

7. Қайталанбайтын бақылаудың шекті қатесін былай есептейді:

$$\text{a) } \Delta_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$$

$$\text{б) } \Delta_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

$$\text{в) } \Delta_{\bar{x}} = t \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

$$\text{г) } \Delta_{\bar{x}} = t \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$$

8. Егер ішінара бақылауға алынған бірліктер санын 4 есе арттырса, онда қайталанатын кездейсоқ іріктеудің орташа қатесі:

- а) 4 есе артады
- б) 4 есе кемиді
- в) 2 есе артады
- г) 2 есе кемиді
- д) өзгермейді

9. Ішінара жиынтық көрсеткіштерінің негізгі жиынтық көрсеткіштерінен ауытқуын мына шамамен өлшейді:

- а) дисперсия
- б) орташа квадраттық ауытқу
- в) бақылау қатесі
- г) орташа сызықтық ауытқу

10. Ішінара бақылау қатесі екі есе азайса, бақылауға алынған бірліктер саны қалай өзгереді?

- а) 4 есе артады
- б) 4 есе кемиді
- в) 2 есе артады
- г) 2 есе кемиді
- д) өзгермейді

7-тарау. ДИНАМИКАЛЫҚ ҚАТАРЛАР

7.1. Динамикалық қатарлар туралы түсінік

Статистиканың негізгі міндеттерінің бірі – қоғамдық құбылыстар мен үдерістердің уақытқа байланысты өзгеруін зерттеу. Бұл міндет динамикалық қатарларды құру, оларды талдау арқылы жүзеге асырылады.

Динамикалық қатар деп статистикалық көрсеткіштердің уақыт бойынша орналасқан мәндерін айтады. Динамикалық қатарлар екі элементтен тұрады:

- қатар деңгейі
- уақыт көрсеткіші

Құбылыстың шамасын, мөлшерін сипаттайтын көрсеткіштің белгілі бір уақыттағы сандық мәнін **қатардың деңгейі** дейді. Уақыт көрсеткіші арқылы күн, ай, тоқсан, жыл сияқты уақыт бірліктері анықталады. Динамикалық қатарларды кесте түрінде былай көрсетуге болады:

7.1-кесте

Динамикалық қатар

t_1	t_2	...	t_{i-1}	t_i	t_{i+1}	...	t_n
y_1	y_2	...	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	...	y_n

мұндағы t_i – уақыт көрсеткіші;

y_i – қатар деңгейі.

Динамикалық қатарлардың түрін мынадай белгілер бойынша анықтайды:

1. Қатар деңгейінің қандай шама арқылы өрнектелгеніне байланысты динамикалық қатарларды былай жіктейді:

- абсолютті шамалардың динамикалық қатарлары;
- қатысты шамалардың динамикалық қатарлары;
- орташа шамалардың динамикалық қатарлары.

Осы аталған қатарлардың ішінде абсолютті шамалардың динамикалық қатарлары құбылыстардың дамуын мейілінше толық сипаттайды. Мысалы, жалпы шығарылған өнімнің, бөлшек тауар айналымының динамикасын абсолютті шамалар арқылы өрнектейді. 7.2-кестеде ҚР жалпы ұлттық табысының динамикасы көрсетілген.

7.2-кесте

ҚР жалпы ұлттық табысы

Көрсеткіш	2005	2006	2007	2008	2009
Жалпы ұлттық табыс, млрд. теңге	6877,5	9021,8	11261,9	13728,0	15115,7

Қатысты шамалардың динамикалық қатарлары арқылы белгілі бір көрсеткіштің өсу қарқынын, көрсеткіш үлесінің өзгерісін, құрылымдық өзгерістерді сипаттауға болады. Мысалы, жан басына шаққандағы жалпы шығарылған өнім динамикасын, тауар айналымы құрылымындағы динамикалық өзгерістерді талдау үшін қатысты шамалардың динамикалық қатарлары қарастырылады. Төменде келтірілген 7.3-кестеде ҚР жалпы ішкі өнімінің құрылымы ақырғы пайдалану әдісі бойынша есептелген.

7.3-кесте

ҚР жалпы ішкі өнімінің құрылымы, %

Көрсеткіш	2005	2006	2007	2008	2009
Ақырғы тұтыну шығындары	61,1	55,9	56,1	53,7	59,0
Жалпы қорланым	30,1	33,4	37,2	26,2	32,8
Таза экспорт	8,8	10,7	6,7	20,1	8,2
Барлығы	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

Орташа шамалардың динамикалық қатарлары құбылыс деңгейінің өзгерісін көрсету үшін қолданылады. Мұндай қатарлардың мысалы ретінде халықтың жылдық орташа санының, экономика салаларындағы орташа жалақының динамикасын келтіруге болады (7.4-кесте).

7.4-кесте

Қазақстандағы орташа айлық атаулы жалақы динамикасы

	2006	2007	2008	2009	2010
Орташа айлық атаулы жалақы, теңге	40790	52479	60734	67333	77482

2. Уақыт көрсеткіші бойынша динамикалық қатарлар екіге бөлінеді:

- мезеттік (мезгілдік)
- интервалды

Мезеттік қатарда қатар деңгейі құбылысты белгілі бір уақыт мезетіне (мысалы, айдың, тоқсанның, жылдың басындағы мәліметтер) байланысты сипаттайды. Төменде берілген Қазақстан халқының саны туралы мәліметтер мезеттік динамикалық қатардың мысалы болады.

7.5-кесте

Қазақстан Республикасы халқының саны

(мың адам)

Көрсеткіш	2007	2008	2009	2010	2011
Халықтың саны, жыл басына	15396,9	15571,5	15982,3	16204,6	16441,9

Интервалды динамикалық қатарда қатар деңгейі құбылысты белгілі бір уақыт аралығына (айлар, жылдар) байланысты көрсетеді (7.6-кесте).

7.6-кесте

Қазақстан Республикасының жалпы ішкі өнімінің динамикасы

Көрсеткіш	2005	2006	2007	2008	2009
Жалпы ішкі өнім, млрд. теңге	7590,6	10213,7	12849,8	16052,9	17007,6

3. Даталар немесе интервалдар аралығына байланысты динамикалық қатарлар **толық** және **орта** болып бөлінеді. Толық динамикалық қатарларда уақыт мезеті немесе уақыт аралығы бірдей интервалмен беріледі (7.7-кесте).

7.7-кесте

Қазақстандағы экономикалық тұрғыдан белсенді халық динамикасы

Көрсеткіш	2006	2007	2008	2009	2010
Экономикалық тұрғыдан белсенді халық, мың адам	8028,9	8228,3	8415,0	8457,9	8610,7

Ал орта қатарларда бірдей интервал сақталмайды (7.8-кесте).

7.8-кесте

ҚР жалпы ішкі өнімінің нақты көлем индексі

Көрсеткіш	1998	1999	2001	2005	2007	2010
ЖІӨ-нің нақты көлем индексі, %	98,1	102,7	113,5	109,7	108,9	107,3

Динамикалық қатарлар мынадай талаптарға сай құрылуы қажет:

- дамуды кезеңдерге бөлу, яғни зерттелетін құбылысты уақыт бойынша біртекті кезеңдерге бөлу. Мұндай бөлу әр кезең көрсеткішінің даму заңдылығын айқындауға мүмкіндік береді.
- қатар деңгейлерінің салыстырмалы болуын қамтамасыз ету. Бұл талап бойынша қатар деңгейін анықтайтын көрсеткіштерді есептеу үшін бірдей әдіс, бірдей өлшем бірліктері, бірдей аумақтық шекаралар қолдануы тиіс. Сол сияқты әр деңгейдегі бақылау объектілері де бірдей болуы қажет.
- қатар деңгейлерінің хронологиялық тәртіппен жүйелі түрде анықтау, яғни уақыт интервалының шамасы зерттелетін құбылыстың даму қарқындылығына сай анықталуы керек.

Статистикада динамикалық қатарларды мынадай міндеттерді шешу үшін қолданады.

- құбылыстың әр түрлі уақыттағы деңгейін сипаттайтын көрсеткіштерді анықтау;
- құбылыстың уақытқа байланысты өзгеру қарқындылығын сипаттайтын көрсеткіштерді анықтау;
- құбылыстың даму үрдісін айқындау;
- құбылыстың кезеңдік, маусымдық ауытқуларын зерттеу;
- құбылыс дамуына болжам жасау.

Осы міндеттерді шешу үшін алдымен динамикалық қатардың көрсеткіштер жүйесі анықталады.

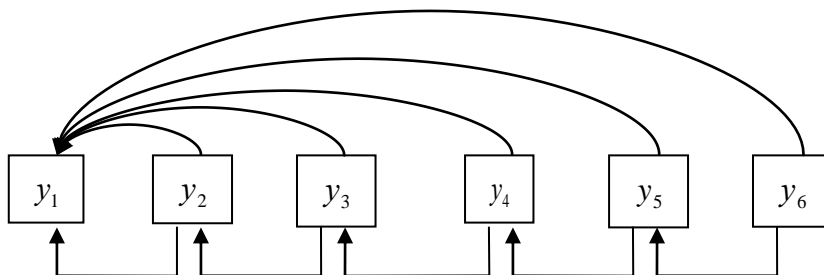
7.2. Динамикалық қатар көрсеткіштері

Құбылыстардың динамикасын зерттеп, талдау үшін динамикалық қатарларлардың мынадай негізгі 4 көрсеткішін есептейді:

- абсолютті өсім
- өсу қарқыны
- өсім қарқыны
- өсім қарқынының 1%-ның абсолютті мәні

Бұл көрсеткіштерді есептеу динамикалық қатар деңгейлерін бір-бірімен салыстыруға негізделген. Жоғарыда аталған динамика көрсеткіштерінің алғашқы үшеуін базалық және тізбекті әдіспен анықтайды. Салыстыру негізі базалық әдісті қолданғанда тұрақты, ал тізбекті әдісте өзгермелі болады (7.1-сурет).

Базалық тәсіл



Тізбекті тәсіл

7.1-сурет. Динамикалық қатар көрсеткіштерін базалық және тізбекті әдіспен есептеу үлгісі

Абсолютті өсім белгілі бір уақыт аралығында қатар деңгейлерінің қанша бірлікке өскенін немесе кемігенін көрсетеді. Бұл көрсеткішті базалық әдіс бойынша былай есептейді:

$$\Delta_{\sigma} = y_i - y_1, \quad i = \overline{2, n} \quad (7.1)$$

мұндағы Δ_{σ} – базалық абсолютті өсім;

y_i – көрсеткіштің ағымдағы мерзімдегі мәні;

y_1 – көрсеткіштің базалық мерзімдегі мәні.

Базалық әдіспен есептелген абсолютті өсім қарастырып отырған деңгейдің базалық (бастапқы) деңгеймен салыстырғанда қалай өзгергенін көрсетеді.

Тізбекті әдіспен абсолютті өсімді мына формуламен анықтайды:

$$\Delta_T = y_i - y_{i-1}, \quad i = \overline{2, n} \quad (7.2)$$

мұндағы Δ_T – тізбекті абсолютті өсім;

y_{i-1} – ағымдағы мерзім алдындағы мерзімдегі көрсеткіштің деңгейі.

Базалық және тізбекті әдіспен есептелген абсолютті өсімдердің арасында мынадай байланыс болады:

$$\sum \Delta_T = y_n - y_1, \quad (7.3)$$

яғни, тізбекті абсолютті өсімдердің қосындысы қатардың соңғы деңгейінің базалық абсолютті өсіміне тең болады. Абсолютті өсім таңбасы оң да, теріс те болуы мүмкін.

Өсу қарқыны қатар деңгейлерінің өзгеру қарқындылығын сипаттайды. Бұл көрсеткіш салыстырылатын деңгейдің базалық деңгейден неше есе артық екенін немесе салыстырылатын деңгей базалық деңгейдің неше пайызын құрайтынын көрсетеді. Өсу қарқыны коэффициент немесе пайызбен өлшенеді. Деңгейлерді салыстыру нәтижесін коэффициент түрінде анықтағанда өзгеру қарқындылығын **өсу коэффициенті** дейді.

Өсу қарқынын (өсу коэффициентін) абсолютті өсім сияқты базалық және тізбекті әдіспен есептейді. Базалық өсу коэффициентін анықтау үшін ағымдағы мерзімдегі деңгейді базалық мерзім деңгейіне бөледі:

$$K_y^{\bar{o}} = \frac{y_i}{y_1}, \quad i = \overline{2, n} \quad (7.4)$$

мұндағы $K_y^{\bar{o}}$ – базалық өсу коэффициенті.

Ал өсу қарқынын базалық әдіспен былай анықтайды:

$$T_y^{\bar{o}} = \frac{y_i}{y_1} \cdot 100, \quad i = \overline{2, n} \quad (7.5)$$

мұндағы $T_y^{\bar{o}}$ – өсу қарқыны.

Тізбекті әдіспен өсу коэффициентін анықтау үшін ағымдағы мерзімдегі деңгейді алдыңғы мерзім деңгейіне бөледі:

$$K_y^T = \frac{y_i}{y_{i-1}}, \quad i = \overline{2, n} \quad (7.6)$$

мұндағы K_y^T – тізбекті өсу коэффициенті.

Өсу қарқыны да осылай анықталады.

$$T_y^T = \frac{y_i}{y_{i-1}} \cdot 100, \quad i = \overline{2, n} \quad (7.7)$$

мұндағы T_y^T тізбекті өсу қарқыны.

Базалық және тізбекті әдіспен есептелген өсу қарқындарының арасындағы өзара байланысты мынадай формуламен көрсетуге болады:

$$K_1^T \cdot K_2^T \cdot K_3^T \dots \cdot K_m^T = \frac{y_n}{y_1}, \quad (7.8)$$

яғни, тізбекті әдіспен анықталған өсу коэффициенттерінің көбейтіндісі сол мерзімдегі базалық әдіспен есептелген өсу коэффициентіне тең.

Өсу қарқынының мәні әрқашан оң сан болады. Егер өсу қарқыны 100%-ге тең болса, бұл деңгей мәні өзгермегенін көрсетеді. Егер өсу қарқыны 100 пайыздан артық болса, ол қатар деңгейінің жоғарлағанын, ал 100 пайыздан кем болса, қатар деңгейінің төмендегенін көрсетеді.

Өсім қарқыны деп абсолютті өсімнің базалық деңгейге немесе алдыңғы мерзім деңгейіне қатынасын айтады. Бұл көрсеткіш салыстырылатын деңгейдің базалық деңгеймен салыстырғанда неше пайызға өскенін немесе кемігенін білдіреді. Егер өсу қарқыны әрқашан тек оң сан болса, өсім қарқыны оң, теріс, нөлге тең болуы мүмкін.

Базалық әдіспен өсім қарқынын былай анықтайды :

$$T_{\Delta y}^{\bar{o}} = \frac{\Delta_{\bar{o}}}{y_1} \cdot 100, \quad (7.9)$$

мұндағы $T_{\Delta y}^{\bar{o}}$ – базалық әдіспен есептелген өсім қарқыны;

$\Delta_{\bar{o}}$ – базалық абсолютті өсім;

Ал тізбекті әдісті қолданғанда бұл көрсеткішті мына формуламен есептейді:

$$T_{\Delta y}^T = \frac{\Delta_T}{y_{i-1}} \cdot 100, \quad (7.10)$$

мұндағы $T_{\Delta y}^T$ – тізбекті әдіспен есептелген өсім қарқыны;

Δ_T – тізбекті абсолютті өсім;

Өсім қарқынын есептейтін формулаларды түрлендіру арқылы өсу қарқыны мен өсім қарқынының арасындағы байланысты көрсететін мынадай формуланы қорытып шығаруға болады:

$$T_{\Delta y} = T_y - 100, \quad (7.11)$$

яғни, өсім қарқыны өсу қарқынынан 100 пайызды шегергеннен кейінгі қалдыққа тең.

Өсім қарқынының 1 пайызының абсолютті мәні тізбекті тәсілмен есептелген абсолютті өсімнің өсім қарқынына қатынасын көрсетеді.

$$A = \frac{\Delta_T}{T_{\Delta y}^T}, \quad (7.12)$$

мұндағы A – өсім қарқынының 1 пайызының абсолютті мәні.

Өсім қарқынының 1 пайызының абсолютті мәнін өсім қарқынын бағалау үшін қолданады. Бұл көрсеткіш өсім қарқынының 1 пайызына қандай абсолютті мән сәйкес келетінін білдіреді.

Математикалық түрлендірулер жасау арқылы бұл формуланы да өзгертіп, мынадай түрге келтіруге болады:

$$A = \frac{y_{i-1}}{100}. \quad (7.13)$$

Динамикалық қатардың негізгі көрсеткіштерін есептеу формулалары қолдануға тиімді болу үшін жинақталып, 7.9-кестеде көрсетілген.

7.9-кесте

Динамикалық қатардың негізгі көрсеткіштерін есептеу формулалары

Көрсеткіш	Базалық әдіс	Тізбекті әдіс
Абсолютті өсім	$\Delta_{\sigma} = y_i - y_1$	$\Delta_T = y_i - y_{i-1}$
Өсу коэффициенті	$K_y^{\sigma} = \frac{y_i}{y_1}$	$K_y^T = \frac{y_i}{y_{i-1}}$
Өсу қарқыны	$T_y^{\sigma} = \frac{y_i}{y_1} \cdot 100$	$T_y^T = \frac{y_i}{y_{i-1}} \cdot 100$
Өсім қарқыны	$T_{\Delta y}^{\sigma} = \frac{\Delta_{\sigma}}{y_1} \cdot 100$ немесе $T_{\Delta y}^{\sigma} = T_y^{\sigma} - 100$	$T_{\Delta y}^T = \frac{\Delta_T}{y_{i-1}} \cdot 100$ немесе $T_{\Delta y}^T = T_y^T - 100$
Өсім қарқынының 1 пайызының абсолютті		$A = \frac{\Delta_T}{T_{\Delta y}^T}$ немесе

мәні		$A = \frac{y_{i-1}}{100}$
------	--	---------------------------

Енді осы көрсеткіштерді есептеуге мысал келтірейік.

Мысал. Жұмыс істеп тұрған шағын кәсіпорындар саны туралы мынадай мәліметтер берілген:

7.10-кесте

Қазақстандағы шағын кәсіпорындар саны

жыл соңында

Көрсеткіш	2003	2004	2005	2006	2007
Шағын кәсіпорындар саны, бірлік	68708	69207	74379	94824	105270

Осы мәліметтер бойынша динамикалық қатардың негізгі көрсеткіштерін анықтау керек.

Шешуі:

1. Алдымен абсолютті өсімді екі әдіспен есептейміз.

Базалық әдіс:

$$\Delta_{\sigma}^{04} = 69207 - 68708 = 499 \text{ бірлік}$$

$$\Delta_{\sigma}^{05} = 74379 - 68708 = 5671 \text{ бірлік}$$

$$\Delta_{\sigma}^{06} = 94824 - 68708 = 26116 \text{ бірлік}$$

$$\Delta_{\sigma}^{07} = 105270 - 68708 = 36562 \text{ бірлік}$$

Тізбекті әдіс:

$$\Delta_T^{04} = 69207 - 68708 = 499 \text{ бірлік}$$

$$\Delta_T^{05} = 74379 - 69207 = 5172 \text{ бірлік}$$

$$\Delta_T^{06} = 94824 - 74379 = 20445 \text{ бірлік}$$

$$\Delta_T^{07} = 105270 - 94824 = 10446 \text{ бірлік}$$

Тізбекті әдіспен есептелген абсолютті өсімдердің қосындысы бұл мысалда мынаған тең: $\sum \Delta_T = 499 + 5172 + 20445 + 10446 = 36562 \text{ бірлік}$.

Яғни (7.3) формуладағы тепе-теңдік сақталады.

2. Енді өсу қарқынын анықтаймыз.

Базалық әдіс:

$$T_{\sigma}^{04} = \frac{69207}{68708} \cdot 100 = 100,7\%$$

$$T_{\sigma}^{05} = \frac{74379}{68708} \cdot 100 = 108,3\%$$

$$T_{\sigma}^{06} = \frac{94824}{68708} \cdot 100 = 138,0\%$$

$$T_{\sigma}^{07} = \frac{105270}{68708} \cdot 100 = 153,2\%$$

Тізбекті әдіс:

$$T_{\sigma}^{04} = \frac{69207}{68708} \cdot 100 = 100,7\%$$

$$T_{\sigma}^{05} = \frac{74379}{69207} \cdot 100 = 107,5\%$$

$$T_{\sigma}^{06} = \frac{94824}{74379} \cdot 100 = 127,5\%$$

$$T_{\sigma}^{07} = \frac{105270}{94824} \cdot 100 = 111,0\%$$

Тізбекті әдіспен есептелген өсу коэффициенттерінің көбейтіндісі мынаған тең: $K_1^T \cdot K_2^T \cdot K_3^T \cdot K_4^T = 1,007 \cdot 1,075 \cdot 1,275 \cdot 1,110 = 1,532$. Бұл біздің мысалда тізбекті өсу коэффициенттерінің көбейтіндісі базалық әдіспен есептелген 2007 жылғы өсу коэффициентіне тең екенін көрсетеді.

3. Өсім қарқынын (7.11) формуласымен есептейміз.

Базалық әдіс:

$$T_{\Delta y}^{04} = 100,7 - 100 = 0,7\%$$

$$T_{\Delta y}^{05} = 108,3 - 100 = 8,3\%$$

$$T_{\Delta y}^{06} = 138,0 - 100 = 38\%$$

Тізбекті әдіс:

$$T_{\Delta y}^{04} = 100,7 - 100 = 0,7\%$$

$$T_{\Delta y}^{05} = 107,5 - 100 = 7,5\%$$

$$T_{\Delta y}^{06} = 127,5 - 100 = 27,5\%$$

$$T_{\Delta y}^{07} = 153,2 - 100 = 53,2\%$$

$$T_{\Delta y}^{07} = 111,0 - 100 = 11,0\%$$

4. Өсім қарқынының 1 пайызының абсолютті мәнін (7.13) формуланы пайдаланып, анықтаймыз.

$$A_{04} = \frac{68708}{100} \approx 687 \text{ бірлік}$$

$$A_{06} = \frac{74379}{100} \approx 744 \text{ бірлік}$$

$$A_{05} = \frac{69207}{100} \approx 692 \text{ бірлік}$$

$$A_{07} = \frac{94824}{100} \approx 948 \text{ бірлік}$$

Жоғарыдағы есептеулер нәтижесін мынадай кестемен көрсетуге болады:
7.11-кесте

Қазақстандағы шағын кәсіпорындар санының динамикасы

Жыл дар	Шағын кәсіпоры ндар саны, бірлік	Абсолютті өсім, бірлік		Өсу қарқыны, %		Өсім қарқыны, %		Өсім қарқыны ның 1%- нің абс. мәні
		база лық	тізбек ті	база лық	тізбек ті	база лық	тізбек ті	
А	1	2	3	4	5	6	7	8
2003	68708	-	-	100,0	-	0,0	-	-
2004	69207	499	499	100,7	100,7	0,7	0,7	687
2005	74379	5671	5172	108,3	107,5	8,3	7,5	692
2006	94824	26116	20445	138,0	127,5	38,0	27,5	744
2007	105270	36562	10446	153,2	111,0	53,2	11,0	948

Динамикалық қатарлардың деңгейлері бойынша анықталатын көрсеткіштер уақытқа байланысты өзгеріп отырады. Сондықтан қоғамдық құбылыстар динамикасын толық талдау үшін қатардың негізгі көрсеткіштерімен қоса оның орташа көрсеткіштерін де анықтайды.

Динамикалық қатарлардың мынадай орташа көрсеткіштері болады:

- қатардың орташа деңгейі (\bar{y})
- орташа абсолютті өсім ($\bar{\Delta}$)
- орташа өсу қарқыны ($\bar{\delta}_o$)
- орташа өсім қарқыны ($\bar{\delta}_{\Delta o}$)

Динамикалық қатардың орташа деңгейін есептеу қатардың түріне байланысты болады. *Толық интервалды* қатардың орташа деңгейі жай арифметикалық орташа формуласымен есептелінеді.

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n}, \quad (7.14)$$

мұндағы n – деңгей саны.

Мысал. Қазақстанда өндірілген мыс кені туралы мынадай мәліметтер берілген (7.12-кесте):

7.12-кесте

Қазақстанда өндірілген мыс кені

Көрсеткіш	2006	2007	2008	2009	2010
Мыс кені, мың тонна	34082	31266	32566	30594	31710

Осы мәліметтер бойынша 2006–2010 жылдар аралығында жылына орташа есеппен өндірілген мыс рудасының мөлшерін анықтау керек.

Шешуі: Берілген қатар толық интервалды қатар болғандықтан, қатардың орташа деңгейін (7.14) формула бойынша есептейміз:

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{34082 + 31266 + 32566 + 30594 + 31710}{5} = 32043,6 \text{ мың тонна,}$$

яғни, 2006–2010 жылдар аралығында Қазақстанда жылына орташа есеппен 32043,6 мың тонна мыс кені өндірілді.

Толық мезеттік қатардың орташа деңгейі хронологиялық орташа формуласымен анықталады.:

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n}{n-1}. \quad (7.15)$$

Мысалы, 7.5-кесте мәліметтері бойынша 2007–2010 жылдар аралығында Қазақстан халқының жылдық орташа санын анықтау үшін (7.15) формуланы қолданады:

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \times 15396,9 + 15571,5 + 15982,3 + 16204,6 + \frac{1}{2} \times 16.441,9}{5-1} = 15919,5 \text{ мың адам}$$

Орта мезеттік қатарда қатар деңгейінде өзгеріс болған даталар дәл көрсетілсе, онда қатардың орташа деңгейі салмақталған арифметикалық орташа формуласымен анықталады:

$$\bar{y} = \frac{\sum y \cdot t}{\sum t}, \quad (7.16)$$

мұндағы t – динамикалық қатардың бір деңгейінің өзгермей тұрған уақыты.

Мысал. Кәсіпорын қызметкерлерінің тізімдік санында наурыз айында мынадай өзгерістер болды (7.13-кесте):

7.13-кесте

Кәсіпорын қызметкерлерінің саны

Наурыз айындағы күнтізбелік кезеңдер	Қызметкерлер саны, адам	Кезең ұзақтығы, күн
A	y	t
1–4	250	4
5–11	251	7
12–25	249	14
25–31	246	6
Барлығы	-	31

Осы мәліметтер бойынша кәсіпорында наурыз айында орташа есеппен қанша адам жұмыс істегенін анықтау керек.

Шешуі: Берілген мезеттік динамикалық қатарда кезеңдер бірдей интервалмен анықталмағандықтан, қатардың орташа деңгейін (7.16) формуланы пайдаланып есептейміз:

$$\bar{y} = \frac{\sum y \cdot t}{\sum t} = \frac{250 \cdot 4 + 251 \cdot 7 + 249 \cdot 14 + 246 \cdot 6}{4 + 7 + 14 + 6} = \frac{7719}{31} = 249 \text{ адам.}$$

Бұл кәсіпорын қызметкерлерінің тізімдік орташа саны наурыз айында 249 адамға тең болғанын көрсетеді.

Егер орта мезеттік қатарларда қатар деңгейіндегі өзгерістер нақты (дәл) көрсетілмесе, онда қатардың орташа деңгейін анықтау үшін салмақталған хронологиялық орташа формуласын қолданған жөн:

$$\bar{y} = \frac{(y_1 + y_2) \cdot t_1 + (y_2 + y_3) \cdot t_2 + \dots + (y_{n-1} + y_n) \cdot t_{n-1}}{2 \cdot (t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1})} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (y_i + y_{i+1}) \cdot t_i}{2 \sum_{i=1}^{n-1} t_i}, \quad (7.17)$$

мұндағы t – көршілес екі деңгей аралығындағы уақыт интервалының ұзақтығы.

Мысал. Кәсіпорын қызметкерлерінің тізімдік саны 2010 жылы төмендегідей болды (адам):

1/І	1/ІІІ	1/VI	1/ІХ	1/І - 2011ж
300	322	336	322	312

Осы мәліметтер бойынша кәсіпорын қызметкерлерінің жылдық орташа тізімдік санын анықтау керек.

Шешуі: Орташа шаманы (8.17) формула бойынша анықтаймыз:

$$\bar{y} = \frac{(300 + 322) \cdot 2 + (322 + 336) \cdot 3 + (336 + 322) \cdot 3 + (322 + 312) \cdot 4}{2 \cdot (2 + 3 + 3 + 4)} = \frac{7728}{24} = 322 \text{ адам}$$

Орта интервалды қатардың орташа деңгейі (7.16) формула бойынша анықталады.

Орташа абсолютті өсімді былай есептейді:

$$\bar{\Delta} = \frac{\sum \Delta_T}{m},$$

мұндағы $\bar{\Delta}$ – орташа абсолютті өсім;

$\sum \Delta_T$ – тізбекті әдіспен есептелген абсолютті өсімдердің қосындысы;

m – өсім саны.

Яғни, абсолютті өсімдердің орташасын анықтау үшін тізбекті әдіспен есептелген абсолютті өсімдерді қосып, өсім санына (m) бөледі. Осы көрсеткішті базалық және тізбекті әдіспен есептелген абсолютті өсімдердің арасындағы байланысты көрсететін (8.3) формуланы пайдаланып, былай да есептеуге болады:

$$\bar{\Delta} = \frac{y_n - y_1}{n - 1}.$$

Мысал. 7.11-кесте мәліметтері бойынша орташа абсолютті өсімді анықтау қажет.

Шешуі: Орташа абсолютті өсімді тізбекті тәсілмен анықталған абсолютті өсімдер арқылы есептеуге болады:

$$\bar{\Delta} = \frac{\sum \Delta_T}{m} = \frac{499 + 5172 + 20445 + 10446}{4} = \frac{36562}{4} \approx 9140 \text{ бірлік}$$

Осы көрсеткішті $\bar{\Delta} = \frac{y_n - y_1}{n - 1}$ формуласымен де анықтауға болады:

$$\bar{\Delta} = \frac{105270 - 68708}{4} \approx 9140 \text{ бірлік}$$

Бұл 2003–2007 жылдар аралығында Қазақстанда шағын кәсіпорындар саны жылына орташа есеппен 9140 бірлікке артып отырғанын көрсетеді.

Орташа өсу қарқынын анықтағанда геометриялық орташа формуласы қолданылады:

$$\bar{T}_y = \sqrt[m]{K_{y1} \cdot K_{y2} \cdot \dots \cdot K_{ym}} \cdot 100,$$

мұндағы \bar{T}_y – орташа өсу қарқыны;

$K_{y1}, K_{y2}, \dots, K_{ym}$ – тізбекті әдіспен есептелген өсу коэффициенттері;

m – дәреже көрсеткіші.

Базалық және тізбекті әдістермен есептелген өсу қарқындарының арасындағы байланыс бойынша:

$$K_{y1} \cdot K_{y2} \cdot \dots \cdot K_{ym} = \frac{y_n}{y_1},$$

сондықтан орташа өсу қарқынын мына формуламен де есептеуге болады:

$$\bar{T}_y = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} \cdot 100$$

Мысал. 7.11-кесте мәліметтері бойынша орташа өсу қарқынын есептейік.

Шешуі:

$$\bar{T}_y = \sqrt[4]{1,007 \cdot 1,075 \cdot 1,275 \cdot 1,11} \cdot 100 \approx 111,3\%$$

немесе:

$$\bar{T}_y = \sqrt[4]{\frac{105270}{68708}} \cdot 100 \approx 111,3\%,$$

яғни, 2003–2007 жылдар аралығында Қазақстанда шағын кәсіпорындар саны жылына орташа есеппен алғанда 1,113 есеге артып отырған.

Орташа өсім қарқынын есептеу үшін алдымен орташа өсу қарқынын анықтап алады, содан кейін одан 100 пайызды шегереді.

$$\bar{T}_{\Delta y} = \bar{T}_y - 100,$$

мұндағы $\bar{T}_{\Delta y}$ – орташа өсім қарқыны;

\bar{T}_y – орташа өсу қарқыны.

Мысал. 7.11-кесте мәліметтері бойынша орташа өсім қарқынын анықтау қажет.

Шешуі:

$$\bar{T}_{\Delta y} = \bar{T}_y - 100 = 111,3 - 100 = 11,3\%.$$

Бұл 2003–2007 жылдар аралығында Қазақстанда шағын кәсіпорындар саны жыл сайын орташа есеппен 11,3 пайызға көбейіп отырғанын көрсетеді.

Динамикалық қатардың орташа көрсеткіштерін есептеу формулалары жинақталып, 7.14-кестеде көрсетілген.

7.14-кесте

Динамикалық қатарлардың орташа көрсеткіштерін есептеу формулалары

№	Көрсеткіштің аты	Есептеу формуласы
1.	Қатардың орташа деңгейі:	
	а) толық интервалды қатар үшін	$\bar{y} = \frac{\sum y}{n}$
	ә) толық мезеттік қатар үшін	$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n}{n-1}$
	б) орта интервалды қатар үшін	$\bar{y} = \frac{\sum y \cdot t}{\sum t}$
	в) орта мезеттік қатар үшін	$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (y_i + y_{i+1}) \cdot t_i}{2 \sum_{i=1}^{n-1} t_i}$ немесе $\bar{y} = \frac{\sum y \cdot t}{\sum t}$
2.	Орташа абсолютті өсім	$\bar{\Delta} = \frac{\sum \Delta_r}{m}$ немесе $\bar{\Delta} = \frac{y_n - y_1}{n-1}$
3	Орташа өсу қарқыны	$\bar{T}_y = \sqrt[m]{K_{y1} \cdot K_{y2} \cdot \dots \cdot K_{ym}} \cdot 100$ немесе $\bar{T}_y = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} \cdot 100$
4.	Орташа өсім қарқыны	$\bar{T}_{\Delta y} = \bar{T}_y - 100$

Динамикалық қатардың негізгі және орташа көрсеткіштері тәжірибелік және ғылыми жұмыстарда кеңінен қолданылады. Динамика көрсеткіштері зерттелетін құбылыстардың даму жылдамдығы мен қарқындылығын анықтауға мүмкіндік береді. Оларды қолдану динамикалық қатарларды талдаудың бірінші кезеңі болып саналады. Әлеуметтік-экономикалық көрсеткіштердің динамикалық қатарларын одан әрі тереңірек талдау үшін құбылыстардың даму заңдылығын, деңгейлер ауытқуларын айқындайтын күрделі әдістер қолданылады.

7.3. Динамикалық қатарларды талдау тәсілдері

Статистикада динамикалық қатарларды талдау үшін мынадай тәсілдер қолданылады:

- аттас шамаларды салыстыру тәсілі;
- ортақ негізге келтіру тәсілі;
- динамикалық қатарларды біріктіру тәсілі.

Аттас шамаларды салыстыру тәсілі бірнеше динамикалық қатарларды талдау үшін қолданылады. Мысалы қай елде (облыста, ауданда, т.б.) зерттеліп отырған құбылыс қалай дамығанын көрсету үшін осы тәсілді пайдаланады. Аттас құбылыстарды бақылағанда динамикалық қатарлардың абсолютті деңгейлерін, абсолютті өсімдерін, өсу қарқындарын тікелей салыстыруға болады. Зерттелетін құбылыстың мағынасына және зерттеу мақсатына байланысты салыстырмалы талдауды әдетте мынадай бағыттарда жүргізеді:

а) әр елдегі аттас көрсеткіштердің абсолютті деңгейлері бойынша олардың ара қатысын анықтау. Есептеу нәтижесінде алынған көрсеткіштер зерттелетін құбылыстың әр елдегі даму ерекшелігін айқындайды.

ә) әр түрлі уақыт кезеңдеріндегі (мысалы, әр бес жылдағы) абсолютті өсімдерді салыстыру, Мұндай салыстырмалы талдау зерттелетін құбылыстың әр елдегі (облыстағы) даму жылдамдығын бағалауға мүмкіндік береді.

б) өсу қарқыны негізінде салыстырмалы талдау жасау.

Енді осы тәсілді пайдаланып, динамикалық қатарларға салыстырмалы талдау жасауға мысал келтірейік.

Мысал. Төменде Қарағанды және Павлодар облыстарында көмір өндіру туралы мәліметтер берілген:

7.15-кесте

Қарағанды және Павлодар облыстарында көмір өндіру

мың тонна

Облыстар	2004	2005	2006	2007	2008
Қарағанды	25511,8	24826,0	26797,9	31715,4	31660,9
Павлодар	56642,9	57000,3	64838,1	62104,2	72586,0

Осы мәліметтер бойынша екі облыстағы көмір өндіру динамикасын салыстырыңыздар.

Шешуі: Ол үшін берілген динамикалық қатарлардың негізгі көрсеткіштерін есептеп, нәтижесін кесте түрінде көрсеміз.

7.16-кесте

Қарағанды және Павлодар облыстарындағы көмір өндіру динамикасы

жыл дар	Мың тонна		Абсолютті өсім, мың тонна		Өсу қарқыны,%	
	Қарағанды	Павлодар	Қарағанды	Павлодар	Қарағанды	Павлодар
2004	25511,8	56642,9	-	-	100	100
2005	24826,0	57000,3	-685,8	357,4	97,3	100,6
2006	26797,9	64838,1	1971,9	7837,8	107,9	113,8
2007	31715,4	62104,2	4917,5	-2733,9	118,4	95,8
2008	31660,9	72586,0	-54,5	10481,8	99,8	116,9

Берілген қатарлардың абсолютті деңгейлерін салыстырсақ, онда кесте мәліметтері 2004–2008 жылдар аралығында Павлодар облысында көмір Қарағанды облысымен салыстырғанда жылына екі еседен артық өндірілгенін көрсетеді. Ал осы қатарлардың қатысты шамаларын, атап айтқанда орташа өсу қарқындарын салыстырсақ, көмір өндіру Павлодар облысында жылына орташа есеппен 6,4 пайызға, ал Қарағанды облысында 5,5 пайызға өсіп отырған.

Зерттелетін құбылыстардың аттас немесе әр түрлі болуына байланысты салыстыру тәсілі де әр түрлі болады. Әр түрлі құбылыстардың динамикасын салыстыру үшін тек қатысты шамалар ғана қолданылады. Әдетте зерттелетін құбылыстардың динамикалық қатарларының өсу қарқынын базалық әдіспен есептейді, содан кейін есептелген өсу қарқындарын салыстырып, берілген қатарларды талдайды. Мұндай тәсілді статистикада **ортақ негізге келтіру тәсілі** деп атайды.

Мысал. Қазақстанда шикі мұнай мен табиғи газды өндіру туралы мынадай мәліметтер берілген (7.17-кесте):

7.17-кесте

Қазақстанда өндірілген шикі мұнай және табиғи газ динамикасы

Жылдар	Шикі мұнай, мың тонна	Табиғи газ, млн. текше метр	2006 жылмен салыстырғанда, %	
			Шикі мұнай	Табиғи газ
А	1	2	3	4
2006	54339,0	26382,0	100,0	100,0
2007	55265,0	29561,0	101,7	112,0
2008	58646,0	32889,3	107,9	124,7
2009	64354,4	35941,8	118,4	136,2
2010	67915,7	37141,7	125,0	140,8

Берілген динамикалық қатарларды ортақ негізге келтіріңіздер.

Шешуі: Кесте мәліметтерінен 2006–2010 жылдар аралығында Қазақстанда шикі мұнайды да, табиғи газды өндіру де жылдан жылға өсіп отырғанын байқау қиын емес. Алайда аталған өнімдердің қайсысы жылдамырақ өскенін кесте мәліметтері бойынша бірден айту мүмкін емес. Ол үшін берілген екі қатардың өсу қарқындарын базалық әдіспен есептейміз (кестенің 3 және 4-бағандары). Есептеу нәтижелері Қазақстанда соңғы жылдары табиғи газды өндіру қарқыны мұнай өндіру қарқынынан жоғары екенін көрсетеді.

Ортақ негізге келтірілген қатарлар абсолютті шамалар қатарларына қарағанда талдау жасауға ыңғайлы.

Динамикалық қатарларды біріктіру тәсілі қатар деңгейлері әр түрлі әдіспен есептелгенде немесе әр түрлі аумақтық шекара үшін анықталғанда қолданылады. Мұндай жағдайда екі қатарды біріктіру үшін екі түрлі әдіспен немесе екі түрлі шекара үшін анықталған деңгейдің болуы қажет.

Мысал. 1997 жылы аумақтық шекарасында өзгеріс болған облыстың жалпы өңірлік өнімі туралы мынадай мәліметтер берілген (7.18-кесте):

7.18-кесте

Облыстың жалпы өңірлік өнімі

Облыстың жалпы өңірлік өнімі, млрд.теңге	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Ескі шекара бойынша	97,7	112,8	138,8	-	-	-

Жаңа шекара бойынша	-	-	155,5	173,8	191,6	211,6
Біріктірілген қатар	109,4	126,3	155,5	173,8	191,6	211,6

Берілген динамикалық қатарларды біріктіру қажет.

Шешуі: Екі қатарды біріктіру үшін:

- 1) өтпелі мерзімдегі (біздің мысалда 1997ж.) қатар деңгейлерінің қатынасын есептейміз:

$$K = \frac{155,5}{138,8} \approx 1,12$$

- 2) өтпелі мерзімге дейінгі көрсеткіштерді осы коэффициентке көбейтеміз:

$$y_{95} = 97,7 \cdot 1,12 = 109,4; \quad y_{96} = 112,8 \cdot 1,12 = 126,3$$

- 3) жаңа шекара бойынша анықталған көрсеткіш мәндерін өзгеріссіз қалдырамыз.

Осылайша біріктірілген қатар кестенің үшінші жолында көрсетілген.

Қатарларды біріктірудің тағы бір жолы бар. Ол үшін өзгеріс болған жылғы деңгейді ескі шекара үшін де, жаңа шекара үшін де 100 пайызға тең санап, қалған деңгейлерді пайыз есебінде қайта анықтайды. Біздің мысалда өзгеріс болған жылға дейінгі көрсеткіштерді 138,8-бен, ал өзгерістен кейінгі көрсеткіштерді 155,5-пен салыстырады. Жоғарыдағы мысал үшін бұл тәсілді қолдану нәтижесі 7.19-кестеде көрсетілген.

7.19-кесте

Облыстың жалпы өңірлік өнімінің динамикасы

Көрсеткіш	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Облыстың жалпы өңірлік өнімі, % (1997 жылмен салыстырғанда)	70,4	81,3	100,0	111,8	123,2	136,1

7.4. Динамикалық қатарларда негізгі үрдісті айқындау әдістері

Зерттелетін құбылыстың даму үрдісін айқындау, құбылыстың уақытқа байланысты өзгеруінің математикалық үлгісін құру, құбылыс дамуына болжам жасау – әлеуметтік-экономикалық көрсеткіштердің динамикалық қатарларын талдаудың негізгі міндеттері.

Динамикалық қатарлардың деңгейіне әр түрлі факторлар әсер етеді. Мұндай факторларды мынадай топтарға біріктіруге болады:

- 1) ұзақ уақыт әсер ететін және құбылыс дамуының негізгі үрдісін анықтайтын факторлар;
- 2) мерзім бойынша әсер ететін факторлар (маусымдық, циклдік ауытқулар);
- 3) динамикалық қатар деңгейлерінің кездейсоқ ауытқуларын тудыратын факторлар.

Жоғарыда аталған факторлардың ықпалын ескере отырып, динамикалық қатарлар деңгейінің уақытқа байланысты даму заңдылықтарын талдау үшін мынадай үлгі қарастырылады:

$$\bar{y}_t = f(T_t, S_t, \varepsilon_t),$$

мұндағы T_t – қатардың негізгі үрдісі;

S_t – циклдік (маусымдық) ауытқулар;

ε_t – кездейсоқ ауытқулар.

Егер зерттеу үшін аддитивті үлгі таңдалып алынса, онда динамикалық қатар мынадай түрде беріледі:

$$\bar{y}_t = T_t + S_t + \varepsilon_t.$$

Ал мультипликативті үлгіні қолданғанда қатардың жоғарыда аталған компоненттері өзара көбейтіледі:

$$\bar{y}_t = T_t \cdot S_t \cdot \varepsilon_t$$

Даму үрдісі немесе **тренд** деп тұрақты әсер ететін факторлар салдарынан болатын құбылыстың негізгі даму бағытын айтады. Берілген мәліметтер бойынша динамикалық қатарда белгілі бір даму бағыты бар екенін қатар деңгейлерінде өсу немесе кему үрдісі айқын көрініп тұрған жағдайда ғана көзбен шолып бірден анықтауға болады. Алайда іс жүзінде динамикалық қатар өзгерістерінде белгілі бір үрдістің бар немесе жоқ екенін бірден айқындау мүмкін болмайды. Мұндай жағдайларда динамиканың негізгі даму бағытын (тренд) айқындау үшін үш түрлі әдіс қолданылады:

- интервалдарды үлкейту әдісі;
- жылжымалы орташа әдісі;
- аналитикалық тегістеу әдісі.

Интервалды үлкейту әдісін негізінен динамикалық қатар мәліметтері күндер, апталар, айлар бойынша берілген жағдайда пайдаланады. Көрсеткіштің мұндай қысқа мерзімдегі мәндеріне әдетте кездейсоқ ауытқулар тән болады. Енді осы әдісті қолдануға мысал келтірейік.

Мысал. Төменде Қазақстандағы жүк айналымы туралы мәліметтер берілген.

7.20-кесте

2008 жылғы Қазақстандағы жүк айналымы

Айлар	Жүк айналымы, млн. ткм	Айлар	Жүк айналымы, млн. ткм
Қаңтар	28591,6	Шілде	31166,2
Ақпан	27657,8	Тамыз	32706,2
Наурыз	29059,3	Қыркүйек	32482,1
Сәуір	30136,3	Қазан	33542,5
Мамыр	30853,5	Қараша	32567,8
Маусым	30080,4	Желтоқсан	30982,6

Интервалды үлкейту әдісін қолданып, жүк айналымының даму үрдісін анықтаңыздар.

Шешуі: Кесте мәліметтеріне қарап, берілген қатарда белгілі бір даму үрдісі бар деп бірден айта алмаймыз, өйткені жүк айналымы бір айларда артса, екінші бір айларда кеміп отырған. Қатарды талдау үшін интервалды үлкейту әдісін қолданамыз. Ол үшін айлар бойынша берілген мәліметтерден тоқсандық

мәліметтерді анықтап, жаңа динамикалық қатарды құрамыз және әр тоқсандағы орташа айлық жүк айналымын есептейміз.

7.21-кесте

2008 жылғы Қазақстандағы тоқсандық жүк айналымы

Тоқсан	Жүк айналымы, млн.ткм	Орташа айлық жүк айналымы, млн.ткм
I	85308.7	28436.2
II	91070.2	30356.7
III	96354.5	32118.2
IV	97092.9	32364.3

Есептеу интервалы үлкейтілген жаңа қатар мәліметтері жүк айналымы бойынша өсу үрдісі байқалатынын айқын көрсетеді.

Егер динамикалық қатарда уақыт аралығы жылдар бойынша анықталса, ондай жағдайда интервалды үлкейту әдісін қолдану тиімсіз болады. **Жылжымалы орташа әдісін** кездейсоқ себептердің әсерінен болған ауытқуларды тегістеп, зерттелетін құбылыс дамуындағы үрдісті айқындау үшін қолданады. Жылжымалы орташа деп көрсеткіштің m мүшелі интервал бойынша есептелген арифметикалық орташа мәнін айтады. Бұл әдісті пайданғанда динамикалық қатардағы абсолютті шамалар орташа шамалармен алмастырылады. Орташаны есептеу жылжымалы әдіспен жүргізіледі, яғни есептеу интервалындағы бірінші деңгейді алып тастап, оның орнына келесі деңгейді қояды. Мысалы, бірінші интервалда алғашқы m мүше болады, ал екінші интервалды құрғанда қатардың бірінші деңгейін есептеу интервалынан алып тастап, оның орнына қатардың $(m+1)$ -ші мүшесін қояды, т.с.с. Содан кейін әр интервалдың орташа шамасын анықтайды. Осылай орташа шамалардан есептелген қатарды **тегістелген қатар** дейді. Тегістеуді үш, төрт, бес, т.б. мүше бойынша жүргізуге болады. Мысалы, қатардың нақты деңгейлерін $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}, y_n$ деп белгілесек, онда бес мүшелі жылжымалы орташаны есептеу алгоритмін былай көрсетуге болады:

$$\begin{aligned} \tilde{o}_1 &= \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{5}; \\ \tilde{o}_2 &= \frac{y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + \hat{o}_6}{5}; \\ \tilde{o}_3 &= \frac{y_3 + y_4 + y_5 + \hat{o}_6 + \hat{o}_7}{5}; \\ &\dots \dots \dots \\ \tilde{o}_{n-2} &= \frac{y_{n-4} + y_{n-3} + y_{n-2} + \hat{o}_{n-1} + \hat{o}_n}{5}, \end{aligned}$$

мұндағы $\tilde{o}_1, \tilde{o}_2, \tilde{o}_3, \hat{y}_{n-2}$ – жылжымалы орташалар.

Осындай есептеулер нәтижесінде тегістелген қатар алынады:

$$\tilde{o}_1, \tilde{o}_2, \tilde{o}_3, \tilde{o}_4, \tilde{o}_5, \dots, \tilde{o}_{n-3}, \hat{y}_{n-2}.$$

Берілген динамикалық қатар деңгейлері (y_i) мен бес мүшелі жылжымалы орташа арқылы анықталған деңгейлердің (\hat{y}_i) орналасуында мынадай сәйкестік болады:

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \dots, y_{n-3}, y_{n-2}, y_{n-1}, y_n$$

$$\check{\delta}_1, \check{\delta}_2, \check{\delta}_3, \dots, \check{\delta}_{n-3}, \hat{y}_{n-2}$$

яғни, тегістелген қатардың бірінші мүшесі бастапқы қатардың үшінші мүшесінің тұсына жазылады.с.с. Бес мүшелі орташаны қолданғанда бастапқы қатар төрт мүшеге қысқарады.

Тегістеу интервалындағы мүше саны тақ сан болса, онда жылжымалы орташаның мәнін интервал ортасына жазады. Егер ұзақ мерзімді тегістеу жүргізілсе, онда тегістелген қатарда ауытқу аз болады, алайда тегістелген қатар алғашқы берілген қатарға қарағанда анағұрлым қысқарады. Бұл – жылжымалы орташа әдісінің ең негізгі кемшілігі. Сонымен қатар жылжымалы орташаны есептеу үшін алынған интервал құбылыстың ауытқу мерзіміне сәйкес келген жағдайда құбылыс дамуындағы мерзімдік (маусымдық) ауытқулар байқалмай қалуы мүмкін. Сондықтан жылжымалы орташа әдісін қолданғанда орташаны есептеу интервалын дұрыс анықтаудың маңызы зор.

Мысал. Қазақстанда 2008 жылы пайдалануға берілген тұрғын үйлер туралы мынадай мәліметтер берілген:

7.22-кесте

Қазақстанда 2008 жылы пайдалануға берілген тұрғын үйлер

Айлар	Пайдалануға берілген тұрғын үйлер, мың шаршы метр	Айлар	Пайдалануға берілген тұрғын үйлер, мың шаршы метр
Қаңтар	639	Шілде	419
Ақпан	419	Тамыз	488
Наурыз	518	Қыркүйек	710
Сәуір	321	Қазан	750
Мамыр	358	Қараша	590
Маусым	615	Желтоқсан	1005

Осы мәліметтер бойынша берілген қатарды 3 мүшелі жылжымалы орташа әдісі бойынша тегістеңіздер.

Шешуі: 3 мүшелі жылжымалы орташаны есептеу нәтижелері төмендегі кестеде көрсетілген (7.23-кесте):

7.23-кесте

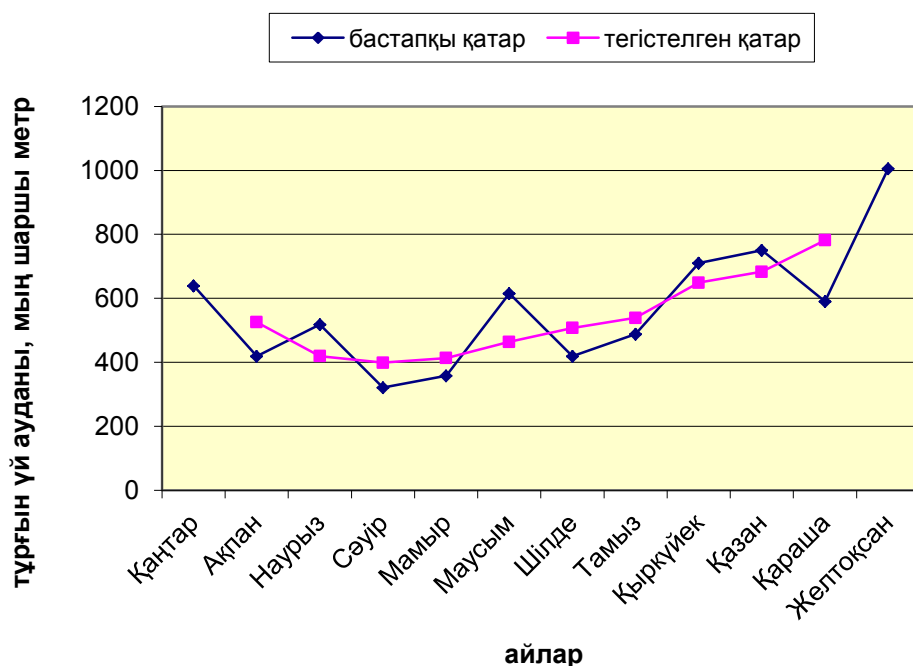
Қазақстанда 2008 жылы пайдалануға берілген тұрғын үйлер

Алғашқы мәліметтер		Есептелген көрсеткіштер	
айлар	Пайдалануға берілген тұрғын үйлер, мың шаршы метр	Жылжымалы үш мүшенің қосындысы	Жылжымалы орташаның мәні
Қаңтар	639	-	-

Ақпан	419	$639 + 419 + 518 = 1576$	$\frac{1576}{3} = 525,3$
Наурыз	518	$419 + 518 + 321 = 1258$	$\frac{1258}{3} = 419,3$
Сәуір	321	$518 + 321 + 358 = 1197$	$\frac{1197}{3} = 399,0$
Мамыр	358	$321 + 358 + 615 = 1294$	$\frac{1294}{3} = 431,3$
Маусым	615	$358 + 615 + 419 = 1392$	$\frac{1392}{3} = 464,0$
Шілде	419	$615 + 419 + 488 = 1522$	$\frac{1522}{3} = 507,3$
Тамыз	488	$419 + 488 + 710 = 1617$	$\frac{1617}{3} = 539,0$
Қыркүйек	710	$488 + 710 + 750 = 1948$	$\frac{1948}{3} = 649,3$
Қазан	750	$710 + 750 + 590 = 2050$	$\frac{2050}{3} = 683,3$
Қараша	590	$750 + 590 + 1005 = 2345$	$\frac{2345}{3} = 781,7$
Желтоқсан	1005	-	-

Тегістелген қатар мәліметтері сәуір айынан бастап пайдалануға берілген тұрғын үйлер динамикасында өсу үрдісі байқалатынын көрсетеді. Динамикалық қатардың нақты деңгейлерін, жылжымалы орташа әдісі арқылы тегістелген қатар деңгейлерін графикке түсіргенде сынық сызық алынады (7.2-сурет).

2008 жылы пайдалануға берілген тұрғын үйлер



7.2-сурет. 2008 жылы Қазақстанда пайдалануға берілген тұрғын үйлер динамикасы

Жылжымалы орташа әдісін қолданғанда тегістеу интервалындағы мүше саны жұп сан болса, онда тегістеу интервалының ортасы екі уақыт кезеңінің арасында болады. Мысалы қатарды тегістеу үшін төрт мүшелі жылжымалы орташаны қолданғанда бірінші интервалдың ортасы ақпан мен наурыздың, екінші интервал ортасы наурыз бен сәуірдің арасында, т.с.с. болады.

Мұндай жағдайда алынған нәтиженің ортаға дәл келтіру қажет болады. Ол үшін көршілес екі жылжымалы орташадан қайтадан орташа есептеледі. Енді 7.22-кесте мәліметтері бойынша төрт мүшелі жылжымалы орташаны есептеуді көрсетейік (7.24-кесте).

7.24-кесте

Қазақстанда 2008 жылы пайдалануға берілген тұрғын үйлер

Алғашқы мәліметтер		Есептелген көрсеткіштер	
айлар	Пайдалануға берілген тұрғын үйлер, мың шаршы метр	Ортаға дәл келтірілмеген төрт мүшелі орташа	Ортаға дәл келтірілген төрт мүшелі орташа
Қаңтар	639	-	-
Ақпан	419	-	-
Наурыз	518	$\frac{639 + 419 + 518 + 321}{4} = 474,3$	$\frac{474,3 + 404,3}{2} = 439,3$

Сәуір	321	$\frac{419 + 518 + 321 + 358}{4} = 404,3$	$\frac{404,3 + 453,0}{2} = 428,7$
		$\frac{518 + 321 + 358 + 615}{4} = 453,0$	
Мамыр	358	$\frac{321 + 358 + 615 + 419}{4} = 428,3$	$\frac{453,0 + 428,3}{2} = 440,7$
Маусым	615	$\frac{358 + 615 + 419 + 488}{4} = 470,0$	$\frac{428,3 + 470,0}{2} = 449,2,7$
Шілде	419	$\frac{615 + 419 + 488 + 710}{4} = 558,0$	$\frac{470,0 + 558,0}{2} = 514,0$
Тамыз	488	$\frac{419 + 488 + 710 + 750}{4} = 591,8$	$\frac{558,0 + 591,8}{2} = 574,9$
Қыркүйек	710	$\frac{488 + 710 + 750 + 590}{4} = 634,5$	$\frac{591,8 + 634,5}{2} = 613,2$
Қазан	750	$\frac{710 + 750 + 590 + 1005}{4} = 763,8$	$\frac{634,5 + 763,5}{2} = 699,0$
Қараша	590		-
Желтоқсан	1005		-

Бұл мысалда тегістеген қатарда мамыр айынан бастап өсу үрдісі байқалады.

Динамикалық қатарды *аналитикалық тегістеу* деп құбылыстың уақытқа байланысты даму үрдісін сипаттайтын математикалық үлгіні табуды айтады.

Аналитикалық тегістеу әдісін қолданғанда қатардың деңгейлері уақыт функциясы түрінде өрнектеледі:

$$\tilde{\delta}_t = f(t),$$

мұндағы $\tilde{\delta}_t$ – динамикалық қатардың теориялық мәндері.

Аналитикалық тегістеу әдісі интервалды үлкейту, жылжымалы орташа әдістеріне қарағанда құбылыстың даму бағытын, оның ерекшелігін дәлірек сипаттайды. Қатарды қандай функциямен тегістеу керектігі зерттелетін құбылыстың ерекшелігіне байланысты болады. Әдетте тренд сызығы ретінде мынадай функцияларды жиі пайдаланады:

- сызықтық : $\tilde{\delta}_t = a_0 + a_1 \cdot t$;
- парабола : $\tilde{\delta}_t = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2$;
- көрсеткіштік : $\tilde{\delta}_t = a_0 \cdot a_1^t$;
- гиперболола : $\tilde{\delta}_t = a_0 + \frac{a_1}{t}$

Түзу теңдеуі эмпирикалық мәліметтерді графикке түсіргенде түзу сызықты байланыс байқалған жағдайда немесе құбылыс арифметикалық прогрессия бойынша дамығанда, яғни тізбекті тәсілмен есептелген абсолютті өсімдер жуықтап алғанда бірдей болғанда қолданылады:

$$\hat{o}_t = a_0 + a_1 \cdot t,$$

мұндағы a_0, a_1 – түзу параметрлері;

t – уақыттың хронологиялық көрсеткіші (кезеңнің немесе мезеттің реттік нөмірі).

Түзу теңдеуінің параметрлерін ең кіші квадраттар әдісі бойынша анықтайды. Бұл әдістің мәнісі – деңгейлердің теориялық мәні мен нақты мәндерінің ауытқуларының квадраттарының қосындысы ең аз шамаға тең болатындай параметрлерді табу. Сондықтан түзу параметрлерін анықтау үшін мынадай өрнектің минимумын табу қажет:

$$\sum_{t=1}^n (\hat{o}_t - \hat{y}_t)^2 \rightarrow \min ,$$

мұндағы Y_t – динамикалық қатар деңгейлерінің нақты мәндері;

\hat{Y}_t – динамикалық қатар деңгейлерінің есептелген (теориялық) мәндері;

n – динамикалық қатардағы деңгей саны.

Жоғарыдағы өрнектің минимумын түзу теңдеуі үшін анықтағанда мынадай теңдеулер жүйесі құрылады:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum t = \sum y \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 = \sum yt \end{cases}$$

Бұл жүйені шешуді жеңілдету үшін уақыттың хронологиялық көрсеткіштерін $\sum t = 0$ шарты орындалатындай етіп былай белгілейміз:

- деңгей саны тақ қатарлар үшін $t = \dots; -3; -2; -1; 0; +1; +2; +3; \dots$;
- деңгей саны жұп қатарлар үшін $t = \dots; -7; -5; -3; -1; +1; +3; +5; +7; \dots$.

Уақыттың шартты көрсеткіштерін қолдану жоғарыдағы теңдеулер жүйесін қарапайым түрге келтіреді:

$$\begin{cases} na_0 = \sum y \\ a_1 \sum t^2 = \sum yt \end{cases}$$

Бірінші теңдеуден a_0 , екінші теңдеуден a_1 параметрін анықтауға болады:

$$a_0 = \frac{\sum y}{n}; \quad a_1 = \frac{\sum yt}{\sum t^2} .$$

Сызықтық тренд үлгісінде a_0 параметрін қатардың бастапқы деңгейі деп санайды, ал a_1 параметрі құбылыстың өсу бағытын анықтайды. $a_1 > 0$ болғанда қатар деңгейлері бірқалыпты өседі, ал $a_1 < 0$ болғанда кемиді.

Экономикалық тұрғыдан қарағанда a_1 параметрі орташа абсолютті өсімді көрсетеді. Енді сызықтық тренд үлгісін қолданып, қатарды тегістеуге мысал келтірейік.

Мысал. Қазақстандағы жұмыссыздар саны туралы мынадай мәліметтер берілген:

7.25-кесте

Қазақстандағы жұмыссыздар саны

мың адам

	I тоқсан	II тоқсан	III тоқсан	IV тоқсан
2007	624,0	601,8	583,9	578,8
2008	573,8	557,2	540,6	559,3

Осы мәліметтер бойынша жұмыссыздар саны динамикалық қатарының негізгі даму бағытын анықтау керек.

Шешуі: Ол үшін аналитикалық функция ретінде түзудің теңдеуін таңдап аламыз. Түзу теңдеуінің параметрлерін анықтау үшін қажетті есептеулер төмендегі кестеде көрсетілген.

7.26-кесте

Түзу теңдеуі параметрлерін анықтауға қажетті есептеулер кестесі

Жылдар	Тоқсан	Жұмыссыздар саны, мың адам y	t	t^2	yt	\hat{y}_t
A	1	2	3	4	5	6
2007	I	624,0	-7	49	-4368,0	612,6
	II	601,8	-5	25	-3009,0	602,5
	III	583,9	-3	9	-1751,7	592,5
	IV	578,8	-1	1	-578,8	582,4
2008	I	573,8	1	1	573,8	572,4
	II	557,2	3	9	1671,6	562,4
	III	540,6	5	25	2703,0	552,3
	IV	559,3	7	49	3915,1	542,3
Барлығы		4619,4	0	168	-844,0	4619,4

Енді кесте мәліметтерін пайдаланып, a_0, a_1 параметрлерін анықтаймыз.

$$a_0 = \frac{\sum y}{n} = \frac{4619,4}{8} = 577,425.$$

$$a_1 = \frac{\sum yt}{t^2} = \frac{-844,0}{168} = -5,024$$

Олай болса, іздестіріп отырған түзу теңдеуі мынадай түрде болады:

$$\hat{y}_t = 577,425 - 5,024t$$

Осы теңдеуге t көрсеткішінің шартты мәндерін қойып, қатардың теориялық мәндерін (6-баған) анықтаймыз. 7.26-кестеде эмпирикалық қатар деңгейлерінің қосындысы ($\sum y$) тегістелген қатар деңгейлерінің теориялық

мәндерінің қосындысымен ($\sum \tilde{\sigma}_t$) бірдей екендігі көрсетілген. Жоғарыда анықталған түзу теңдеуі бойынша Қазақстандағы жұмыссыздар санының динамикалық қатарын аналитикалық әдіспен тегістеу графигі 7.3-суретте бейнеленген.



7.3-сурет. Қазақстандағы жұмыссыздар санының динамикасы

Динамикалық қатарды екінші дәрежелі парабола бойынша тегістеуді зерттелетін құбылыс көрсеткіштері төмендеп келіп, өскенде немесе керісінше өзгергенде, яғни құбылыс дамуының бағыты өзгергенде қолданады. Мұндай жағдайда тренд теңдеуі мынадай түрде беріледі:

$$\tilde{\sigma}_t = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2.$$

a_2 параметрі даму қарқындылығының бірлік уақыттағы өзгерісін сипаттайды. $a_2 > 0$ болғанда құбылыс үдемелі қарқынмен дамиды, ал $a_2 < 0$ болған жағдайда даму қарқыны баяу болады. Парабола теңдеуінің параметрлерін де ең кіші квадраттар әдісі бойынша анықтайды. Аталған әдісті қолдану нәтижесінде мынадай теңдеулер жүйесі алынады:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum t + a_2 \sum t^2 = \sum y \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 + a_2 \sum t^3 = \sum yt \\ a_0 \sum t^2 + a_1 \sum t^3 + a_2 \sum t^4 = \sum yt^2 \end{cases}$$

Уақыт көрсеткіштерін $\sum t = 0$ шарты орындалатындай етіп түзу теңдеуіндегідей белгілесе, жоғарыдағы теңдеулер жүйесі мынадай түрге келеді:

$$\begin{cases} na_0 + a_2 \sum t^2 = \sum y \\ a_1 \sum t^2 = \sum yt \\ a_0 \sum t^2 + a_2 \sum t^4 = \sum yt^2 \end{cases}$$

Парабола теңдеуі бойынша қатарды тегістеуге мысал келтірейік.

Мысал. Қазақстанда кино көрсетумен айналысатын ұйымдар туралы мәліметтер 7.27-кестенің алғашқы екі бағанында берілген:

7.27-кесте

Қазақстандағы кино көрсететін ұйымдар динамикасы

Бастапқы мәліметтер		Есептелген мәліметтер					
Жылдар	Кино көрсететін ұйымдар, бірлік \acute{o}	t	t^2	t^4	yt	yt^2	\hat{y}_t
А	1	2	3	4	5	6	7
1995	394	-11	121	14641	-4334	47674	393,229
1996	275	-9	81	6561	-2475	22275	302,454
1997	250	-7	49	2401	-1750	12250	226,071
1998	210	-5	25	625	-1050	5250	164,082
1999	78	-3	9	81	-234	702	116,485
2000	73	-1	1	1	-73	73	83,281
2001	57	1	1	1	57	57	64,469
2002	68	3	9	81	204	612	60,051
2003	82	5	25	625	410	2050	70,026
2004	93	7	49	2401	651	4557	94,393
2005	120	9	81	6561	1080	9720	133,153
2006	194	11	121	14641	2134	23474	186,306
Барлығы	1894	0	572	48620	-5380	128694	1894

Осы мәліметтер бойынша берілген динамикалық қатардың даму үрдісін айқындау қажет.

Шешуі: Ол үшін парабола теңдеуін пайдаланып, қатарды тегістейміз. 7.27-кестенің 2–6-бағандарында парабола теңдеуінің параметрлерін анықтауға қажетті есептеулер келтірілген. Кесте мәліметтеріне және $\sum t = 0$ шартына сәйкес мынадай теңдеулер жүйесін құруға болады:

$$\begin{cases} 12a_0 + 572a_2 = 1894 \\ 572a_1 = -5380 \\ 572a_0 + 48620a_2 = 128694 \end{cases}$$

Теңдеулер жүйесін шешу нәтижесінде белгісіз a_0, a_1, a_2 параметрлері анықталады:

$$a_0 = 72,085$$

$$a_1 = -9,406$$

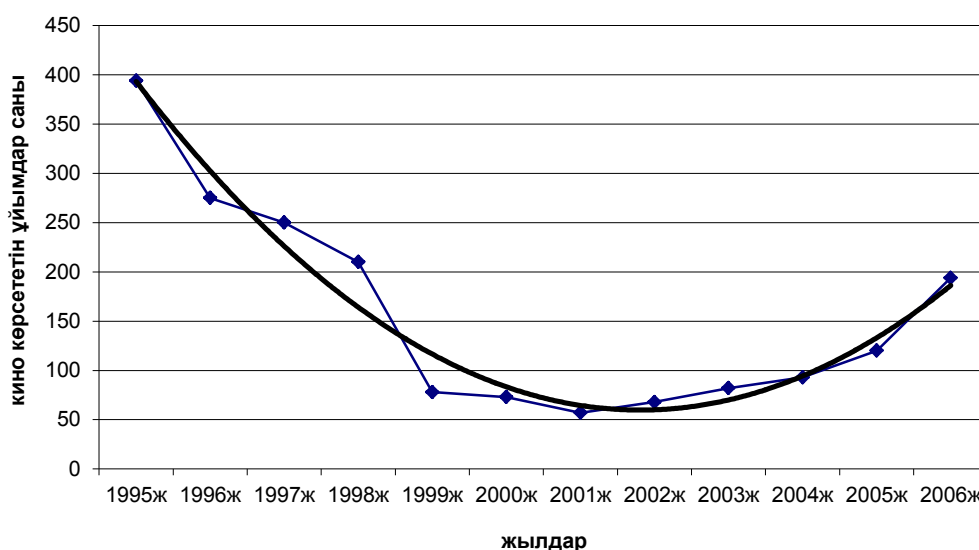
$$a_2 = 1,799$$

Сонымен, бұл мысалда іздестіріп отырған парабола теңдеуі мынадай түрде беріледі:

$$\hat{\delta}_t = 72,085 - 9,406 \cdot t + 1,799 \cdot t^2 .$$

7.4-суретте парабола теңдеуін пайдаланып, динамикалық қатарды тегістеу графигі көрсетілген.

Қазақстанда кино көрсететін ұйымдар динамикасы



7.4-сурет. Қазақстандағы кино көрсететін ұйымдар санының динамикасы

Егер қатар деңгейлері геометриялық прогрессия бойынша өзгерсе, яғни тізбекті тәсілмен есептеген өсу коэффициенттері тұрақты болса, онда динамикалық қатарды тегістеу үшін көрсеткіштік функция қолданылады:

$$\hat{\delta}_t = a_0 \cdot a_1^t .$$

Ал бұл теңдеудің параметрлерін анықтау үшін мынадай теңдеулер жүйесі құрылады:

$$\begin{cases} n \lg a_0 + \lg a_1 \sum t = \sum \lg y \\ \lg a_0 \sum t + \lg a_1 \sum t^2 = \sum t \cdot \lg y \end{cases}$$

$\sum t = 0$ шарты орындалғанда жоғарыдағы теңдеулер жүйесі мынадай түрде жазылады:

$$\begin{cases} n \lg a_0 = \sum \lg y \\ \lg a_1 \sum t^2 = \sum t \cdot \lg y \end{cases}$$

Бұдан: $\lg a_0 = \frac{\sum \lg y}{n}$; $\lg a_1 = \frac{\sum t \cdot \lg y}{\sum t^2}$.

Егер динамикалық қатардың деңгейлері біртіндеп төмендесе, бірақ солай бола тұра ешқашан нөлге тең болмайтынын белгілі болса, мұндай жағдайда қатарды тегістеу үшін гипербола теңдеуі қолданылады:

$$\tilde{\delta}_t = a_0 + \frac{a_1}{t}$$

Бұл теңдеудің параметрлері мынадай теңдеулер жүйесінің негізінде анықталады:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum \frac{1}{t} = \sum y \\ a_0 \sum \frac{1}{t} + a_1 \sum \frac{1}{t^2} = \sum \frac{y}{t} \end{cases}$$

Гипербола теңдеуінің параметрлерін анықтау үшін «шартты нөл» принципін ($\sum t = 0$) қолдануға болмайды, сондықтан уақыт көрсеткіштерін 1,2,3,... деп нөмірлейді.

7.5. Маусымдық ауытқуларды талдау

Көптеген экономикалық құбылыстардың тоқсандық немесе айлық мәліметтерін қарастырғанда, олардың дамуында жыл мезгілдеріне байланысты болатын ауытқулар байқалады. Мұндай ауытқуларды *маусымдық ауытқулар* немесе маусымдық толқындар дейді. Мысалы, жаз айларында электр энергиясын өндірі кемиді, жазғы киімдерге сұраныс көбейеді, жеміс-жидектер көп сатылады, т.с.с. Маусымдық ауытқулардың ауыл шаруашылығы, құрылыс, көлік, туризм, т.б. экономика салаларындағы атқаратын рөлі жоғары. Экономика салалары бір-бірімен байланысты болғандықтан, маусымдық ауытқулар жалпы экономикалық дамуға өз ықпалын тигізеді. Жұмыс күші, материалдық ресурстар, өндіріс қуаты біркелкі пайдаланылмайтындықтан, маусымдық ауытқулар экономикалық әрекет нәтижесіне кері әсер етеді. Маусымдық ауытқулар климаттық жағдайларға, әр түрлі экономикалық факторларға байланысты болады. Әдетте маусымдық ауытқулар жыл сайын қайталанып отырады. Маусымдық ауытқуларды айқындау және өлшеу үшін мынадай әдістер қолданылады:

- маусымдық индекстер;
- гармониялық талдау

Маусымдық индекстер деп жылдың әр айының нақты деңгейінің орташа деңгейге қатынасын айтады:

$$I_s = \frac{y_i}{\bar{y}} \cdot 100,$$

мұндағы y_i – қатардың әр айдағы деңгейі;

\bar{y} – қатардың орташа деңгейі.

Маусымдық ауытқуларды бірнеше жылдың айлық немесе тоқсандық мәліметтері бойынша зерттейді. Бірнеше жылдың мәліметтері маусымдық

ауытқуларға бір жыл ішінде болған кездейсоқ факторлар әсер етпеу үшін және тұрақты маусымдық толқынды айқындау үшін қажет. Әдетте зерттелетін құбылыстың даму заңдылығын айқындау үшін үш жылдың мәліметтері алынады. Мұндай жағдайда маусымдық индексті мына формуламен есептейді:

$$I_s = \frac{\bar{y}_i}{\bar{y}} \cdot 100,$$

мұндағы \bar{y}_i – қатардың әр айдағы орташа деңгейі. Оны үш жыл деңгейлерінің арифметикалық орташасы арқылы анықтайды:

$$\bar{y}_i = \frac{y_{i1} + y_{i2} + y_{i3}}{3}, \quad i = \overline{1.12}.$$

\bar{y} – қатардың жалпы орташа деңгейі.

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i}{12}.$$

Егер динамикалық қатарда құбылыстың дамуы айқын байқалмаса, онда маусымдық индекстерді есептеу үшін берілген қатардың нақты мәліметтерін алдын-ала тегістемей-ақ, тікелей қолдануға болады.

Енді жоғарыдағы формулаларды пайдаланып, маусымдық индекстерді есептеуге мысал келтірейік.

Мысал. 2006–2008 жылдары Қазақстанда темір жол көлігі бойынша жолаушылар айналымының динамикасы қандай деңгейде болғандығы туралы мәліметтер төмендегі 7.28-кестенің алғашқы 3 бағанында берілген:

7.28-кесте

Темір жол көлігі бойынша Қазақстандағы жолаушылар айналымы

Айлар	Темір жол көлігі бойынша жолаушылар айналымы, млн.жкм					Маусымдық индекс , %
	2006ж	2007ж	2008ж	Барлығы (үш жылды қоса есептеген де)	Үш жыл бойынша айлық орташа	
А	1	2	3	4	5	6
Қаңтар	838,7	932,2	938,7	2709,6	903,2	79,0
Ақпан	746,8	843,6	954,9	2545,3	848,4	74,2
Наурыз	975,5	1135,9	834,2	2945,6	981,9	85,8
Сәуір	902,5	1401,8	1312,7	3617,0	1205,7	105,4
Мамыр	1017,9	1235,7	1115,2	3368,8	1122,9	98,2
Маусым	1146,6	1544,4	1232,6	3923,6	1307,9	114,3
Шілде	1628,2	1627,8	1381,7	4637,7	1545,9	135,2
Тамыз	1106,2	1282,8	1413,9	3802,9	1267,6	110,8
Қыркүйек	1101,2	1109,4	1375,0	3585,6	1195,2	104,5
Қазан	1121,1	1254,6	1160,9	3536,6	1178,9	103,1

Қараша	1186,3	1117,9	781,9	3086,1	1028,7	89,9
Желтоқсан	1033,7	1154,7	1228,8	3417,2	1139,1	99,6
Барлығы	12804,7	14640,8	13730,5	41176,0	1143,8	100,0

Осы мәліметтер бойынша маусымдық ауытқу индекстерін есептеу керек.

Шешуі: Ол үшін:

1. Ең алдымен үш жылды қоса есептегенде әр айдың орташа деңгейі қандай болатынын анықтаймыз:

$$\text{қаңтар: } \bar{y}_1 = \frac{838,7 + 932,2 + 938,7}{3} = \frac{2709,6}{3} = 903,2 \text{ млн.жскм}$$

$$\text{ақпан: } \bar{y}_2 = \frac{746,8 + 843,6 + 954,9}{3} = \frac{2545,3}{3} = 848,4 \text{ млн.жскм және т.с.с. (7.28-кестенің 5-бағанын қараңыз).}$$

2. Берілген қатардың жалпы орташа деңгейін есептейміз:

$$\bar{y} = \frac{12804,7 + 14640,8 + 13730,5}{36} = \frac{41176,0}{36} = 1143,8 \text{ млн.жскм.}$$

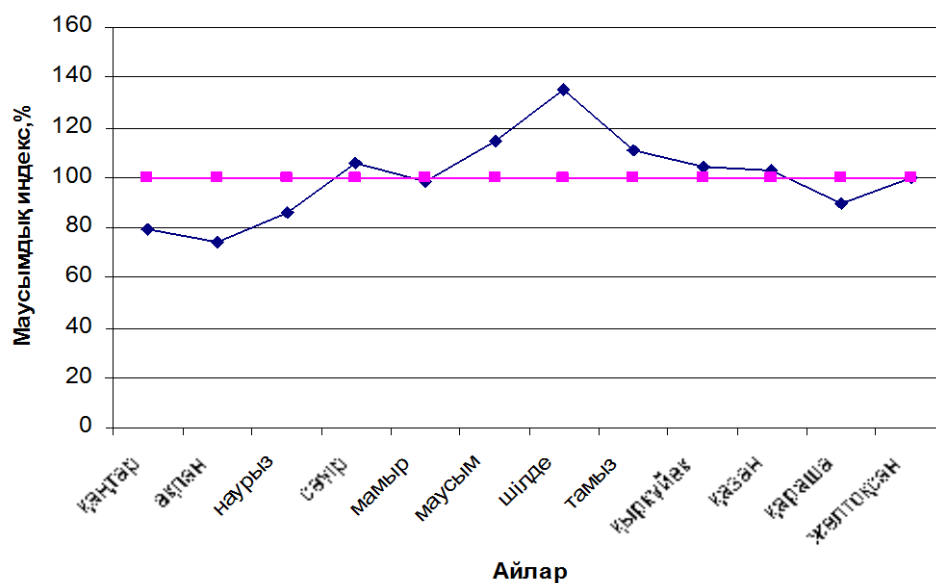
3. Әр ай үшін маусымдық индексті анықтаймыз:

$$\text{қаңтар: } I_s = \frac{903,2}{1143,8} \cdot 100 \approx 79,0\%$$

$$\text{ақпан: } I_s = \frac{848,4}{1143,8} \cdot 100 \approx 74,2\% \text{ және т.с.с. (7.28-кестенің 6-бағанын қараңыз).}$$

Бұл мысалда маусымдық ауытқу индекстері жаз айларында (маусым, шілде, тамыз) темір жол көлігі бойынша жолаушылар айналымының өсетінін, ал қаңтар, ақпан айларында айтарлықтай кемитіндігін көрсетеді. 7.5-суретте зерттеліп отырған құбылыстың маусымдық толқынының графигі кескінделген.

Темір жол көлігі бойынша жолаушылар айналымы



7.5-сурет. Қазақстандағы темір жол көлігі бойынша жолаушылар айналымының маусымдық толқыны

Динамикалық қатармен берілген құбылыстың дамуында белгілі бір үрдіс байқалған жағдайда маусымдық индекстерді есептемес бұрын, берілген қатарды тегістеп, даму заңдылығын айқындайды. Әдетте даму үрдісін айқындау үшін аналитикалық тегістеу әдісін қолданады. Мұндай жағдайда маусымдық ауытқу индексі мына формуламен есептейді:

$$I_s = \frac{\sum \frac{y_i}{\hat{y}_t} \cdot 100}{n},$$

мұндағы y_i – қатардың эмпирикалық деңгейі;

\hat{y}_t – қатардың теориялық деңгейі;

n – жылдар саны.

Маусымдық ауытқуларды зерттеудің осы әдісіне мысал келтірейік.

Мысал. ҚР ауыл шаруашылығы саласының 2003–2007 жылдардағы жалпы қосылған құны 1994 жылдың орташа бағасымен есептеліп, мынадай түрде берілген:

7.29-кесте

Қазақстанның ауыл шаруашылығы саласының 1994 жылдың орташа бағасымен есептелген жалпы қосылған құны

Жылдар	Жалпы қосылған құн, млн.теңге			
	I тоқсан	II тоқсан	III тоқсан	IV тоқсан
2003	3143,3	6000,3	29945,3	14010,2
2004	3323,7	6286,3	27953,9	15482,1
2005	3437,1	6566,5	30302,4	16506,4
2006	3567,5	6856,6	33186,7	16610,4
2007	3709,6	7112,1	36325,4	18433,7

Осы мәліметтер бойынша маусымдық ауытқу индекстерін есептеу қажет.

Шешуі: Зерттеліп отырған құбылыс дамуында өсу үрдісі байқалатындықтан, қатарды түзу теңдеуі бойынша тегістейміз. Түзу теңдеуінің параметрлерін анықтау үшін қажетті есептеулер төмендегі кестеде көрсетілген.

7.30-кесте

Маусымдық индекстерді есептеу

Жылдар	Тоқсан	Жалпы қосылған құн, млн.теңге y	t	t^2	yt	\hat{y}_t	$\frac{y_i}{\hat{y}_t} \cdot 100$, %
A	1	2	3	4	5	6	7
2003	I	3143,3	-9,5	90,25	-29861,4	10340,9	30,4
	II	6000,3	-8,5	72,25	-51002,6	10772,2	55,7
	III	29945,3	-7,5	56,25	-224590	11203,5	267,3
	IV	14010,2	-6,5	42,25	-91066,3	11634,7	120,4

2004	I	3323,7	-5,5	30,25	-18280,4	12066,0	27,5
	II	6286,3	-4,5	20,25	-28288,4	12497,3	50,3
	III	27953,9	-3,5	12,25	-97838,7	12928,5	216,2
	IV	15482,1	-2,5	6,25	-38705,3	13359,8	115,9
2005	I	3437,1	-1,5	2,25	-5155,65	13791,1	24,9
	II	6566,5	-0,5	0,25	-3283,25	14222,3	46,2
	III	30302,4	0,5	0,25	15151,2	14653,6	206,8
	IV	16506,4	1,5	2,25	24759,6	15084,9	109,4
2006	I	3567,5	2,5	6,25	8918,75	15516,1	23,0
	II	6856,6	3,5	12,25	23998,1	15947,4	43,0
	III	33186,7	4,5	20,25	149340,2	16378,7	202,6
	IV	16610,4	5,5	30,25	91357,2	16810,0	98,8
2007	I	3709,6	6,5	42,25	24112,4	17241,2	21,5
	II	7112,1	7,5	56,25	53340,75	17672,5	40,2
	III	36325,4	8,5	72,25	308765,9	18103,8	200,6
	IV	18433,7	9,5	90,25	175120,2	18535,0	99,4
Барлығы		288759,5	0	665	286792,8	288759,5	2000,0

Осы есептеулерге сүйеніп, a_0 , a_1 параметрлерін анықтаймыз.

$$a_0 = \frac{\sum y}{n} = \frac{288759,5}{20} \approx 14438$$

$$a_1 = \frac{\sum yt}{t^2} = \frac{286792,8}{665} \approx 431,27$$

Олай болса, іздестіріп отырған түзу теңдеуі мынадай түрде болады:

$$\hat{y}_t = 14438 + 431,27t$$

Осы теңдеуге t көрсеткішінің шартты мәндерін қойып, қатардың теориялық мәндерін анықтаймыз.

2003 жыл үшін:

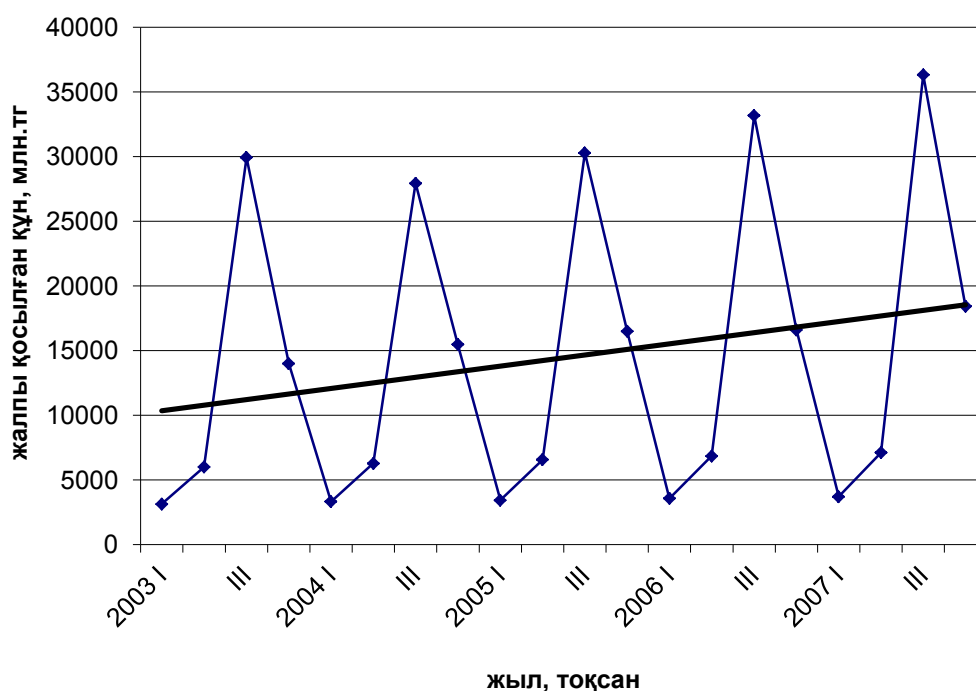
I тоқсан: $\hat{y}_t = 14438 + 431,27 \cdot (-9,5) \approx 10340,9$

II тоқсан: $\hat{y}_t = 14438 + 431,27 \cdot (-8,5) \approx 10772,2$

III тоқсан: $\hat{y}_t = 14438 + 431,27 \cdot (-7,5) \approx 11203,5$ және т.с.с. (7.30-кестенің 6-бағанын қараңыз).

Жоғарыдағы түзу теңдеуі бойынша Қазақстандағы ауыл шаруашылығы саласының жалпы қосылған құнының 1994 жылдың орташа бағасымен есептелген динамикалық қатарын аналитикалық әдіспен тегістеу графигі 7.6-суретте көрсетілген.

Ауыл шаруашылығының жалпы қосылған құны



7.6-сурет. Қазақстандағы ауыл шаруашылығы саласының жалпы қосылған құны

Енді қатардың нақты деңгейін (7.30-кестенің 2-бағаны) теориялық деңгейге (6-баған) бөлу арқылы әр тоқсандағы маусымдық индексті қарастырылып отырған жылдар әрқайсысы үшін жеке анықтаймыз.

2003 жыл үшін:

$$\text{I тоқсан: } \frac{3143,3}{10340,9} \cdot 100 \approx 30,4\% ;$$

$$\text{II тоқсан: } \frac{6000,3}{10772,2} \cdot 100 \approx 55,7\% ;$$

$$\text{III тоқсан: } \frac{29945,3}{11203,5} \cdot 100 \approx 267,3\% \text{ және т.с.с. (7.30-кестенің 7-бағанын қараңыз).}$$

Кездейсоқ факторлар әсерін болдырмас үшін әр жыл үшін анықталған тоқсандық индекстердің орташа шамасын мына формуламен есептейміз:

$$I_s = \frac{\sum \frac{y_i}{\hat{y}_i} \cdot 100}{n} ,$$

мұндағы n – жылдар саны.

Сонда I тоқсан үшін маусымдық ауытқу индексі былай анықталады:

$$I_{s1} = \frac{30,4 + 27,5 + 24,9 + 23,0 + 21,5}{5} = 25,5\% ,$$

II тоқсан үшін:

$$I_s = \frac{55,7 + 50,3 + 46,2 + 43,0 + 40,2}{5} = 47,0\% ;$$

III тоқсан үшін:

$$I_{s_{III}} = \frac{267,3 + 216,2 + 206,8 + 202,6 + 200,6}{5} = 218,7\% ;$$

IV тоқсан үшін:

$$I_{s_{III}} = \frac{120,4 + 115,9 + 109,4 + 98,8 + 99,4}{5} = 108,8\% .$$

Бұл мысалда маусымдық ауытқу индекстері ауыл шаруашылығы саласының жалпы қосылған құны жыл мерзіміне байланысты өзгеретінін көрсетеді.

Егер маусымдық ауытқулар синусоида тәрізді, яғни бір жыл ішінде минимумнан максимумға немесе керісінше біртіндеп өзгеретін болса, онда маусымдық ауытқуларды зерттеу үшін гармониялық талдау қолданылады. Мұндай жағдайда маусымдық ауытқу үлгісі Фурье гармоникалары негізінде анықталады:

$$\hat{y} = a + b_1 \sin \alpha + b_2 \cos \alpha ,$$

мұндағы a, b_1, b_2 – теңдеу параметрлері, оларды ең кіші квадраттар әдісі бойынша анықтайды;

α – әр ай үшін өсіп отыратын бұрыш. Оны анықтау үшін 360 градусты 12 айға бөледі, сонда қаңтар айында $\alpha = 0$, ақпанда $\alpha = 30$, наурызда $\alpha = 60$, т.с.с болады.

7.6. Тренд негізінде болжам жасау

Динамикалық қатарларды талдау нәтижесінде алынған мәліметтер құбылыстың болашақта қалай дамидынына болжам жасауға мүмкіндік береді. Статистикалық болжам өткен мерзімде байқалған даму заңдылығы болжам жасалатын мерзімде де сақталады деген жорамалға негізделеді. Мұндай болжам *экстраполяция* деп аталады. Болжам дәлдігі болжамдау мерзіміне байланысты болады. Болжам жасалатын мерзім неғұрлым қысқа болса, экстраполяция сенімділігі соғұрлым жоғары болады., себебі құбылыстың даму шарттары қысқа мерзімде айтарлықтай өзгеріп үлгермейді. Сондықтан болжам жасалатын мерзімді тренд есептелетін база ұзақтығының үштен бір бөлігінен асырмаған дұрыс. Экстраполяция әдісі арқылы болжамның екі түрін жасауға болады:

- нүктелі;
- интервалды.

Нүктелік болжам көрсеткіш деңгейінің болжам жасалатын мерзімдегі нақты сандық мәнін анықтауды білдіреді, ал интервалды болжам деңгейдің сандық мәндерінің диапазонын, интервалын анықтауды көздейді. Болжам жасау негізі ретінде қандай бастапқы мәліметтер алынғанына байланысты экстраполяцияның мынадай әдістері қолданылады:

- орташа абсолютті өсім негізінде болжамдау;
- орташа өсу коэффициенті негізінде болжамдау;
- динамикалық қатарды аналитикалық тегістеу негізінде болжамдау.