынадай мәліметтер берілген делік: Сауда фирмасының тапсырыстар бөлімінде 3 жұмысшы 8 сағаттық жұмыс күні бойынша жұмыс істейді. Бір тапсырысты орындауға бірінші жұмысшы орташа есеппен 5 минут, екінші жұмысшы – 15 минут, үшінші жұмысшы 10 минут жұмсайды. Бөлім бойынша бір тапсырысты орындауға жұмсалған орташа уақытты анықтау керек. Егер орташа уақытты жай арифметикалық орташа формуласымен анықтасақ, онда $\bar{x} = \frac{5+15+10}{3} = 10 \; минут$ болады. Бұл шешімнің қаншалықты дұрыс екендігін тексеру үшін 3 жұмысшы бір сағатта қанша тапсырысты орындайтынын анықтаймыз:

$$\frac{60}{5} + \frac{60}{15} + \frac{60}{10} = 12 + 4 + 6 = 22 \; тапсырыс.$$

Егер әр жұмысшының бір тапсырысты орындауға жұмсаған уақытының орнына арифметикалық орташаның мәнін (10 минут) қойсақ, онда жалпы тапсырыс саны мынаған тең болады.:

$$\frac{60}{10} + \frac{60}{10} + \frac{60}{10} = 18 \; тапсырыс$$

Яғни бұл мысалда арифметикалық орташаны қолдансақ, ол бір сағатта орындалатын жалпы тапсырыс санын азайтып көрсетеді, сондықтан орташаны басқа тәсілмен есептеу қажет.

Жоғарыда келтірілген мысалда орташаны есептеу үшін мынадай негізгі қатынасты пайдаланамыз:

$$\bar{x} = \frac{\textit{тапсырыс орындау}\text{ға } \textit{ж}\text{ұмсалған } \textit{барлы}\text{қ } \textit{у}\text{қыт}}{\textit{тапсырыс саны}}$$

мұндағы $\bar{x}$ – бір тапсырысты орындауға жұмсалған орташа уақыт.

Осы негізгі қатынастың алымындағы көрсеткіш , яғни тапсырыс орындауға жұмсалған барлық уақыт есептің шарты бойынша белгілі: 3 жұмысшының әрқайсысы 8 сағаттан жұмыс істегендіктен жалпы уақыт 24 сағатқа немесе 1440 минутқа тең болады. Ал негізгі қатынастың бөлімі, яғни тапсырыс саны белгісіз. Тапсырыстың жалпы санын анықтау үшін алдымен әр жұмысшының неше тапсырысты орындағанын есептейміз. Бірінші жұмысшы сағатына 12 тапсырыс (60:5=12), екінші жұмысшы 4 тапсырыс (60:15=4), ал үшінші жұмысшы 6 тапсырыс (60:10=6) орындайды. Олай болса жұмыс күнінің ұзақтығы 8 сағат немесе 480 минут екенін ескере отырып, бірінші жұмысшы күніне 96, екінші жұмысшы 32, үшінші жұмысшы 48 тапсырыс орындайтынын аңғару қиын емес. Сонда 3 жұмысшының орындаған тапсырыстарының жалпы саны:

$$\frac{480}{5} + \frac{480}{15} + \frac{480}{10} = 96 + 32 + 48 = 176$$

болады. Енді бір тапсырысқа жұмсалған орташа уақытты есептейміз:

$$\bar{x} = \frac{1440}{176} \approx 8{,}2 \ \textit{мин.}$$

немесе: $$\bar{x} = \frac{480 + 480 + 480}{\frac{480}{5} + \frac{480}{15} + \frac{480}{10}} = \frac{1440}{176} \approx 8{,}2 \ \textit{мин.} \ (*)$$

яғни бір тапсырысты орындауға орташа есеппен 8,2 минут жұмсалады.

Осы мысалдағы есептеу нәтижелері төмендегі кестеде көрсетілген.

5.7-кесте

Тапсырыс бөлімінің көрсеткіштері

Жұмысшы №	Барлық уақыт, минут, $x_i \cdot f_i$	Бір тапсырысты орындау уақыты, x_i	Тапсырыс саны, $f_i = \frac{x_i \cdot f_i}{x_i}$
А	1	2	3
1 2 3	480 480 480	5 15 10	96 32 48
Барлығы	1440	-	176

Бұл мысалда орташаны есептеу үшін салмақталған гармониялық орташа формуласы қолданылды:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i \cdot f_i}{x_i}}.$$

Гармониялық орташа шама белгінің кері мәнінен есептеледі. Басқа дәрежелік орташалар сияқты гармониялық орташаның да жай және салмақталған түрі болады. Әдетте гармониялық орташаны орташаның негізгі қатынасының бөлімі белгісіз болғанда қолданады. Бір өнімге жұмсалған орташа еңбек шығынын, материал шығынын, т.б. осындай көрсеткіштерді есептеу гармониялық орташаны қолдану арқылы жүзеге асырылады.

Жай гарманиялық орташа варианттардың жиіліктері бірдей немесе бірге тең болғанда қолданылады және төмендегі формуламен есептеледі:

$$\bar{x} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

мұндағы n – вариант саны;

$\frac{1}{x_i}$ – белгінің кері мәндері.

Жоғарыда $(*)$ белгісімен белгіленген өрнекте бөлшектің алымын да, бөлімін де 480-ге қысқартып, жай гармониялық орташа түріне келтіруге болады:

$$\bar{x} = \frac{3}{\frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{10}} \approx 8{,}2 \text{ мин.}$$

Гармониялық орташаның салмақталған түрін белгінің варианттары (x_i) және вариант пен жиіліктің көбейтіндісі $(x_{i_i} \cdot f_i)$ белгілі, ал жиілік (f_i) белгісіз болған жағдайда қолданады. Салмақталған гармониялық орташаны мына формуламен анықтайды:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i \cdot f_i}{x_i}}$$

Осы формуланы қолдануға тағы бір мысал келдірейік.

Мысал. 3 зауыттың өндістік шығындары және олар шығаратын А өнімінің бір бірлігінің өзіндік құны туралы мынадай мәліметтер берілген:

5.8-кесте

Зауыттардың өндірістік шығындары және өнімнің өзіндік құны

Зауыт №	Өндіріс шығындары,мың теңге	өнім бірлігінің өзіндік құны, теңге
1	1000	100
2	2300	115
3	550	110

Осы мәліметтер бойынша 3 зауытты қоса есептегенде өнім бірлігінің орташа өзіндік құны қанша болатынын есептеу керек.

Шешуі: Бұл мысалда да орташаның түрі бастапқы мәліметтерге және көрсеткіштің экономикалық мазмұнына сәйкес анықталады. Өнімнің өзіндік құнының орташасын есептеу үшін мынадай негізгі қатынасты пайдаланамыз:

$$\text{өнімнің } \textit{орташа} \text{ өзіндік құны} = \frac{\textit{барлық} \text{ өнімге } \textit{жұмсалған шығын}}{\text{өнім } \textit{саны}}$$

Негізгі қатынастың бөліміндегі көрсеткіш мәндері белгісіз болғандықтан, гармониялық орташаның салмақталған түрін қолданамыз:

$$\bar{x} = \frac{\sum_1^n x_i f_i}{\sum_1^n \frac{x_i f_i}{x_i}} = \frac{1000 + 2300 + 550}{\frac{1000}{100} + \frac{2300}{115} + \frac{550}{110}} = \frac{3850}{35} = 110 \textit{ теңге},$$

яғни, 3 зауытты қоса есептегенде өнім бірлігінің орташа өзіндік құны 110 теңгені құрайды.

5.4. Квадраттық орташа шамалар

Квадраттық орташалар квадраттық функция түрінде өрнектелген шамалардың орташасын анықтау үшін қолданылады. Мысалы, әр түрлі трубалардың, дөңгелектердің орташа диаметрлері, әр түрлі квадраттардың қабырғаларының орташа ұзындығы квадраттық орташаны қолдану арқылы анықталады. Дәрежелік орташалардың жалпы формуласында дәреже көрсеткіші $m = 2$ болғанда квадраттық орташалар алынады. Квадраттық орташалардың екі түрі болады:

- жай квадраттық орташа
- салмақталған квадраттық орташа

Жай квадраттық орташаны мына формуламен есептейді:

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}},$$

мұндағы x_i – белгінің мәндері (варианттары);

n – вариант саны.

Мысалы, қабырғаларының ұзындығы төмендегідей болатын 4 квадрат берілсін: $x_1 = 6\,см,\quad x_2 = 8\,см,\quad x_3 = 10\,см,\quad x_4 = 12\,см$. Осы квадраттардың қабырғаларының орташа ұзындығын былай анықтаймыз:

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{36 + 64 + 100 + 144}{4}} = \sqrt{\frac{344}{4}} \approx 9{,}3\,см.$$

Квадраттық орташаның салмақталған түрі мына формуламен есептелінеді:

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum x^2 \cdot f}{\sum f}} = \sqrt{\frac{x_1^2 \cdot f_1 + x_2^2 \cdot f_2 + \ldots + x_n^2 \cdot f_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}},$$

мұндағы x_i – белгі варианттары;

f_i – белгі жиіліктері.

Квадраттық орташа шамалар белгі вариациясын бағалау үшін кеңінен қолданылады.

5.5. Геометриялық орташа шамалар

Динамикалық қатар түрінде берілген статистикалық көрсеткіштердің өсу коэффициенттерінің немесе өсу қарқындарының орташа шамасын анықтағанда, сол сияқты индекстер теориясында геометриялық орташа формуласын қолданады. Дәрежелік орташалардың басқа түрлері сияқты, геометриялық орташалардың да жай және салмақталған түрлері болады. Жай геометриялық орташаны мына формуламен есептейді:

$$\bar{x} = \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} x_i} = \sqrt[k]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k} \, ,$$

мұндағы k – дәреже көрсеткіші;

$\prod$ – көбейтінді белгісі.

Мысал. Мынадай мәліметтер берілген:

5.9-кесте.

Қазақстандағы көмір өндіру көрсеткіші

Жылдар	2006	2007	2008	2009	2010
Өндірілген көмір, мың тонна	96231	98384	111072	100854	110806

Осы мәліметтер бойынша орташа өсу қарқынын анықтау қажет.

Шешуі: Алдымен өсу коэффициенттерін мына формуламен анықтаймыз:

$$K_i = \frac{y_i}{y_{i-1}} \, ,$$

мұндағы y_i - көрсеткіштің есепті мерзімдегі мәні;

y_{i-1} - алдыңғы мерзімдегі көрсеткіш мәні.

Сонда $K_1 = \frac{98384}{96231} = 1{,}022$ (2007 ж.), $K_2 = \frac{111072}{98384} = 1.129$ (2008 ж.),

$\hat{E}_3 = \frac{100854}{111072} = 0{,}908$ (2009 ж.) $K_4 = \frac{110806}{100854} = 1{,}099$ (2010 ж.)

Енді өсу коэффициенттерінің орташасын анықтау үшін жай геометриялық орташа формуласын қолданамыз:

$$\bar{x} = \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} x_i} = \sqrt[4]{1{,}022 \cdot 1{,}129 \cdot 0{,}908 \cdot 1{,}099} = 1{,}036 \text{ немесе } 103{,}6\%.$$

Яғни 2004–2008 жылдар аралығында Қазақстанда көмір өндіру жылына орташа есеппен 3,6 пайызға өсіп отырды.

Геометриялық орташаның салмақталған түрі өте сирек қолданылады. Оны төмендегі формуламен анықтайды:

$$\bar{x} = \sqrt[\sum f]{\prod_{i=1}^{k} x_i^{f_i}} = \sqrt[\sum f]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{f_k}}$$

5.6. Құрылымдық орташа шамалар

Статистикада дәрежелік орташалармен қатар ***құрылымдық орташаларды*** да қолданады. Құрылымдық орташаларға ***мода*** және ***медиана*** жатады.

Мода деп жиынтықтағы ең жиі кездесетін вариантты айтады. Мысалы, отбасыларында ең жиі кездесетін бала саны, кәсіпорындағы ең жиі кездесетін жалақы мөлшері, студенттің ең жиі алатын бағасы мода болады. Статистикалық тәжірибеде моданы тұтынушылар сұранысын, табыс дифференциациясын зерттегенде жиі қолданады. Дискретті вариациялық қатарда ең үлкен жиілікке сәйкес келетін вариант мода болады, яғни мұндай қатарларда моданы есептемей-ақ, анықтамаға сәйкес табады.

Мысал. Мынадай таратпалы қатар берілген:

5.10-кесте

Отбасыларының мүше санына қарай бөлінуі

Отбасы мүшелерінің саны, адам	Отбасы саны
x	f
2	18
3	33
4	**42**
5	29
6	18
7	7
8	3
Барлығы	150

Осы қатардың модасын анықтау қажет.

Шешуі: Ол үшін ең алдымен жиіліктердің (f) ішінен ең үлкенін табамыз. Біздің мысалда ол 42-ге тең. Кестеден осы жиілікке сәйкес келетін белгі мәнінің 4-ке тең екенін аңғару қиын емес. Сонымен бұл мысалда мода 4-ке тең болады.

Медиана деп вариациялық қатардың ортасында орналасқан вариантты айтады. Медиана қатарды 2-ге бөледі. Өсу ретімен орналасқан тақ мүшелі қатардың тура ортасында орналасқан вариант сол қатардың медианасы болады. Мысалы, 5 жұмысшының әрқайсысының еңбек өтілі сәйкесінше 2, 5, 7, 8, 10 жыл болса, бұл қатардың медианасы 7 жылға тең болады.

Ал жұп мүшелі қатардағы медиананы есептеу үшін қатардың ортасындағы екі мүшенің арифметикалық ортасын анықтайды. Мысалы, еңбек өтілі сәйкесінше 2, 5, 7, 9, 10, 11 жылды құрайтын 6 жұмысшы туралы мәліметтер берілген делік. Бұл жағдайда медиананы былай есептейді:

$$Me = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{7+9}{2} = 8 \text{ жыл}.$$

Интервалды вариациялық қатарларда құрылымдық орташаларды есептеу үшін арнайы формулалар қолданылады. Мұндай қатарларда моданы мына формуламен есептейді:

$$Mo = x_{мо} + i_{мо} \cdot \frac{f_{мо} - f_{мо-1}}{f_{мо} - f_{мо-1} + f_{мо} - f_{мо+1}},$$

мұндағы $x_{мо}$ – мода интервалының төменгі шегі;

$i_{мо}$ – мода интервалының ұзындығы;

$f_{мо}$ – мода жиілігі;

$f_{мо-1}$ – мода жиілігіне дейінгі жиілік;

$f_{мо+1}$ – мода жиілігінен кейінгі жиілік.

Ал интервалды вариациялық қатардағы медиананы мына формуламен есептейді:

$$Me = x_{ме} + i_{ме} \cdot \frac{\frac{\sum f}{2} - S_{ме-1}}{f_{ме}},$$

мұндағы $x_{ме}$ – медиана интервалының төменгі шегі;

$i_{ме}$ – медиана интервалының ұзындығы;

$\sum f$ – жиіліктердің қосындысы;

$S_{ме-1}$ – медиана жиілігіне дейінгі жиіліктердің қосындысы;

$f_{ме}$ – медиана жиілігі.

Енді осы формулаларды пайдаланып, мода мен медиананы анықтауға мысал келтірейік.

Мысал. Кәсіпорын қызметкерлерінің айлық жалақы мөлшері бойынша бөлінуі туралы мынадай мәліметтер берілген:

5.11-кесте

Қызметкерлердің айлық жалақы мөлшері бойынша бөлінуі

Топ №	Айлық жалақы мөлшері, теңге	Қызметкерлер саны, адам	Жинақталған жиіліктер сомасы, адам
I	40000–50000	10	10
II	50000–60000	30	40
III	**60000–70000**	**70**	110
IV	70000–80000	60	170
V	80000–90000	25	195
VI	90000 және одан жоғары	5	200
Барлығы	-	200	-

Осы мәліметтер бойынша моданы, медиананы анықтау керек.

Шешуі: Алдымен модалық интервалды анықтаймыз. Анықтама бойынша мода ең жиі кездесетін вариант болғандықтан, жиіліктер қатарындағы ең үлкен мәнге, яғни $f = 70$-ке сәйкес келетін интервал модалық интервал болады.

$$Mo = 60000 + 10000 \times \frac{70 - 30}{(70 - 30) + (70 - 60)} = 68000\ теңге$$

Есептеу нәтижесі кәсіпорын қызметкерлерінің ішінде айлық жалақысының мөлшері 68000 теңгені құрайтын қызметкерлер жиі кездесетінін көрсетеді.

Енді медиананы анықтаймыз. Ол үшін алдымен медиана қай интервалда жатқанын білу керек. Анықтама бойынша медиана қатарды тең екі бөлікке бөлетіндіктен, жинақталған жиілігі жиіліктер сомасының жартысына (200:2=100) тең немесе одан артық болатын интервал медианалық интервал болады. Сондықтан біздің мысалда медиана 60000–70000 интервалында жатады.

$$Me = 60000 + 10000 \times \frac{\frac{200}{2} - 40}{70} = 68571\ \text{теңге}$$

Бұл мысалда медиана кәсіпорын қызметкерлерінің жартысының айлық жалақысының мөлшері 68571 теңгеге дейін, ал екінші жартысының жалақысы бұл шамадан жоғары екенін көрсетеді.

Мода, медиана, арифметикалық орташа шама көрсеткіштерінің ара қатысы зерттеліп отырған жиынтықта вариациялық белгінің қалай таралғанын сипаттайды. Егер $Mo < Me < \bar{x}$ болса, онда қатарда оң жақты, ал $\bar{x} < Me < Mo$ болғанда сол жақты асимметрия орын алады. Ал аталған көрсеткіштер бірдей болғанда ($\bar{x} = Me = Mo$), қатар симметриялы болады Асимметриялы үдерістерде таралу ортасын медиана дәлірек сипаттайды, себебі ол орташа шама мен моданың арасында орналасады. 5.10-кесте мәліметтері бойынша арифметикалық орташа шаманы есептеп, оны құрылымдық орташалармен салыстырайық.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_{if_i}}{\sum f_i} = \frac{45000 \times 10 + 55000 \times 30 + 65000 \times 70 + 75000 \times 60 + 85000 \times 9}{7 + 8 + 15 + 11 + 9}$$
$$= 80700\ \text{теңге}$$

Яғни, біз қарастырған мысалда қызметкерлердің айлық жалақы мөлшері бойынша таралуында оң жақты асимметрия байқалады.

5.7. Вариация көрсеткіштері

Орташа шамалар біртекті құбылыстардың жиынтығын вариациялық белгі бойынша сипаттайтын қорытынды көрсеткіш болғанымен, зерттелетін құбылыстар мен үдерістерді толық талдау үшін орташа шама туралы мәлімет әдетте жеткіліксіз болады. Кейде құрылымы жағынан бір-біріне ұқсамайтын жиынтықтардың орташа шамалары бірдей болады. Сондықтан құбылысты жан-жақты зерттеу үшін жиынтықтың жеке бірліктері мәндерінің вариациясын ескеру қажет.

Вариация деп белгілердің әр түрлі мәнді қабылдауын айтады. Вариация табиғаттағы, қоғамдағы барлық құбылыстарға тән және ол құбылыстар дамуының қажетті шарты болып саналады.

Вариация көрсеткіштері белгі варианттарының орташа шамадан ауытқуын көрсетеді. Вариация көрсеткіштері:

- ✓ орташа шамаларды толықтырады;
- ✓ жиынтықтың біртекті немесе әр текті екендігін анықтайды;
- ✓ белгі вариациясының шегін анықтайды;
- ✓ белгілер арасындағы өзара байланысты сипаттайды.

Вариация көрсеткіштерінің мынадай түрлері болады:

- вариация өрісі
- орташа сызықтық ауытқу
- дисперсия
- орташа квадраттық ауытқу
- вариация коэффициенті

Вариация өрісі – вариация көрсеткіштерінің ең қарапайым түрі. Бұл көрсеткіш қатардағы барлық варианттардың орташа шамадан ауытқуын сипаттамайды, ол тек белгінің ең үлкен және ең кіші мәндерінің айырмасын көрсетеді. Вариация өрісін төмендегі формуламен есептейді.

$$R = x_{\max} - x_{\min},$$

мұндағы R – вариация өрісі;

$x_{\max}$ – белгінің жоғарғы шегі;

$x_{\min}$ – белгінің төменгі шегі.

Ең жоғарғы және ең төменгі зейнетақы, жалақы , т.с.с. көрсеткіштердің айырмасын есептегенде вариация өрісін қолданады.

Орташа шамадан ауытқу деп белгі мәні мен орташа шаманың айырмасын айтады. Арифметикалық орташа шамалардың қасиеті бойынша:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right) = 0,$$

мұндағы x_i – белгі варианты;

$\bar{x}$ – орташа шама.

Сондықтан сызықтық ауытқулардың орташасын анықтау үшін ауытқулардың модулін есептейді. Орташа шамалар сияқты сызықтық ауытқулардың екі түрі болады:

- жай сызықтық ауытқу
- салмақталған сызықтық ауытқу

Топтастырылмаған мәліметтер үшін орташа сызықтық ауытқудың жай түрі анықталады:

$$\bar{l} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \bar{x}\right|}{n},$$

мұндағы $\bar{l}$ – орташа сызықтық ауытқу;

$|x_i - \bar{x}|$ – ауытқу модулі;

n – вариант саны.

Бұл формулаға сәйкес орташа сызықтық ауытқуды есептеу реттілігі төмендегідей болады:

1) белгі мәндері бойынша арифметикалық орташа шама $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ есептеледі;

2) әр варианттың орташа шамадан ауытқуы ($x_i - \bar{x}$) анықталады;

3) ауытқу модульдерінің қосындысы ($\sum|x_i - \bar{x}|$) есептеледі;

4) ауытқу модульдерінің қосындысы вариант санына бөлінеді $\left(\frac{\sum|x_i - \bar{x}|}{n}\right)$.

Енді осы көрсеткішті есептеуге мысал келтірейік.

Мысал. Екі жұмысшы тобындағы еңбек өнімділігі туралы мынадай мәліметтер берілген:

5.12-кесте

Жұмысшылардың еңбек өнімділігі

Жұмысшы №	Бір ауысымда шығарған өнім, дана	
	Бірінші топ	Екінші топ
1	50	80
2	80	90
3	100	100
4	120	110
5	150	120
Барлығы	500	500

Осы мәліметтер бойынша екі топтағы орташа еңбек өнімділігін, вариация өрісін, орташа сызықтық ауытқуды анықтау керек.

Шешуі:

1. Орташа еңбек өнімділігін жай арифметикалық орташа формуласымен есептейміз. Кесте мәліметтері орташа еңбек өнімділігі екі топта бірдей болатынын көрсетеді:

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \frac{500}{5} = 100 \text{ \textit{дана}}$$

2. Әр топтағы вариация өрісін анықтаймыз.

$$R_1 = x_{\max 1} - x_{\min 1} = 150 - 50 = 100 \text{ \textit{дана}}$$

$$R_2 = x_{\max 2} - x_{\min 2} = 120 - 80 = 40 \text{ \textit{дана}}$$

3. Әр топ үшін сызықтық ауытқудың орташасын есептейміз:

$$\bar{l}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_{i1} - \bar{x}_1|}{n} = \frac{|50-100| + |80-100| + |100-100| + |120-100| + |150-100|}{5} = 28\, дана$$

$$\bar{l}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_{i2} - \bar{x}_2|}{n} = \frac{|80-100| + |90-100| + |100-100| + |110-100| + |120-100|}{5} = 12\, дана$$

Есептеу нәтижелері еңбек өнімділігі бойынша бірінші топ екінші топпен салыстырғанда анағұрлым әр текті екендігін көрсетеді.

Топтастырылған мәліметтер үшін сызықтық ауытқудың салмақталған түрі есептеледі:

$$\bar{l} = \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}| \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i},$$

мұндағы – f_i вариант жиілігі.

Енді осы формула бойынша сызықтық ауытқудың салмақталған түрін есептеу алгоритмін көрсетейік:

1) берілген мәліметтер бойынша арифметикалық орташаның салмақталған түрі есептеледі $\left(\frac{\sum xf}{\sum f}\right)$;
2) әр варианттың орташа шамадан ауытқуының модулі $|x_i - \bar{x}|$ анықталады;
3) есептелген ауытқу модульдері вариант жиіліктеріне көбейтіледі ($|x_i - \bar{x}| \cdot f_i$);
4) салмақталған ауытқулардың қосындысын анықтайды $\left(\sum|x_i - \bar{x}| \cdot f_i\right)$;
5) салмақталған ауытқулардың қосындысын жиіліктер қосындысына бөледі $\left(\frac{\sum|x_i - \bar{x}| \cdot f_i}{\sum f_i}\right)$.

Топтастырылған мәліметтер үшін сызықтық ауытқудың салмақталған түрін анықтауға мысал келтірейік.

Мысал. Төменде келтірілген кестенің мәліметтері бойынша орташа сызықтық ауытқуды есептеңіздер.

5.13-кесте

Жұмысшылардың тарифтік разряд бойынша бөлінуі

Тарифтік разряд, x_i	Жұмысшылар саны, адам f_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert \cdot f_i$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i$
А	1	2	3	4	5
2	1	2	-2,5	2,5	6,25

3	2	6	-1,5	3,0	4,5
4	6	24	-0,5	3,0	1,5
5	8	40	0,5	4,0	2,0
6	3	18	1,5	4,5	6,75
Барлығы	20	90		17	21,0

Шешуі: Алдымен жұмысшылардың тарифтік разрядтарының орташа шамасын салмақталған арифметикалық орташа формуласы бойынша анықтаймыз. Орташаның алымын есептеу кестенің 2-бағанында ($x_i \cdot f_i$) көрсетілген.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{90}{20} = 4{,}5 \ \textit{разряд}$$

Кестенің 3, 4-бағандарында көрсетілген есептеулерді пайдаланып, сызықтық ауытқудың орташасын анықтаймыз.

$$\bar{l} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}| \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{17}{20} = 0{,}85 \ \textit{разряд}$$

Тәжірибе жүзінде сызықтық ауытқуды өндірістің ырғақтылығын, шикізат пен материалды жеткізудің бір қалыптылығын бағалау, т.б. үшін қолданады.

Дисперсия – ауытқулар квадратының орташасы. Дисперсияның да екі түрі болады:

- жай дисперсия
- салмақталған дисперсия

Жай дисперсияны топтастырылмаған мәліметтер үшін есептейді:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n},$$

мұндағы σ^2 – дисперсия;

$(x_i - \bar{x})^2$ – ауытқулардың квадраты.

Жоғарыда келтірілген 5.12-кесте мәліметтері бойынша дисперсияны анықтайық.

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_{i1} - \bar{x}_1)^2}{n} = \frac{(50-100)^2 + (80-100)^2 + (120-100)^2 + (150-100)^2}{5} =$$

$$= \frac{5800}{5} = 1160$$

$$\sigma_2{}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i2} - \bar{x}_2\right)^2}{n} = \frac{(80-100)^2 + (90-100)^2 + (110-100)^2 + (120-100)^2}{5} =$$

$$= \frac{1000}{5} = 200$$

Ал мәліметтер топтастырылып берілген жағдайда, дисперсияның салмақталған түрін анықтайды:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

Салмақталған дисперсияны мынадай реттілікпен есептейді:

1) берілген мәліметтер бойынша салмақталған арифметикалық орташаны $\left(\frac{\sum xf}{\sum f}\right)$ анықтайды;

2) әр варианттың орташа шамадан ауытқуын ($x_i - \bar{x}$) есептейді;

3) есептелген ауытқуларды квадраттайды ($\left(x_i - \bar{x}\right)^2$);

4) ауытқулар квадраттарын жиіліктерге көбейтеді ($\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \cdot f_i$);

5) есептелген көбейтінділерді қосады ($\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \cdot f_i$);

6) $\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \cdot f_i$ қосындысын жиіліктер қосындысына бөледі $\left(\frac{\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \cdot f_i}{\sum f_i}\right)$.

5.13-кестенің 5-бағанында дисперсияның салмақталған түрінің алымын есептеу алгоритмі көрсетілген. Енді сол есептеу нәтижелерін пайдаланып, дисперсияның мәнін анықтайық:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{21}{20} = 1{,}05$$

Дисперсияның өлшемі зерттелетін белгі өлшемінің квадратына сәйкес келетіндіктен, дисперсияны орташа шамамен тікелей салыстыруға болмайды. Ол үшін дисперсиядан квадраттық түбір табады. Осылай ***орташа квадраттық ауытқуды*** анықтайды.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

мұндағы σ – орташа квадраттық ауытқу.

Топтастырылмаған мәліметтер үшін орташа квадраттық ауытқудың жай түрі анықталады:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Салмақталған орташа квадраттық ауытқуды мына формуламен есептейді:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}.$$

Жоғарыда келтірілген 5.13-кесте мәліметтері бойынша орташа квадраттық ауытқу мынаған тең болады:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1{,}05} \approx 1{,}02 \text{ разряд}$$

Орташа квадраттық ауытқу – атаулы шама, оның өлшем бірлігі орташа шаманың өлшем бірлігімен бірдей болады. Орташа квадраттық ауытқу неғұрлым аз болса, орташа шаманың сенімділігі соғұрлым жоғары болады, яғни орташа шама қорытынды көрсеткіш ретінде зерттеліп отырған жиынтықты жақсы сипаттайды.

Орташа квадраттық ауытқудың арифметикалық орташа шамаға қатынасын ***вариация коэффициенті*** дейді.

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100,$$

мұндағы V – вариация коэффициенті.

Бұл көрсеткіш зерттелетін жиынтықтың біртекті немесе әр текті екендігін сипаттайды. Егер вариация коэффициенті $V \leq 33\%$ болса, онда берілген жиынтық біртекті болады. Мысал ретінде 5.12-кесте мәліметтерін пайдалансақ, онда:

$$V = \frac{1.02}{4.5} \cdot 100 = 22.7\%.$$

Бұл зерттелетін жиынтықтың біртекті екендігін көрсетеді.

5.8. Дисперсияның негізгі қасиеттері. Дисперсияны ықшамдалған тәсілмен есептеу

Дисперсияның есептеулерді жеңілдететін мынадай математикалық қасиеттері бар:

1. Егер белгінің барлық мәндерін тұрақты бір шамаға (A) кемітсе , одан дисперсия өзгермейді.

$$\sigma^2_{x-A} = \sigma^2$$

Дәлелдеу: $x - A = x'$ белгілеуін қолдансақ, өзгертілген (жаңа) варианттардан есептелген дисперсияны былай анықтаймыз:

$$\sigma^2_{x'} = \frac{\sum(x' - \bar{x}')^2}{n} = \frac{\sum\left(x - A - \left(\overline{x - A}\right)\right)^2}{n} = \frac{\sum(x - A - \bar{x} + A)^2}{n} = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n}, \text{ яғни}$$

$\sigma^2_{x'} = \sigma^2$. Бұл қасиет дисперсияны берілген белгі мәндері бойынша ғана емес, сонымен қатар олардың тұрақты бір А санына ауытқуы бойынша да есептеуге болатынын көрсетеді.

2. Егер белгінің барлық мәндерін тұрақты d шамасына бөлсе, онда дисперсия d^2 есе азаяды.

$$\sigma^2_{\frac{x}{d}} = \frac{\sigma^2}{d^2}$$

Дәлелдеу: $\frac{x}{d} = x'$ деп белгілесек, онда:

$$\sigma^2_{\frac{x}{d}} = \frac{\sum\left(\frac{x}{d} - \left(\overline{\frac{x}{d}}\right)\right)^2}{n} = \frac{\frac{1}{d^2}\sum(x-\bar{x})^2}{n} = \frac{1}{d^2}\sigma^2 .$$

Олай болса, дисперсияны есептеу үшін белгі мәндерін алдымен d есе азайтып алып, содан кейін дисперсияны формула бойынша есептеп, шыққан нәтижені d^2-қа көбейтуге болады.

3. Дисперсия белгі мәндері квадраттарының орташасы мен орташа шама квадратының айырмасына тең.

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 ,$$

мұндағы $\overline{x^2} = \frac{\sum x^2 f}{\sum f}$, $\bar{x}^2 = \left(\frac{\sum xf}{\sum f}\right)^2$

Дәлелдеу:

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x-\bar{x})^2 f}{\sum f} = \frac{\sum\left(x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2\right)f}{\sum f} = \frac{\sum x^2 f}{\sum f} - \frac{2\bar{x}\sum xf}{\sum f} + \frac{\bar{x}^2\sum f}{\sum f} =$$

$$= \overline{x^2} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

4. Белгі мәндерінің кез-келген тұрақты шамадан (A) ауытқуларының квадраттарының орташасы орташа шамадан есептелген ауытқулар квадратының орташасынан (дисперсиядан) үлкен болады:

$$\frac{\sum(x-A)^2 \cdot f}{\sum f} > \sigma^2$$

және бұл екі ауытқулар квадраттарының орташалары арасындағы байланысты мынадай тепе-теңдікпен көрсетуге болады:

$$\frac{\sum(x-A)^2 \cdot f}{\sum f} = \sigma^2 + (\bar{x} - A)^2$$

Дәлелдеу:

$$\frac{\sum(x-A)^2 \cdot f}{\sum f} = \frac{\sum\left(x^2 - 2Ax + A^2\right)\cdot f}{\sum f} = \frac{\sum x^2 f}{\sum f} - \frac{2A\sum xf}{\sum f} + \frac{A^2\sum f}{\sum f} =$$

$$= \overline{x^2} - 2A\bar{x} + A^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 + \bar{x}^2 - 2A\bar{x} + A^2 = \sigma^2 + (\bar{x} - A)^2 .$$

Енді 5.13-кесте мәліметтері бойынша дисперсияны жоғарыда көрсетілген 3-қасиетті пайдаланып анықтайық. Ол үшін алдымен $\overline{x^2}$ -ны есептейміз:

$$\overline{x^2} = \frac{\sum x^2 f}{\sum f} = \frac{4\cdot1+9\cdot2+16\cdot6+25\cdot8+36\cdot3}{20} = \frac{426}{20} = 21{,}3$$

Бұл мысалда орташа шама $\bar{x} = 4{,}5$ разряд болғанын ескеріп, дисперсияның мәнін табамыз.

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = 21{,}3 - 4{,}5^2 = 21{,}3 - 20{,}25 = 1{,}05.$$

Дисперсияның математикалық қасиеттерін ескере отырып, оны ықшамдалған тәсілмен былай анықтауға болады:

$$\sigma^2 = d^2\left(m_2 - m_1^2\right),$$

мұндағы d – интервал ұзындығы;

m_1 – бірінші дәрежелі момент,

$$m_1 = \frac{\sum\left(\frac{x-A}{d}\right)f}{\sum f}$$

m_2 – екінші дәрежелі момент,

$$m_2 = \frac{\sum\left(\frac{x-A}{d}\right)^2 f}{\sum f}.$$

Дисперсияны есептеудің ықшамдалған тәсілін ***моменттер тәсілі*** немесе ***шартты нөлден бастап есептеу тәсілі*** деп те атайды.

Мысал. Төмендегі кесте мәліметтері бойынша дисперсияны моменттер тәсілімен анықтаңыздар.

5.14-кесте

Жұмысшылардың еңбек өтілі

Еңбек өтілі, жыл	2,5-ке дейін	2,5–3,5	3,5–4,5	4,5–5,5	5,5–6,5
Жұмысшы саны, адам	1	2	6	8	3

Шешуі: Дисперсияны есептеу алгоритмін толық көрсету үшін мынадай кесте құрамыз (5.15-кесте)

5.15-кесте

Дисперсияны ықшамдалған тәсілмен есептеу

Еңбек өтілі, жыл x	Жұмысшылар саны, адам f	Интервал ортасы x	$x-A$ $A=4$	$\frac{x-A}{d}$ $d=1$	$\left(\frac{x-A}{d}\right)f$	$\left(\frac{x-A}{d}\right)^2$	$\left(\frac{x-A}{d}\right)^2 f$
А	1	2	3	4	5	6	7
2,5-ке дейін	1	2	-2	-2	-2	4	4
2,5–3,5	2	3	-1	-1	-2	1	2
3,5–4,5	6	4	0	0	0	0	0
4,5–5,5	8	5	1	1	8	1	8
5,5– 6,5	3	6	2	2	6	4	12
Барлығы	20	-	-	-	10	-	26

Шешуі: Бұл кестенің 5, 7-бағандарында бірінші және екінші дәрежелі моменттердің алымдарының есептелуі көрсетілген. Осы есептеу нәтижелерін пайдаланып, m_1, m_2-ні анықтаймыз.

$$m_1 = \frac{\sum\left(\frac{x-A}{d}\right)f}{\sum f} = \frac{10}{20} = 0{,}5; \qquad m_2 = \frac{\sum\left(\frac{x-A}{d}\right)^2 f}{\sum f} = \frac{26}{20} = 1{,}3.$$

Енді дисперсия формуласына осы мәндерді қоямыз:

$$\sigma^2 = d^2\left(m_2 - m_1^2\right) = 1\cdot\left(1{,}3 - 0{,}5^2\right) = 1{,}3 - 0{,}25 = 1{,}05.$$

Моменттер тәсілін бірдей интервалмен берілген вариациялық қатарларда қолданады.

5.9. Дисперсияларды қосу ережесі

Бірнеше топқа бөлінген статистикалық жиынтықтағы сандық көрсеткіштердің байланысын зерттеу үшін мынадай дисперсияларды есептейді:

- топтық (топішілік) дисперсия (σ_i^2)
- топаралық дисперсия (δ^2)
- жалпы дисперсия (σ^2)

Топтық дисперсия топтастыру негізі болған белгіден басқа факторлардың, яғни есепке алынбаған факторлардың әсерінен болған белгі вариациясын сипаттайды. Оны есептеу үшін алдымен әр топтың дисперсиясын анықтайды:

$$\sigma_i^2 = \frac{\sum(x-\bar{x}_i)^2\cdot f_i}{\sum f_i},$$

мұндағы σ_i^2 – i-топтың дисперсиясы;

x – топтағы белгі мәндері;

$\bar{x}_i$ – i-топтың орташа шамасы;

f_i – белгі жиіліктері.

Содан кейін топтық дисперсиялардың орташасын мына формуламен есептейді:

$$\bar{\sigma}_i^2 = \frac{\sum\sigma_i^2 n_i}{\sum n_i},$$

мұндағы n_i – i-топтағы бірліктер саны.

Топаралық дисперсия топтастыру негізі болып саналатын фактордың әсерінен болған вариацияны сипаттайды.

$$\delta^2 = \frac{\sum(\bar{x}_i - \bar{x})^2\cdot n_i}{\sum n_i},$$

мұндағы $\bar{x}_i$ – i-топтың орташа шамасы;

$\bar{x}$ – вариациялық белгінің жалпы орташа шамасы;

n_i – i-топтағы бірліктер саны.

Жалпы дисперсия барлық факторлардың әсерінен жиынтықтықта болған вариацияны көрсетеді.

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{\sum f_i}$$

Жоғарыда аталған дисперсиялар арасында мынадай байланыс бар:

$$\sigma^2 = \bar{\sigma}_i^{\,2} + \delta^2,$$

яғни жалпы дисперсия топтық дисперсиялардың орташасы мен топаралық дисперсияның қосындысына тең болады. Осы байланысты ***дисперсияларды қосу ережесі*** дейді.

Топаралық дисперсияны жалпы дисперсияға бөлу арқылы ***детерминация*** коэффициентін анықтайды

$$\eta^2 = \frac{\delta^2}{\sigma^2}.$$

Бұл көрсеткіш топтастыру негізі болып саналатын белгі әсерінен туындайтын вариацияның жалпы вариациядағы үлесін көрсетеді.

Детерминация коэффициентінің квадраттық түбірі ***эмпириялық корреляциялық қатынас*** деп аталады.

$$\eta = \sqrt{\frac{\delta^2}{\sigma^2}}\ .$$

Эмпириялық корреляциялық қатынас көрсеткіші факторлық және нәтижелік белгілер арасындағы тығыздықты бағалау үшін қолданылады. Оның абсолютті мәні 0 мен 1 аралығында өзгереді. Егер $\eta = 0$ болса, онда топтастыру белгісі нәтижелік белгіге әсер етпейді. $\eta = 1$ болған жағдайда топтастыру белгісі мен нәтижелік белгі арасында функционалдық байланыс болады, яғни нәтижелік белгіге тек топтастыру белгісі ғана әсер етеді. Енді дисперсияның жоғарыда аталған түрлерін есептеуге мысал келтірейік.

Мысал. Есепті мерзімде тұрғын үй рыногында жалпы ауданның 1 шаршы метрінің құны төмендегідей болды:

5.16-кесте

Тұрғын үй рыногындағы 1 шаршы метрдің құны

І топ		ІІ топ	
Жалпы ауданның 1 шаршы метрінің құны, доллар	Үй саны	Жалпы ауданның 1 шаршы метрінің құны, доллар	Үй саны
1350	1	780	1
1300	2	860	1
1250	3	900	3
1200	2	960	3
1150	2	1040	2
Барлығы	10	Барлығы	10

Осы мәліметтер бойынша топтық дисперсиялардың орташасын, топаралық дисперсияны, жалпы дисперсияны, детерминация коэффициентін, эмпириялық корреляциялық қатынасты анықтаңыздар.

Шешуі: Бірінші топтағы үйлер қала орталығына жақынырақ, ал екінші топтағы үйлер орталықтан әлдеқайда алыс орналасқан. Осы мәліметтер бойынша жалпы дисперсияны анықтау үшін алдымен жалпы ауданның 1 шаршы метрінің орташа құнын (жалпы орташаны) есептейміз:

$$\bar{x} = \frac{1350\cdot1+1300\cdot2+1250\cdot3+1200\cdot2+1150\cdot2+780\cdot1+860\cdot1+900\cdot3+960\cdot3+1040\cdot2}{20} =$$

$$= \frac{21700}{20} = 1085\ (\text{доллар}).$$

Енді жалпы дисперсияны анықтаймыз:

$$\sigma^2 = \frac{(1350-1085)^2\cdot1+(1300-1085)^2\cdot2+(1250-1085)^2\cdot3+(1200-1085)^2\cdot2+}{20}$$

$$\frac{+(1150-1085)^2\cdot2+(780-1085)^2\cdot1+(860-1085)^2\cdot1+(900-1085)^2\cdot3+(960-1085)^2\cdot3+}{20}$$

$$\frac{+(1040-1085)^2\cdot2}{20} = \frac{576500}{20} = 28825.$$

Осыдан кейін әр топ үшін орташа шама мен дисперсияны анықтаймыз.

I топтың орташа шамасы:

$$\bar{x}_I = \frac{1350\cdot1+1300\cdot2+1250\cdot3+1200\cdot2+1150\cdot2}{10} = \frac{12400}{10} = 1240\ (\text{доллар})$$

I топтың дисперсиясы:

$$\sigma_I^2 = \frac{(1350-1240)^2\cdot1+(1300-1240)^2\cdot2+(1250-1240)^2\cdot3+(1200-1240)^2\cdot2+}{10}$$

$$\frac{+(1150-1240)^2\cdot2}{10} = \frac{39000}{10} = 3900$$

II топтың орташа шамасы:

$$\bar{x}_{II} = \frac{780\cdot1+860\cdot1+900\cdot3+960\cdot3+1040\cdot2}{10} = \frac{9300}{10} = 930\ (\text{доллар})$$

II топтың дисперсиясы:

$$\sigma_{II}^2 = \frac{(780-930)^2\cdot1+(860-930)^2\cdot1+(900-930)^2\cdot3+(960-930)^2\cdot3+}{10}$$

$$\frac{+(1040-930)^2\cdot2}{10} = \frac{57000}{10} = 5700$$

Енді топтық дисперсияның орташасын мына формуламен анықтаймыз:

$$\bar{\sigma}_i^2 = \frac{\sum \sigma_i^{\ 2} n_i}{\sum n_i}$$

$$\bar{\sigma}_i^2 = \frac{(3900 \cdot 10 + 5700 \cdot 10)}{20} = 4800$$

Топаралық дисперсия былай есептеледі:

$$\delta^2 = \frac{(1240 - 1085)^2 \cdot 10 + (930 - 1085)^2 \cdot 10}{20} = \frac{480500}{20} = 24025.$$

Топаралық дисперсия бұл мысалда жалпы ауданның 1 шаршы метрінің құны үйлердің орталыққа жақын немесе алыс орналасуына байланысты қалай өзгеретінін көрсетеді, ал басқа факторларға байланысты болатын вариацияны топтық дисперсияның орташасы анықтайды. Дисперсияларды қосу ережесі бойынша бұл екі дисперсияның қосындысы жалпы дисперсияға тең болады:

$$\sigma^2 = \bar{\sigma}_i^2 + \delta^2 = 4800 + 24025 = 28825$$

Топаралық дисперсия мен жалпы дисперсия арқылы детерминация коэффициентін есептейміз:

$$\eta^2 = \frac{\delta^2}{\sigma^2} = \frac{24025}{28825} = 0{,}833 \quad (83{,}3\%),$$

Бұл тұрғын үй рыногында жалпы ауданның 1 шаршы метрінің құны өзгерісінің 83,3 пайызы сатылатын үйдің орталыққа қатысты қалай орналасқанына байланысты болатынын көрсетеді.

Енді эмпириялық корреляциялық қатынасты анықтаймыз:

$$\eta = \sqrt{\frac{\delta^2}{\sigma^2}} = \sqrt{\frac{24025}{28825}} = 0{,}913,$$

яғни, тұрғын үй құнына оның орналасқан жері айтарлықтай әсер етеді.

5.10. Альтернативті (балама) белгі дисперсиясы

Статистика ғылымы зерттейтін белгілердің ішінде тек екі қарама-қарсы вариантты қабылдайтын белгілер де кездеседі. Мысалы, стипендиат немесе стипендиат емес, ақаулы немесе ақаусыз өнім, ғылыми атағы бар ненмесе жоқ оқытушы, т.б. Осындай жиынтықтың белгілі бір бірліктерінде болатын, ал екінші бір бірліктерде болмайтын белгілерді ***альтернативті*** немесе ***балама*** белгі дейді. Барлық альтернативті белгілер тек «0» және «1» мәндерін қабылдайды. Атап айтқанда, зерттеу белгісі бар бірліктердің варианты 1-ге, ал зерттеу белгісі жоқ бірліктер варианты 0-ге тең болады. Зерттеу белгісі бар бірліктердің үлесін p, ал зерттеу белгісі жоқ бірліктердің үлесін q арқылы белгілесек, онда:

$$p + q = 1.$$

Альтернативті белгі дисперсиясы да орташа шама арқылы анықталатындықтан, орташа шаманы есептеу формуласын көрсетейік:

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{1 \cdot p + 0 \cdot q}{p + q} = p \quad \text{немесе} \quad \bar{x} = p,$$

яғни, альтернативті белгінің орташа шамасы осы белгінің үлесіне тең болады. Ал мұндай белгілердің дисперсиясы былай анықталады:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x-\bar{x})^2 f}{\sum f} = \frac{(1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot q}{p+q} = \frac{q^2 p + p^2 q}{p+q} = \frac{pq \cdot (q+p)}{p+q} = pq$$

немесе $\sigma^2 = pq$.

Мысалы, кәсіпорында жұмыс істейтін 200 адамның ішінде әйелдердің саны 120-ға тең болса, онда кәсіпорындағы әйелдер үлесі $p = \frac{120}{200} = 0.6$-ға, ал ерлердің үлесі $q = 1 - 0.6 = 0.4$-ға тең болады. Олай болса:

$$\sigma^2 = pq = 0,6 \cdot 0,4 = 0,24.$$

Альтернативті белгінің орташа квадраттық ауытқуы 0-ден 0,5-ке дейін өзгереді, Біздің мысалда бұл көрсеткіш $\sigma = \sqrt{pq} = \sqrt{0.24} \approx 0.49$ тең болады.

ҚОРЫТЫНДЫ

Орташа шамалар – статистикадағы негізгі көрсеткіштердің бірі. Біртекті мәліметтер бойынша есептелген орташа шамалар берілген жиынтықты сипаттайды. Орташа шаманы есептегенде кездейсоқ факторлар әсерінен болған белгі мәндерінің ауытқулары бірін-бірі жояды да , тек негізгі факторлар әсерінен болған өзгерістер есепке алынады. Орташа шамалар мынадай екі үлкен класқа бөлінеді:

- дәрежелік орташа шамалар;
- құрылымдық орташа шамалар.

Құрылымдық орташа шамаларға мода мен медиана жатады. Оларды вариациялық қатарларды сипаттау үшін қолданады. Дәрежелік орташа шамалардың мынадай түрлері болады:

- арифметикалық орташа шама;
- гармониялық (үйлесімді) орташа шама;
- квадраттық орташа шама;
- геометриялық орташа шама.

Дәрежелік орташа шамалар үшін орташалардың мажоранттық қасиеті орындалады, яғни:

$$\bar{x}_{гар} \le \bar{x}_{геом} \le \bar{x}_{ариф} \le \bar{x}_{квад}$$

Дәрежелік орташалар жай және салмақталған болып екіге бөлінеді. Орташа шамалардың жай түрі мәліметтер топтастырылмай, белгінің әр варианты жеке берілгенде, ал салмақталған түрі топтастырылған мәліметтер үшін қолданылады.

Орташа шамалардың ішінде ең көп тарағаны – арифметикалық орташа шама. Егер таратпалы вариациялық қатардың варианттары интервал түрінде берілсе, ондай қатардың орташа шамасын есептеу үшін ең алдымен интервал ортасын анықтайды, содан кейінгі есептеулер арифметикалық орташаның салмақталған түрінің формуласы бойынша жүргізіледі.