ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Ерқара Жолдыбайұлы Айдос

Комплекс айнымалды функциялар теориясы және операциялық есептеулер

Алматы, 2015

УДК 511(075.8)
ББК 22.12я73
А 31

Қ.И.СӘТБАЕВ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ ТЕХНИКАЛЫҚ УНИВЕРСИТЕТ

Пікір жазғандар:

Ә.Сақабеков – ҚБТУ математика кафедрасының меңгерушісі, ф.-м.ғ.д., профессор

С. Мұхамбетжанов – Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті, «Дифференциалдық теңдеулер» кафедрасының меңгерушісі, ф.-м.ғ.д., профессор

Төреқожаев Ә.Н. – Қ.И.Сәтбаев атындағы ҚазҰТУ «Қолданбалы механика және машиналар құрылымдарының негіздері» кафедрасының меңгерушісі, ф.-м.ғ.д., проф., ҚР ҰИА және Нью-Йорк Академиясының академигі

Айдос Е.Ж.
А 31 Комплекс айнымалды функциялар теориясы және операциялық есептеулер: Оқу құралы / Е.Ж.Айдос – Алматы: Бастау, 2015. – 296 б.

ISBN 978-601-281-160-5

Оқу құралы жоғары оқу орындарының бакалавриат деңгейіндегі типтік оқу бағдарламасына сәйкес оқытудың кредиттік жүйесінің талаптарына сәйкес жазылған. Кітаптың құрылымы мынадай: теориялық материал (лекция); тәжірибелік сабақтарға арналған есептер мен тапсырмалар; типтңк есептерді орындау үлгілері; 30 нұсқадан тұратын үй тапсырмалары (ҮТ); бақылау жұмысына арналған тапсырмалар; қажетті анықтамалар мен формулалар. Кітап жоғары оқу орындарының студенттері мен оқыту-шыларына арналған.

УДК 511(075.8)
ББК 22.12я73

ISBN 978-601-281-160-5

Алғы сөз

Білім беру саласы кредиттік оқыту жүйесіне көшкелі оқулықтар мен оқу құралдарының құрылымына да едәуір өзгерістер ене бастады. Оқушының өз бетінше оқып, білім алуына қолайлы болуын көздеп, сонымен бірге оқытушының да жұмысына ыңғайлы болуы мақсатында қазіргі оқулықтарда теориялық материалдармен бірге тәжірибелік сабақтардың материалдары, типтік есептерді орындау үлгілері, бақылау жұмысына арналған материалдар және т.б. қажетті материалдар беріледі. Біз де жоғары математиканың арнайы бөлімдерінің бірі – комплекс айнымалды функциялар теориясы мен амалдық қисап бөліміне арналған кітабымызды осы аталған құрылымда жаздық. Әрине, қазіргі уақытта интернет арқылы қажетті материалдарды тауып алу қиын іс емес. Бірақ та, біріншіден, ондағы іздеген материалдардың барлығы дерлік шет тілінде немесе орыс тілінде ғана жазылған (қазақ тіліндегі материалдар жоқтың қасы), екіншіден, қағаз бетіндегі материалдар – оқулықтар мен оқу құралдары әлі де өзектілігін жойған жоқ.

Біз бұл кітапты жазу барысында көптеген белгілі оқулықтардың (мысалы, [1]-[3]) теориялық материалдарын, жоғары оқу орындарының қазіргі кездегі оқу бағдарламаларына сәйкес, кейбір әдістемелік өгерістер енгізе отырып пайдаландық. Сонымен бірге материалдың математикалық қатаңдығын сақтай отырып, оны оқушыға түсінікті, жеңіл тілмен жеткізуге тырыстық. Теоремалардың басым көпшілігінің дәлелдемелері келтірілген. Ал тәжірибелік сабақтарға немесе студенттердің өздік жұмысына арналған тапсырмаларды интернет арқылы іздеп тауып, пайдаландық (мысалы, [4]-[6]).

Теорема дәлелдеуінің немесе мысалдарды шығарудың басталуы мен аяқталуын сәйкес ▼ және ▲ белгілерімен көрсетіп отырдық.

Қазіргі кезде қазақша математикалық терминдер толық қалыптасып болмағандықтан, кітабымызда оқушының көңілінен шықпай жатқан терминдер бар болса, оларды бірігіп талқылауға дайынбыз. Біз қолданған математикалық терминдер 1999 ж. және 2014ж. жарық көрген [7]-[8] сөздіктерден алынды.

Автор

§ 1. Комплекс сандар

Комплекс сан деп теңдік түсінігі мен арифметикалық амалдар төмендегі 1)-4) ережелермен анықталған, $x+yi$ (немесе $x+iy$) түріндегі өрнекті айтады. Ықшамдылық үшін, комплекс санды бір әріппен белгілейді: $z = x + yi$, мұндағы *x, y* – нақты сандары *z* санының сәйкес **нақты** және **жорамал бөліктері** деп аталады және олар сәйкес $x = Rez$, $y = Imz$ арқылы белгіленеді (*Re* – лат. realis – нақты, *Jm* – лат. imaginaries – жорамал), ал *i* – **жорамал бірлік сан** деп аталады. Комплекс сандардың теңдігі мен оларға жасалатын арифметикалық амалдар келесі ережелер арқылы енгізілген:

1) **а)** $z_1 = x_1 + iy_1$ санының нақты бөлігі мен жорамал бөлігі $z_2 = x_2 + iy_2$ санының сәйкес нақты бөлігі мен жорамал бөлігіне тең болса, олар өзара тең деп аталады және $z_1 = z_2$ символымен белгіленеді: $(z_1 = z_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2; \end{cases}$

б) $x + 0i = x, \quad 0 + yi = yi, \quad 1i = i;$

2) $(x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2);$

3) $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1);$

4) $\dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad x_2^2 + y_2^2 \neq 0.$

Анықтама. $z = x + iy$ комплекс санының *n* рет көбейтіндісі осы санның *n*-ші дәрежесі деп аталады және $z^n = (x+iy)^n$ символымен белгіленеді: $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ рет}} = (x+iy)^n$.

Осы анықтаманы және 1-б) мен 3) шарттарды пайдалана отырып, i^2 дәрежесін табайық

$i^2 = i \cdot i = 1i \cdot 1i = \left(0+1i\right)\cdot\left(0+1i\right) = \left(0\cdot 0 - 1\cdot 1\right) + \left(0\cdot 1 + 1\cdot 0\right)i = -1 + 0i = -1,$ яғни $i^2 = -1$. Сонымен, жорамал бірлік сан квадраты минус бірге тең комплекс сан екен.

Назар аударыңыз! Нақты сан – жорамал бөлігі нөлге тең комплекс сан (**1- б)** теңдіктерінің біріншісін қараңыз), олай болса, нақты сандар жиынымен салыстырғанда, комплекс сандар – кең жиын. Нақты сандар жиынында дискриминанты теріс квадрат теңдеудің түбірі болмайтыны белгілі, ал комплекс сандар жиынында олай емес, мысалы, $x^2 + 9 = 0$, яғни $x^2 = -9$ теңдеуінің түбірлері $x_1 = 3i$, $x_2 = -3i$; ал $x^2 + 2x + 5 = 0$ теңдеуінің түбірлері: $x_1 = -1 + 2i$, $x_2 = -1 - 2i$ (комплекс санның түбірі туралы төменде қарастырылады).

2) мен **3)** теңдіктерден нақты сандарды қосу және көбейту амалдарының барлық қасиеттері комплекс сандарға да қатысты орындалатынын, сонымен бірге комплекс сандарға жасалатын амалдар ($i^2 = -1$ теңдігін ескере отырып) алгебралық өрнектерге жасалатын амалдар сияқты орындалатынын көруге болады.

Мысалы,

$$\left(2-3i\right)\left(-5+2i\right) = 2\cdot(-5) + 2\cdot 2i + (-3)i\cdot(-5) + (-3)i\cdot 2i =$$

$$= -10 + 19i - 6i^2 = -4 + 19i.$$

$\overline{z} = x - iy$ саны $z = x + iy$ санына ***түйіндес*** деп аталады.

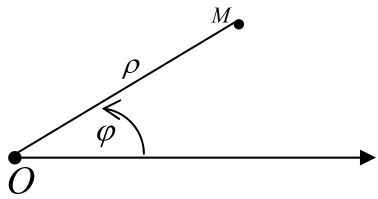
$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$ теңдігінің орындалатынын көру қиын емес.

Енді мына бір жайтқа назар аударыңыз! Комплекс сандарды бөлу үшін **4)** ережені қолданып жатпастан, бөлшектің алымы мен бөлімін бөлгіштің түйіндесіне көбейтсе болғаны. Мысалы,

$$\frac{2+5i}{4-3i} = \frac{(2+5i)\cdot(4+3i)}{(4-3i)\cdot(4+3i)} = \frac{8-15+20i+6i}{16+9} = \frac{-7+26i}{25} = \frac{-7}{25} + \frac{26}{25}i.$$

Әрбір $z = x + iy$ комплекс санына OXY жазықтығының (мұны ***комплекс сандар жазықтығы*** деп те атайды) $M(x, y)$ нүктесін және, керісінше, OXY жазықтығының әрбір (x, y) нүктесіне $x+iy$ комплекс санын сәйкес қоюға болады. Сондықтан $z = x + iy$ комплекс санының OXY жазықтығындағы геометриялық бейнесі – $M(x, y)$ нүктесі немесе $\overrightarrow{OM}$ радиус-векторы (1-сурет).

Алгебралық түрде жазылған комплекс сан деп $x+iy$ өрнегін айтады. Комплекс сандарды ***тригонометриялық*** немесе ***көрсеткіштік түрде*** де жазуға болады. Ол үшін алдымен жазықтықтағы нүктенің орнын поляр координаттары деп аталатын ρ, φ сандарымен анықтауға болатынын көрсетейік. Жазықтықта ***полюс*** деп аталатын O нүктесін және осы нүктеден шығатын сәулені (оны ***поляр өсі*** деп атайды) таңдап алсақ, жазықтықтың әрбір M нүктесіне екі санды**:** OM кесіндісінің ұзындығына тең ρ санын (***полярлық радиус***) және поляр өсі мен OM сәулесінің арасындағы бұрышқа тең φ санын (***полярлық бұрыш***) сәйкес қоюға болады (1-сурет).

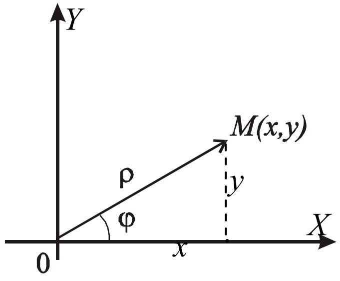


1-сурет

Бұл екі шама $0 \le \rho < +\infty$; $-\infty < \varphi < +\infty$ мәндеріне ие бола алады.

Егер жазықтықта тік бұрышты декарт координаттар жүйесінің бас нүктесін O полюсімен, OX өсінің оң бағытын поляр өсімен беттесетіндей етіп, ал OY өсінің оң бағытын $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ бұрышына сәйкес келетіндей етіп алсақ, онда бұл екі жүйе координаттарының арасындағы байланыс келесі теңдіктермен өрнектеледі (2-сурет):

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (1)$$



2-сурет

Ал бұл теңдіктерден келесі теңдік шығады

$$z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (2)$$

(2) теңдіктің оң жағындағы өрнек *комплекс санның* **тригонометриялық түрі** деп аталады.

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ санын $z = x + iy$ комплекс санының ***модулі*** деп атайды және оны $|z|$ арқылы белгілейді: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$;

φ бұрышы (радиан өлшемінде) z комплекс санының **аргументі** деп аталады және $Argz$ арқылы белгіленеді. Оның мәндері $(-\pi + 2k\pi, \ \pi + 2k\pi]$, $k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ ...$ аралықтарында жатады, ал мұндағы $k = 0$ мәніне сәйкес алынған $(-\pi, \ \pi]$ аралығындағы аргумент $\arg z$ арқылы белгіленеді және ол аргументтің ***бас мәні*** деп аталады: $-\pi < \arg z \le \pi$.

Егер $z = 0$ болса, онда $|0| = 0$, ал $\arg 0$ өрнегінің мағынасы жоқ.

Ескерту! Аргументтің бас мәні $\arg z$ – бірмәнді функция, ал $\varphi = \text{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi$, $k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, ...$ – көп мәнді функция. Олай болса, ***z-тің әрбір мәніне полярлық радиус ρ-ның жалғыз мәні***

мен полярлық бұрыш $\varphi = \mathrm{Arg}\, z$ ***-тің саны ақырсыз мәндері сәйкес*** келеді.

Аргументтің бас мәнін келесі қатыстарды пайдаланып табуға болады:

$$\arg z = \begin{cases} \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}, \ \ x > 0, \\ \pi + \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}, \ \ x < 0, \ \ y > 0, \\ -\pi + \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}, \ \ x<0, \ \ y < 0. \end{cases}$$

Ал $x = 0, y > 0$; $x = 0, y < 0$ немесе $y = 0, x > 0$; $y = 0, x < 0$ жағдайларында, *комплекс санның аргументін оның геометриялық бейнесі арқылы табуға болады*. Мысалы, $\arg 4i = \dfrac{\pi}{2}$, мұнда $x = 0, \ y > 0$; $\arg(-2) = \pi$, мұнда $y = 0, \ x = -2 < 0$, т.с.с.

Мысал. Берілген комплекс санды тригонометриялық түрде жазу керек: $-1 + \sqrt{3}\ i$.

▼ Мұнда $x = -1 < 0, \ \ y = \sqrt{3} > 0$ болғандықтан,

$$\arg(-1 + \sqrt{3}\ i) = \pi + arctg\frac{\sqrt{3}}{-1} = \pi - arctg\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3},$$

ал $\left|-1 + \sqrt{3}\ i\right| = \sqrt{1 + 3} = 2.$ Олай болса,

$$-1 + \sqrt{3}\ i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right). \quad ▲$$

Жоғарыдағы ескертуге сәйкес, келесі анықтаманы беруге болады.

Анықтама. *Модульдері тең, ал аргументтері тең немесе олардың айырымы 2π-ге еселі комплекс сандар өзара тең:*

$$z_1 = z_2 \ \Leftrightarrow \ |z_1| = |z_2|, \ \ Argz_1 = Argz_2 + 2k\pi, \ \ k = 0, \ \pm 1, \ ...$$

$$(\ z_1 = z_2 \ \Leftrightarrow \ \rho_1 = \rho_2, \ \ \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \ \ k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ ....).$$

Мысалы, $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{-17\pi}{3} + i\sin\frac{-17\pi}{3}\right)$ сандары тең, өйткені $|z_1| = |z_2| = 2$, ал $Argz_1 = \frac{\pi}{3}$, $Argz_2 = \frac{-17\pi}{3}$ және $Argz_1 - Argz_2 = \frac{\pi}{3} - \frac{-17\pi}{3} = 6\pi = 3\cdot 2\pi.$

Анықтама бойынша,

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad -\infty < \varphi < +\infty. \tag{3}$$

Бұл 2π периодты функция: $e^{i(\varphi+2\pi)} = e^{i\varphi}$ (көз жеткізіңіз) және келесі теңдіктер орындалады

$$e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2}, \qquad e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}}, \tag{4}$$

(тексеріңіз), ал бұл екі теңдіктен $e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}$ теңдігі шығады.

Ал (3), (4) теңдіктерден ***Муавр формуласын*** алуға болады:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \qquad (\textbf{\textit{Муавр}}\ \text{ф.})$$

***Назар аударыңыз*!** Кез келген $\varphi \in [0;2\pi)$ үшін $\left|e^{i\varphi}\right| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$ теңдігі орындалатындықтан, φ бұрышы $[0;2\pi)$ аралығында өзгергенде, $z = e^{i\varphi}$ нүктесі радиусі 1-ге тең, центрі $z = 0$ нүктеде болатын шеңберді сызады.

(2), (3) теңдіктерден келесі теңдік шығады:

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad \rho \ge 0. \tag{5}$$

Мұндағы $\rho = |z|$; ал $\varphi = Argz = \arg z + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

(5) теңдіктің оң жағындағы өрнек *комплекс санның* **көрсеткіштік түрі** деп аталады.

Сонымен, комплекс санды үш түрде жазуға болады екен:

$$z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}.$$

Мысал. Комплекс санды көрсеткіштік түрде жазу керек:

а)$1+i$; ә) i; б)1; в)-1.

▼ а) $\rho=|1+i|=\sqrt{2}$, $\varphi=\arg(1+i)=\mathrm{actg}\frac{1}{1}=\frac{\pi}{4}$ болғандықтан,

$$1+i=\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}};$$

ә) $\rho=|i|=1,\ \varphi=\arg i=\frac{\pi}{2}$ болғандықтан, $i=e^{i\frac{\pi}{2}}$;

б) $\rho=|1|=1,\ \varphi=\arg 1=0,$ демек, $1=e^{i0}$;

в) $\rho=|-1|=1,\ \varphi=\arg(-1)=\pi\ \Rightarrow\ -1=e^{i\pi}$. ▲

Ескерту. *Жалпы жағдайда, кез келген комплекс айнымал* $z=x+iy$ *үшін* e^z *функциясын келесі теңдікпен анықтайды:* $e^z=e^x\cdot e^{iy},\ \ z\neq 0.$ *Бұдан* (3) *теңдікті ескеріп,*

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y) \tag{6}$$

аламыз.

Сонымен бірге кез келген z комплекс саны үшін ***Эйлер формулалары*** *деп аталатын келесі теңдіктер орындалады:*

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z,\qquad e^{-iz}=\cos z-i\sin z. \tag{3$'$}$$

Өз кезегінде, бұл екі теңдіктен келесі формулалар шығады:

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\quad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}. \tag{7}$$

Кез келген $z_1=\rho_1 e^{i\varphi_1}$ және $z_2=\rho_2 e^{i\varphi_2}$ комплекс сандары үшін келесі теңдіктердің орындалатынын тексеру қиын емес:

$$z_1z_2=\rho_1 e^{i\varphi_1}\cdot\rho_2 e^{i\varphi_2}=\rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}; \tag{*}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}}=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},\qquad z_2\neq 0. \tag{**}$$

Бұл теңдіктерден келесі ереже шығады. ***Комплекс сандарды көбейту үшін,*** *олардың модульдерін көбейтіп, аргументтерін қосу керек;* ***комплекс сандарды бөлу үшін****, олардың модульдерін (бөлінгіштің модулін бөлгіштің модуліне) бөліп, аргументтерін (бөлінгіштің аргументінен бөлгіштің аргументін) шегеру керек****.***

Осы ережені пайдаланып, комплекс санның натурал дәрежесінің формуласын жаза аламыз:

$$z^n = \left(\rho e^{i\varphi}\right)^n = \rho^n e^{in\varphi}. \tag{8}$$

Мысал. $(-1+\sqrt{3}i)^{12}$ табу керек.

▼ Берілген комплекс санды көрсеткіштік түрде жазып, (8) формуланы пайдаланамыз. Бұл санның модулі мен аргументінің бас мәні: $\rho = \left|-1+\sqrt{3}i\right| = \sqrt{1+3} = 2;\ \ \varphi = \arg(-1+\sqrt{3}i) =$

$= \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{-1} = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$ тең болғандықтан, $(-1+\sqrt{3}i)^{12} =$

$$= \left(2\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{12} = 2^{12}\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}\cdot 12} = 2^{12}e^{i8\pi} =$$

$$= 2^{12}\cdot e^{i0} = 2^{12}(\cos 0 + i\sin 0) = 2^{12}.$$ ▲

Келесі теңдіктердің орындалатынын тексерейік

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}; \quad \overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}; \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \quad z_2 \neq 0. \tag{9}$$

▼ $\overline{\rho e^{i\varphi}} = \overline{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \rho e^{-i\varphi}$

теңдігін ескерсек, $\overline{z_1 z_2} = \overline{\rho_1 e^{i\varphi_1}\cdot\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \rho_1\rho_2\overline{e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}} = \rho_1\rho_2 e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)} =$

$= \rho_1 e^{-i\varphi_1}\rho_2 e^{-i\varphi_2} = \overline{\rho_1 e^{i\varphi_1}}\cdot\overline{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ аламыз. Бөлінді үшін де дәлелдеуі осындай, ал қосындыға қатысты теңдікті комплекс санның алгебралық түрі арқылы тексеруді оқушыға ұсынамыз. ▲

Анықтама. $z = \rho e^{i\varphi}$ комплекс санының ***n*-ші дәрежелі түбірі** деп *n*-ші дәрежесі *z*-ке тең $w = \sqrt[n]{z}$ комплекс санды айтады.

Осы $z = \rho e^{i\varphi}$ комплекс санының *n*-ші дәрежелі түбірін табу формуласын шығарайық. Егер $\sqrt[n]{z} = w = re^{i\theta}$ болса, онда анықтамаға сәйкес, $w^n = (re^{i\theta})^n = z = \rho e^{i\varphi}$ тең. Бұдан

$$r^n e^{i\theta n} = \rho e^{i\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad r^n = \rho,\ \theta n = \varphi + 2k\pi,\quad k = 0, \pm 1, \ldots. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad r = \sqrt[n]{\rho}, \qquad \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},\ \ k = 0, \pm 1, \ldots.$$

Олай болса, $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$. Бұл өрнек $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$ үшін әртүрлі n мәнге ие болады да, ал $k = \pm n,\ \pm (n+1), \ldots$ және $k = -1, -2, \ldots, -(n-1)$ үшін ($e^{i\varphi}$ функциясының периоды $2\pi k,\ \ k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ шамасына тең болуына байланысты) бұл мәндер қайталанады. Сондықтан $\sqrt[n]{z}$ түбірінің әртүрлі n мәнін алсақ жеткілікті

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{10}$$

Мұндағы $\sqrt[n]{\rho}$ шамасы $\rho = |z|$ нақты санының *n*-ші дәрежелі арифметикалық түбірі (келесі мысалды қараңыз).

1-Мысал. $\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1 \cdot e^{i0}} = \sqrt[4]{1} \cdot e^{i\frac{0 + 2k\pi}{4}}$, $k = 0, 1, 2, 3.$

$$k = 0,\ \ w_0 = e^{i0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1;$$

$$k = 1,\ \ w_1 = e^{i\frac{2\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = i\ ;$$

$$k = 2,\ \ w_2 = e^{i\frac{4\pi}{4}} = e^{i\pi} = \cos\pi + i \sin\pi = -1\ ;$$

$$k=3,\ \ w_3=e^{i\frac{6\pi}{4}}=e^{i\frac{3\pi}{2}}=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i.$$

Назар аударыңыз! Осы мысалдағы $\sqrt[4]{1}=\sqrt[4]{1\cdot e^{i0}}=\sqrt[4]{1}\cdot e^{i\frac{0+2k\pi}{4}}$ теңдігінің сол жағындағы $\sqrt[4]{1}$ өрнегінің (1 комплекс санының төртінші дәрежелі түбірінің) төрт мәні бар, ал оң жағындағы $\sqrt[4]{1}$ өрнегінің (1 нақты санының арифметикалық түбірінің) бір мәні бар!

2-мысал. $$\sqrt[3]{1+i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\cdot e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}},\ \ k=0,1,2.$$

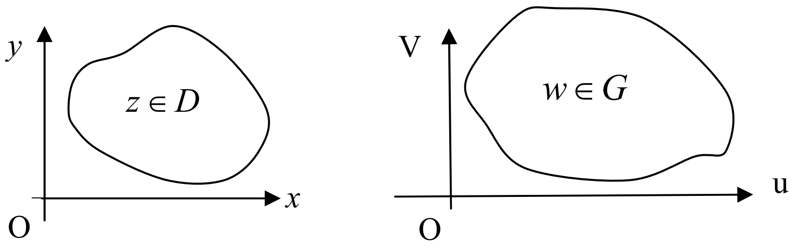
$$k=0,\ \ w_0=\sqrt[6]{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{12}};$$

$$k=1,\ \ w_1=\sqrt[6]{2}\cdot e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3}}=\sqrt[6]{2}\cdot e^{i\frac{9\pi}{12}}=\sqrt[6]{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

$$k=2,\ \ w_2=\sqrt[6]{2}\cdot e^{i\frac{17\pi}{12}}.$$

§ 2. Комплекс айнымалды функция

$z = x + iy$ және $w = u + iv$ комплекс сандарының сәйкес екі жазықтығы берілсін (3-сурет).



3-сурет

Егер әрбір $z \in D$ комплекс санына қандай да бір f ережесі бойынша $w \in G$ саны сәйкес қойылса, онда D жиынында D жиынын G жиынының ішіне бейнелейтін бірмәнді функция берілді дейді және оны $w = f(z)$ арқылы белгілейді.

D жиыны $f(z)$ функциясының анықталу жиыны (аймағы) деп аталады. Егер G жиынының әрбір нүктесі $f(z)$ функциясының мәні болса, онда G осы функцияның мәндер жиыны немесе D жиынының f функция бойынша бейнесі деп аталады: $G = f(D)$. Бұл жағдайды f функциясы D жиынын G жиынына бейнелейді дейді.

Мұнда $w = f(z) = u + iv$, сонымен бірге u мен v айнымалдарының $z = x + iy$, яғни (x, y) нүктесіне тәуелділігін ескерсек, онда функцияны $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $(x, y) \in D$ түрінде жазуға болатынын көреміз. Мұндағы $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $(x, y) \in D$ нақты мәнді функциялары f функциясының сәйкес нақты және жорамал бөліктері: $u\left(x, y\right) = \operatorname{Re} f(z)$, $v\left(x, y\right) = \operatorname{Im} f(z)$.

Мысалы, $w = z^2$ **дәрежелік функция** үшін, $z^2 = \left(x + iy\right)^2 = = x^2 - y^2 + i2xy$, яғни $\operatorname{Re} z^2 = x^2 - y^2$, $\operatorname{Im} z^2 = 2xy$;

$w = e^z$ – **көрсеткіштік функциясы** үшін $w = e^z = e^x(\cos y + + i\sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y$, (§ 1 (6) теңдікті қараңыз), яғни $\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y$, $\operatorname{Im} e^z = e^x \sin y$. Бұл функция нақты айнымалды көрсеткіштік функцияның қасиеттеріне ие: $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$; $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$; $\left(e^z\right)^n = e^{nz}$. Сонымен бірге ол периоды $T = 2\pi i$ тең периодты функция: $e^{z+2\pi i} = e^z$. Шынында да,

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+iy+2\pi i} = e^{x+i\left(y+2\pi\right)} = e^x \cdot e^{i\left(y+2\pi\right)} =$$
$$= e^x \left(\cos\left(y + 2\pi\right) + i\sin\left(y + 2\pi\right)\right) = e^x \left(\cos y + i\sin y\right) = e^x \cdot e^{iy} =$$
$$= e^{x+iy} = e^z.$$

Енді **тригонометриялық функцияларды** қарастырайық (§1 (7) теңдіктерді қараңыз): $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

Бұл функциялардың көмегімен тангенс және котангенс функциялары анықталады: $tgz = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, $ctgz = \dfrac{\cos z}{\sin z}$.

Тригонометриялық функциялар үшін нақты тригонометриялық функциялардың барлық қасиеттері сақталады. Мысалы,

$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$; $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$; $\cos\left(z + 2\pi\right) = \cos z$ және т.с.с Шынында да, мысалы, $\cos^2 z + \sin^2 z = \left(\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 =$

$$=\frac{e^{i2z}+2e^{iz}e^{-iz}+e^{-i2z}}{4}-\frac{e^{i2z}-2e^{iz}e^{-iz}+e^{-i2z}}{4}=\frac{4}{4}=1.$$ Қалғандары да осылай дәлелденеді (өз бетіңізше дәлелдеңіз).

Нақты айнымалды гиперболалық функцияларға ұқсас етіп комплекс айнымалды **гиперболалық функцияларды** анықтайық:

$$\mathrm{c}hz=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2},\ \sin z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2i},\ thz=\frac{\mathrm{s}hz}{\mathrm{c}hz},\ cthz=\frac{\mathrm{c}hz}{shz}.$$

Гиперболалық функциялар үшін де нақты айнымалды гиперболалық функциялардың қасиеттері сақталады. Мысалы,

$$\mathrm{c}h^2z-sh^2z=\left(\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{e^{2z}+2e^{z}e^{-z}+e^{-2z}-e^{2z}+2e^{z}e^{-z}-e^{-2z}}{4}=\frac{4}{4}=1.$$

Тригонометриялық функциялар мен гиперболалық функциялар арасындағы байланыстар келесі формулалармен өрнектеледі:

$$\cos iz=chz,\quad chiz=cosz,\quad \sin iz=i\cdot shz,\quad shiz=i\cdot\sin z. \qquad (1)$$

Бұл теңдіктердегі i жорамал бірлік сан нақты тригонометриялық функциялардағы минус «-» таңбасын елестетеді. Мысал ретінде бірінші теңдікті дәлелдейік: $\cos iz=\frac{e^{i\cdot iz}+e^{-i\cdot iz}}{2}=\frac{e^{-z}+e^{z}}{2}=chz.$

Қалғандары да осылай дәлелденеді (өз бетіңізше дәлелдеңіз).

Мысал.

$$\sin(2+i)=\sin 2\cdot\cos i+\cos 2\cdot\sin i=\sin 2\cdot\mathrm{c}h1+i\cos 2\cdot\mathrm{s}h1.$$

Логарифмдік функция $w=Lnz$ – ол $e^{w}=z$ көрсеткіштік функциясына кері функция. Оны анықтау үшін $w=u+iv=Lnz$ функциясының нақты және жорамал бөліктерін тапсақ болғаны. Ол үшін $e^{w}=z$ теңдігін пайдаланамыз:

$e^{u+iv}=e^{u}\cdot e^{iv}=e^{u}\left(\cos v+i\cdot\sin v\right)=z.$ Бұдан, екі комплекс санның теңдігінің анықтамасын пайдаланып,

$e^u = |z|,\ v = Argz = \arg z + 2k\pi$ аламыз. Бірінші теңдіктен $u = \ln|z|$ шығады. Олай болса, кез келген $z \neq 0$ сандары үшін

$$Lnz = \ln|z| + i \cdot Argz = \ln|z| + i\left(\arg z + 2k\pi\right),\quad k = 0, \pm1, \pm2, \dots \quad (2)$$

Бұдан, берілген z санына логарифмдік функцияның ақырсыз көп мәндері сәйкес келетінін көреміз. Бұлардың ішіндегі $k = 0$-ге сәйкес функцияны **логарифмдік функцияның бас мәні** деп атайды да, $\ln z$ арқылы белгілейді: $\ln z = \ln|z| + i \cdot \arg z$.

Мысалы, $Ln(-1) = \ln|-1| + i\left(\arg(-1) + 2k\pi\right) =$

$$= \ln 1 + i\left(\pi + 2k\pi\right) = i\left(1 + 2k\right)\pi,\quad k - \text{бүтін сандар.}$$

Логарифмдік функцияның қасиеттері:

$$Ln\left(z_1 z_2\right) = Lnz_1 + Lnz_2;\qquad Ln\frac{z_1}{z_2} = Lnz_1 - Lnz_2.$$

Бұны комплекс сандардың екі жиынының теңдігі деп түсіну керек.

Мысалы, бірінші теңдікті дәлелдейік.

Анықтама бойынша $Ln\left(z_1 z_2\right) = \ln|z_1 z_2| + iArg\left(z_1 z_2\right)$, бұдан $\ln|z_1 z_2| = \ln|z_1||z_2| = \ln|z_1| + \ln|z_2|$, $Arg\left(z_1 z_2\right) = Argz_1 + Argz_2$ қатыстары орындалатындықтан, жоғарыдағы бірінші теңдікті аламыз.

Кез келген комплекс а саны мен z саны үшін $a^z = e^{z \cdot Lna}$.

Мысалы,

$$i^i = e^{iLni} = e^{i\cdot\left(\ln|i| + iArgi\right)} = e^{i\cdot(\ln 1 + i\left(\arg i + 2k\pi\right))} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k},\quad k - \text{бүтін сандар.}$$

Кері тригонометриялық функциялар тригонометриялық функцияларға кері функция ретінде анықталады (мысалы, егер $z = \sin w$ берілсе, онда $w = Arc\sin z$).

$$Arc\sin z = -i \cdot Ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right); \quad (3)$$

$$Arc\cos z = -i \cdot Ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right); \tag{4}$$

$$Arctgz = -\frac{i}{2} \cdot Ln\frac{1+iz}{1-iz}; \tag{5}$$

$$Arcctgz = \frac{i}{2} \cdot Ln\frac{z-1}{z=1}. \tag{6}$$

Назар аударыңыз! Логарифмдік функция арқылы өрнектелген функциялар – көп мәнді болады.

Мысалы, (3) теңдікті дәлелдейік (қалған теңдіктер де осылай дәледенеді): $z = \sin w = \dfrac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$. Бұдан $e^{iw} - 2iz - e^{-iw} = 0$ немесе $e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$ аламыз. Бұл теңдеуді шеше отырып, (3) теңдікке келеміз.

Мысал.

$$Arc\cos 1 = -i \cdot Ln\left(1 + \sqrt{1^2 - 1}\right) = -i \cdot Ln1 = -i \cdot \left(\ln 1 + i \cdot Arg1\right) =$$

$= -i \cdot i2k\pi = 2k\pi,\ \ k -$ бүтін сандар.

Комплекс айнымалды функциялардың шегі және үзіліссіздігі.

Егер

$$\lim_{|z-z_0| \to 0} \left| f(z) - A \right| = 0 \tag{7}$$

теңдігі орындалса, онда $w = f(z) = u\left(x, y\right) + iv\left(x, y\right)$ функциясының z_0 нүктесінде $A = a + ib$ санына тең шегі бар дейді және оны $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$ деп жазады.

Мұнда $\left| f(z) - A \right| = \sqrt{\left(u-a\right)^2 + \left(v-b\right)^2}$ теңдігін ескерсек, (7) теңдік $\lim\limits_{|z-z_0| \to 0} \sqrt{\left(u-a\right)^2 + \left(v-b\right)^2} = 0$ түріне көшеді. Ал $z = \left(x, y\right),\ \ z_0 = \left(x_0, y_0\right)$ деп алсақ, бұл теңдік келесі қос теңдікке парапар:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = a, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = b. \tag{8}$$

Комплекс айнымалды $f(z)$ және $g(z)$ функцияларының шектері үшін нақты мәнді функциялар шектерінің келесі қасиеттері сақталады: егер $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)$ шектері бар болса, онда $\lim\limits_{z\to z_0}\left[f(z)\pm g(z)\right]$, $\lim\limits_{z\to z_0}\left[f(z)g(z)\right]$, $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}$ шектері де бар және келесі теңдіктер орындалады:

$$\lim_{z\to z_0}\left[f(z)\pm g(z)\right] = \lim_{z\to z_0} f(z) \pm \lim_{z\to z_0} g(z);$$

$$\lim_{z\to z_0}\left[f(z)g(z)\right] = \lim_{z\to z_0} f(z) \lim_{z\to z_0} g(z);$$

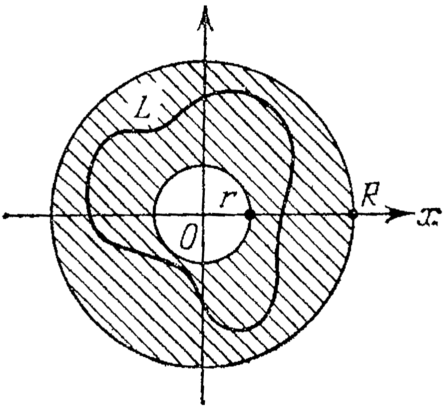
$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)}, \qquad \lim_{z\to z_0} g(z) \neq 0.$$

Анықтама. Егер z_0 нүктесінде және оның маңайында анықталған f функциясы үшін $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$ теңдігі орындалса, онда $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ функциясы z_0 нүктесінде үзіліссіз деп аталады.

Мұндағы $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$ келесі қос теңдікке парапар $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0)$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0)$ болғандықтан, f функциясының z_0 нүктеде үзіліссіздігі u, v функцияларының (x_0, y_0) нүктесіндегі үзіліссіздікке парапар. Ал жоғарыда арифметикалық амалдарға қатысты теңдіктерге сүйенсек, z_0 нүктесінде үзіліссіз $f(z)$ және $g(z)$ функцияларының қосындысы, айырымы, көбейтіндісі және бөліндісі де осы нүктеде үзіліссіз болатынын көреміз.

§ 3. Комплекс айнымалды функцияның туындысы

Аймақ деп байланысты ашық жиынды айтады (мысалы, Айдос Е.Ж. «Жоғары математика-3, «Бастау», 2015 ж. 9.1.1. п. қараңыз). Егер D аймақта жүргізілген кез келген үзіліссіз, өзімен-өзі қиылыспайтын, тұйық қисықпен шектеліп тұрған G аймағы толығымен D аймағында жатса, онда D аймағы ***бірбайланысты деп*** аталады. Бұл қасиетке ие емес аймақ ***көпбайланысты*** деп аталады. Мысалы, ашық шар – бір байланысты. Ал $D=\{z:2<|z|<5\}$ – аймағы (сақина) көпбайланысты (екібайланысты), өйткені аймақта жатқан L қисығы шектеп тұрған аймақ $D=\{z:2<|z|<5\}$ аймағында толығымен жатпайды (4-сурет).



4-сурет

Комплекс жазықтықтың D аймағында бірмәнді $w=f(z)$ функциясы берілсін.

$f(z)$ функциясының $z\in D$ нүктедегі туындысы деп $\Delta z-$ аргумент өсімшесі нөлге ***кез келген тәсілмен ұмтылғандағы***

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=f'(z) \qquad (1)$$

түріндегі шекті айтады.

Мұндағы $\Delta z -$ аргумент өсімшесінің нөлге ұмтылу тәсілдерінің саны – ақырсыз, бірақ сол жағдайдың барлығында (1) шек бар болуы керек.

Бұл анықтамадан және комплекс айнымалды функцияның шегінің қасиеттерінен дифференциалдық есептеулердегі қосындының, айырымның, көбейтіндінің, бөліндінің, кері функцияның, күрделі функция туындыларының ережелері комплекс айнымалды функция үшін де сақталатынын айтуға болады.

Теорема. $w = f(z) = u\left(x, y\right) + iv\left(x, y\right)$ функциясы $z = x + iy = \left(x, y\right) \in D$ нүктесінің маңайында анықталсын, сонымен бірге оның $u -$ нақты және $v -$ жорамал бөліктері $\left(x, y\right)$ нүктесінде дифференциалдансын. Онда $w = f(z)$ функцияның осы нүктеде туындысы бар болуы үшін келесі шарттардың орындалуы қажетті және жеткілікті:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2}$$

(2) теңдіктерді Коши-Риман немесе Даламбер-Эйлер шарттары деп атайды. Мұндағы u, v функцияларын D аймағында **өзара түйіндес** деп атайды.

▼ ***Қажеттілігі.*** Функцияның туындысы z нүктесінде бар болсын: $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$, мұндағы

$$\Delta w = \left[u\left(x + \Delta x, y + \Delta x\right) - u\left(x, y\right)\right] + i\left[v\left(x + \Delta x, y + \Delta x\right) - v\left(x, y\right)\right].$$

Сонымен, $\Delta z -$ аргумент өсімшесінің нөлге қандай тәсілмен ұмтылса да, шек $f'(z)$ санына тең болсын. Мысалы, егер

А) $\Delta z = \Delta x + i0 = \Delta x$ болса, онда $\Delta z \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta x \to 0$;

Ал егер Б) $\Delta z = 0 + i\Delta y = i\Delta y$ болса, онда $\Delta z \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad i\Delta y \to 0.$

А) жағдайында $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} =$$

$= \dfrac{\partial u}{\partial x} + i \dfrac{\partial v}{\partial x}$, ал Б) жағдайында $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z} =$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \right] =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} =$$

$= -i \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial y}$ аламыз. Алынған екі мән өзара тең болуы керек болатындығын ескеріп, (2) теңдіктерге келеміз.

Жеткіліктілігі. $u(x, y)$, $v(x, y)$ функциялары (x, y) нүктесінде дифференциалдансын және (2) шарттар орындалсын. Онда u, v функцияларының (x, y) нүктесіндегі өсімшелерін келесі түрлерде жазуға болады:

$$\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta x) - u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o_1(\rho), \ \rho \to 0,$$

$$\Delta v = v(x+\Delta x, y+\Delta x) - v(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + o_2(\rho), \ \rho \to 0,$$

мұндағы, $\rho = |\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, ал $o_1(\rho)$, $o_2(\rho)$ шамалары $\rho \to 0$ ұмтылғанда $\rho = |\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ақырсыз кішкенеге салыстырғанда, реті жоғары ақырсыз кішкенелер:

$\lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{o_1(\rho)}{\rho} = 0, \quad \lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{o_2(\rho)}{\rho} = 0.$ Сондықтан $\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = \dfrac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} =$

$= \left| o(\rho) = o_1(\rho) + io_2(\rho) \ \to \ 0, \ \rho \to 0 \right| =$

$$= \frac{= \dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\Delta y + i\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{o(\rho)}{\Delta z} =$$

$$= \frac{= \dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta y + i\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta y\right)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{o(\rho)}{\Delta z} =$$

$$= \frac{= \dfrac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + \dfrac{\partial v}{\partial x}(-\Delta y + i\Delta x)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\rho}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \underset{\rho \to 0}{o(1)}.$$

Мұндағы $\underset{\rho \to 0}{o(1)}$ белгісі $\rho \to 0$ ұмтылғанда ақырсыз кішкене функция. Сонымен, $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$, яғни функцияның z нүктесінде $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$ тең туындысы бар. ▲

Назарыңызға! Функцияның туындысын $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} =$

$= \dfrac{\partial v}{\partial y} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x} - i\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial y} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}$ түрлерінде де жазуға болады.

Теоремадан нақты айнымалды функцияның туындыларының формулалары комплекс айнымалды функция үшін де орындалатынын көруге болады. Мысалы, $f(z)=e^{z}=$
$=e^{x}(\cos y+i\sin y)=e^{x}\cos x+ie^{x}\sin y.$

Мұндағы $u=e^{x}\cos y,\quad v=e^{x}\sin y$ функциялары жазықтықтың кез келген нүктесінде дифференциалданады және $\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^{x}\cos y=$
$=\dfrac{\partial v}{\partial y},\qquad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-e^{x}\sin y=-\dfrac{\partial v}{\partial x},$ яғни Коши-Риман шарттары орындалады. Олай болса,

$$f'(z)=\left(e^{z}\right)'=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^{x}\cos x+ie^{x}\sin y=e^{z}.$$

Анықтама. Егер D аймақта анықталған $w=f(z)$ функцияның осы аймақтың әрбір нүктесінде туындысы бар болса, онда ол D *аймақта аналитикалық функция* деп аталады.

Мысалы, жоғарыдағы $f(z)=e^{z}$ функциясы – комплекс жазықтықта аналитикалық функция.

Егер D аймақта екінші ретті үзіліссіз дербес туындылары бар $f(x,y)$ функциясы Лаплас теңдеуін: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ қанағаттандырса, ол D *аймағында гармониялық функция* деп аталады.

D аймағында аналитикалық $w=f(z)=u\left(x,y\right)+iv\left(x,y\right)$ функциясының нақты және жорамал бөліктері осы аймақта *гармониялық функциялар* болатынын көрсетейік.

▼ Шынында да, $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$ шарттарынан

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$, $\quad \dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, ал бұдан $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ аламыз. Дәл осылай, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, $\quad \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$, ал бұдан $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$ аламыз. ▲

Бірақ $u(x,y)$, $v(x,y)$ қандай да бір аймақта гармониялық функциялар болғанымен, $u(x,y)+iv(x,y)$ бұл аймақта аналитикалық функция болмауы мүмкін. Мысалы, $u(x,y)=x$, $v(x,y)=-y$ – гармониялық функциялар, бірақ $f(z)=x+i(-y)=\overline{z}$ - аналитикалық функция емес, өйткені олар үшін Коши-Риман шарттары орындалмайды: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=1$, ал $\dfrac{\partial v}{\partial y}=-1$.

Егер аймақта қандай да бір гармониялық функция берілсе, $u(x,y)$немесе $v(x,y)$, онда екіншісін осы аймақта Коши-Риман шарттарын қанағаттандыратындай етіп таңдап алуға болады. Оны өзінің екі дербес туындысы арқылы немесе оның толық дифференциалы арқылы тұрақтыға дейінгі дәлдікпен анықтауға болады. Сондықтан аналитикалық функция нақты немесе жорамал бөлігі бойынша тұрақтыға дейінгі дәлдікпен анықталады.

Мысал. Жорамал бөлігі $v=2x^2-2y^2+x$ тең аналитикалық функцияны табу керек.

▼ Берілген функция үшін Коши-Риман шарттарын жазайық: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=-4y$, $\quad \dfrac{\partial v}{\partial x}=4x+1=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$. Бірінші теңдіктен $u(x,y)=-\int 4y\,dx=-4xy+\varphi(y)$ аламыз, мұндағы $\varphi(y)$ – қазірше кез келген функция. Бұл функцияны анықтау үшін алынған теңдікті y бойынша дифференциалдап алып, Коши-Риман шарттарының екіншісін пайдаланамыз: $\dfrac{\partial u\left(x,y\right)}{\partial y}=-4x+\varphi'(y)=-4x-1$. Бұдан $\varphi'(y)=-1 \;\Rightarrow\; \varphi(y)=-y+C$ аламыз. Табылған функцияның өрнегін орнына қоямыз: $u\left(x,y\right)=-4xy-y+C$. Олай болса,

$$w=u\left(x,y\right)+iv(x,y)=-4xy-y+C+i\left(2x^2-2y^2+x\right)=$$

$$=2i\left(x^2-y^2+2ixy\right)+i\left(x+iy\right)+C=2iz^2+iz+C. \quad \blacktriangle$$

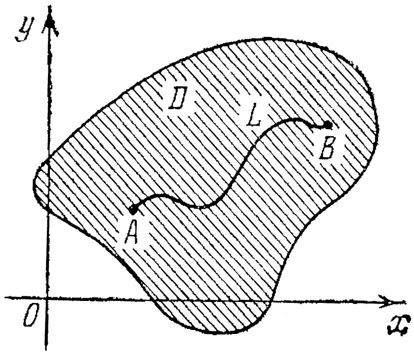
Назарыңызға! Берілген бір гармониялық функция бойынша аналитикалық функция құру туралы төменде, типтік есептер шығару үлгілерінде қарастырылады.

§ 4. Комплекс айнымалды функцияларды интегралдау

D аймағында анықталған $w = f(z) = u\left(x, y\right) + iv\left(x, y\right)$ функциясы берілсін. $L \subset D$ басы – A нүктесі, ал соңы B нүктесі болатын тегіс қисық және ол $z = z(t) = x(t) + iy(t), \;\; \alpha \le t \le \beta$ – векторлық немесе оған парапар параметрлік:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta \tag{1}$$

теңдеулермен берілсін (5-сурет).



5-сурет

Мұнда $t = \alpha$ мәні – қисықтың $A = z\left(\alpha\right)$ нүктесіне, $t = \beta$ мәні қисықтың $B = z\left(\beta\right)$ нүктесіне сәйкес келеді. Ал $t = \alpha$ -дан $t = \beta$ – ға дейінгі мәндерге ($\alpha < t < \beta$) сәйкес нүкте қисық бойымен, A-дан B нүктесіне қарай орын ауыстырады. Басқаша айтқанда, $L \subset D$ қисығының бағыты t параметрінің α -дан β -ге дейін өзгеруіне сәйкес келеді.

$w = f(z) = u\left(x, y\right) + iv\left(x, y\right)$ функциясының $L \subset D$ қисығы бойынша интегралы келесі түрде анықталады:

$$\int_L f(z)dz = \int_L (u+iv)\left(dx+idy\right) = \int_L \left(udx - vdy\right) + i\int_L \left(vdx+udy\right) =$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[u\left(x(t),y(t)\right)x'(t) - v\left(x(t),y(t)\right)y'(t)\right]dt =$$

$$+i\int_\alpha^\beta \left[v\left(x(t),y(t)\right)x'(t) + u\left(x(t),y(t)\right)y'(t)\right]dt. \qquad (2)$$

Мұнда $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ және $u\left(x(t),y(t)\right) = u(z(t))$ болатынын ескеріп, (2) теңдікті қысқаша жазуға болады:

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f\left[z(t)\right]z'(t)dt. \qquad (3)$$

Сонымен, комплекс айнымалды функцияның интегралы – екі қисықсызықты интегралдардың қосындысы және оны есептеу жай интегралдарды есептеуге әкеледі екен.

Жоғарыдағы интегралдар кез келген үзіліссіз $f(z)$ фунция және кез келген L тегіс қисығы үшін – бар (тегіс қисық ұғымын Айдос Е.Ж. «Жоғары математика-2», § 5.1 қараңыз, «Бастау», 2015).

Мысал. Интегралды есептеу керек: $\int_L \overline{z}dz$, мұнда L арқылы $y = x^2$ параболасының $O\left(0,0\right)$ және $A\left(1,1\right)$ нүктелерінің арасындағы бөлігі белгіленген.

▼ Интегралдау қисығын $L: \begin{cases} x = x, \\ y = x^2, \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$ (мұнда x – параметр) түрінде жазуға болатындықтан:

$$\int_L \overline{z}dz = \int_L \left(x-iy\right)\left(dx+idy\right) = \int_0^1 \left(x-ix^2\right)\left(dx+i2xdx\right) =$$

$$= \int_0^1 \left(x-ix^2\right)\left(1+i2x\right)dx = \int_0^1 (x+2x^3+ix^2)dx = \left.\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2} + i\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = 1 + i\frac{1}{3}.$$

шығады. ▲

Комплекс айнымалды функциялардың интегралдарының қасиеттері.

Егер L – құрақты тегіс қисығы $L_1, L_2, ..., L_n -$ бағытталған тегіс бөліктерден құралса, онда анықтама бойынша келесі теңдік орындалады:

$$\int_L f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{L_k} f(z)dz. \qquad (4)$$

1) Қисықсызықты интегралдардың қасиеттеріне сүйеніп, келесі теңдікті алуға болады: $\int_L f(z)dz = -\int_{L_-} f(z)dz,$ мұнда L_- арқылы L қисығымен беттесетін, бірақ бағыты L қисығының бағытына қарама-қарсы қисық белгіленген.

2) $\int_L \left[A \cdot f(z) + B \cdot g(z) \right] dz = A\int_L f(z)dz + B\int_L g(z)dz,$

$A, B -$ тұрақты сандар.

3) Егер $z \in L$ нүктелері үшін $\left| f(z) \right| \le M$ орындалса, онда

$\left| \int_L f(z)dz \right| \le Ml,$ мұндағы $l -$ L қисығының ұзындығы.

▼ Шынында да, жай интегралдардың қасиеттері бойынша

$$\left| \int_L f(z)dz \right| \le \left| \int_\alpha^\beta f\left[z(t) \right] z'(t)dt \right| \le \int_\alpha^\beta \left| f\left[z(t) \right] \right| \left| z'(t) \right| dt \le$$

$$\le \int_\alpha^\beta M \left| z'(t) \right| dt = M\int_\alpha^\beta \sqrt{x'\left(t\right)^2 + y'\left(t\right)^2}\; dt = Ml. \quad ▲$$

1-мысал. Егер $L -$ центрі z_0 нүктесінде, бағыты сағат тіліне қарсы бағытталған шеңбер болса, онда

$$\int_L \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i. \qquad (5)$$

▼ Радиусін ρ деп белгілеп, аталған шеңбердің параметрлік теңдеуін жазайық: $L:\begin{cases} x-x_0=\rho\cdot\cos t, \\ y-y_0=\rho\cdot\sin t, \quad 0\le t<2\pi, \end{cases}$ немесе $L:\left(x-x_0\right)+i\left(y-y_0\right)=\rho\left(\cos t+i\sin t\right),\ \ 0\le t<2\pi.$ Бұл теңдікті келесі түрде жазуға болады: $L:\ z-z_0=\rho e^{it},\quad 0\le t<2\pi.$

Олай болса, $\int_L \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho i e^{it}dt}{\rho i e^{it}} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$ ▲

2-мысал. Егер L центрі z_0 нүктесінде, бағыты сағат тіліне қарсы бағытталған шеңбер болса, онда $n\ne -1$ бүтін сандары үшін келесі теңдік орындалады:

$$\int_L \left(z-z_0\right)^n dz = 0. \qquad (6)$$

▼ $\int_L \left(z-z_0\right)^n dz = \int_0^{2\pi} \rho^{n+1} i e^{i(n+1)t}dt = i\rho^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}dt =$

$= i\rho^{n+1}\left.\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\right|_0^{2\pi} = 0,$ өйткені кез келген бүтін n саны үшін $e^{i2(n+1)\pi}=1.$ ▲

1-теорема (Коши). Егер $f(z)$ бір байламды D аймағында аналитикалық функция болса, онда $f(z)$ функциясының D аймағында жатқан кез келген тұйық Γ контур бойынша интегралы нөлге тең: $\int_L f(z)dz=0.$

▼ Теоерема шарты бойынша $f(z)=u+iv$ функциясының нақты және жорамал бөліктері үзіліссіз дифференциалданады және олар үшін Коши-Риман шарттары орындалады:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (7)$$

Бұл теңдіктерден $vdx+udy$ және $udx-vdy$ қандай да бір функциялардың толық дифференциалдары болатыны шығады (Айдос Е.Ж. «Жоғары математика-3», «Бастау», 2015, § 10.3-теореманы қараңыз). Олай болса, бұл өрнектердің тұйық контур бойынша қисықсызықты интегралдары нөлге тең (бұл да сонда, § 11.9 қараңыз): $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz=\int\limits_{\Gamma}(udx-vdy)+i\int\limits_{\Gamma}(vdx+udy)=0.$ ▲

Мысалы, z жазықтығында $z^n \ (n=0,1,2,...)$, e^z, $a^z \ (a>0)$, $\sin z$, $\cos z$, $\mathrm{s}hz$, $\mathrm{c}hz$ аналитикалық функциялар болғандықтан, теорема бойынша олардың кез келген тұйық құрақты-тегіс Г контур бойынша интегралдары нөлге тең:

$\int\limits_{\Gamma} z^n dz=0, \ \int\limits_{\Gamma} e^z dz=0, \ ....$

Коши теоремасынан келесі тұжырымдардар шығады:

1-салдар. Егер $f(z)$ бір байламды D аймағында аналитикалық функция, ал $\Gamma\subset D$ – бастапқы және соңғы нүктелері сәйкес z_1 және z_2 болатын құрақты-тегіс қисық болса, онда $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz$ интегралы Г қисығының пішініне емес, оның бастапқы және соңғы нүктелеріне ғана тәуелді:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz=\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz.$$

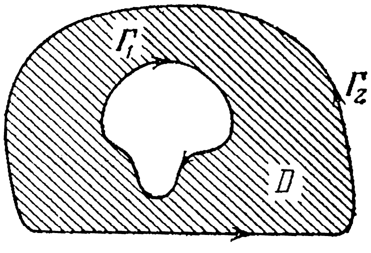
2-салдар. Егер $f(z)$ бір байламды D аймағында аналитикалық функция, ал $\hat{O}(z)$ оның осы аймақтағы қандай да бір алғашқы функциясы болса, онда кез келген $z_1, z_2\in D$ нүктелері үшін

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \hat{O}\left(z\right)\Big|_{z_1}^{z_2} = \hat{O}\left(z_2\right) - \hat{O}\left(z_1\right). \qquad (8)$$

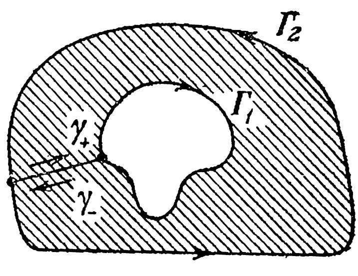
Мысалы, $\int_1^2 z^2 dz = \frac{z^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}.$

2-теорема. D аймағы Γ контурымен шектелсін. Ал Γ оң бағытталған (Γ контурымен айналғанда, D аймағы сол жақта қалады) құрақты-тегіс күрделі контур болсын. Онда $\overline{D} = D \cup \Gamma$ тұйық аймақта аналитикалық $f(z)$ функцияның Γ контур бойынша интегралы нөлге тең: $\int_{\Gamma} f(z)dz = 0.$

▼ 6-суретте D екібайланысты аймақ оң бағытталған құрақты-тегіс $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ контурмен шектелген.



6-сурет



7-сурет

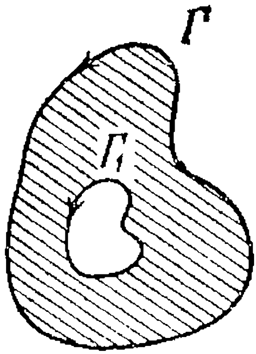
Γ_1 мен Γ_2 контурларын, 7-суретте көрсетілгендей, тегіс γ бөлікпен қосамыз. γ-ны қарама-қарсы екі тәсілмен бағыттаймыз: $\gamma_+,\ \gamma_-$. Нәтижесінде бағытталған $\Gamma_2 + \gamma_+ + \Gamma_1 + \gamma_-$ контурмен шектелген ***бірбайланысты*** жаңа D_1 аймағын аламыз. 1-теорема бойынша $\int_{\Gamma_2+\gamma_++\Gamma_1+\gamma_-} f(z)\, dz = 0.$ Мұнда

$$\int\limits_{\gamma_+ + \gamma_-} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_-} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_+} f(z)\,dz = 0$$ болатынын ескерсек,

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\Gamma_2} f(z)\,dz = 0. \quad \blacktriangle$$

Салдар. Егер екі байланысты D аймағын шектейтін Γ мен Γ_1 контурлардың екеуінің де бағыттары сағат тіліне қарсы болса (8-сурет), онда 2-теорема шартын қанағаттандыратын $f(z)$ функциясы үшін келесі теңдік орындалады:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma_1} f(z)\,dz. \qquad (9)$$



8-сурет

(9) теңдіктен (5) және (6) теңдіктердегі центрі z_0 нүктесі болатын L ***шеңбердің орнына*** ішінде z_0 нүкте жатқан, сағат тіліне қарсы бағытталған, ***кез келген тұйық құрақты-тегіс*** L' ***контурды*** алуға болатынын көреміз:

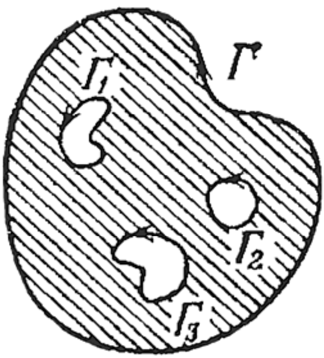
$$\int\limits_{L'} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i, \qquad (5')$$

$$\int\limits_{L'} \left(z - z_0\right)^n dz = 0. \qquad (6')$$

Ескерту. Салдардағы шарттарды қанағаттандыратын көп байламды D аймағын шектейтін контурлар $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$ болса (9-сурет), онда келесі теңдік орындалады:

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_k} f(z)\,dz. \qquad (9')$$

Назарыңызға! Бұдан кейін тұйық құрақты-тегіс үзіліссіз контур деп жатпастан, ықшамдап «контур» дейміз.



9-сурет

§ 5. Коши формуласы. Коши интегралы тектес интеграл

$f(z)$ бір байламды тұйық $\overline{D} = D \cup L$ аймағында аналитикалық функция болсын, мұндағы L – аймақтың оң, яғни сағат тіліне қарсы бағытталған, құрақты-тегіс шекарасы (10-сурет).

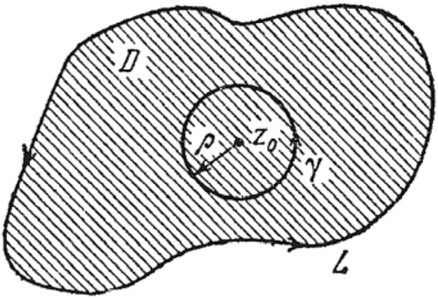
Онда **Коши формуласы** орын алады:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)\,dz}{z - z_0}, \tag{1}$$

мұндағы $z_0 -$ L контурдың ішіндегі кез келген нүкте.

$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)\,dz}{z - z_0}$ **Коши интегралы** деп аталады.

Бұл формула аналитикалық функцияның D аймағының L шекарасында анықталуы оның D аймағының кез келген ішкі нүктелеріндегі мәнін табуға мүмкіндік беретінін көрсетеді.



10-сурет

▼ $\varphi(z) = \frac{f(z) - f(z)}{z - z_0}$ функциясы – $\overline{D} = D \cup L$ аймағының $z = z_0$ нүктесінен басқа нүктелерінде аналитикалық функция. $z = z_0$ нүктесін центр етіп алып, кез келген $\rho > 0$ радиуспен оң бағытталған $\gamma \subset D$ шеңбер жүргіземіз (10-суретті қараңыз).

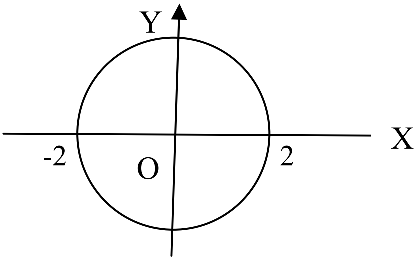
Онда §5 (9) теңдік бойынша $\int\limits_{L} \varphi(z)\, dz = \int\limits_{\gamma} \varphi(z)\, dz$ аламыз.

Мұндағы $\int\limits_{\gamma} \varphi(z)\, dz = \int\limits_{|z\text{-}z_0|=\rho} \varphi(z)\, dz$ интегралы ρ-ға тәуелді емес. $\varphi(z) = \dfrac{f(z) - f(z)}{z - z_0}$ теңдігінен $\lim\limits_{z \to z_0} \varphi(z) = f'(z_0)$ шығады.

Егер $\varphi(z)$ функциясын $z = z_0$ нүктесінде $\varphi(z_0) = f'(z_0)$ деп анықтасақ, онда ол $\overline{D}$ тұйық аймақта үзіліссіз болады, сондықтан оның модулі шенелген $|\varphi(z)| \le M \quad \forall z \in \overline{D}$. Шенелген функцияға § 4 3-қасиетті қолданып, $\left| \int\limits_{\gamma} \varphi(z)\, dz \right| \le M \cdot 2\pi\rho$ аламыз. Жоғарыда айтқандай, $\rho > 0$ санын кез келген етіп алуға болады, ал $\int\limits_{\gamma} \varphi(z)\, dz$ интегралы ρ-ға тәуелді емес болғандықтан, соңғы теңсіздіктен $\int\limits_{\gamma} \varphi(z)\, dz = 0,$ ал бұдан $\int\limits_{\gamma} \varphi(z)\, dz = \int\limits_{L} \varphi(z)\, dz =$ $= \int\limits_{L} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$ аламыз. Мұндағы соңғы теңдіктен, § 4 ($5'$) теңдікті ескеріп, $\int\limits_{L} \dfrac{f(z)dz}{z - z_0} = \int\limits_{L} \dfrac{f(z_0)dz}{z - z_0} = f(z_0) \int\limits_{L} \dfrac{dz}{z - z_0} =$ $= 2\pi i \cdot f(z_0),$ яғни (1) теңдікті аламыз. ▲

Назарыңызға! Егер z_0 нүктесі L контурдың сыртында жатса, онда $\dfrac{f(z)}{z - z_0}$ функциясы $\overline{D}$ тұйық аймақта аналитикалық функция болатындықтан, Коши интегралы нөлге тең: $\dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} \dfrac{f(z)dz}{z - z_0} = 0.$

Мысал. Есептеу керек: $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2+4z+3}dz$, мұндағы контур оң бағытталған (11-сурет).



11-сурет

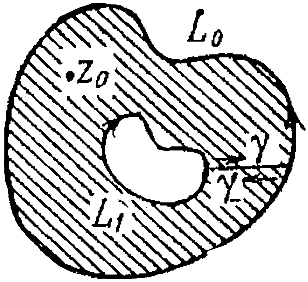
▼ Интеграл астындағы функциядан көрсетілген аймақта аналитикалық болатын функцияны бөліп алып, берілген интегралды Коши интегралына келтіреміз:

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2+4z+3}dz = \int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{(z+3)(z+1)}dz = \int\limits_{|z|=2} \frac{\frac{\sin z}{z+3}}{z+1}dz = 2\pi i \cdot \left.\frac{\sin z}{z+3}\right|_{z=-1} =$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{-\sin 1}{2} = -\sin 1 \cdot \pi i.$$ ▲

Коши формуласы көп байламды аймақ үшін де орында-латынын көрсетейік.

▼ Мысалы, D – оң бағытталған L шекарасы бар екі байланысты аймақ болсын, ал L сәйкес бағытталған екі L_0 және L_1 тұйық контурлардан құралсын: $L = L_0 + L_1$ (12-сурет).



12-сурет

z_0 аймақтың кез келген нүктесі болсын. L_0 және L_1 контурларды z_0 нүктесі арқылы өтпейтін, L_1-ден L_0-ге қарай бағытталған, құрақты-тегіс γ қисығымен жалғаймыз. Сонымен бірге γ қисығымен беттесетін, бірақ оған қарама-қарсы бағытталған γ_- енгіземіз. Егер D аймағынан γ-ны алып тастасақ, онда оның қалған бөлігі D_* бір байламды аймақ болады, ал оның шекарасы – оң бағытталған $L' = L_0 + \gamma_- + L_1 + \gamma = L + \gamma_- + \gamma$ контуры.

$f(z)$ функциясы $\overline{D}_*$ тұйық аймақта аналитикалық функция және $z_0 \in D_*$ болғандықтан, бірбайламды аймақ үшін Коши теоремасын пайдаланып6

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L'} \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_L \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} + \int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} + \int_{\gamma_-} \frac{f(z)\,dz}{z - z_0}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} \text{ аламыз, өйткені } \int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} + \int_{\gamma_-} \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} = 0. \quad \blacktriangle$$

Енді Коши интегралы тектес интегралды қарастырайық.

Егер L – кез келген бағытталған құрақты-тегіс қисық (оның тұйық болуы міндетті емес), $\varphi(z)$ – осы L қисықта анықталған үзіліссіз функция және нүкте $\zeta \notin L$ болса, онда ***Коши интегралы тектес интеграл*** деп келесі өрнекті айтады:

$$F(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(z)\,dz}{z-\zeta}. \tag{2}$$

Бұл өрнек L қисығынан тыс жатқан нүктелерде анықталған $F(z_0)$ функциясын көрсетеді.

Теорема. Коши интегралы тектес интеграл барлық $\zeta \notin L$ нүктелерде аналитикалық $F(\zeta)$ функция болады. Бұл функцияның *n* ретті туындысы келесі формула бойынша есептеледі:

$$F^{(n)}(\zeta)=\frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(z)\,dz}{(z-\zeta)^{n+1}},\quad n=1,2,\dots . \tag{3}$$

▼ Дәлелдеуін, мысалы, [1] кітаптан қарауға болады. ▲

Теоремадан келесі маңызды тұжырым шығады.

Егер $w=f(z)$ *D аймағында аналитикалық функция болса, онда оның осы аймақта кез келген n ретті туындысы бар.*

▼ Егер $\zeta -$ *D* аймағындағы кез келген нүкте, $\sigma -$ центрі ζ нүктесі болатын, *D* аймағында орналасқан дөңгелек, ал γ оның сағат тіліне қарама-қарсы бағытталған шекарасы (шеңбер) болса, онда келесі Коши формуласын жаза аламыз:

$f(\zeta)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta}.$ Бұл $f(\zeta)$ функциясының Коши интегралы тектес интеграл арқылы өрнектелгенін көрсетеді ($L=\gamma$, $\varphi(z)=f(z)$). Онда жоғарыдағы теорема бойынша $f(z)$ функциясы ақырсыз рет дифференциалданады және

$$f^{(n)}(\zeta)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-\zeta)^{n+1}},\quad n=1,2,\dots . \tag{4}$$ ▲

Аталған тұжырымнан комплекс айнымалды аналитикалық функция мен дифференциалданатын нақты айнымалды функцияның ерекшеліктерін айқын көреміз (нақты айнымалды функцияның бірінші ретті туындысы бар болуынан оның жоғарғы ретті туындыларының бар болуы шықпайды).

(4) формуладан кейбір интегралдарды есептеуге қолайлы формуланы аламыз:

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{(z-\zeta)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(\zeta), \quad n = 1, 2, \dots \,. \tag{5}$$

Мысал. Есептеу керек: $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{dz}{(z^2-1)^2}$.

▼ Интеграл астындағы функцияны (5) интеграл астындағы функция түріне келтіреміз: $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{dz}{(z^2-1)^2} = \int_{|z-1|=1} \frac{\frac{1}{(z+1)^2}}{(z-1)^2} dz =$

$= \Big|$ (5) формуланың $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)^2}$, $n = 1,\ \zeta = 1$ жағдайы $\Big| =$

$$= \frac{2\pi i}{1!} \cdot \left(\frac{1}{(z+1)^2} \right)' \Bigg|_{z=1} = 2\pi i \cdot \frac{-2}{(z+1)^3} \Bigg|_{z=1} = = \frac{-4\pi i}{8} = \frac{-\pi i}{2}.$$ ▲

§ 6. Комплекс мүшелі қатарлар туралы қысқаша мәліметтер

Келесі қатарды қарастырамыз:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + iy_n. \qquad (1)$$

Егер $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ (мұнда $S_n = z_1 + z_2 + ... + z_n$) ақырлы шегі бар болса, онда (1) қатар ***жинақты***, ал $S = x + iy$ саны оның ***қосындысы*** деп аталады: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n = S.$

Егер $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ қатарлары жинақты болса, тек сонда ғана (1) қатар жинақты болады және $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = x$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n = y.$

Егер

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| \qquad (2)$$

қатары жинақты болса, онда (1) ***қатар абсалют жинақты*** деп аталады. (2) қатар мүшелері теріс емес нақты сандар қатары болғандықтан, оған қатарлардың жинақтылығының барлық белгілерін қолдануға болады.

Абсалют жинақты қатар жинақталады. Шынында да, (2) қатардың жинақтылығының Коши белгісі бойынша, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \varepsilon > |z_{n+1}| + |z_{n+2}| + |z_{n+p}|$, $\forall p,\ n > N$, ал бұдан $\varepsilon > |z_{n+1}| + |z_{n+2}| + |z_{n+p}| > |z_{n+2} + z_{n+1} + ... + z_{n+p}|$, $\forall p,\ n > N$ аламыз. Алынған тұжырым, Коши белгісі бойынша, (1) қатардың жинақтылығын көрсетеді.

Комплекс жазықтықтағы E жиынында анықталған келесі функциялық қатарды қарастырайық:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z), \qquad z \in E. \tag{3}$$

Бұл қатардың n-ші дербес қосындысы $S_n(z)$, ал қосындысы $S(z)$ болсын. Егер $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon): \left|S_n(z) - S(z)\right| < \varepsilon$ $\forall n > N \ \ \forall z \in E$ орындалса, онда (3) функциялық қатар $S(z)$ функциясына E жиынында ***бірқалыпты жнақталады*** дейді.

Нақты мүшелі қатарлар сияқты, мұнда да ***Вейерштрасс белгісі*** орын алады: егер $\forall z \in E \ \ \left|u_n(z)\right| \le c_n, \ \ n = 0,1,2,...$ және $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ сандық қатары жинақты болса, онда (3) функциялық қатар ***E жиынында бірқалыпты және абсолют жинақты.***

Функциялық қатардың мүшелері қандай да бір қисық бойында үзіліссіз, ал қатар осы қисық бойында бірқалыпты жинақты болса, онда: 1) қатардың қосындысы осы қисық бойында үзіліссіз болады; 2) қатарды осы қисық бойынша мүшелеп интегралдауға болады және мүшелеп интегралданған қатар осы қисық бойында бірқалыпты жинақталады.

Теорема (Вейерштрасс). Егер бір байламды D аймақта $u_n(z), \ \ n = 0,1,2,...$ аналитикалық функциялар болып, осы аймақта (3) функциялық қатар бірқалыпты жинақты болса, онда оның қосындысы да D аймақта аналитикалық функция болады. Сонымен бірге D аймақтың шекарасында $u_n(z), \ \ n = 0,1,2,...$ үзіліссіз болса, онда (3) функциялық қатарды ақырсыз рет мүшелеп дифференциалдауға болады.

Коэффициенттері комплекс сандар болатын дәрежелік қатар берілсін:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{4}$$

Дәрежелік қатарлар теориясында ***негізгі теорема*** деп аталатын келесі тұжырымның маңызы үлкен:

Теорема. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – дәрежелік қатары $|z| < R$ – ашық дөңгелекте абсолют жинақты, ал $|z| > R$ аймағында жинақсыз болатын $0 \le R \le +\infty$ саны табылады.

R дәрежелік қатардың ***жинақталу радиусы*** деп аталады және оны табу формуласы нақты мүшелі дәрежелік қатарлардың жинақталу радиусының формуласындай:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{немесе} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

(егер аталған шектер жоқ болса, онда олардың орнына жоғарғы шек алынады).

Дәрежелік қатарлар теориясы, әдетте, Абель теоремасынан бастау алады.

Теорема (Абель). $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – дәрежелік қатар $|z| \le q < R$ тұйық дөңгелекте ***абсолют*** және ***бірқалыпты*** жинақты.

▼ q дәрежелік қатар жинақталатын ашық дөңгелекте жатқан нақты сан болғандықтан, алдыңғы теорема бойынша, (4) дәрежелік қатар q нүктесінде абсолют жинақты:

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n q^n| < \infty.$ Сонымен бірге Абель теоремасының шарты бойынша $|a_n z^n| \le |a_n q^n|$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, ал бұл теңсіздіктің оң жағы z-ке тәуелсіз және олардан құралған қатар жинақты болғандықтан, Вейерштасс белгісі бойынша (4) дәрежелік қатар $|z| \le q < R$ тұйық дөңгелекте ***абсолют*** және ***бірқалыпты*** жинақты. ▲

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ - дәрежелік қатар $|z| \le q < R$ тұйық дөңгелекте бірқалыпты жинақталатындықтан ($q -$ кез келген сан: $q < R$), қатардың $f(z)-$ қосындысы $|z|<R$ ашық дөңгелекте үзіліссіз функция болады. Бұл функцияның $f^{(n)}(z)$, яғни реті кез келген туындысын (4) қатарды осы дөңгелекте мүшелеп дифференциалдау арқылы алуға болады. Мүшелеп дифференциалдап (немесе мүшелеп интегралдап) алынған дәрежелік қатарлардың жинақталу радиусы берілген (4) дәрежелік қатардың жинақталу радиусына тең. Олай болса, дәрежелік қатардың қосындысы $|z|<R$ ашық дөңгелекте *аналитикалық функция* болады.

Ескерту. (4) дәрежелік қатардың жинақталу жиыны – центрі 0 нүктесі, ал радиусі R-ге тең дөңгелек болса, келесі дәрежелік қатардың:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z - z_0\right)^n \qquad (5)$$

жинақталу жиыны – центрі z_0 нүктесі, ал радиусі R-ге тең дөңгелек: $|z - z_0| < R$ (дөңгелек шеңберінің бойындағы нүктелер қарастырылмайды). Бұл дәрежелік қатарды $z - z_0 = \zeta$ айнымал ауыстыруы арқылы (4) дәрежелік қатар

түріне келтіруге болады: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$.

§ 7. Тейлор қатары

(*Тейлор Брук – (1685-1731) ағылшын математигі*)

Жинақталу радиусы $R>0$ тең дәрежелік қатарды қарастырайық:

$$S(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(z-z_0\right)^n, \qquad \left|z-z_0\right|<R. \qquad (1)$$

Дәрежелік қатарды (жинақталу радиусын сақтай отырып) ақырсыз рет мүшелеп дифференциалдауға болатынын ескеріп, $S^{(k)}(z)=a_k\cdot k!\ +a_{k+1}\left(k+1\right)\cdot\ldots\cdot 2\cdot\left(z-z_0\right)+$

$+a_{k+2}\left(k+2\right)\cdot\ldots 3\cdot\left(z-z_0\right)^2+\ldots$ аламыз. Бұдан $z=z_0$ үшін

$S^{(k)}(z_0)=a_k\cdot k!,$ ал бұдан $a_k=\dfrac{S^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k=0,1`,2,\ldots$ аламыз.

Демек, дәрежелік қатар өзінің қосындысының Тейлор қатары екен: $S(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{S^{(n)}(z_0)}{n!}\left(z-z_0\right)^n, \qquad \left|z-z_0\right|<R.$

Егер §5 (4) формуланы: $f^{(n)}\left(\zeta\right)=\dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma}\dfrac{f\left(z\right)dz}{\left(z-\zeta\right)^{n+1}}, \quad n=1,2,\ldots$.

z_0 нүктесі үшін аналитикалық $S(z)$ функциясына арнап жазсақ: $S^{(n)}\left(z_0\right)=\dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma}\dfrac{S\left(z\right)dz}{\left(z-z_0\right)^{n+1}}, \quad n=1,2,\ldots.$ (мұндағы $\gamma-$ дәрежелік қатардың жинақталу аймағында жатқан, сағат тіліне қарсы бағытталған, z_0 нүктесін қамтитын кез келген контур). Ендеше:

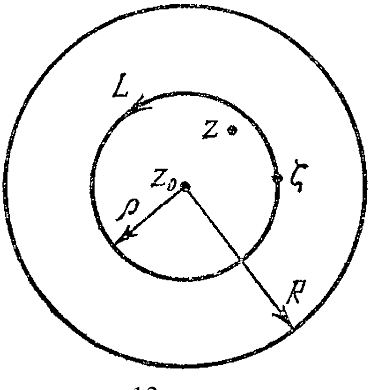
$$a_k=\frac{S^{(k)}(z_0)}{k!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{S\left(z\right)dz}{\left(z-z_0\right)^{k+1}}, \quad k=1,2,\ldots . \qquad (2)$$

Теорема. $|z - z_0| < R$ дөңгелекте аналитикалық $f(z)$ функциясы $(z - z_0)$ айырымының дәрежелері бойынша (осы функцияның өзіне жинақталатын) Тейлор қатарына жіктеледі:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{k+1}}, \quad k = 1, 2, \ldots \cdot \quad (3)$$

(3) *теңдік функцияның* z_0 *нүкте маңайында Тейлор қатарына жіктелуі деп аталады.*

▼ $|z - z_0| < R$ дөңгелектің ішінен кез келген z нүктесін алып, осы нүкте ішінде қалатындай етіп, центрі z_0, радиусы $\rho < R$ тең, оң бағытталған L шеңберін сызамыз (13-сурет).



13-сурет

Онда $f(z)$ функциясы L контурында және оның ішінде аналитикалық функция болатындықтан, Коши теоремасы бойынша $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$ теңдігін жаза аламыз. Интеграл астындағы $\frac{1}{\zeta - z}$ бөлшегін келесі түрде жазуға болады:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}}. \tag{4}$$

Мұндағы $\zeta \in L$, ал z нүктесі L шеңбердің ішінде жататындықтан, $\left|\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \dfrac{|z - z_0|}{\rho} < 1$. Олай болса, $\dfrac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$ өрнегін геометриялық прогрессияның қосындысы ретінде алуға болады: $\dfrac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = 1 + \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \left(\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^2 + \ldots$. Бұл өрнекті (4) теңдікке қойып, келесі қатарды аламыз:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} + \frac{z - z_0}{(\zeta - z_0)^2} + \frac{(z - z_0)^2}{(\zeta - z_0)^3} + \ldots \tag{5}$$

Жоғарыда, $\left|\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right|$ өрнегінің бірден кіші болатынын көрдік және ол $\zeta \in L$ нүктесіне тәуелді емес. Сондықтан (5) қатар кез келген $\zeta \in L$ және тұрақты z үшін бірқалыпты жинақты болады. (5) теңдікті $\dfrac{f(\zeta)}{2\pi i}$ бөлшегіне көбейтіп алып (одан қатардың бірқалыпты жинақтылығы өзгермейді), L қисығы бойынша интегралдасақ, $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z_0} + \dfrac{z - z_0}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z_0)^2} + \ldots$ теңдігі шығады. Мұнда $a_k = \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \dfrac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{k+1}},\quad k = 1, 2, \ldots$ деп белгілеу арқылы алынған $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ дәрежелік қатар

$\left|z - z_0\right| < R$ дөңгелекте аналитикалық $f(z)$ функциясының Тейлор қатары болады. ▲

Нақты айнымалды функциялар сияқты (3) формулалардан элементар функциялардың z дәрежесі бойынша Тейлор қатарына жіктелулерін жазуға болады:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot z^n = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots , \qquad |z| < +\infty; \qquad \textbf{(А)}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1\right)^n \frac{1}{(2n+1)!} \cdot z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots , \ |z| < +\infty; \ \textbf{(Ә)}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1\right)^n \frac{1}{(2n)!} \cdot z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^8}{8!} + \dots , \qquad |z| < +\infty; \qquad \textbf{(Б)}$$

$$\ln\left(1+z\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-1\right)^{n+1} \frac{1}{n} \cdot z^n = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots , \quad |z| < 1; \quad \textbf{(В)}$$

Бұл – логарифмнің бас мәнінің z дәрежесі бойынша Тейлор қатарына жіктелуі. Ал егер көпмәнді $L\,\mathrm{n}\left(1+z\right)$ функциясының басқа мәндері үшін Тейлор қатарын алу керек болса, онда бұл қатарға $2n\pi i,\ \ n = \pm 1,\ \pm 2, \dots$ сандарын қосу керек:

$$L\,\mathrm{n}\left(1+z\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-1\right)^{n+1} \frac{1}{n} \cdot z^n + 2n\pi i; \qquad \textbf{(Г)}$$

$$\left(1+z\right)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha\left(\alpha-1\right) \cdot \dots \cdot \left(\alpha - n + 1\right)}{n!} \cdot z^n =$$

$$= 1 + \alpha z + \frac{\alpha\left(\alpha-1\right)}{2!} z^2 + \frac{\alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\right)}{3!} z^3 + \dots , \quad |z| < 1; \qquad \textbf{(Ғ)}$$

Егер мұнда, мысалы, $\alpha = -1$ болса, онда

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \ldots + (-1)^n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1; \qquad \textbf{(Д)}$$

Назар аударыңыз! **(Д)** теңдігінің сол жағындағы функция – бірінші мүшесі 1, ал еселігі $-z$ тең ақырсыз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы.

1-*мысал.* $f(z) = \dfrac{4z}{z^2 - 2z - 3}$ функциясын $z_0 = 0$ нүктенің маңайында Тейлор қатарына жіктеу керек.

▼ Бөлшекті қарапайым бөлшектердің қосындысына келтіреміз: $\dfrac{4z}{z^2 - 2z - 3} = \dfrac{1}{z+1} + 3 \cdot \dfrac{1}{z-3}$. Бірінші, $\dfrac{1}{z+1}$ бөлшектің жіктелуі **(Д)** болғандықтан, екінші, $3 \cdot \dfrac{1}{z-3}$ бөлшегін Тейлор қатарына жіктесек болғаны. Ол үшін бұл бөлшекті **(Д)** теңдігінің сол жағындағы функция түріне келтіріп алып, содан соң z орнына $-\dfrac{z}{3}$ өрнегін қоямыз:

$$3 \cdot \frac{1}{z-3} = -3 \cdot \frac{1}{3-z} = -\frac{1}{1+\left(-\frac{z}{3}\right)} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(-\frac{z}{3}\right)^n =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} \frac{z^n}{3^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n}.$$

Олай болса, $\dfrac{4z}{z^2 - 2z - 3} = \dfrac{1}{z+1} + 3 \cdot \dfrac{1}{z-3} =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n - \frac{1}{3^n} \right] z^n.$$

Берілген функцияның $z = -1$ мен $z = 3$ ерекше нүктелерінің $z_0 = 0$ нүктесіне жақын орналасқаны $z = -1$ болғандықтан, алынған қатардың жинақталу дөңгелігі $|z| < 1$ болады. ▲

2-мысал. $f(z)=\dfrac{1}{1-2z}$ функциясын $z-2$ айырымының дәрежесі бойынша Тейлор қатарына жіктеу керек.

Берілген функцияны **(Д)** теңдігінің сол жағындағы функция түріне келтіреміз:

$$\frac{1}{1-2z}=\frac{1}{1-2\left(z-2+2\right)}=\frac{1}{-3+2\left(z-2\right)}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}\left(z-2\right)}.$$

Мұнда **(Д)** жіктеліміндегі z орнында $-\dfrac{2}{3}\left(z-2\right)$ тұрғандықтан,

$$\frac{1}{1-2z}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}\left(z-2\right)}=\frac{1}{-3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\left[-\frac{2}{3}\left(z-2\right)\right]^{n}=$$

$$=\frac{1}{-3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{2n}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\left(z-2\right)^{n}=\frac{1}{-3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\left(z-2\right)^{n}.$$

Бұл қатар $\left|-\dfrac{2}{3}\left(z-2\right)\right|<1,$ немесе $\left|z-2\right|<\dfrac{3}{2}$ шарты орындалса, жинақты болады, яғни қатардың жинақталу радиусы $R=\dfrac{3}{2}$ тең.

§ 8. Лоран қатары

(Пьер Лоран (1813-1854) – француз математигі)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(z - z_0\right)^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \frac{1}{\left(z - z_0\right)^k} \tag{1}$$

түріндегі қатардан $\frac{1}{z - z_0} = \zeta$ айнымал ауыстыруы арқылы келесі дәрежелік қатарды аламыз: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^k$. Алынған дәрежелік қатар $|\zeta| < R$ (R – жинақталу радиусы) дөңгелекте абсолют жинақты, ал $|\zeta| \le q < R$ (q – кез келген сан) тұйық дөңгелекте бірқалыпты жинақты болғандықтан, (1) қатар $\left|\frac{1}{z - z_0}\right| < R$ немесе $|z - z_0| > \frac{1}{R}$ нүктелерде абсолют жинақты да, ал $\left|\frac{1}{z - z_0}\right| \le q < R$ немесе $|z - z_0| \ge \frac{1}{q} > \frac{1}{R}$ нүктелерінде бірқалыпты жинақты болады.

Енді

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left(z - z_0\right)^n \tag{2}$$

түріндегі қатарды қарастырамыз. Бұл қатар келесі екі қатардың:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z - z_0\right)^n \tag{3}$$

және

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n \left(z - z_0\right)^n = |n = -m| = \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} \left(z - z_0\right)^{-m} \tag{4}$$

қосындысы ретінде алынады, сонымен бірге (3) және (4) қатарлар жинақты болса, тек сонда ғана (2) қатар жинақты. Сондықтан (3) қатар $|z-z_0|<R$ дөңгелекте, ал (4) қатар $|z-z_0|>r$ жиынында жинақты болатындықтан, (2) қатар $r<|z-z_0|<R, \quad r<R,$ сақинада жинақты болады.

Осы сияқты, $r<q_1\le|z-z_0|\le q_2<R, \quad r<R,$ тұйық сақинада (2) қатар бірқалыпты жинақты болады.

Назар аударыңыз! Егер мұнда $r>R$ болса, онда (2) қатар жинақты болатын нүкте жоқ.

Енді $f(z)$ ***функциясының*** $r<|z-z_0|<R$ ***сақинада Лорандық жіктелуі*** немесе $f(z)$ ***функциясының*** $\left(z-z_0\right)$ ***дәрежесі бойынша Лоран қатары*** деп аталатын қатарды қарастырайық (төмендегі (5), (6) қараңыз).

Теорема. Берілген $r<|z-z_0|<R$ (мұнда $0\le r<R\le\infty$) сақинада аналитикалық болатын кез келген $f(z)$ функцияны осы сақинада жинақталатын

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\left(z-z_0\right)^n, \tag{5}$$

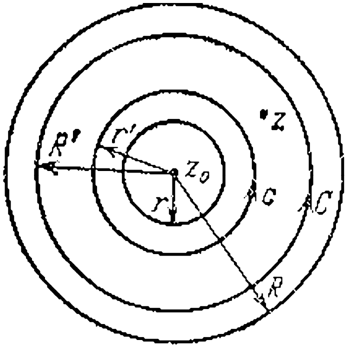
мұнда

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f\left(\zeta\right)d\zeta}{\left(\zeta-z_0\right)^{n+1}}, \quad n=0,\pm1,\pm2,... \tag{6}$$

(γ – сағат тіліне қарама-қарсы бағытталған, кез келген $|\zeta-z_0|=\rho, \ r<\rho<R$ шеңбері) түріндегі қатармен бірмәнді өрнектеуге болады.

▼ Сағат тіліне қарсы бағытталған радиустары r' және R' тең, $r<r'<R'<R$ болатын c және C шеңберлерін саламыз (14-сурет).

Теорема шарты бойынша, $f(z)$ функциясы c және C шеңберлерінің арасындағы сақинада және осы шеңберлерде аналитикалық функция болады. Сондықтан күрделі контурларға арналған Коши теоремасы бойынша келесі теңдік орындалады:



14-сурет

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_{-}}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$$ немесе

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}, \qquad (7)$$

мұндағы z нүкте c және C шеңберлерінің арасында жатыр. Бірінші интегралда ζ нүктесі C шеңберінің нүктесі болғандықтан, $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|=\frac{|z-z_0|}{R'}<1,$ олай болса,

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)\left[1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right]}=\frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}, \qquad (8)$$

және бұның оң жағындағы қатар барлық $\zeta\in C$ нүктелерінде бірқалыпты жинақты ($z-$ бекітілген нүкте) болады. Ал екінші интегралда ζ нүкте c шеңберінің нүктесі болғандықтан, $\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|=\frac{r'}{|z-z_0|}<1,$ олай болса,

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{-1}{(z-z_0)\left[1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right]}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}, \qquad (9)$$

және бұның оң жағындағы қатар барлық $\zeta \in c$ нүктелерінде бірқалыпты жинақты (z – бекітілген нүкте) болады. Осы (8) бен (9) қатарларды (7)-ге қойып, одан соң мүшелеп интегралдап,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_c f(\zeta)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}d\zeta =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\cdot(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{-n}}\cdot(z-z_0)^{-n-1} =$$

$$= \left|n = k-1\right| =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\cdot(z-z_0)^n + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{-k+1}}\cdot(z-z_0)^{-k}$$

аламыз. Мұндағы $\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$ кез келген n үшін сақинада аналитикалық функция болғандықтан, Коши теоремасы бойынша, C мен c контурларының орнына сағат тіліне қарама-қарсы бағытталған кез келген $\gamma : |\zeta - z_0| = \rho,\ r < \rho < R$ шеңберді алуға болады. Сондықтан соңғы теңдіктен (5) шығады және c_n коэффициенттер (6) формуламен есептеледі, яғни олар жалғыз, бұдан басқа түрі жоқ. ▲

Лоран қатарының бірінші $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ бөлігі $|z-z_0| < R$ дөңгелекте аналитикалық $f_1(z)$ функциясына жинақталады. Ол **Лоран қатарының дұрыс бөлігі** деп аталады.

Лоран қатарының екінші $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n}$ бөлігі $|z-z_0| > r$ нүктелерінде аналитикалық $f_2(z)$ функциясына жинақталады. Ол **Лоран қатарының басты бөлігі** деп аталады. Ал $r < |z-z_0| < R$ сақинасының ішінде $f_1(z)$ және $f_2(z)$ функцияларының екеуі де, олай болса, $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ функциясы да аналитикалық функция болады.

Ескерту. Қандай да бір аналитикалық функцияны Лоран қатарына жіктеу үшін, көп жағдайларда c_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ коэффициенттерді (6) формула емес, жасанды әдістер арқылы тікелей алуға болады. Оны мысалдар арқылы көрсетейік.

1-*мысал.* Функцияны z дәрежесі бойынша ($z_0 = 0$)

Лоран қатарына жіктеу керек: $f(z) = \dfrac{2z+1}{z^2 + z - 2}$.

▼ Функцияны қарапайым бөлшектер қосындысына жіктейміз: $f(z) = \dfrac{2z+1}{z^2+z-2} = \dfrac{1}{z+2} + \dfrac{1}{z-1}$. Функцияның үш «сақина ішінде»: 1) $|z| < 1$; 2) $1 < |z| < 2$; 3) $|z| > 2$ аналитикалық функция болатынын ескеріп, осы үш жағдайды қарастырамыз.

1) $|z| < 1$ болсын. Онда $\left|\dfrac{z}{2}\right| < \dfrac{1}{2} < 1$ орындалатындықтан, **§ 7-дегі (Д)** формуласы бойынша

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^n = = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n$$ аламыз. Бұл

қатардың жинақталу аймағы $\left|\dfrac{z}{2}\right| < 1$, яғни $|z| < 2$;

Тағы да **§ 7. (Д)** формула бойынша $\dfrac{1}{z-1} = -\dfrac{1}{1-z} = = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$.

Бұл қатардың жинақталу аймағы, әрине, $|z| < 1$. Сонымен, қарапайым бөлшектердің екеуі де $|z| < 1$ шеңбер ішінде жинақталады. Берілген функция $|z| < 1$ шеңбер ішінде – аналитикалық функция болатындықтан, ол Тейлор қатарына жіктеледі:

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-1\right)z^n.$$

2) $1<|z|<2$ болсын. Бұл нүктелер үшін $\frac{1}{z+2}$ бөлшегінің жіктелуі сақталады: $\frac{1}{z+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n$, $|z|<2$; Ал $1<|z|<2$ қос теңсіздігінің сол жағы $\left|\frac{1}{z}\right|<1$ теңсіздігіне парапар екенін ескеріп, екінші қарапайым бөлшекті ақырсыз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысына келтіреміз:

$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}.$ Бұл қатардың жинақталу жиыны $\left|\frac{1}{z}\right|<1$ немесе $|z|>1,$ яғни $|z|=1$ шеңберінің сыртқы нүктелері. Сонымен, $1<|z|<2$ сақинада

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}.$$

Мұндағы бірінші қосылғыш – Лоран қатарының **дұрыс бөлігі,** ал екінші қосылғыш **– оның бас бөлігі.**

3) $|z|>2$ болсын. Бұл нүктелер жиыны $|z|>1$ нүктелер жиынында жатқандықтан, $\frac{1}{z-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$, $|z|>1$ сақталады. Бірінші қарапайым бөлшекті **§7. (Д)** теңдігінің сол жағындағы функция түріне келтіріп алып, осы формуланы пайдаланамыз:

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,2^n\,\frac{1}{z^{n+1}}=$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^{n-1} \frac{1}{z^n}.$$

Сонымен, $|z| > 2$ нүктелері үшін

$$f(z) = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^{n-1} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n-1} 2^{n-1} + 1 \right) \frac{1}{z^n}.$$

Мұнда Лоран қатарының дұрыс бөлігі жоқ. Себебі, $|z| > 2$ нүктелерінде $f(z) = \dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$ – аналитикалық функция және $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{2z+1}{z^2+z-2} = 0.$ Ал $c_n z^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ мүшелерден тұратын Лоран қатарының дұрыс бөлігі бұл шартты қанағаттандырмайды. Сондықтан $c_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Назар аударыңыз! Лоран қатарына жіктелу жалғыз түрде болатындықтан, үш жағдайда да алынған қатарлардағы коэффициенттер сәйкес (6) формулалармен анықталатын c_n, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ сандарға тең. ▲

§ 9. Оқшауланған ерекше нүктелердің жіктелуі. Шегерімдер.

Анықтама. Егер z_0 нүктеде $f(z)$ – аналитикалық емес функция болса, онда ол $f(z)$ функциясының ***ерекше нүктесі*** деп аталады. Функция ерекше нүктеде көбінесе анықталмаған болады.

Анықтама. Егер z_0 ерекше нүктенің тесік $0<|z-z_0|<R$ (R – қандай да бір оң сан) маңайында $f(z)$ функциясының туындылары бар болса, онда ол $f(z)$ функциясының ***оқшауланған ерекше нүктесі*** деп аталады.

Айталық, z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының ***оқшауланған*** ерекше нүктесі болсын. Онда тесік $0<|z-z_0|<R$ маңайда $f(z)$ функциясын Лоран қатарына жіктеуге болады:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = f_1(z)+f_2(z), \tag{1}$$

мұндағы $f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ – Лоран қатарының дұрыс бөлігі, ал

$f_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n}$ – Лоран қатарының бас бөлігі.

Анықтама. Егер (1) жіктелімде Лоран қатарының бас бөлігі қатыспаса, яғни, $c_n=0,\ n=-1,-2,-3,\ldots$ болса, онда z_0 функцияның ***жөнделетін ерекше нүктесі*** деп аталады.

Ендеше,

$$f(z)=f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \tag{2}$$

мұндағы z_0 функцияның жөнделетін ерекше нүктесі.

Бұл атаудың мәнісі мынада. Дәрежелік (2) қатардың жинақталу радиусы R тең болғандықтан, бұл қатардың $f_1\left(z\right)$ қосындысы $\left|z-z_0\right|<R$ дөңгелектің барлық ішкі нүктелерінде анықталған (z_0 нүктеде $f_1\left(z_0\right)=c_0$) және үзіліссіз дифференциалданады, яғни $f_1\left(z\right)$ – аналитикалық функция. Сондықтан егер $f\left(z_0\right)=f_1\left(z_0\right)=c_0$ деп алсақ, онда $f(z)$ осы дөңгелекте аналитикалық функция болады (ерекше z_0 нүкте жөнделді). Олай болса, $\left|z-z_0\right|<R$ дөңгелектегі z_0 – жөнделетін ерекше нүкте ішінде жататын кез келген L- тұйық контур үшін келесі теңдік орындалады:

$$\int_L f\left(z\right)dz=0. \tag{3}$$

Дәлелдеусіз келесі тұжырымды келтіреміз (дәлелдемесін, мысалы, [2] қарауға болады).

Теорема. $f(z)$ функциясы үшін $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ ақырлы шегі бар болса, және тек сонда ғана z_0 жөнделетін ерекше нүкте болады.

Мысалы, $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ функциясы үшін $z_0=0$ – жөнделетін ерекше нүкте, өйткені $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1.$

Анықтама. Егер (1) жіктелімде Лоран қатарының бас бөлігінің мүшелерінің саны ақырлы болса, яғни барлық $n>m$ нөмірлері үшін $c_{-n}=0, \quad n=m+1,\ m+2,...$ онда z_0 функцияның ***m -ші ретті*** (m еселі) ***полюсі*** деп аталады.

Ендеше,

$$f(z)=f_1\left(z\right)+f_2\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(z-z_0\right)^n+\sum_{n=1}^{m}c_{-n}\left(z-z_0\right)^{-n}, \tag{4}$$

мұндағы z_0 – функцияның m-ші ретті (немесе m еселі) полюсі.

Бірінші ретті полюсті ($m=1$) ***жай полюс*** деп атайды.

Егер $|z-z_0|<R$ дөңгелектегі L тұйық контурдың ішінде z_0 – полюс жататын болса, онда

$$\int_L f(z)dz = 2\pi i \cdot c_{-1}. \tag{5}$$

▼ $$\int_L f(z)dz = \int_L f_1(z)dz + \sum_{n=1}^{m} \int_L c_{-n}(z-z_0)^{-n} dz = 0 + 2\pi i \cdot c_{-1},$$

өйткені § 4, 1-ескертудегі ($5'$) және $(6')$ теңдіктер бойынша

$$\int_L (z-z_0)^{-1} dz = 2\pi i, \qquad \int_L (z-z_0)^{-n} dz = 0, \;\; n = 2,3,\ldots .$$ ▲

Сонымен бірге, функцияның z_0 полюстегі шегін табайық:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} f_1(z) + \lim_{z\to z_0} \sum_{n=1}^{m} c_{-n}(z-z_0)^{-n} =$$

$$= c_0 + \lim_{z\to z_0} \frac{\sum_{n=1}^{m} c_{-n}(z-z_0)^{m-n}}{(z-z_0)^m} = \infty.$$

Жалпы алғанда, келесі тұжырым дұрыс.

$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ ***орындалса, және тек сонда ғана*** z_0 ***нүктесі*** $f(z)$ ***функциясының полюсі болады.***

Енді бізге қажетті «функцияның нөлі» ұғымының анықтамасы мен оған парапар тұжырымды келтіреміз, ал оған арналғаан мысалдар төменде қарастырылады.

1) *Егер* z_0 *нүктесінде* $f(z)$*- аналитикалық функция және* $f(z_0)=0,\ f'(z_0)=0,\ldots, f^{(n-1)}(z_0)=0,\ f^{(n)}(z_0)\neq 0$ *шарттары орындалса, онда* z_0 *– осы функцияның* n *-ші ретті (* n *еселі) нөлі деп аталады.*

2) Е*гер* z_0 *нүктеде аналитикалық* $f(z)$ *функциясын осы нүктенің аймағында* $f(z)=\left(z-z_0\right)^n\varphi(z),\quad \varphi(z)$ *– берілген* z_0 *нүктесінде аналитикалық функция және* $\varphi(z_0)\neq 0,$ *түрінде өрнектеуге болса, және тек сонда ғана* z_0 *– осы* $f(z)$ *функциясының* n *-ші ретті (*n *еселі) нөлі болады.*

Көп жағдайларда берілген функция үшін жөнделетін ерекше нүкте мен полюсті анықтауға болатын келесі (**А)** тұжырымды пайдаланған жөн.

(**А)-тұжырымы.** z_0 ***нүктесінің тесік маңайында анықталған*** $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ ***функциясының құрамындағы*** $\varphi(z)$, $\psi(z)$ ***– осы нүктенің (тесік емес) маңайында аналитикалық функциялар болсын. Сонымен бірге*** z_0 ***нүктесі*** $\varphi(z)$ ***функциясының k-ші ретті, ал*** $\psi(z)$ ***функциясының l-ші ретті нөлі болсын. Онда, егер*** $l>k$ ***болса,*** z_0 ***нүктесі*** $f(z)$ ***функциясының*** $"l-k"$ ***-ші ретті полюсі, ал егер*** $l\leq k$ ***болса, ол жөнделетін ерекше нүкте болады.***

Бұл тұжырымның келесі салдары да пайдалы.

Салдар. *Егер* $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\left(z-z_0\right)^n}$ *өрнегіндегі* $\varphi(z)$ *функциясы* z_0 *нүктесінде аналитикалық және* $\varphi(z_0)\neq 0$ *болса, онда* z_0 *нүктесі –* $f(z)$ *функциясының* n *-ші ретті полюсі.*

Мысалдар. **1)** $f(z)=\dfrac{\cos z}{\left(z+1\right)^2\left(z-1\right)}$ функциясының екі ерекше нүктесі: $z_1=-1,\quad z_2=1$ бар. Бірінші нүкте үшін келесі түрлендіруді жасаймыз: $f(z)=\dfrac{\dfrac{\cos z}{z-1}}{\left(z+1\right)^2}$, мұнда $\varphi(z)=\dfrac{\cos z}{z-1}$ бірінші $z_1=-1$ нүктеде аналитикалық функция және $\varphi(-1)=\dfrac{\cos 1}{-1-1}\neq 0.$ Олай болса, салдар бойынша, $z_1=-1$ – берілген функцияның 2-ші ретті полюсі.

Екінші ерекше нүкте үшін $f(z)=\dfrac{\dfrac{\cos z}{\left(z+1\right)^2}}{z-1}$, мұнда $\varphi(z)=\dfrac{\cos z}{\left(z+1\right)^2}$ функциясы екінші $z_2=1$ нүктеде аналитикалық және $\varphi(1)=\dfrac{\cos 1}{\left(1+1\right)^2}\neq 0.$ Олай болса, салдар бойынша, $z_2=1$ – берілген функцияның жай полюсі.

2) $f(z)=\dfrac{e^z-1-z-\dfrac{z^2}{2}}{\sin z-z}$ функциясының $z_0=0$ ерекше нүктесінің сипатын анықтайық. Мұнда $\varphi(z)=e^z-1-z-\dfrac{z^2}{2}$ функциясы үшін $\varphi'(0)=e^z-1-z\Big|_{z=0}=0,\ \varphi''(0)=e^z-1\Big|_{z=0}=0,$ $\varphi'''(0)=e^z\Big|_{z=0}=1\neq 0$ орындалатындықтан, анықтама бойынша, $z_0=0$ нүктесі – $\varphi(z)=e^z-1-z-\dfrac{z^2}{2}$ функциясының $k=3$-ші ретті нөлі. Осы сияқты, $\psi(z)=\sin z-z$ функциясы үшін

$\psi'(0) = \cos z - z\big|_{z=0} = 0,\ \ \psi''(0) = -\sin z - 1\big|_{z=0} = 0,$

$\psi'''(0) = -\cos z\big|_{z=0} \neq 0$ орындалатындықтан, $z_0 = 0$ нүктесі $\psi(z) = \sin z - z$ функциясының $l = 3$ -ші ретті нөлі. Олай болса, $k = l = 3$ болғандықтан, (А)-тұжырымы бойынша, $z_0 = 0$ – берілген функцияның жөнделетін ерекше нүктесі.

Анықтама. Егер (1) жіктелімде Лоран қатарының бас бөлігі мүшелерінің саны ақырсыз, яғни бас бөлігінің $c_{-n} \neq 0$ коэффициенттерінің саны ақырсыз болса, онда z_0 функцияның ***елеулі ерекше нүктесі*** деп аталады.

Ендеше,

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}, \qquad (6)$$

мұндағы $f_2(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}$ қатарының нөлге тең емес c_{-n} коэффициенттерінің саны ақырсыз.

Егер $|z - z_0| < R$ дөңгелектегі L тұйық контурдың ішінде z_0 – елеулі ерекше нүкте жататын болса, онда да

$$\int_L f(z)dz = 2\pi i \cdot c_{-1}. \qquad (7)$$

▼ $\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L f_1(z)dz + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\gamma} c_{-n} (z - z_0)^{-n} dz,$ мұндағы екінші қатарды мүшелеп интегралдауға болатын себебі мынада: § 4 тегі 1-ескерту бойынша, L тұйық контур бойынша берілген интегралды $|z - z_0| < R$ дөңгелекте жататын, центрі z_0 нүктеде болатын, сағат тіліне қарсы бағытталған, кез келген γ шеңбері бойынша интегралға ауыстыруға болады. Онда γ шеңберінде (6) қатарлары бірқалыпты жинақты. Олай болса, оларды мүшелеп интегралдауға болады. Бұдан кейін $\int\limits_{\gamma} (z - z_0)^{-1} dz = 2\pi i,$

$\int\limits_{\gamma}\left(z-z_0\right)^{-n}dz=0,\ \ n=2,3,...$ теңдіктерін пайдаланып, (7) теңдікке келеміз. ▲

Елеулі z_0 ерекше нүктедегі функцияның ақырлы да, ақырсыз да шегі жоқ. Бұл тұжырым Сохоцкий теоремасынан шығады (Ю.В.Сохоцкий (1842-1929) – орыс математигі). Оған біз тоқталмаймыз. Мысалы, $f(z)=e^{\frac{1}{z}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n}$ функциясы үшін $z_0=0$ – елеулі ерекше нүкте. Өйткені $\lim\limits_{z\to 0-}e^{\frac{1}{z}}=\ =\lim\limits_{z\to 0-}\frac{1}{e^{-\frac{1}{z}}}=0,$ $\lim\limits_{z\to 0+}e^{\frac{1}{z}}=\infty,$ яғни $z_0=0$ нүктеде функцияның шегі жоқ.

Шегерімдер. $f(z)$ функциясының оқшауланған ерекше нүктесі z_0, яғни, $f(z)$ осы нүктенің тесілген қандай да бір $0<\left|z-z_0\right|<R$ маңайында аналитикалық функция болсын. Келесі интегралды f ***функциясының*** z_0 ***нүктедегі шегерімі*** деп атайды және оны $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)$ арқылы белгілейді:

$$\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} f(z)\,dz, \tag{8}$$

мұндағы L – ішінде z_0 нүктесі жатқан, сағат тіліне қарсы бағытталған, $\left|z-z_0\right|<R$ дөңгелегіндегі тұйық контур. Жоғарыдағы үш жағдайда да алынған (3), (5), (7) теңдіктерден, егер f функциясының z_0 нүктедегі Лоран қатары $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n\left(z-z_0\right)^n$ болса, онда келесі теңдіктің орындалатынын көреміз:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}. \tag{9}$$

Соңғы теңдік, егер функцияның $\left(z - z_0\right)$ айырымы бойынша Лоран қатарына жіктелуі белгілі болса, онда z_0 нүктедегі шегерімнің оңай табылатынын көрсетеді. Мысалы, егер z_0 жөнделетін ерекше нүкте болса, онда $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = 0.$

Егер z_0 елеулі ерекше нүкте болса, онда функцияны Лоран қатарына жіктеуден басқа жол жоқ. Мысалы, $f(z) = z^4 \sin\dfrac{1}{z}$ функциясының $z_0 = 0$ ерекше нүктесіндегі шегерімін табу үшін, функцияны z дәрежесі бойынша Лоран қатарына жіктейміз:

$$f(z) = z^4 \sin\frac{1}{z} = z^4\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z^5} - \frac{1}{7!}\cdot\frac{1}{z^7} + \ldots\right) =$$

$$= z^3 - \frac{1}{3!}\cdot z + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z} - \frac{1}{7!}\cdot\frac{1}{z^3} + \ldots\,.$$

Мұнда Лоран қатарының басты бөлігі мүшелерінің саны ақырсыз, демек, $z_0 = 0$ – елеулі ерекше нүкте. Бұл жіктелуден $\operatorname*{Res}_{z=z_0} z^4 \sin\dfrac{1}{z} = c_{-1} = \dfrac{1}{5!}$ тең екенін көреміз.

Ал z_0 полюс болған жағдайда шегерімді табудың бірнеше тәсілі бар, соларды қарастырайық.

Сонымен, z_0 m-ші ретті полюс болсын, яғни

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n + \sum\limits_{n=1}^{m} c_{-n}\left(z - z_0\right)^{-n}, \quad c_{-m} \neq 0.$ Бұл теңдіктің екі жағын $\left(z - z_0\right)^m$ өрнегіне көбейтеміз:

$$f(z)\cdot\left(z - z_0\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(z - z_0\right)^{n+m} + c_{-m} + c_{-m+1}\left(z - z_0\right) + \ldots +$$

$$+ c_{-1}\left(z - z_0\right)^{m-1}.$$

Алынған теңдікті $\left(m - 1\right)$ рет дифференциалдасақ, теңдіктің оң жағындағы бос мүше $(m-1)!\ \cdot c_{-1}$ тең болады да,

$(m-1)!\ \cdot c_{-1} = \lim\limits_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)^m\right]^{(m-1)}$, ал бұдан

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\cdot \lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)^m\right]^{(m-1)} \qquad (10)$$

формуласын аламыз.

Ал, егер функция $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $\varphi(z_0)\neq 0$, $\psi(z_0)=0$, $\psi'(z_0)\neq 0$ түрінде берілсе, яғни $z=z_0$ жай полюс болса, онда

$$c_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=z_0}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \qquad (11)$$

Шынында да, (10) формуланы $m=1$ үшін қолдансақ,

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi(z_0)}.$$

1-мысал. Функцияның ерекше нүктедегі шегерімін табу керек: $f(z)=\dfrac{1+\sin z}{(z-\pi)^6}$.

▼ Жоғарыдағы салдар бойынша, $z_0=\pi$ нүктесі – функцияның 6-ретті полюсі. Шегерімді табу үшін (10) формуланы пайдаланамыз:

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi}\frac{1+\sin z}{(z-\pi|)^6} = \frac{1}{5!}\cdot\lim_{z\to\pi}\left[\frac{1+\sin z}{(z-\pi)^6}\cdot(z-\pi)^6\right]^{(5)} = \frac{1}{5!}\cdot\lim_{z\to\pi}(1+\sin z)^{(5)} =$$

$$= \frac{1}{120}\cdot\lim_{z\to\pi}\cos z = -\frac{1}{120}. \quad ▲$$

2-мысал. Функцияның $z_0 = \dfrac{\pi}{2}$ нүктедегі шегерімін табу керек: $f(z) = \dfrac{e^z}{\cos z}$.

▼ Мұнда $\varphi(z)\big|_{z=\frac{\pi}{2}} = e^z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}} \neq 0$, $\psi(z)\big|_{z=\frac{\pi}{2}} = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$, $\psi'(z)\big|_{z=\frac{\pi}{2}} = -\sin\dfrac{\pi}{2} = -1 \neq 0$ орындалатындықтан, (11) формуланы пайдаланамыз:

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{2}} \frac{e^z}{\cos z} = \frac{e^z}{(\cos z)'}\Bigg|_{z=\frac{\pi}{2}} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\sin\dfrac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}}.$$ ▲

§ 10. Ақырсыз ерекше нүктедегі шегерім. Шегерімдер туралы теорема

Егер $f(z)$ функциясы

$$|z| > r\,, \quad 0 \le r < \infty, \tag{1}$$

теңсіздігін қанағаттандыратын нүктелерде аналитикалық болса, онда, § 8 теоремаға сүйеніп ($z_0 = 0,\ R = \infty$), оны z дәрежесі бойынша, осы нүктелерде жинақталатын Лоран қатарына жіктеуге болады:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n . \tag{2}$$

(1) теңсіздікті қанағаттандыратын нүктелер жиынын, яғни $|z| \le r$ дөңгелегінің сыртын ***ақырсыз*** $z = \infty$ ***нүктенің маңайы*** деп атайды.

Анықтама. $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{L_-} f\left(z\right)dz$, *мұндағы* L_- *сағат тілі бойынша бағытталған,* $|z| > r$ *жиынында (* $f(z)$ *- аналитикалық болатын) жататын, кез келген тұйық контур,* түріндегі интегралды $f(z)$ ***функциясының ақырсыз нүктедегі шегерімі*** деп аталады:
$\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{L} f(z)\,dz,$

L_- контурда бірқалыпты жинақталатын (2) қатарды мүшелеп интегралдап, $\displaystyle\int_{L_-} z^{-1}dz = 2\pi i,\qquad \int_{L_-} z^n dz = 0,\quad n \ne -1,$ теңдіктерін ескерсек, $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{L_-} f\left(z\right)dz = -c_{-1}$ аламыз.

Сонымен,

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}. \tag{3}$$

1-мысал. $f(z)=\dfrac{z^2}{\left(z^2+1\right)\left(z-2\right)}$ функциясының ақырсыз нүктедегі шегерімін табу үшін, **§7 (Д)** жіктелуін пайдаланамыз:

$$f(z)=\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)\left(z-2\right)}=\frac{z^2}{z^3\left(1+\dfrac{1}{z^2}\right)\left(1-\dfrac{2}{z}\right)}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{1}{z^{2n}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}=$$

$$=\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}-...\right)\left(1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+...\right)=\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+... .$$

Мұндағы $c_{-1}=1$ тең болғандықтан, $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\dfrac{z^2}{(z^2+1)(z-2)}=-1.$

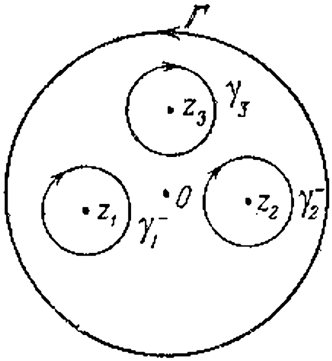
Теорема. Егер $f(z)$ кеңейтілген комплекс жазықтығының $z_1,z_2,...,z_n$ нүктелерінен басқа нүктелерде аналитикалық функция болса, онда

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}f(z)+\operatorname*{Res}_{z=\infty}f(z)=0. \qquad (4)$$

▼ Центрлері $z_1,z_2,...,z_n$ нүктелері болатын, сағат тілімен бағыттас, өзара қиылыспайтын $\gamma_1^-,\gamma_2^-,...,\gamma_n^-$ шеңберлерін саламыз. Сонымен бірге центрі 0 нүктесі болатын, $\gamma_1^-,\gamma_2^-,...,\gamma_n^-$ шеңберлерінің барлығы ішінде қалатын, сағат тіліне қарсы бағытталған Γ шеңберін саламыз (15-сурет).

Күрделі контуры $\gamma_1^-+\gamma_2^-+...+\gamma_n^-+\Gamma$ болатын аймақтың ішінде және осы күрделі контурдың өзінде $f(z)$ – аналитикалық функция, ал күрделі контур бойымен айналғанда аймақ сол жақта қалады. Олай болса, күрделі контурға арналған Коши теоремасы бойынша: $\int\limits_{\gamma_1^-}f\left(z\right)dz+...+\int\limits_{\gamma_n^-}f\left(z\right)dz+\int\limits_{\Gamma}f\left(z\right)dz=0.$ Бұл теңдікті $\dfrac{1}{2\pi i}$ санына көбейтіп, (4) теңдікке келеміз. ▲

(4) теңдіктен шегерімдер туралы негізгі теорема деп аталатын келесі тұжырымды аламыз.



15-сурет

Салдар. Егер $f(z)$ комплекс жазықтығының $z_1, z_2, ..., z_n$ нүктелерінен басқа нүктелерде аналитикалық функция болса, ал Γ осы нүктелер ішінде қалатын, сағат тіліне қарсы бағытталған контур болса, онда

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \qquad (5)$$

2-мысал. Интегралды есептеу керек: $\displaystyle\int_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}dz.$

▼ $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}$ функциясының үш ерекше нүктесі бар: $z_1 = 0,\ z_2 = i,\ z_3 = -i.$ Бұлардың ішінде $z_3 = -i$ нүкте $|z-i| = \dfrac{3}{2}$ шеңберінің сыртында, өйткені: $|-i-i| = |-2i| = 2 > \dfrac{3}{2}.$ Ал қалған екеуі осы шеңбердің ішінде жататындықтан, $z_1 = 0,$ $z_2 = i$ нүктелердегі функцияның шегерімдерін табамыз.

$\operatorname{Res}\limits_{z=0} f(z)=0,$ өйткені, $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}$ жұп функция болғандықтан, оның z дәрежесі бойынша Лоран қатарында z-тің тек жұп дәрежелері ғана қатысады. Ал $z_2=i-$ функцияның жай полюсі, өйткені

$$f(z)=\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{(z+i)(z-i)}=\frac{\dfrac{e^{\frac{1}{z^2}}}{(z+i)}}{z-i}, \quad \text{және} \quad \varphi(i)=\left.\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{(z+i)}\right|_{z=i}=\frac{e^{-1}}{2i}\neq 0,$$

$\psi(i)=z-i\big|_{z=i}=0,$ $\psi'(i)=1\neq 0$ мұнда (**§ 9. (A)** тұжырымының салдарын қараңыз). Олай болса, **§ 9-дағы** (11) формула бойынша $\operatorname{Res}\limits_{z=i} f(z)=\dfrac{e^{e^{\frac{1}{z^2}}}}{(z+i)(z-i)}=\dfrac{e^{-1}}{2i}.$ Енді берілген интегралды табу үшін (5) формуланы пайдаланамыз:

$$\int\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{e^{e^{\frac{1}{z^2}}}}{z^2+1}dz=2\pi i\left(\operatorname{Res}\limits_{z=0} f(z)+\operatorname{Res}\limits_{z=i} f(z)\right)=2\pi i\left(0+\frac{e^{-1}}{2i}\right)=\pi e^{-1}. \quad \blacktriangle$$

(4) теңдіктің маңызын келесі мысалдан аңғаруға болады.

3-мысал. Интегралды есептеу керек: $\displaystyle\int\limits_{|z|=2}\frac{1}{1+z^4}dz.$

▼ $1+z^4=0$ теңдеуінің түбірлері – $f(z)=\dfrac{1}{1+z^4}$ функциясының полюстері және олардың барлығы $|z|=2$ шеңберінің ішінде болғандықтан, (5) теңдіктен $\displaystyle\int\limits_{|z|=2}\frac{1}{1+z^4}dz=2\pi i\sum_{k=1}^{4}\operatorname{Res}\limits_{z=z_k} f(z)$ аламыз.

Ал (4) теңдік бойынша $\sum\limits_{z=1}^{4} \operatorname*{Res}\limits_{z=z_k} f(z) = \operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} f(z).$ Енді $f(z) = \dfrac{1}{1+z^4}$ функциясының ақырсыз нүктедегі шегерімін табу үшін оны Лоран қатарына жіктейміз:

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{z^4} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{1}{z^4}} = \frac{1}{z^4} \cdot \left(1 - \frac{1}{z^4} + \dots\right) = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^8} + \dots \cdot$$

Мұнда $c_{-1} = 0$ болғандықтан, $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} f(z) = 0.$ Сонымен,

$\int\limits_{|z|=2} \dfrac{1}{1+z^4} dz = 2\pi i\,(-\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} f(z)) = 0.$ ▲

§ 11. Интегралдарды шегерім арқылы есептеу

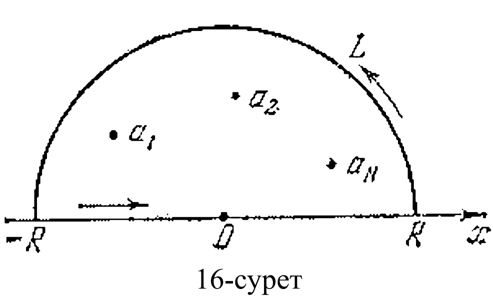
Егер $f(z)$ функциясы жоғарғы жарты жазықтықта жатқан $a_1, a_2, ..., a_N$ ерекше нүктелерден басқа, $\operatorname{Im} z \geq 0$ нүктелерде аналитикалық болса, онда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx,\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx$ түріндегі интегралдарды есептеу әдістерін көрсетуге болады.

1-теорема. $f(z)$ функциясы жоғарыда аталған шарттарды қанағаттандырсын және $|z| \geq R$, R – жеткілікті үлкен сан, нүктелерінде $|f(z)| \leq \dfrac{M}{|z|^m}$, $m \geq 1+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ болсын. Онда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z). \tag{1}$$

▼ Сағат тіліне қарсы бағытталған, радиусы R, центрі координат басы болатын L жарты шеңбер жүргіземіз (16-сурет).
§ 10-дағы (5) формула бойынша

$$\int\limits_{-R}^{+R} f(x)dx + \int\limits_{L} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z). \tag{2}$$



16-сурет

Теорема шартын пайдалансақ,

$$\left|\int_L f(z)dz\right| \le M\int_L \frac{1}{|z|^m}dz = \left|L:|z|=R\right| = \frac{M}{R^m}\int_L dz = \frac{M}{R^m}\cdot \pi R =$$

$$= \frac{M}{R^{m-1}}\cdot\pi \;\to\; 0,\; R\to\infty \text{ (мұндағы } m-1\ge\varepsilon,\quad \varepsilon>0\text{)}.$$

Осы жағдайды ескеріп, (2) теңдікте $R\to\infty$ ұмтылдырып, шекке өтсек, (1) аламыз. ▲

1-мысал. Интегралды есептеу керек: $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx.$

▼ Интеграл астындағы функция жұп болғандықтан: $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx.$ Жоғарғы жарты жазықтықтың $z=i$ нүктесінен басқа нүктелерінде ($\operatorname{Im} z = 0$ нүктелерінде де) $f(z)=\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2}$ – аналитикалық функция. Бұл функция үшін $z=i$ – екінші ретті полюс болғандықтан

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to i}\left[\frac{z^2}{(z-i)^2(z+i)^2}\cdot(z-i)^2\right]' = \lim_{z\to i}\left[\frac{z^2}{(z+i)^2}\right]' =$$

$= \lim\limits_{z\to i}\frac{2iz}{\left(z+i\right)^3} = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}.$ Енді (1) теңдікті пайдаланамыз:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \pi i\cdot\left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{4}. \quad ▲$$

Енді $f(z)$ – жоғарғы жарты жазықтықта жатқан $a_1, a_2, ..., a_N$ ерекше нүктелерден басқа, $\operatorname{Im} z\ge 0$ нүктелерде аналитикалық функция болса, онда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx$ түріндегі интегралды есептеу әдісін қарастырайық. Келесі теореманың дәлелдеуін, мысалы, [1] қарауға болады.

2-теорема. Егер $f(z)$ жоғарыда аталған шартты қанағаттандырса және $\arg z=\varphi$ нүктелеріне қатысты бірқалыпты $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$ болса, онда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{N}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)e^{ix}. \qquad (3)$$

Ескерту. Егер интеграл белгісінің астында $\sin x$ немесе $\cos x$ көбейткіші бар болса, онда оларды e^{iz} көбейткішіне ауыстыру көбінесе ыңғайлы. Ал $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx$ интегралының мәні табылған соң, оның нақты немесе жорамал бөлігі іздеген нәтижені береді:

$$\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)cosxdx;$$

$$\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin xdx.$$

2-мысал. Интегралдарды есептеу керек:

а) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{cos\alpha x}{a^2+x^2}dx,\quad \alpha>0,\ a>0;$ б) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx;$ в) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{1+x^2}dx;$

▼ а) Ескертуге сәйкес $\frac{e^{i\alpha z}}{a^2+z^2}$ функциясын қарастырамыз. Бұл $z=ai,\ a>0,$ нүктесінен басқа, $\operatorname{Im} z\geq 0$ нүктелерде аналитикалық функция. Сонымен бірге $z\to\infty$ ұмтылғанда, $\arg z=\varphi$ нүктелеріне қатысты $f(z)=\frac{1}{a^2+z^2}\ \to\ 0.$

Сондықтан 2-теоремаға сәйкес

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\alpha x}}{a^2+x^2}dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=ai}\frac{e^{i\alpha z}}{a^2+z^2} = 2\pi i\,\frac{e^{i\alpha ai}}{2ai} = \frac{\pi}{a}e^{-\alpha a}.$$ Бұның нақты бөлігі $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{cos\alpha x}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{a}e^{-\alpha a}$ немесе $\int_{0}^{+\infty}\frac{cos\alpha x}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-\alpha a}$.

б) $$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx = \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2x}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}arctgx\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}e^{-2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}e^{-2};$$

в) $$\int_0^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{1+x^2}dx = \int_0^{+\infty}\frac{1-\sin^2 x}{1+x^2}dx = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx - \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2}\right) = \frac{\pi}{4}\left(1+e^{-2}\right). \qquad \blacktriangle$$

Шегерімдер теориясын келесі түрдегі интегралдарды есептеуге қолдануға болады:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx, \qquad (4)$$

мұнда $R(u,v)-$ аргументтеріне қатысты рационал және $u^2+v^2=1$ шеңберінде ерекше нүктелері жоқ функция.

Егер $z=e^{ix}$ деп алсақ, онда x нүктесі 0-ден 2π-ге дейін мәндер қабылдағанда, z нүктесі $|z|=1$ шеңберін оң бағытпен бір рет айналады, сонымен бірге келесі теңдіктер орын алады:

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \quad \sin x = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right), \quad dx = \frac{dz}{iz}. \qquad (5)$$

Бұл айнымал ауыстыруы шегерімдер арқылы есептеуге болатын комплекс аргументті функцияның тұйық контур бойынша интегралына әкеледі:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx = \int_{|z|=1} R\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]\frac{dz}{iz}. \qquad (6)$$

3-мысал. Интегралды есептеу керек: $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\cos x}dx.$

▼ $z = e^{ix}$ айнымал ауыстыруы арқылы (6) формуланы пайдаланамыз: $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\cos x}dx = \int_{|z|=1} \frac{1}{5+4\cdot\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz} =$

$= \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{2z^2+5z+2}dz.$ Интеграл астындағы функцияның ерекше нүктелері: $z_1 = -2,\ z_2 = -\frac{1}{2}.$ Бұлардың екіншісі ғана $|z| = 1$ шеңберінің ішінде болғандықтан, $\frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{2z^2+5z+2}dz =$

$= 2\pi \operatorname{Res}_{z=-\frac{1}{2}} \frac{1}{2z^2+5z+2} = \pi \operatorname{Res}_{z=-\frac{1}{2}} \frac{1}{(z+2)\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2\pi}{3}.$ ▲

II тарау.

Амалдық қисап негіздері және оның қолданылуы

§ 1. Лаплас түрлендіруі

Біз мұнда Лаплас түрлендіруінің анықтамасын және оның негізгі қасиеттерін қарастырамыз. Лаплас түрлендіруі қасиеттерінің математиканың маңызды бөлімі болып саналатын дифференциалдық теңдеулерді шешуде, электротехниканың маңызды бөлімі – электр тізбегінің өтпелі процесін үйренуде және де басқа салаларда рөлі үлкен. Лаплас түрлендіруін қолданудың негізгі идеясы мынада: *түпнұсқа* деп аталатын $f(t)$ функция мен оның *L кескіні* деп аталатын $F(p)$ функция арасында сәйкестік орнатылады (олардың анықтамалары төменде) және түпнұсқаларға жасалатын белгілі амалдарға, олардың L кескініне жасалатын қандай да бір амалдар сәйкес келеді. Бастысы – бұл соңғы амалдар түпнұсқаларға жасалатын амалдарға қарағанда анағұрлым жеңіл. Сондықтан L кескіндер өрісінде бастапқы есептің шешімін алады да, алынған L кескіннен кері қарай, түпнұсқаға өтеді. Енді жоғарыда аталған ұғымдардың анықтамаларына көшейік.

Анықтама. Нақты айнымалды $f(t)$ функцияның ***Лаплас түрлендіруі*** деп

$$F(p) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \qquad (1)$$

формуласымен анықталған комплекс айнымалды $F(p)$ функцияны айтады.

Теңдіктің оң жағындағы, $p = a + ib$ комплекс параметрге тәуелді меншіксіз интегралды ***Лаплас интегралы*** деп атайды.

(1) меншіксіз интеграл жинақты болу үшін және ол қандай да бір $F(p)$ функцияны нақты анықтау үшін қажет, $f(t)$ функцияға қатысты келесі шарттар орындалады деп ұйғарамыз:

1) $t < 0$ болса $f(t) = 0$, $t \geq 0$ болса $f(t)$– құрақты-үзіліссіз (ол не үзіліссіз, немесе оның тек бірінші текті үзіліс нүктелері болады және әрбір ақырлы аралықта ондай үзіліс нүктелердің саны – ақырлы);

2) t айнымал өскенде, $f(t)$ функцияның модулі өсуі мүмкін, бірақ оның өсуі қандай да бір көрсеткіштік функциядан жылдам емес, яғни

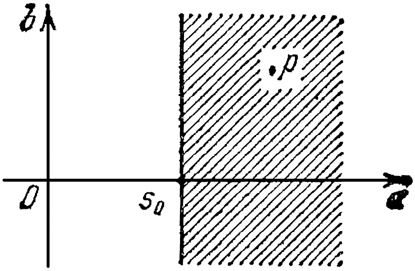
$$|f(t)| \le M \cdot e^{s_0 t}, \quad M,\ s_0 \text{ - тұрақтылар.} \qquad (2)$$

Аталған екі шартты қанағаттандыратын кез келген $f(t)$ функцияны – ***түпнұсқа*** (оригинал), ал (1) формуламен анықталған $F(p)$ функцияны оның ***Лаплас кескіні*** немесе ***L кескіні*** деп атайды да, келесі символдардың бірімен белгілейді:

$$F(p) = L\big(f(t); p\big), \qquad f(t) \risingdotseq F(p), \qquad f(t) \leftrightarrow F(p).$$

Берілген түпнұсқаның L кескінін табу және, керісінше, белгілі L кескіні бойынша түпнұсқасын табу процесін ***амалдық қисап*** дейді.

1-теорема. Егер $f(t)$ түпнұсқа болса, онда Лаплас интегралы $a = \operatorname{Re} p > s_0$ шартын қанағаттандыратын барлық комплекс $p = a + ib$ нүктелерде абсолют жинақты және осы $a = \operatorname{Re} p > s_0$ жарты жазықтықта $F(p)$ функциясының туындылары бар, яғни $F(p)$ аналитикалық функция болады (17-сурет).



17-сурет

Біз мұнда $f(t)$ функцияның ***өсу көрсеткіші*** деп аталатын 2) шарттағы s_0 санының маңызын көрсету үшін ғана теореманың бірінші жартысының дәлелдеуін көрсетеміз. Теореманың толық дәлелдеуін, мысалы, [1]-[2] кітаптардан қарауға болады.

Сонымен, (2) шарт бойынша, $\left|f(t)e^{-pt}\right| = \left|f(t)\right|\left|e^{-pt}\right| =$ $= \left|f(t)\right| e^{-at} \leq M \cdot e^{s_0 t} e^{-at} = M \cdot e^{(s_0 - a)t}$ болатынынын ескерсек,

$$\int_0^{+\infty} \left|f(t)e^{-pt}\right| dt \leq M \cdot \int_0^{+\infty} e^{(s_0-a)t} dt = M \cdot \left.\frac{e^{(s_0-a)t}}{s_0 - a}\right|_0^{+\infty} = \frac{M}{a - s_0}$$ аламыз

(мұнда $s_0 - a < 0$, сондықтан $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{(s_0-a)t} = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{e^{-(s_0-a)t}} = 0$). ⏶

Енді түпнұсқаның жалғыз болатыны туралы теореманы (дәлелдеусіз) келтіреміз.

2-теорема. Егер $f(t)$ және $g(t)$ түпнұсқалардың екеуінің де L кескіні $F(p)$ болса, онда олар өзара тепе-тең: $f(t) \equiv g(t)$.

Ескерту. Бұдан кейін, қандай да бір функция $f(t)$ түрінде берілсе, онда оны келесі түрдегі функция деп қабылдау керек: $f_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ f(t), & t \geq 0. \end{cases}$ Мысалы, ***бірлік функция*** немесе ***Хевисайд функциясы*** (О.Хевисайд (1850-1925) – ағылшын инженері) деп аталатын $\sigma_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ функция $\sigma_0(t) = 1$ деп жазылатын болады. Хевисайд функциясын пайдаланып жазсақ: $f_1(t) = \sigma_0(t)\sin t$, $f_2(t) = \sigma_0(t)\cos t$, $f_3(t) = \sigma_0(t)e^t$, және т.с.с. болар еді, бірақ жазуды қасқарту мақсатында олар $f_1(t) = \sin t$, $f_2(t) = \cos t$, $f_3(t) = e^t$, және т.с.с. түрлерде жазылатын болады.

§ 2. Қарапайым функциялардың *L* кескіні. *L* кескіннің қасиеттері

Анықтама бойынша, $\sigma_0(t)=1$ және $f(t)=\cos t$ функцияларының L кескінін табайық:

$$L\left(\sigma_0(t);p\right)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}e^{-pt}\bigg|_0^{+\infty}=\frac{1}{p}, \text{ яғни,}$$

$$\sigma_0(t)=1 \risingdotseq \frac{1}{p}. \tag{1}$$

$$L\left(\cos t;p\right)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}\cos t dt=e^{-pt}\sin t\Big|_0^{+\infty}+p\int_0^{+\infty} e^{-pt}\sin t dt=$$

$$=p\int_0^{+\infty} e^{-pt}\sin t dt=p\left[-e^{-pt}\cos t\Big|_0^{+\infty}-p\int_0^{+\infty} e^{-pt}\cos t dt\right]=$$

$=p-p^2L\left(\cos t;p\right)$. Бұдан $L\left(\cos t;p\right)=\dfrac{p}{1+p^2}$, $p>0$, яғни,

$$\cos t \risingdotseq \frac{p}{1+p^2}, \quad p>0. \tag{2}$$

Мұндағы екінші мен үшінші теңдіктердің арасындағы өрнек: $p\cdot\int_0^{+\infty} e^{-pt}\sin t dt=p\cdot L\left(\sin t;p\right)$ екенін ескерсек, $L\left(\sin t;p\right)=\dfrac{1}{1+p^2}$, $p>0$ аламыз, яғни

$$\sin t \risingdotseq \frac{1}{1+p^2}, \quad p>0. \tag{3}$$

1-теорема (ұқсастық). Егер $f(t) \risingdotseq F(p)$, онда

$$f(\alpha t)\risingdotseq\frac{1}{\alpha}F(\frac{p}{\alpha}), \ \ \alpha>0, \ \ \operatorname{Re}p>\max\left\{s_0,\alpha s_0\right\}. \tag{4}$$

▼ $$f(\alpha t) \risingdotseq \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(\alpha t)dt = \left| \alpha t = u,\ dt = \frac{du}{\alpha} \right| =$$
$$= \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{\alpha}u} f(u)du = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$ ▲

Сонымен, түпнұсқаның аргументін α санына көбейту оның кескіні мен кескіннің аргументін α санына бөлуге әкеледі екен. Мысалы,

$$\cos \alpha t \risingdotseq \frac{1}{\alpha}\frac{\frac{p}{\alpha}}{1+\frac{p}{\alpha^2}^2} = \frac{p}{p^2+\alpha^2}; \quad (5)$$

$$\sin \alpha t \risingdotseq \frac{1}{\alpha}\frac{1}{1+\frac{p}{\alpha^2}^2} = \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}; \quad (6)$$

Меншіксіз интегралдың сызықтық қасиетінен шығатын L кескіннің қасиеті:

2-теорема (сызықтық қасиет). Келесі теңдік орындалады:

$$L\left[A\cdot f(t)+B\cdot g(t);\ p\right] = A\cdot L\left[f(t);p\right]+B\cdot L\left[g(t);p\right],$$

$\operatorname{Re} p > \max\{s, \overline{s}\}$, мұндағы s пен $\overline{s}$, сәйкес $f(t)$ және $g(t)$ функцияларының өсу көрсеткіштері, ал A, B – сандар.

1-*мысал.*

$$3-4\sin 5t = 3\cdot 1-4\sin 5t \risingdotseq 3\cdot\frac{1}{p}-4\cdot\frac{5}{p^2+5^2} = \frac{3}{p}-\frac{20}{p^2+25};$$

2-*мысал.* L кескіннің түпнұсқасын табу керек:

$$F(p) = \frac{7}{p}-\frac{2}{p^2+5}.$$

▼ (1), (6) формулаларды және сызықтық қасиетті пайдаланамыз: $\dfrac{7}{p}-\dfrac{2}{p^2+5} = 7\cdot\dfrac{1}{p}-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{p^2+\left(\sqrt{5}\right)^2} \risingdotseq$

$$\risingdotseq \; 7\cdot 1-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sin\sqrt{5}t. \quad \blacktriangle$$

Берілген $f(t)$ функция мен $e^{-\alpha t}$ көрсеткіштік функцияның көбейтіндісі: $e^{-\alpha t}f(t)$ – экспонентке (көрсеткіштік заңға) сәйкес жылдамдықпен бәсеңдейтін (өшетін) функция деп аталады және олар іс-тәжірибеде жиі қолданылады. Келесі теорема осындай функциялардың L кескінін табуға арналған.

3-теорема (кескіннің ығысуы).

$$L\left[f(t)\cdot e^{-\alpha t};\, p\right]=L\left[f(t);\, p+\alpha\right],\ \operatorname{Re}\left(p+\alpha\right)>s_0.$$

(Өз бетіңізше көз жеткізіңіз).

Мысалы, келесі функциялардың L кескінін табу керек болсын:

а) $e^{-\alpha t}$; ә) $e^{-\alpha t}\cos\beta t$; б) $e^{-\alpha t}\sin\beta t$; в) $\mathrm{c}h\alpha t$; г) $sh\alpha t$.

▼ а) (1) формуланы және 3-Теореманы пайдаланамыз:

$$L\left(e^{-\alpha t};\, p\right)=L\left(e^{-\alpha t}\cdot\sigma_0(t);\, p\right)=L\left(\sigma_0(t);\, p+\alpha\right)=\frac{1}{p+\alpha},\ \text{яғни,}$$

$$e^{-\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{p+\alpha}. \tag{7}$$

ә) (5) формуланы және 3-теореманы пайдаланамыз:

$$L\left[e^{-\alpha t}\cos\beta t;\, p\right]=\frac{p+\alpha}{\left(p+\alpha\right)^2+\beta^2},\ \text{яғни,}$$

$$e^{-\alpha t}\cos\beta t \risingdotseq \frac{p+\alpha}{\left(p+\alpha\right)^2+\beta^2}; \tag{8}$$

б) (6) формуланы және 3-теореманы пайдаланамыз:

$$L\left[e^{-\alpha t}\sin\beta t;\, p\right]=\frac{\beta}{\left(p+\alpha\right)^2+\beta^2},\ \text{яғни,}$$

$$e^{-\alpha t}\sin\beta t \risingdotseq \frac{\beta}{\left(p+\alpha\right)^2+\beta^2}; \tag{9}$$

в) 2-теореманы және (7) формуланы пайдаланамыз:

$$L\left[\mathrm{c}h\alpha t;\ p\right]=L\left[\frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2};\ p\right]=\frac{1}{2}L\left[e^{\alpha t};\ p\right]-\frac{1}{2}L\left[e^{-\alpha t};\ p\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{p-\alpha}+\frac{1}{2}\frac{1}{p+\alpha}=\frac{p}{p^2-\alpha^2},$$ яғни,

$$\mathrm{c}h\alpha t \;\risingdotseq\; \frac{p}{p^2-\alpha^2}; \tag{10}$$

г) Осы сияқты,

$$sh\alpha t \risingdotseq \frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}. \tag{11}$$

▲

3-*мысал.* Функцияның L кескінін табу керек:

$$f(t)=cht\cdot\sin t.$$

▼ 3-теореманы және (9) формуланы пайдаланамыз:

$$cht\cdot\sin t=\left(\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{2}e^{-t}\right)\cdot\sin t=\frac{1}{2}e^{t}\cdot\sin t+\frac{1}{2}e^{-t}\cdot\sin t \;\risingdotseq$$

$$\risingdotseq\; \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p-1)^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p+1)^2+1}=\frac{p^2+2}{p^2+4};$$ ▲

Егер $F(p)$ кескіннің $f(t)$ түпнұсқасы белгілі болса, онда 3-теорема бойынша $F(p-\alpha)$ кескіннің түпнұсқасын таба аламыз.

4-*мысал.* Берілген L кескінге сәйкес түпнұсқаны табу

керек: $F(p)=\dfrac{1}{p^2-4p-3}.$

▼ Берілген бөлшекті қажетті түрге келтіреміз:

$\dfrac{1}{p^2-4p-3}=\dfrac{1}{(p-2)^2-7}=\dfrac{1}{\sqrt{7}}\dfrac{\sqrt{7}}{(p-2)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}.$ Енді 2 мен 3 теоремаларды және $\dfrac{1}{\sqrt{7}}\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{p^2-\left(\sqrt{7}\right)^2} \fallingdotseq \dfrac{1}{\sqrt{7}}\cdot sh\sqrt{7}t$ сәйкестігін ((11) – формула) пайдаланамыз:

$$F(p)=\frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{(p-2)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2} \fallingdotseq \frac{1}{\sqrt{7}}\,e^{2t}sh\sqrt{7}t. \qquad ▲$$

4-теорема (*кескінді дифференциалдау*).

Егер $F(p)=L\big(f(t);p\big)$, онда

$$\left(-1\right)^n F^{(n)}(p)=L\Big(t^n f(t);\ p\Big).$$

▼ Біз мұнда (1) интегралды мүшелеп, интегралдау амалын қолданамыз (бұл амалдың заңды екенін, мысалы, [1], § 2.15, 2-теоремадан қараңыз). Сонымен, $\operatorname{Re} p > s_0$ (s_0 - $f(t)$ функциясының өсу көрсеткіші) орындалатын нүктелер үшін (§ 1, 1-теореманы қараңыз)

$$F'(p)=-\int_0^{+\infty} t\cdot f(t)e^{-pt}dt, \qquad F''(p)=\int_0^{+\infty} t^2\cdot f(t)e^{-pt}dt, \quad \ldots \quad ,$$

$$\left(-1\right)^n F^{(n)}(p)=\int_0^{+\infty} t^n f(t)e^{-pt}dt=L\Big(t^n f(t);\ p\Big). \qquad ▲$$

Назар аударыңыз! Кескінді дифференциалдау түпнұсқаны $-t$ -ға көбейтуге әкеледі.

Мысалы, $\dfrac{1}{p} \fallingdotseq 1$ сәйкестігі белгілі. Онда, 4-теорема бойынша,

$\left(\dfrac{1}{p}\right)'=-\dfrac{1}{p^2} \fallingdotseq \left(-t\right)\cdot 1=-t$, яғни, $t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2}$. Алынған кескінді дифференциалдауды жалғастыра отырып, келесі сәйкестікті аламыз:

$$t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad n=1,2,\ldots . \qquad (12)$$

Ескерту. Егер n бүтін емес болса, онда $t^n \risingdotseq \dfrac{\Gamma\left(n+1\right)}{p^{n+1}}$,

мұндағы $\Gamma\left(n+1\right)=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt=L\Big(t^n;1\Big)$.

5-мысал. Түпнұсқаның кескінін табу керек:

$$f(t)=3t^3e^{-t}+t^2+1.$$

▼ 4-теореманы, сызықтық қасиетті, $e^{-t} \risingdotseq \dfrac{1}{p+1}$ сәйкестігін және (12) формуланы пайдаланамыз:

$$3t^3e^{-t}+t^2+1 \risingdotseq 3(-1)^3\left(\frac{1}{p+1}\right)''' + \frac{2!}{p^{2+1}}+\frac{1}{p}, \text{ яғни,}$$

$$3t^3e^{-t}+t^2+1 \risingdotseq \frac{18}{(p+1)^4}+\frac{2}{p^3}+\frac{1}{p}. \qquad ▲$$

Ескерту. Келесі тұжырымда, $f(t) \risingdotseq F(p)$ сәйкестігіндегі түпнұсқа және оның туындыларының $t=0$ нүктедегі мәндері: $f(0), f'(0),..., f^{(n)}(0)$ деп, $t=0$ нүктедегі олардың оң жақ шектерін: $f(0+0), f'(0+0),..., f^{(n)}(0+0)$ аламыз.

5-теорема (*түпнұсқаны дифференциалдау*). Егер $[0;+\infty)$ аралығында $f(t), f'(t),..., f^{(n-1)}(t)$ – үзіліссіз, ал $f^{(n)}(t)$ құрақ-үзіліссіз болып, олардың барлығының өсу көрсеткіштері s_0 болса, онда жазықтықтағы $\operatorname{Re} p > s_0$ нүктелер үшін келесі сәйкестік орындалады:

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-...-f^{(n-1)}(0). \qquad (13)$$

▲ Алдымен $f'(t)$ туындының кескінін табайық:

$$L[f'(t);p]=\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = f(t)e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}+p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

Теоремадағы $\operatorname{Re} p > s_0$ шартына сәйкес $\left|f(t)e^{-pt}\right| \le Me^{-(\operatorname{Re} p - s_0)t} \to 0$, $t\to+\infty$ болатынын ескеріп, соңғы теңдіктен $L[f'(t);p]=-f(0)+p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = pF(p)-f(0)$ аламыз, яғни $f(t) \risingdotseq F(p)$ болса, онда $f'(t) \risingdotseq pF(p)-f(0)$. Теоереманы қайталап қолдансақ:

$$f''(t) \;\;\risingdotseq\;\; p\left[pF(p)-f(0)\right]-f'(0)=p^2F(p)-pf(0)-f'(0).$$

Осылай келесі туындыларға да теореманы қолдана отырып, (13) формуланы алуға болады. ▼

Егер (13) формулада $f(0)=f'(0)=...=f^{(n-1)}(0)=0$ болса, онда

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p). \tag{14}$$

Мысалы, $f(t)=\sin^2 t$ түпнұсқаның кескінін табайық.

▼Айталық, ол кескін $F(p)$ болсын, яғни $f(t)=\sin^2 t \risingdotseq F(p)$. Онда, 5-теорема бойынша, $f'(t)=\left(\sin^2 t\right)'=\sin 2t \risingdotseq pF(p)-f(0)$. Мұнда $f(0)=0$ және $\sin 2t \risingdotseq \dfrac{2}{p^2+4}$ ((6) формула) болатынын ескерсек, онда $\dfrac{2}{p^2+4}=pF(p)$, немесе $F(p)=\dfrac{2}{p\left(p^2+4\right)}$ аламыз, яғни $\sin^2 t \risingdotseq \dfrac{2}{p\left(p^2+4\right)}$. ▲

6-теорема (*түпнұсқаны интегралдау*). Егер $f(t) \risingdotseq F(p)$,

онда $\displaystyle\int_0^t f(\tau)d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$.

▼ $\displaystyle\int_0^t f(\tau)d\tau$ функциясын $g(t)$ арқылы $\displaystyle g(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau$ белгілесек, онда $g'(t)=f(t)$, $g(0)=0$. Енді $g(t)$ функциясының кескінін $G(p)$ деп белгілеп: $g(t) \risingdotseq G(p)$, оған түпнұсқаны дифференциалдау теоремасын (5-теорема) қолдансақ, $g'(t)=f(t) \risingdotseq pG(p)-g(0)=pG(p)$, ал бұдан

$f(t) \risingdotseq F(p)$ сәйкестігін ескеріп $G(p)=\dfrac{F(p)}{p}$, яғни

$$g(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$$ аламыз. ▲

Мысалы, $\sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$ сәйкестігінен (6) теореманы пайдалансақ, $\dfrac{1}{p\left(p^2+1\right)} \risingdotseq \displaystyle\int_0^t \sin\tau d\tau = \cos\tau\Big|_0^t = \cos t-1,$ яғни $\cos t-1 \risingdotseq \dfrac{1}{p\left(p^2+1\right)}$ сәйкестігін аламыз.

Дәлелдеусіз кескінді интегралдау теоремасын береміз (оның дәлелдеуін, мысалы, [1] қарауға болады).

7-теорема (*кескінді интегралдау*). Егер $\displaystyle\int_p^{+\infty} F(z)dz$ интегралы жинақты болса, онда

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^{+\infty} F(z)dz,$$

яғни кескінді p-дан $+\infty$-қа дейін интегралдау түпнұсқаны оның аргументіне бөлуге әкеледі.

Мысалы, $\sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$ сәйкестігінен (7) теореманы пайдалансақ, $\displaystyle\int_p^{+\infty}\frac{1}{z^2+1}dz = arctgz\Big|_p^{+\infty} = \frac{\pi}{2}-arctgp = arcctgp,$ болатындықтан, $\dfrac{\sin t}{t} \risingdotseq arcctg\,p$ сәйкестігін аламыз.

(7) теореманы пайдаланып, кейбір меншіксіз интегралдарды жеңіл есептеуге болады. Айталық, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt$ меншіксіз интегралы жинақты және $f(t) \risingdotseq F(p)$ болсын. Онда

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^{+\infty} F(p)dp. \qquad (15)$$

Мысалы, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ меншіксіз интегралды есептеу керек болса,

онда $\sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}$ сәйкестігінен (15) теңдікті пайдаланып,

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{p^2+1}dp = arctgp\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ аламыз.

Келесі, *кешігу теоремасы* деп аталатын тұжырымды әрбір бөлікте әртүрлі аналитикалық өрнектермен берілген функцияның кескінін табу үшін пайдалануға ыңғайлы.

8-теорема (*түпнұсқаның кешігуі*). Егер $f(t) \risingdotseq F(p)$, онда кез келген теріс емес $t_0 \geq 0$ үшін

$$f(t-t_0) \risingdotseq e^{-pt_0}F(p). \qquad (16)$$

▼ $$L\left[f(t-t_0);p\right] = \int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t-t_0)dt =$$

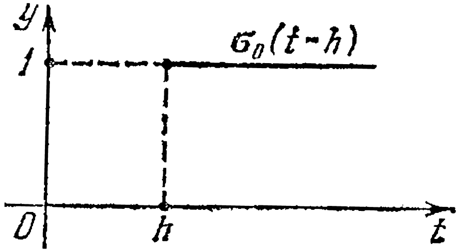
$$= \int_0^{t_0} e^{-pt}f(t-t_0)dt + \int_{t_0}^{+\infty} e^{-pt}f(t-t_0)dt = \left|f(t-t_0)=0,\ t<t_0\right| =$$

$$= \int_{t_0}^{+\infty} e^{-pt}f(t-t_0)dt = \left|t-t_0=u,\ dt=du\right| = \int_0^{+\infty} e^{-p(u+t_0)}f(u)du = e^{-pt_0}F(p).$$

▲

Мысалы, **а)** $\sigma_0(t)=1 \risingdotseq \frac{1}{p}$ сәйкестігінен, 8-теорема бойынша, $\sigma_0(t-h) \risingdotseq e^{-ph}\frac{1}{p}$ сәйкестігі шығады (18-сурет).

б) $t^2\sigma_0(t) \risingdotseq \frac{2}{p^3}$ сәйкестігінен, 8-теорема бойынша, $(t-1)^2\sigma_0(t-1) \risingdotseq e^{-ph}\frac{2}{p^3}$ сәйкестігі шығады.



18-сурет

Назар аударыңыз! Мұндағы $(t-1)^2\sigma_0(t-1)=0,\ \ t<1$. Егер $(t-1)^2\sigma_0(t)$ болса, онда сызықтық қасиет бойынша, $(t-1)^2\sigma_0(t)=\left(t^2-t+1\right)\sigma_0(t) \risingdotseq \dfrac{2}{p^3}-\dfrac{2}{p^2}+\dfrac{1}{p}$ шығар еді.

Анықтама. Екі $f(t)$ және $g(t)$ функцияның ***үйірткісі*** деп, $\int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$ интегралын айтады және оны $f*g$ арқылы белгілейді:

$$f*g=\int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau. \qquad (17)$$

Бұл интеграл t айнымалға тәуелді функция (t интеграл астындағы өрнекке де кіреді). Үйірткі амалы – коммутативті: $f*g=g*f$. Бұған $t-\tau=u$ айнымал ауыстыруын жасай отырып көз жеткізуіңізге болады. Мысалы, $f(t)=e^t$, ал $g(t)=t$ болса, онда

$$f*g=\int\limits_0^t e^t(t-\tau)\,d\tau=t\left(e^t-1\right)-\left(te^t-e^t+1\right)=e^t-t-1.$$

9-теорема (*кескіндерді көбейту*)**.** Егер $f(t)\risingdotseq F(p)$, $g(t)\risingdotseq G(p)$ болса ($s_0(f)=s_0(g)$), онда

$$f*g \risingdotseq F(p)\cdot G(p). \qquad (18)$$

▼ $f*g \risingdotseq \int_0^{+\infty}\left[\int_0^t f(\tau)g\left(t-\tau\right)d\tau\right]e^{-pt}dt = /$ интегралдау ретін өзгертеміз, содан соң ішкі интегралда $t-\tau=t_1$ айнымал ауыстыруын жасаймыз / =

$$=\int_0^{+\infty}d\tau\int_\tau^{+\infty}f(\tau)g\left(t-\tau\right)e^{-pt}dt=\left|t-\tau=t_1, dt=dt_1\right|=$$

$$=\int_0^{+\infty}d\tau\int_0^{+\infty}f(\tau)g\left(t_1\right)e^{-p\left(\tau+t_1\right)}dt_1=\int_0^{+\infty}f(\tau)e^{-p\tau}d\tau\cdot\int_0^{+\infty}g\left(t_1\right)e^{-pt_1}dt_1=$$

$$=F\left(p\right)\cdot G\left(p\right).$$ ▲

Мысалы, $e^t * cht \risingdotseq \frac{1}{p-1}\cdot\frac{p}{p^2-1}=\frac{p}{\left(p-1\right)^2\left(p+1\right)}.$

Салдар. Егер $f(t)\risingdotseq F(p),\ g(t)\risingdotseq G\left(p\right)$ болса, онда Дюамель ((1797-1872) – француз математигі) формуласы орындалады:

$$pF(p)\cdot G\left(p\right)\risingdotseq f(t)g\left(0\right)+\int_0^t f(\tau)g'\left(t-\tau\right)d\tau. \qquad (19)$$

▼ $pF(p)\cdot G\left(p\right)=\left[pG(p)-g\left(0\right)\right]F\left(p\right)+g\left(0\right)F\left(p\right)$ – теңдігінің оң жағының бірінші қосылғышы $g'(t)$ түпнұсқа мен $f(t)$ түпнұсқаның сәйкес кескіндерінің көбейтіндісі болғандықтан, 9-теорема бойынша,

$pF(p)\cdot G\left(p\right)\risingdotseq g'(t)*f(t)+g\left(0\right)f(t)$ аламыз. Мұндағы үйірткіні ашып жазсақ (үйірткінің коммутативтік қасиетіне сүйеніп), (19) формулаға келеміз. ▲

Енді берілген кескіні бойынша оның түпнұсқасын табуға арналған теоремаларды келтіреміз.

10-теорема. Кеңейтілген комплекс жазықтықта $F(p)$– аналитикалық функция және $F(\infty)=0$ болсын. Егер $F(p)$ функциясының ∞ нүкте маңайындағы Лоран қатары $F(p)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{p^k}$

болса, онда оның түпнұсқасын келесі формула арқылы табуға болады:

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{n+1}\dfrac{t^n}{n!}, & t>0.\end{cases} \qquad (19)$$

▼ Шынында да,

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{n+1}}{n!}\int_0^{+\infty} e^{-pt}t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{n+1}}{p^{n+1}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{p^k}.$$

Түпнұсқаның жалғыз болу теоремасы бойынша теоерма дәлелденді.

▲

Мысалы, $F(p)=\sin\dfrac{1}{p}$ функциясының түпнұсқасын табу керек.

▼ $F(p)=\sin\dfrac{1}{p}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\dfrac{1}{(2k-1)!\,p^{2k-1}}$ теңдігінен 10-теорема шарты орындалатынын көреміз. Олай болса,

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\frac{t^{2n}}{(2n)!}. \quad ▲$$

Келесі теоремаларды дәлелдеусіз келтіреміз.

11-теорема. $F(p)$ полюстері $p_1, p_2, ..., p_m$ болатын, бөлшек-рационал функция болсын. Онда

$$F(p) \fallingdotseq f(t)=\sum_{k=1}^{m}\underset{p=p_k}{\text{Ø åã}}\left[F(p)e^{pt}\right]. \qquad (20)$$

Ал, егер $p_1, p_2, ..., p_m$ – жай полюстер және $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$, мұнда $A(p)$, $B(p)$ – ортақ түбірлері жоқ көпмүшеліктер болса, онда

$$F(p) \fallingdotseq \quad f(t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}. \qquad (21)$$

Мысалы, $\quad F(p)=\dfrac{1}{(p-1)(p^2+1)}$ функциясының түпнұсқасын табу керек.

▼ Мұнда $p=1,\ p=\pm i$ – функцияның жай полюстері болғандықтан, $A(p)=1,\ B(p)=(p-1)(p^2+1),\quad B'(p)=3p^2-2p+1$ екенін ескерсек, (21) формула бойынша,

$f(t)=\dfrac{e^t}{2}-\dfrac{e^{it}}{2(1+i)}+\dfrac{e^{-it}}{2(i-1)}=\dfrac{1}{2}\left(e^t-\cos t-\sin t\right)$ аламыз. ▲

Тақырыптың соңында Меллин ((1854-1933) фин математигі) формуласын келтірейік.

12-теорема. Егер $\operatorname{Re} p>s_0$ нүктелерінде $F(p)$– аналитикалық функция, $|p|\to\infty$ ұмтылғанда, $\arg p$-ға қатысты $F(p)$ бірқалыпты $F(p)\to 0$ нөлге ұмтылса және $\displaystyle\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}|F(p)|dy<M$ болса, онда

$$F(p) \fallingdotseq \quad f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}e^{pt}F(p)\,dp,\quad x>s_0.$$

Енді қолдануға ыңғайлы болуы үшін, жоғарыда алынған элементар функциялардың L кескіндерін және олардың қасиеттерін ықшамдап, бір жерге топтап жазамыз.

1) $\sigma_0(t)=1 \risingdotseq \dfrac{1}{p}.$

2) $\cos\alpha t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+\alpha^2};$

3) $\sin\alpha t \risingdotseq \dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$;

4) $e^{-\alpha t} \risingdotseq \dfrac{1}{p+\alpha}$.

5) $e^{-\alpha t}\cos\beta t \risingdotseq \dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$;

6) $e^{-\alpha t}\sin\beta t \risingdotseq \dfrac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$;

7) $\mathrm{c}h\alpha t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2-\alpha^2}$;

8) $sh\alpha t \risingdotseq \dfrac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$.

9) $t^n \risingdotseq \dfrac{n!}{p^{n+1}}, \quad n=1,2,\dots$.

10) *Сызықтық қасиет*:

$$L\left[A\cdot f(t)+B\cdot g(t);\ p\right]=A\cdot L\left[f(t);p\right]+B\cdot L\left[g(t);p\right],$$

11) *Кескіннің ығысуы*:

$$L\left[f(t)\cdot e^{-\alpha t};\ p\right]=L\left[f(t);\ p+\alpha\right],\ \operatorname{Re}\left(p+\alpha\right)>s_0.$$

12) *Кескінді дифференциалдау*: $\left(-1\right)^n F^{(n)}(p) \fallingdotseq t^n f(t)$.

13) *Түпнұсқаны дифференциалдау*:

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\dots-f^{(n-1)}\left(0\right),$$

ал, егер $f\left(0\right)=f'\left(0\right)=\dots=f^{(n-1)}\left(0\right)=0$ болса, онда

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p).$$

14) *Түпнұсқаны интегралдау*: $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \risingdotseq \dfrac{F(p)}{p}$.

15) *Кескінді интегралдау*: $\dfrac{f(t)}{t} \risingdotseq \displaystyle\int_p^{+\infty} F(z)dz,$

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^{+\infty} F(p)dp.$$

16) *Түпнұсқаның кешігуі*: $f(t-t_0) \risingdotseq e^{-pt_0}F(p),\ t_0 \geq 0.$

17) *Кескіндерді көбейту*: $f * g \risingdotseq F(p)\cdot G\big(p\big).$

18) *Дюамель формуласы*:

$$pF(p)\cdot G\big(p\big) \fallingdotseq f(t)g\big(0\big) + \int_0^t f(\tau)g'\big(t-\tau\big)d\tau.$$

19) Егер $F(p) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{c_k}{p^k}$ болса, онда: $f\big(t\big) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{n+1}\dfrac{t^n}{n!}, & t > 0. \end{cases}$

20) Егер $F(p)$ полюстері $p_1, p_2, ..., p_m$ болатын, бөлшек-рационал функция болса, онда $f\big(t\big) = \sum\limits_{k=1}^{m} \mathop{\text{Ø åã}}\limits_{p=p_k}\Big[F\big(p\big)e^{pt}\Big].$

Ал, егер $p_1, p_2, ..., p_m$ – жай полюстер және $F(p) = \dfrac{A\big(p\big)}{B\big(p\big)},$ болса, онда $f\big(t\big) = \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{A\big(p_k\big)}{B'\big(p_k\big)}e^{p_k t}.$

§ 3. Амалдық қисаптың дифференциалдық теңдеулерді шешуге қолданылуы

Сызықтық дифференциалдық теңдеулерді интегралдауда қолданылатын амалдық қисап әдісінің классикалық әдістерге қарағанда артықшылығы – амалдық қисап арқылы дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін тауып жатпастан, берілген алғашқы шарттарды қанағаттандыратын теңдеудің шешімін бірден алуға болады. Егер дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу қажеттігі туса, онда оны да амалдық әдіс арқылы істеуге болады. Түсінуге жеңіл болуы үшін, амалдық қисаптың *екінші ретті біртекті емес сызықтық дифференциалдық теңдеулерді* шешуге қолданылуын қарастырайық (кез келген *n* ретті біртекті емес сызықтық дифференциалдық теңдеулерді де осы сияқты шешуге болады).

Сонымен, келесі екінші ретті біртекті емес сызықтық дифференциалдық теңдеудің (мұнда $x = x(t),\ \dot{x} = \dot{x}(t),\quad \ddot{x} = \ddot{x}(t)$, яғни функциялар мен оның туындыларының аргументтері – $t \geq 0$):

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2 x = f(t), \tag{1}$$

берілген алғашқы шарттарды:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \tag{2}$$

қанағаттандыратын дербес шешімін табу керек болсын.

▼ Айталық, (1) теңдеудің (2) шарттарды қанағаттандыратын дербес шешімі $x(t)$ болсын. Егер бұл функцияны (1) теңдеуге қойсақ, онда біз тепе-теңдік аламыз. Сондықтан (1) теңдеудің екі жағындағы функциялардың *L* кескіндері бірдей болады. Бұдан кейін $x(t)$ мен $f(t)$ функцияларының *L* кескіндерін сәйкес $X(p)$ және $F(p)$ арқылы белгілейміз. Содан соң түпнұсқаны дифференциалдау туралы теореманы: $\dot{x}(t) \risingdotseq pX(p) - x_0$,

$\ddot{x}(t) \risingdotseq p^2 X(p) - px_0 - \dot{x}_0$ және сызықтық қасиетті пайдаланып, түпнұсқаларды байланыстырып тұрған (1) теңдеуден, $X(p)$ және $F(p)$ кескіндерді байланыстыратын, ***операторлық теңдеу*** деп аталатын теңдеуге өтеміз:

$$p^2X(p)-px_0-\dot{x}_0+a_1\left[pX(p)-x_0\right]+a_2X(p)=F(p). \qquad (3)$$

Бұл – $X(p)$ кескінге қатысты ***алгебралық теңдеу.*** Операторлық теңдеуді шешейік:

$X(p)\left(p^2+a_1p+a_2\right)=F(p)+px_0+\dot{x}_0+a_1x_0$, бұдан,

$$X(p)=\frac{F(p)}{p^2+a_1p+a_2}+\frac{px_0+\dot{x}_0+a_1x_0}{p^2+a_1p+a_2}. \qquad (4)$$

Енді табылған $X(p)$ кескіннен оның $x(t)$ түпнұсқасына өтсек, ол түпнұсқаның жалғыздығы туралы теорема бойынша, (1) мен (2) – Коши есебінің шешімі болады. ▲

Егер алғашқы шарттар: $x(0)=x_0=0, \quad \dot{x}(0)=\dot{x}_0=0$ болса, онда келесі формуланы аламыз:

$$X(p)=\frac{F(p)}{p^2+a_1p+a_2}. \qquad (5)$$

Ескерту: Егер (2) алғашқы шарттар берілмесе, онда x_0, $\dot{x}_0$ орындарына кез келген тұрақтыларды алып, (1) теңдеудің жалпы шешімін алуға болады.

1-мысал.Теңдеудің алғашқы шартты қанағаттандыратын дербес шешімін табу керек: $\ddot{x}+4x=2, \; x(0)=\dot{x}_0(0)=0.$

▼ (5) формуланы пайдаланайық**:** $2 \risingdotseq \dfrac{2}{p}$ болатындықтан,

$X(p)=\dfrac{2}{p\left(p^2+4\right)}$. Табылған кескінге сәйкес түпнұсқаны табу үшін бөлшекті ең қарапайым бөлшектердің қосындысына жіктейміз: $X(p)=\dfrac{2}{p\left(p^2+4\right)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{p}{p^2+4}\right)$. Бұдан

$x(t)=\dfrac{1}{2}\sigma_0(t)-\dfrac{1}{2}\cos 2t=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2t.$ ▲

Назар аударыңыз! Табылған шешім берілген теңдеуді $t<0$ үшін де қанағаттандырады. Мұндай жағдай, яғни табылған шешімнің берілген теңдеуді кез келген t үшін қанағаттандыратын жағдайы (әрине, теңдеудің оң жағы барлық t үшін анықталса) өте жиі болады.

2-мысал. Теңдеудің алғашқы шартты қанағаттандыратын дербес шешімін табу керек: $\ddot{x}-4\dot{x}+5x=0,\ x(0)=0,\ \dot{x}(0)=1.$

▼ Операторлақ теңдеуге өтеміз: $p^2X(p)-1-4pX(p)+5X(p)=0.$ Алынған операторлық теңдеуді шешеміз: $X(p)=\dfrac{1}{p^2-4p+5}=\dfrac{1}{(p-2)^2+1}.$ Табылған кескіннің түпнұсқасын табамыз, ол үшін кескіннің ығысуы туралы теореманы (жоғарыда **11)** қараңыз) пайдаланамыз: $\sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$ болғандықтан, $x(t)=e^{2t}\sin t.$ ▲

Енді дифференциалдық теңдеулерді шешуде кескіндерді көбейту теоремасын (жоғарыда **17)**) және Дюамель интегралын (жоғарыда **18)**) қалай қолдануға болатынын көрсетейік. Біртекті емес сызықтық коэффициенттері тұрақты n ретті дифференциалдық теңдеуді қарастырамыз (мысалы, [3], § 10.7 қараңыз):

$$x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n-1}\dot{x}(t)+a_nx(t)=f(t),\quad t\geq 0. \tag{6}$$

Бұл теңдеудің сол жағындағы өрнекті

$$L_n[x]=x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n-1}\dot{x}(t)+a_nx(t) \tag{7}$$

арқылы белгілесек, (6) теңдеуді қысқаша жазуға болады:

$$L_n[x]=f(t),\quad t\geq 0\,. \tag{8}$$

$L_n[x]$ сызықтық n ретті дифференциалдық опратор деп аталады және ол келесі қасиеттерге ие ([3], § 10.7):

$$L_n\left[\sum_{i=0}^{n}C_ix_i\right]=\sum_{i=0}^{n}C_iL_n[x_i], \tag{9}$$

яғни функциялардың сызықты комбинациясының операторы осы функциялардың операторларының сызықты комбинациясына тең (оператордың сызықтық деп аталуы да осыған байланысты).

Кескіндерді көбейту туралы теореманы қолданудың мағынасы – егер *оң жағы қандай да бір функция болатын* (8) теңдеудің шешімі белгілі болса, онда үйірткі көмегімен *кез келген оң жағы бар* осы теңдеудің шешімін алу мүмкіндігі. Әсіресе теңдеудің оң жағын $f(t)=1$ деп алу тиімді. Сонымен, теңдеудің сол жағы бұрынғыдай, бірақ оң жағы $f(t)=1$ тең дифференциалдық теңдеуді нөлдік алғы шарттармен бірге аламыз:

$$z^{(n)}\left(t\right)+a_1 z^{(n-1)}\left(t\right)+\ldots+a_{n-1}\dot{z}\left(t\right)+a_n z\left(t\right)=1, \qquad (10)$$

$$z\left(0\right)=\ldots=z^{(n-1)}\left(0\right)=0. \qquad (10')$$

Ескерту. Дифференциалдық теңдеуді нөлдік алғашқы шарттармен: $z\left(0\right)=\ldots=z^{(n-1)}\left(0\right)=0$ бірге қарастыруға болады. Басқа жағдайларды, ізделінетін функция үшін қажетті айнымал ауыстыруын жасай отырып, нөлдік алғашқы шарттарға әрқашанда келтіруге болады (мысалы, ([3], § 7.3 қараңыз).

(6) мен (10) дифференциалдық теңдеулердің операторлық теңдеулеріне өтеміз:

$$p^n X+a_1 p^{n-1}X+\ldots+a_{n-1}pX+a_n X=F\left(p\right),$$

$$p^n Z+a_1 p^{n-1}Z+\ldots+a_{n-1}pZ+a_n Z=\frac{1}{p}.$$

Операторлық теңдеулерді шешеміз:

$$X\left(p\right)=\frac{F\left(p\right)}{Q_n\left(p\right)},\quad Z\left(p\right)=\frac{1}{pQ_n\left(p\right)}, \qquad (11)$$

мұндағы $Q_n\left(p\right)=p^n+a_1 p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n$.

(11) теңдіктерден $X\left(p\right)=pF\left(p\right)Z\left(p\right)$ аламыз. Енді табылған кескінге сәйкес түпнұсқаны, яғни берілген (6) теңдеудің шешімін, Дюамель формуласы (жоғарыда **18)**) арқылы табуға болады ($z\left(0\right)=0$):

$$x\left(t\right)=f(t)\cdot z\left(0\right)+\int_0^t f(\tau)z'\left(t-\tau\right)d\tau=\int_0^t f(\tau)z'\left(t-\tau\right)d\tau, \qquad (12)$$

немесе үйірткінің коммутативтілігін пайдалансақ,

$$x(t) = z(t) \cdot f(0) + \int_0^t f'(\tau) \cdot z(t-\tau)\, d\tau. \quad (13)$$

Назар аударыңыз! Дифференциалдық теңдеудің $x(t)$ шешімін алған кезде, теңдеудің оң жағының $F(p)$ кескінін білудің қажеті жоқ. Ал алынған формулалардың электротехникалық есептерді шешуде маңызы зор!

3-мысал. Нөлдік алғашқы шарттармен бірге берілген дифференциалдық теңдеудің шешімін табу керек: $\ddot{x} + x = e^{-t^2}$.

▼ Алдымен нөлдік алғашқы шарттармен бірге берілген $\ddot{x} + x = 1$ теңдеуді шешеміз. Оның операторлық теңдеуіне өтеміз: $Z(p)p^2 + Z(p) = \dfrac{1}{p}$. Операторлық теңдеудің шешімі: $Z(p) = \dfrac{1}{p(p^2+1)}$. Табылған L кескінге $z(t) = 1 - \cos t$ түпнұсқа сәйкес келеді. Енді (12) формуланы қолданып, $x(t) = \int_0^t e^{-\tau^2} \sin(t-\tau)\, d\tau$ аламыз. Бұл шешімді элементар функциялармен өрнектеуге болмайды, яғни $\int_0^t e^{-\tau^2} \sin(t-\tau)\, d\tau$ – элементар функция емес. ▲

§ 4. Дифференциалдық теңдеулер жүйесі

Дифференциалдық теңдеуді шешуге қолданған қисаптық әдісті ешбір өзгертпестен коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті немесе біртекті емес дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешуге қолдануға болады. Мысалдар қарастырайық.

1-мысал. Көрсетілген алғашқы шарттармен берілген дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешу керек:

$$\begin{cases} \dot{x}-2x-3y=3e^{2t}, \\ \dot{y}+3x-2y=0, \end{cases} \qquad x(0)=0,\ \ y(0)=1.$$

▼

Операторлық теңдеулер жүйесіне өтеміз: $x(t) \risingdotseq X(p)$,

$\dot{x}(t) \risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)$, $\quad y(t) \risingdotseq Y(p)$,

$\dot{y}(t) \risingdotseq pY(p)-y(0)=pY(p)-1$ болатындықтан,

$$\begin{cases} pX-2X-3Y=\dfrac{3}{p-2}, \\ pY+3X-2Y=0 \end{cases}$$

аламыз. Бұл жүйенің шешімі:

$X(p)=\dfrac{6}{(p-2)^2+9}$, $\qquad Y(p)=\dfrac{2(p-2)}{(p-2)^2+9}-\dfrac{1}{p-2}$. Табылған кескіндерге сәйкес түпнұсқалар, яғни есептің шешімі: $x(t)=2e^{2t}\sin 3t$, $y(t)=2e^{2t}\cos 3t-e^{2t}$. ▲

2-*мысал*. Көрсетілген алғашқы шарттармен берілген дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешу керек:

$$\begin{cases} \ddot{x}=3(y-x+z), \\ \ddot{y}=x-y, \\ \ddot{z}=-z, \end{cases}$$

$$x(0)=\dot{x}(0)=0,\ \ y(0)=0,\ \ \dot{y}(0)=1,\ \ z(0)=1,\ \ \dot{z}(0)=0.$$

▼

Операторлық теңдеулер жүйесіне өтеміз: $x(t) \risingdotseq X(p)$,

$$\dot{x}(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p),$$

$$\ddot{x}(t) \risingdotseq p^2 X(p) - px(0) - \dot{x}(0) = p^2 X(p),$$

$$y(t) \risingdotseq Y(p), \ \ \dot{y}(t) \risingdotseq pY(p) - y(0) = pY(p),$$

$$\ddot{y}(t) \risingdotseq p^2 Y(p) - py(0) - \dot{y}(0) = p^2 Y(p) + 1,$$

$$z(t) \risingdotseq Z(p), \qquad \dot{z}(t) \risingdotseq pZ(p) - z(0) = pZ(p) + 1,$$

$\ddot{z}(t) \risingdotseq p^2 Z(p) - pz(0) - \dot{z}(0) = p^2 Z(p) + p$ болатындықтан,

$$\begin{cases} p^2 X(p) = 3(Y - X + Z), \\ p^2 Y(p) + 1 = X - Y, \\ p^2 Z(p) - p = -Z \end{cases}$$

аламыз. Бұл жүйенің шешімі:

$$X(p) = \frac{3(p-1)}{p^2(p^2+4)}, \qquad Y(p) = \frac{3(p-1)}{p^2(p^2+1)(p^2+4)} - \frac{1}{p^2+1},$$

$Z(p) = \dfrac{p}{p^2+1}.$ Табылған кескіндерге сәйкес түпнұсқалар, яғни есептің шешімі: $x(t) = \dfrac{3}{4}(1-t) - \dfrac{3}{4}\cos 2t + \dfrac{3}{8}\sin 2t,$

$$y(t) = \frac{3}{4}(1-t) + \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{8}\sin 2t - \cos t, \ \ z(t) = \cos t. \qquad \blacktriangle$$

Комплекс айнымалды теориялар функциясына арналған есептер мен тапсырмалар

Комплекс жазықтықта төмендегі комплекс сандарға сәйкес нүктелерді салу керек:

1) a) $z = 3$; b) $z = -2$; c) $z = -2i$; d) $z = 3i$; e) $z = 2 + i$; f) $z = -2 + 3i$ q) $z = -3 - 4i$; k) $z = 3 - 2i$.

Берілген 2) – 5) сандарға мына амалдарды қолдану керек

$$z_1 + z_2;\ z_1 - z_2;\ z_1 z_2;\ \frac{z_1}{z_2}:$$

2) $z_1 = 3 - 2i,\ z_2 = 1 + i.$
3) $z_1 = 17 - i,\ z_2 = 2 - i.$
4) $z_1 = 5 - 3i,\ z_2 = 7 + 2i.$
5) $z_1 = 4 - 5i,\ z_2 = 1 - 3i.$

Көрсетілген амалдарды орындау керек:

6) $(2 + 3i)(3 - 2i) + (2 - 3i)(3 + 2i).$
7) $(5 - 2i)^2.$
8) $(1 + 2i)^2 - (1 - 2i)^2.$
9) $(3 + i)^3.$
10) $\dfrac{3 + i}{6 - 5i}.$
11) $\dfrac{3 - i}{4 + 5i}.$
12) $\dfrac{2 + 3i}{2 + i}.$
13) $\dfrac{(1 + i)(3 + i)}{3 - i} - \dfrac{(1 - i)(3 - i)}{3 + i}.$
14) $\dfrac{(1 + 2i)^2 - (1 - i)^3}{(3 + 2i)^3 - (2 + i)^2}.$

Келесі комплекс сандардың нақты және жорамал бөліктерін табу керек:

15) $\frac{1}{1-i}$.

16) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$.

17) $\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

18) $\left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$.

Келесі комплекс сандардың модульдері мен аргументтерін табу керек:

19) i.

20) -3.

21) $1+i^{123}$.

22) $3i$.

23) $1+i$.

24) $\sqrt{3}-i$.

25) $-1-i\sqrt{3}$.

26) $1-i\sqrt{3}$.

27) $-i\sqrt{2}$.

28) $3+4i$.

29) $-3-4i$.

30) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

31) $\frac{1-i}{1+i}$.

32) $-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$.

33) $(-4+3i)^3$.

34) $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}$.

35) $1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$.

Теңдікті дәлелдеу керек:

36) $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}z$.

37) $z-\bar{z}=2i\operatorname{Im}z$.

38) $\operatorname{Re}z=\frac{z+\bar{z}}{2}$.

39) $\operatorname{Im}z=\frac{z-\bar{z}}{2i}$.

40) $\overline{(\bar{z})} = z$.

41) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

42) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$.

43) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

44) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

45) $|\bar{z}| = |z|$.

46) $\bar{z}z = |z|^2$.

Теңсіздікті қанағаттандыратын нүктелер жиынының геометриялық бейнесін көрсетіңіз:

47) $\operatorname{Re} z > 0$.

48) $\operatorname{Im} z \leqslant 1$.

49) $|\operatorname{Re} z| < 1$.

50) $|\operatorname{Im} z| < 1,\ 0 < \operatorname{Re} z < 1$.

51) $|z| \leqslant 1$.

52) $|z - i| > 1$.

53) $0 < |z + i| < 2$.

54) $1 < |z - 1| < 3$.

55) $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$.

56) $|\pi - \arg z| < \dfrac{\pi}{4}$.

Келесі теңдеулермен қандай сызықтар анықталады?

57) $\operatorname{Im} z^2 = 2$.

58) $\operatorname{Re} \bar{z}^2 = 1$.

59) $\operatorname{Im} \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2}$.

60) $\operatorname{Re} \dfrac{1}{z} = 1$.

61) $z^2 + \bar{z}^2 = 1$.

62) $|z| = \operatorname{Re} z + 1$.

Түбірлердің барлық мәндерін табу керек:

63) $\sqrt[3]{1}$.

64) $\sqrt[3]{i}$.

65) $\sqrt[4]{-i}$.

66) $\sqrt[4]{-4}$.

67) $\sqrt[6]{-27}$.

68) $\sqrt[3]{2 - 2i}$.

69) $\sqrt{1 + i}$.

70) $\sqrt{3 - 4i}$.

71) $\sqrt{-3 - 4i}$.

72) $\sqrt{2 + i2\sqrt{3}}$.

Есептеу керек:

73) $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^6$. 74) $(1-i)^7(1+i\sqrt{3})^3$.

75) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^8$. 76) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{20}$

Келесі теңдеулердің шешімдерін табу керек:

77) $z^2 = i$.

78) $z^2 = 3-4i$.

79) $z^3 = -1$.

80) $z^6 = 64$.

81) $z^7 + 1 = 0$.

82) $z^8 = 1 + i$.

83) $z^2 - 2z + 2 = 0$.

84) $z^3 + 6z^2 + 12z + 10 - 2i = 0$.

85) $z^2 - (2+3i)z + 6i = 0$.

86) $z^2 + (3-4i)z - 12i = 0$.

87) $z^6 + 4z^3 + 8 = 0$.

Тізбектің шегі анықтамасы бойынша, дәлелдеу керек:

88) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n} + i\dfrac{n-1}{n}\right) = 1 + i$.

89) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+ni}{1-ni}\right) = -1$.

90) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n = 0$.

Шекті табу керек:

91) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1} + i\dfrac{n}{n+1}\right)$.

92) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+i)^2}{2n^2 i}$.

93) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{1}{n}\right)$.

94) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z^n}{1+z^{2n}}$, $|z| < 1$.

$$95)\ \lim_{n\to\infty} \frac{z^n}{1+z^{2n}},\ |z|>1.$$

Комплекс сандарды көрсеткіштік түрде жазу керек:

$$124)\ 1)\ z=-1,\ 2)\ z=i,\ 3)\ z=1-i,\ 4)\ z=\sqrt{3}-i.$$

Комплекс сандардың модульдерін
және аргументтерінің бас мәндерін табу керек:

$$125)\ 1)\ e^{3+2i},\ 2)\ e^{1-3i},\ 3)\ e^{2+5i},\ 4)\ e^{3-7i},\ 5)\ e^{i\varphi},\ |\varphi|<\pi,$$
$$6)\ e^{-i\varphi},\ |\varphi|<\pi.$$

e^z функциясының берілген нүктелердегі мәндерін табу керек:

$$126)\ 1)\ z=2\pi i,\ 2)\ z=\pi i,\ 3)\ z=\frac{\pi i}{2},\ 4)\ z=-\frac{\pi i}{2},\ 5)\ z=\frac{\pi i}{4}.$$

Теңдіктерді дәлелдеу керек:

$$127)\ |e^z|=e^{\operatorname{Re} z}.$$
$$128)\ e^{z+2\pi i}=e^z.$$
$$129)\ \cos(-z)=\cos z.$$
$$130)\ \sin(-z)=-\sin z.$$
$$131)\ \operatorname{ch}(-z)=\operatorname{ch} z.$$
$$132)\ \operatorname{sh}(-z)=-\operatorname{sh} z.$$
$$133)\ \cos^2 z+\sin^2 z=1.$$
$$134)\ \operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z=1.$$
$$135)\ \sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2.$$
$$136)\ \cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2.$$
$$137)\ \operatorname{ch}(z_1+z_2)=\operatorname{ch} z_1\operatorname{ch} z_2+\operatorname{sh} z_1\operatorname{sh} z_2.$$

138) $\operatorname{Re}\sin z = \sin x \operatorname{ch} y,\ \operatorname{Im}\sin z = \cos x \operatorname{sh} y.$

139) $\operatorname{Re}\cos z = \cos x \operatorname{ch} y,\ \operatorname{Im}\cos z = -\sin x \operatorname{sh} y.$

140) $\operatorname{Re}\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y,\ \operatorname{Im}\operatorname{sh} z = \operatorname{ch} x \sin y.$

141) $\operatorname{Re}\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y,\ \operatorname{Im}\operatorname{ch} z = \operatorname{sh} x \sin y.$

Келесі сандардың нақты және жорамал бөліктерін табу керек:

142) 1) $z = \cos(2+i)$, 2) $z = \sin 2i$, 3) $z = \operatorname{sh}(-2+i)$, 4) $z = \operatorname{ch} i$

Есептеу керек:

145) 1) $\operatorname{Ln} e$, 2) $\operatorname{Ln}(-1)$, 3) $\operatorname{Ln} i$, 4) $\operatorname{Ln}(3-4i)$, 5) $\operatorname{Ln}(-4+3i)$

6) $\operatorname{Ln}\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$, 7) $\operatorname{Ln}\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

146) 1) $i^{\sqrt{2}}$, 2) i^i, 3) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$, 4) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{1+i}$, 5) $(3-4i)^{1+i}$

147) 1) $\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1}{2}\right)$, 2) $\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1}{2}\right)$, 3) $\operatorname{Arccos}(2)$, 4) $\operatorname{Arcsin} i$.

Келесі теңдеулердің шешімін табу керек:

148) $\ln(z+i) = 0.$

149) $\ln(i-z) = 1.$

150) $e^{-z} + 1 = 0.$

151) $e^{z} + i = 0.$

152) $\sin z = \dfrac{4i}{3}.$

153) $\sin z = \dfrac{5}{3}.$

154) $\cos z = \dfrac{3i}{4}.$

155) $\cos z = \dfrac{3+i}{4}.$

156) $\operatorname{tg} z = \dfrac{5i}{3}.$

157) $\operatorname{ctg} z = -\dfrac{3i}{5}.$

Функциялардың дифференциалданатын нүктелерін табу керек:

160) 1) $\operatorname{Re} z$, 2) x^2y^2, 3) $|z|^2$, 4) x^2+iy^2, 5) $z\operatorname{Re} z$, 6) $2xy-i(x^2-y^2)$.

Көрсеткіштік функцияның туындысын пайдаланып, теңдіктерді дәлелдеу керек:

161) $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$. 162) $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$.
163) $(\sin z)' = \cos z$. 164) $(\cos z)' = -\sin z$.

Функциялардың дифференциалданатын нүктелерін табу керек және олардың туындыларын табу керек:

166) $e^{\operatorname{ch} z}$.
167) $\sin(2e^z)$.
168) $\sin z \operatorname{ch} z - i\cos z \operatorname{sh} z$.
169) ze^{-z}.
170) $\dfrac{e^z}{z}$.
171) $\dfrac{z\cos z}{1+z^2}$.
172) $\operatorname{tg} z$.
173) $\operatorname{ctg} z$.
174) $\dfrac{e^z+1}{e^z-1}$.
175) $\dfrac{1}{\operatorname{tg} z+\operatorname{ctg} z}$.
176) $(e^z-e^{-z})^2$.
177) $\dfrac{\cos z}{\cos z-\sin z}$.

Функциялар үшін Коши-Риман шарттарының орындалатынын тексеріңіз:

178) 1) z^n, 2) e^z, 3) $\cos z$, 4) $\operatorname{Ln} z$.

Берілген $u(x,y)$– нақты немесе $v(x,y)$– жорамал бөлігі мен $f(z_0)$ мәні бойынша z_0 нүктесінің маңайында аналитикалық функцияны табу керек:

183) $u = \dfrac{x}{x^2+y^2},\ f(\pi) = \dfrac{1}{\pi}.$

184) $v = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\ f(1) = 0.$

185) $u = 3x^2 - 4xy - 3y^2,\ f(i) = -3 - 2i.$

186) $v = 2y(5x-3),\ f\left(\dfrac{1}{5}\right) = -1.$

187) $v = \sin y \operatorname{ch}(x+1),\ f\left(-1 + \dfrac{\pi}{2}i\right) = i.$

188) $u = \dfrac{2y}{(x+1)^2+y^2},\ f(i) = i.$

Интегралдарды есептеу керек:

190) $\int\limits_0^1 (1+it)^2 dt.$

191) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+it} dt.$

192) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+it}{1-it} dt.$

193) $\int\limits_0^{\pi} e^{-it} dt.$

194) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i3t} dt.$

Интегралдарды есептеу керек:

$$\int\limits_{\Gamma} \operatorname{Re} z dz,\ \int\limits_{\Gamma} \operatorname{Im} z dz,$$

мұндағы:

195) $\Gamma -$ $2+i$ нүктесінің радиус-векторы;

196) $\Gamma -$ жоғарғы жарты шеңбер (жол $z=1$ нүктесінен басталады;

197) $\Gamma -$ сағат тіліне қарсы бағытталған $|z\text{-}2| = 3$ шеңбері;

201) $\int\limits_{\Gamma} |z|\bar{z}dz,$

$\Gamma -$ $|z| = 1$ жоғарғы жарты шеңбер мен $-1 \le \operatorname{Re} z \le 1, \quad \operatorname{Im} z = 0$ кесіндісінен құралған тұйық контур;

202) $\int\limits_{\Gamma} \bar{z}dz,$ мұндағы $\Gamma -$ түзудің $z_1 = 0,\ z_2 = 1 + i$ нүктелерін қосатын кесінді;

203) $\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{z - i} dz,$ мұнда $\Gamma -$ $|z - i| = 1$ оң жақ жарты шеңбер мен $z_1 = 2i,\ z_2 = 3i$ нүктелерін қосатын кесіндіден құралған сызық;

204) $\int\limits_{\Gamma} \operatorname{Re}(\sin z) coszdz,$ мұндағы $\Gamma -$ басы $z = \frac{\pi}{4} - i$ нүктесі болатын және $|z| \le 1,\ \operatorname{Re} z = \frac{\pi}{4}$ шарттарын қанағаттандыратын сызық.

Интегралдарды есептеу керек (*шеңберлер – сағат тіліне қарама қарсы бағытталған*):

210) $\displaystyle\int_{|z-2i|=2} \frac{1}{z^2+9}dz.$

211) $\displaystyle\int_{|z+i|=3} \frac{1}{z^2+9}dz.$

212) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{1}{z^2+9}dz.$

213) $\displaystyle\int_{|z-2|=2} \frac{z}{z^4-1}dz.$

214) $\displaystyle\int_{|z+1|=2} \frac{1}{z^2+z+1}dz.$

215) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z}dz.$

216) $\displaystyle\int_{|z-3|=2} \frac{\cos z}{z^2-4}dz.$

217) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z-\frac{\pi}{4}}dz.$

218) $\displaystyle\int_{|z-3|=\frac{5}{2}} \frac{\sin\frac{1}{z}}{z-2}dz.$

219) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{\cos\pi z+3\sin\pi z}{(z^2-4)(z+i)}dz.$

220) $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{z^2e^z}{z^2-1}dz.$

221) $\displaystyle\int_{|z-i|=1} \frac{\operatorname{ch} z^2}{i-z}dz.$

222) $\displaystyle\int_{|z-2i|=2} \frac{\operatorname{sh} z}{z^2+1}dz.$

223) $\displaystyle\int_{|z-2i|=2} \frac{\operatorname{tg} z}{z^2+\pi^2}dz.$

224) $\displaystyle\int_{|z+1|=1} \frac{1}{(1+z)(z-1)^3}dz.$

225) $\displaystyle\int_{|z-2|=1} \frac{e^z}{(2-z)^2}dz.$

226) $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}dz.$

227) $\displaystyle\int_{|z-1-i|=2} \frac{\cos z}{(z-i)^3}dz.$

228) $\displaystyle\int_{|z+i|=3} \frac{\sin z}{z+i}dz.$

229) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1}dz.$

230) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}dz.$

231) $\displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz.$

232) $\displaystyle\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz.$

233) $\displaystyle\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz.$

Дәрежелік қатарлардың жинақталу аймағын табу керек:

234) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n(z-i)^n.$

235) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{z+i}{in}\right)^n.$

236) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{3^n n^3}.$

237) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\dfrac{z+i}{1-i}\right)^n.$

Дәрежелік қатарлардың жинақталу радиусін табу керек:

238) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} z^n.$

242) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n z^n$

239) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(in)^n}{n!} z^n.$

240) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3+i^n)^n z^n.$

241) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! e^{-n^2} z^n.$

243) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+2^n) z^n.$

244) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3+(-1)^n)^n (z-1+i)^n.$

Функцияларды z дәрежесі бойынша Тейлор қатарына жіктеу керек:

265) $\cos^2 \dfrac{iz}{2}.$ 266) $\operatorname{ch}^2 \dfrac{z}{2}.$ 267) $\dfrac{iz}{z^2+i}.$ 268) $\dfrac{2z-5}{z^2-5z+6}.$

269) $\dfrac{z}{(z^2+1)(z^2-4)}.$ 270) $\dfrac{z}{z^2+2z+2}.$

Функцияларды Тейлор қатарына жіктеу керек:

271) e^z, $\quad (2z-1)$ – дәрежесі бойынша;

272) $\sin z$, $\quad \left(z+\dfrac{\pi}{3}\right)$ – дәрежесі бойынша;

273) $\cos(3z-1)$, $\quad (z+1)$ – дәрежесі бойынша;

274) $\dfrac{1}{7z+3}$, $\quad (z+2)$ – дәрежесі бойынша;

275) $\dfrac{1}{z^2+1}$, $\quad (z-1)$ – дәрежесі бойынша.

Келесі қатарлардың жинақталу аймақтарын табу керек:

276) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^n}{(z-i)^n}$.

277) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n+n^3}{(z+2i)^n}$.

278) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3n^2+1}\left(\dfrac{4+3i}{z+1}\right)^n$.

279) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{z}{3}\right)^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{z}\right)^n$.

280) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{z}{2}\right)^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3}{z}\right)^n$.

281) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n-n^2}{(z+2)^n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z+2)^n}{(n+i)^n}$

282) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{i\operatorname{sh} n}{(z-i)^n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-i)^n}{n^2}$.

283) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z-2i)^{-n}}{n!} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-2i)^n}{n^2+1}$.

284) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{(z+3i)^n}{n^4+3}$.

285) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \operatorname{ch} \frac{i}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\ln in} \right)^n.$

286) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^n(1 + i\frac{\pi n}{2})}{(z-i)^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin in}{7^n n^2}(z-i)^n.$

287) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2-i)^{-n}}{(2+(-1)^n)^n}.$

288) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1+i)^{-n}}{5^n(2+(-1)^n)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1+i)^n(2+(-1)^n)^n}{5^n}.$

Келесі функцияларды $z = z_0$ нүктесінің маңайында
Лоран қатарына жіктеу керек:

289) $z^4 \sin^2 \frac{1}{z}, \; z_0 = 0.$

290) $\cos \frac{i}{z} + \frac{z}{z-1}, \; z_0 = 0.$

291) $\frac{1}{(z+2)z}, \; z_0 = -2.$

292) $\frac{1}{(z-3)^2 z}, \; z_0 = 1.$

293) $z \cos \frac{1}{2z+1}, \; z_0 = -\frac{1}{2}.$

294) $\sin \frac{z}{z-1}, \; z_0 = 1.$

Келесі функцияларды $z = \infty$ нүктесінің маңайында
Лоран қатарына жіктеу керек:

295) $\frac{z}{2z+5}.$

296) $\frac{3z}{z^2-1}.$

297) $z^2 e^{\frac{1}{z}}.$

298) $\frac{z}{z^2+2z+2}.$

Келесі функцияларды көрсетілген сақинада $z - z_0$ дәрежесі бойынша Лоран қатарына жіктеу керек:

299) $\dfrac{1}{z(z-3)^2}, \ (z_0 = 1, \ 1 < |z-1| < 2).$

300) $\dfrac{1}{z^2(z^2-9)}, \ (z_0 = 1, \ 1 < |z-1| < 2).$

301) $\dfrac{z+i}{z^2}, \ (z_0 = i, \ 0 < |z| < 2).$

302) $\dfrac{z^2-1}{z^2+1}, \ (z_0 = 1, \ 0 < |z| < 3).$

303) $\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}, \ (z_0 = 0, \ 1 < |z| < 2).$

304) $\dfrac{2z}{z^2-2i}, \ (z_0 = 1, \ 0 < |z| < 2).$

305) $\dfrac{z^3}{(z+1)(z-2)}, \ (z_0 = -1, \ 0 < |z+1| < 3).$

306) $\dfrac{1}{(z^2-1)(z^2+4)}, \ (z_0 = 0, \ 2 < |z| < 10).$

307) $z^3 e^{\frac{1}{z}}, \ (z_0 = 0, \ 0 < |z| < \infty).$

308) $z^2 \sin \pi \dfrac{z+1}{z}, \ (z_0 = 0, \ 0 < |z| < \infty).$

309) $z^3 \cos \dfrac{1}{z-2}, \ (z_0 = 2, \ 0 < |z-2| < \infty).$

310) $\dfrac{e^z}{z(1-z)}, \ (z_0 = 0, \ 0 < |z| < \infty).$

311) $\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z(1+z)}, \ (z_0 = 1, \ 1 < |z-1| < 2).$

$z = z_0$ - келесі функциялар үшін жөнделетін ерекше нүкте болатынын дәлелдеу керек:

312) $\dfrac{z^2-1}{z-1}$, $(z_0 = 1)$.

313) $\dfrac{\sin z}{z}$, $(z_0 = 0)$.

314) $\dfrac{z}{\operatorname{tg} z}$, $(z_0 = 0)$.

315) $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$, $(z_0 = 0)$.

316) $\operatorname{ctg} z - \dfrac{1}{z}$, $(z_0 = 0)$.

317) $\dfrac{1}{e^z-1} - \dfrac{1}{\sin z}$, $(z_0 = 0)$.

318) $\dfrac{z^2-1}{z^3+1}$, $(z_0 = \infty)$.

$z = z_0$ - келесі функциялар үшін полюс болатынын дәлелдеу керек:

319) $\dfrac{1}{z}$, $(z_0 = 0)$.

320) $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$, $(z_0 = i)$.

321) $\dfrac{z^2+1}{z+1}$, $(z_0 = \infty)$.

322) $\dfrac{z}{1-\cos z}$, $(z_0 = 0)$.

323) $\dfrac{z}{(e^z-1)^2}$, $(z_0 = 0)$.

324) $\operatorname{ctg} \dfrac{\pi}{z}$, $(z_0 = \infty)$.

325) $\dfrac{z}{e^z+1}$, $(z_0 = \pi i)$.

326) $\operatorname{tg} \pi z$, $(z_0 = \dfrac{1}{2})$.

$z = z_0$ - келесі функциялар үшін елеулі ерекше нүкте болатынын дәлелдеу керек:

327) e^z, $(z_0 = \infty)$.

328) e^{-z^2}, $(z_0 = \infty)$.

329) $\sin \dfrac{\pi}{z^2}$, $(z_0 = 0)$.

330) $z^2 \cos \dfrac{\pi}{z}$, $(z_0 = 0)$.

331) $\cos \dfrac{z}{z+1}$, $(z_0 = -1)$.

Келесі функциялардың барлық оқшауланған ерекше нүктелерді тауып, олардың түрлерін анықтау керек:

332) $\frac{1}{z^3}e^{iz}$.

333) $\operatorname{tg}\frac{1}{z}$.

334) $\frac{z^2}{\cos z - 1}$.

335) $\frac{z^4+1}{z^4-1}$.

336) $z\cos\frac{1}{z} - z$.

Есептеу керек:

337) $\underset{z=0}{\text{Ø åã}}\frac{\sin z}{z^2}$.

338) $\underset{z=\infty}{\text{Ø åã}}\,e^{\frac{1}{z}}$.

339) $\underset{z=1}{\text{Ø åã}}\frac{e^z}{(z-1)^2}$.

340) $\underset{z=\infty}{\text{Ø åã}}\,z^2\sin\frac{\pi}{z}$.

340) $\underset{z=0}{\text{Ø åã}}\sin z\cdot\sin\frac{1}{z}$.

341) $\underset{z=\frac{\pi}{4}}{\text{Ø åã}}\,z^2\frac{\cos z}{z-\frac{\pi}{4}}$.

343) $\underset{z=-1}{\text{Ø åã}}\sin\frac{z}{z+1}$.

Келесі функциялардың барлық ақырлы ерекше нүктелердегі шегерімдерін табу керек:

344) $\frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$.

345) $\frac{z^2}{(z+1)^3}$.

346) $\frac{\cos z}{(z-2)^2}$.

347) $\frac{\sin \pi z}{(z-3)^3}$.

348) $\operatorname{tg} z$.

349) $\operatorname{cth} z$.

350) $\operatorname{cth}^2 \pi z$.

351) $\frac{1}{e^z+1}$.

352) $\frac{\operatorname{ch} z}{(z^2+1)(z-3)}$.

Келесі функциялардың ақырсыз нүктедегі шегерімдерін табу керек:

353) $\dfrac{z^4+1}{z^6-1}$.

354) $\cos\dfrac{\pi(z+2)}{2z}$.

355) $\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}$.

356) $\dfrac{\cos^2\frac{\pi}{z}}{z+1}$.

Интегралды есептеу керек: $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz,$ мұндағы Γ - берілген G аймағының оң бағытталған шеарасы:

358) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{z^2}{\sin^3 z\cos z}dz,\ G:|z|>1.$

359) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{e^z}{(z-\pi i)^2}dz,\ G:|z|>4.$

360) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{\cos z}{z^3}dz,\ G:|z|<1.$

361) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \left(\sin\frac{1}{z^2}+e^{z^2}\cos z\right)dz,\ G:|z|<1.$

362) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{1+z}dz,\ G:|z|<2.$

363) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{z}{e^{z^2}-1}dz,\ G:|z|>4.$

364) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{z^3}{e^{z^2}-1}dz,\ G:|z|<4.$

365) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} z^2\sin\frac{1}{z}dz,\ G:|z|>1.$

366) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{\cos\frac{z}{2}}{z^2-4}dz,\ G:|z-3|+|z+3|<10.$

Жауаптары

Комплекс айнымалды теориялар функциясы

2) $4-i,\ 2-3i,\ 5+i,\ \frac{1}{2}-i\frac{5}{2}$. **3)** $19-2i,\ 15,\ 33-19i,\ 7+3i$. **4)** $12-i,\ -2-5i,\ 41-11i,\ \frac{29}{53}-i\frac{31}{53}$. **5)** $5-8i,\ 3-2i,\ -11-17i,\ \frac{19}{10}+i\frac{7}{10}$. **6)** 24. **7)** $21-20i$. **8)** $8i$. **9)** $18+26i$. **10)** $\frac{13}{61}+i\frac{21}{61}$. **11)** $\frac{7}{41}-i\frac{19}{41}$. **12)** $\frac{7}{5}+i\frac{4}{5}$. **13)** $i\frac{14}{5}$. **14)** $\frac{44}{318}-i\frac{5}{318}$. **15)** $\operatorname{Re} z=\frac{1}{2},\ \operatorname{Im} z=\frac{1}{2}$. **16)** $\operatorname{Re} z=0,\ \operatorname{Im} z=1$. **17)** $\operatorname{Re} z=-1,\ \operatorname{Im} z=0$. **18)** $\operatorname{Re} z=-2,\ \operatorname{Im} z=\frac{3}{2}$. **19)** $|z|=1,\ \arg z=\frac{\pi}{2}$. **20)** $|z|=3,\ \arg z=\pi$. **21)** $|z|=\sqrt{2},\ \arg z=-\frac{\pi}{4}$. **22)** $|z|=3,\ \arg z=\frac{\pi}{2}$. **23)** $|z|=\sqrt{2},\ \arg z=\frac{\pi}{4}$. **24)** $|z|=2,\ \arg z=-\frac{\pi}{6}$. **25)** $|z|=2,\ \arg z=-\frac{2\pi}{3}$. **26)** $|z|=2,\ \arg z=-\frac{\pi}{3}$.

27) $|z|=\sqrt{2},\ \arg z=-\frac{\pi}{2}$. **28)** $|z|=5,\ \arg z=arctg\frac{4}{5}$. **29)** $|z|=5,\ \arg z=arctg\frac{4}{5}-\pi$. **30)** $|z|=1,\ \arg z=\frac{2\pi}{3}$. **31)** $|z|=1,\ \arg z=-\frac{\pi}{2}$.

32) $|z|=1,\ \arg z=\frac{6\pi}{7}$. **33)** $|z|=125,\ \arg z=-\frac{\pi}{2}$.

34) $|z|=\frac{1}{4},\ \arg z=0$. **35)** $|z|=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4},\ \arg z=\frac{\pi}{14}$.

47) Жорамал өстің оң жағында жатқан, жартыжазықтық (өстің нүктелері жатпайды). **48)** $z=i$ нүкте арқылы өтетін горизанталь түзудің астында орналасқан, жарты жазықтық. **49)** Жорамал өске дейінгі қашықтығы бірден кіші нүктелерден тұратын, жолақ. **50)** Төбелері $-i,\ 1-i,\ 1+i,\ i$ нүктелерде болатын тік төртбұрыш (оның қабырғалары жатпайды). **51)** Центрі $z=0$ радиусі 1-ге тең дөңгелек (оның шеңбері де жатады). **52)** Центрі $z=i$ радиусі 1-ге тең дөңгелек және оның шеңбері алынып тасталған жазықтық. **53)** Центрі $z=-i$ радиусі 2-ге тең дөңгелек (оның шеңбері жатпайды). **54)** Центрі ортақ $z=1$ радиустері 1 және 3 тең шеңберлердің арасындағы сақина (шеңберлердің нүктелері жатпайды). **55)** Төбесі $z=0$ нүктесі болатын, шамасы $\frac{\pi}{4}$ тең, бірінші ширектегі бұрыш. **56)** Төбесі $z=0$ нүктесі болатын, нақты өстің теріс бөлігіне симметриялы, шамасы $\frac{\pi}{2}$ тең бұрыш. **57**) $xy=1$ гиперболасы. **58**) $x^2-y^2=1$ гиперболасы. **59**) $x^2+(y+1)^2=1$ шеңбері.

60) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$ шеңбері. **61**) $2\left(x^2-y^2\right)=1$ гиперболасы.

62) $y^2=2x+1$ параболасы. **63**) $z_1=1,\ z_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$

64) $z_1=-i,\ z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2},\ z_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}.$ **65**) $z_1=\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8},$

$z_2=-\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8},\ z_3=\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8},\ z_4=-\sin\frac{\pi}{8}-i\cos\frac{\pi}{8}.$

66) $z_1=1+i,\ z_2=1-i,\ z_3=-1-i,\ z_4=-1+i.$

67) $z_1=i\sqrt{3},\ z_2=-i\sqrt{3},\ z_3=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_4=-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_5=\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_6=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$

68)$z_1=-1-i,\ z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right),\ z_3=\sqrt{2}\left(-\sin\frac{\pi}{12}+i\cos\frac{\pi}{12}\right).$

69)$z_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right),\ z_2=\sqrt[4]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}\right).$ **70**) $z_1=2-i,\ z_2=-2+i.$

71) $z_1=1-2i,\ z_2=-1-2i.$ **72)** $z_1=\sqrt{3}+i,\ z_2=-\sqrt{3}-i.$ **73)** $2^{10}.$
74) $-2^6(1+i).$ **75)** 1. **76)** $2^9(1+i\sqrt{3}).$ **77)** $z_1=\frac{1+i}{\sqrt{2}},\ z_2=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}.$
78) $z_1=2-i,\ z_2=-2+i.$ **79)** $z_1=1,\ z_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$
80) $z_k=2\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^k,\ k=0,1,2,3,4,5.$ **81)** $z_k=e^{\frac{2k+1}{7}\pi i},\ k=0,1,2,3,4,5,6.$

82)$z_k=\sqrt[16]{2}e^{\frac{\pi i}{4}\left(k+\frac{1}{8}\right)},\ k=0,1,2,3,4,5,6,7.$ **83**) $z_1=1+i,\ z_2=1-i.$

84)$z_1=-1+i,\ z_2=-2+\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right),\ z_3=-2+\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{12}-i\cos\frac{\pi}{12}\right).$

85) $z_1=2,\ z_2=3i.$ **86**) $z_1=4i,\ z_2=-3.$ **87**) $z_1=1+i,\ z_2=1-i,$

$z_3=-2+\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right),\ z_4=-2+\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right),$

$z_5=-2+\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{12}+i\cos\frac{\pi}{12}\right),\ z_6=-2+\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{12}-i\cos\frac{\pi}{12}\right).$ **91**) $\frac{1}{2}+i.$

92) $-\frac{i}{2}.$ **93)** $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}.$ **94)** 0. **95)** 0.

124) $1) e^{i\pi}$, $2) e^{\frac{i\pi}{2}}$, $3) \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$, $4) 2e^{-\frac{i\pi}{6}}$. **125)** $1) |z| = e^3, \arg z = 2$, $2) |z| = e, \arg z = -3$, $3) |z| = e^2, \arg z = 5-2\pi$, $4) |z| = e^3, \arg z = -7+2\pi$, $5) |z| = 1, \arg z = \varphi$, $6) |z| = 1, \arg z = -\varphi$.

126) $1) 1$, $2) -1$, $3) -i$, $4) -i$, $5) \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

142) $1) \operatorname{Re} z = \cos 2 \cdot ch1$, $\operatorname{Im} z = -\sin 2 \cdot sh1$, $2) \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z = sh2$, $3) \operatorname{Re} z = -\cos 1 \cdot sh2$, $\operatorname{Im} z = \sin 1 \cdot ch2$, $4) \operatorname{Re} z = \cos 1'$, $\operatorname{Im} z = 0$,

$5) \operatorname{Re} z = -\dfrac{\sin 4}{2\left(\cos^2 2 + sh^2 1\right)}$, $\operatorname{Im} z = -\dfrac{sh2}{2\left(\cos^2 2 + sh^2 1\right)}$.

145) $1) 1 + i2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $2) i(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $3) i(4k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, $4) \ln 5 + i(-\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$, $5) \ln 5 + i\left(-arctg\dfrac{3}{4} + \pi(2k+1)\right), k \in Z$, $6) i\left(\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$, $7) i\left(-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$.

146) $1) \cos 2\sqrt{2}k\pi + i \sin 2\sqrt{2}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $2) e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$, $3) \frac{1-i}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{4}(8k+1)}$, $4) \frac{\sqrt{3}+i}{2} e^{\frac{\pi}{6}(12k-1)}$, $k \in \mathbb{Z}$, $5) 5(\cos(\ln 5 - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}) + i \sin(\ln 5 - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}))$, $6) e^{\frac{\pi}{3}+2\pi k}(\cos \ln 2 + i \sin \ln 2)$, $k \in \mathbb{Z}$. **147)** $1) (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $2) \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $3) 2\pi k + i \ln(2+\sqrt{3})$, $2\pi k - i \ln(2+\sqrt{3})$, $4) \pi k + i(-1)^k \ln(1+\sqrt{2})$, $k \in \mathbb{Z}$, $5) -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + (2k+1)\frac{\pi}{2} + i\frac{\ln 5}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$

148) $z = 1 - i$. **149)** $z = -e + i$. **150)** $z = (2k+1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. **151)** $z = \frac{\pi}{2}(4k-1)i$, $k \in \mathbb{Z}$. **152)** $z = i(-1)^k \ln 3 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

153) $z = i \ln 3 + \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $z = -i \ln 3 + \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$.

154) $z = -i \ln 2 + \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $z = i \ln 3 - \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$.

155) $z = -\dfrac{i}{2}\ln 2 + \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, $z = \dfrac{i}{2}\ln 2 - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in Z$.

156) $z = i \ln 2 + \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **157)** $z = i \ln 2 + \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

158) $1) x^2 - y^2 = 3$ гиперболасы. $2) xy = \dfrac{5}{2}$ гиперболасы.

159) $1) u^2 + \upsilon^2 = \dfrac{u}{3}$ шеңбері. $2) u^2 + \upsilon^2 = -\dfrac{\upsilon}{5}$ шеңбері. $3) |w| = \dfrac{1}{R}$ шеңбері. $4) u + \upsilon = 0$ түзуі. $5)\ 3\left(u^2 + \upsilon^2\right) - 4u + 1 = 0$ шеңбері. $6) \arg w = -\alpha$. $7) u = \dfrac{1}{2}$ түзуі. **160)** 1) Ешбір жерде. 2) Нақты және жорамал өстерде.

3) $z=0$ нүктеде. 4) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$ түзуінде. 5) $z=0$ нүктеде. 6) Барлық жерде. **166)** $\operatorname{sh} z e^{\operatorname{ch} z}$.

167) $2e^z \cos(2e^z)$. **168)** $(1-i)\cos z \operatorname{ch} z + (1+i)\sin z \operatorname{sh} z$. **169)** $(1-z)e^{-z}$.
170) $\frac{e^z}{z} - \frac{e^z}{z^2}$, $z \neq 0$. **171)** $\frac{(1+z^2)(\cos z - z\sin z) - 2z^2\cos z}{(1+z^2)^2}$, $z \neq i$, $z \neq -i$. **172)** $\frac{1}{\cos^2 z}$.
173) $-\frac{1}{\sin^2 z}$. **174)** $\frac{2e^z}{(e^z-1)^2}$. **175)** $\cos 2z$. **176)** $-2\frac{e^z+e^{-z}}{(e^z-e^{-z})^3}$. **177)** $\frac{1}{(\cos z - \sin z)^2}$.
183) $\frac{1}{z}$. **184)** $\ln z$. **185)** $z^2(3+2i)$. **186)** $5z^2-6z$. **187)** $\operatorname{sh}(z+1)$.
188) $\frac{z-1}{z+1}$. **190)** $\frac{2}{3}+i$. **191)** $\frac{\pi}{4} - \frac{i\ln 2}{2}$. **192)** $\frac{\pi}{2} - 1 + i\ln 2$.
193) $-2i$. **194)** 0. **195)** $J_1 = 2+i$, $J_2 = 1+\frac{1}{2}i$. **196)** $J_1 = \frac{i\pi}{2}$, $J_2 = -\frac{\pi}{2}$
197) $J_1 = 9\pi i$, $J_2 = -9\pi$.
210) $\frac{\pi}{3}$. **211)** $-\frac{\pi}{3}$. **212)** 0. **213)** $\frac{\pi i}{2}$. **214)** 0. **215)** 0.
216) $\frac{\cos 2\pi i}{2}$. **217)** $\frac{\pi i}{8}$. **218)** $2\pi i \sin\frac{1}{2}$. **219)** $-\frac{2\pi}{5}(3\operatorname{sh}\pi + i(\operatorname{ch}\pi - 1))$.
220) $e\pi i$. **221)** $-2\pi i \operatorname{ch} 1$. **222)** $\pi i \sin 1$. **223)** $i \operatorname{th}\pi$. **224)** $-\frac{\pi i}{4}$.
225) $2e^2\pi i$. **226)** $-\frac{\pi^2 i}{2}$. **227)** $-\pi i \operatorname{ch} 1$. **228)** $2\pi \operatorname{sh} 1$. **229)** $2\pi i \operatorname{sh} 1$.
230) 0. **231)** $2\pi i$. **232)** $\pi i(2-e)$. **233)** $-\pi i e$.
234) $z=i$ нүктеде жинақталады. **235)** $|z|<\infty$ жазықтықта жинақталады. **236)** $|z|\le 3$ дөңгелегінде жинақталады. **237)** $|z+i|<\sqrt{2}$ дөңгелегінің ішінде жинақталады. **238)** $R=4$.
239) $R=\frac{1}{e}$. **240)** $R=\frac{1}{4}$. **241)** $R=\infty$. **242)** $R=\frac{1}{2}$. **243)** $R=\frac{1}{2}$
244) $R=\frac{1}{4}$.

265) $1+\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$. **266)** $\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\frac{1}{2}$, $R=\infty$.

267) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} i^n z^{2n+1}$, $R=1$.

268) $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(3^{-n-1}+2^{-n-1})z^n$, $R=2$.

269) $\frac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}((-1)^{n+1} - 2^{-2(n+1)})z^{2n+1}$, $R=1$.

270) $\frac{1}{2i}\sum\limits_{n=1}^{\infty}((-1-i)^{-n}-(i-1)^{-n})z^n$, $R=\sqrt{2}$.

271) $e^{\frac{1}{2}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2z-1)^n}{2^n n!}$, $R=\infty$. **272)** $\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+\frac{\pi}{3})^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+\frac{\pi}{3})^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$.

273) $\sin 4\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}(z+1)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cos 4\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n}(z+1)^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$.

274) $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{7^n(z+2)^n}{11^{n+1}},\ R=\frac{11}{7}$. **275)** $\frac{1}{2i}\sum\limits_{n=1}^{\infty}((-1-i)^{-n}-(i-1)^{-n})(z-1)^{n-1},\ R=\sqrt{2}$.
276) $|z-i|>2$. **277)** $|z+2i|>3$. **278)** $|z+2i|>3$. **279)** $2<|z|<3$.
280) жинақты емес. **281)** $2<|z+2|<\infty$. **282)** жинақты емес.

283) $0<|z-2i|\leqslant 1$. **284)** $|z+3i|=1$. **285)** $1<|z|<\infty$.
286) $\frac{e^2+1}{2e}<|z-i|<\frac{7}{e}$. **287)** $|z-2-i|>1$. **288)** $\frac{1}{5}<|z+1+i|<\frac{5}{3}$.
290) $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^{2n}(2n)!}+1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}z^n,\ 0<|z|<1$.

291) $-\frac{1}{2(z+2)}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{2^{n+2}},\ 0<|z+2|<2$. **292)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{9}((-1)^n+\frac{3n+5}{2^{n+2}})$, $|z-1|<1$.

293) $z+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z+\frac{1}{2})^n},\ a_{-2k+1}=\frac{(-1)^k}{2^{2k}(2k)!},\ a_{-2k}=-\frac{1}{2}a_{-2k+1},\ 0<|z+\frac{1}{2}|<\infty$.
294) $\sin 1\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^{2n}(2n)!}+\cos 1\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^{2n+1}(2n+1)!},\ 0<|z-1|<\infty$.
295) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n5^n}{2^{n+1}z^n},\ |z|>\frac{5}{2}$. **296)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3}{z^{2n+1}},\ |z|>1$. **297)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^{n-2}},\ 0<|z|<\infty$.
298) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1-i)^n-(1+i)^n}{2i}\frac{1}{z^n},\ |z|>\sqrt{2}$. **299)** $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{n-1}}{9}(z-1)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3n+5}{9(2^{n+2})}(z-1)^n$. **300)** $\sum\limits_{n=-\infty}^{-2}\frac{(-1)^n(n+1)}{9}(z-1)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}-2^{n+1}}{27(2^{2n+3})}(z-1)^n$.
301) $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}(n+1)i^{n+2}(z-i)^n$. **302)** $\sum\limits_{n=-\infty}^{0}(-1)^{n+1}2^{-\frac{n}{2}+1}\sin\frac{\pi n}{4}(z-1)^{n-1}$.
303) $-\sum\limits_{n=-\infty}^{-2}z^n-\frac{1}{2z}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{-n-2}z^n$. **304)** $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}i^{-n-1}(z-1)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2+i)^{n+1}}(z-1)^n$.
305) $\frac{1}{3(z+1)}-\frac{8}{9}+\frac{19(z+1)}{27}-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{8}{3^{n+2}}(z+1)^n$. **306)** $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}\frac{1+(-1)^n4^{-n-1}}{5}z^{2n}$.
307) $z^3+z^2+\frac{1}{2}z+\frac{1}{6}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{-n}}{(n+3)!}$. **308)** $-\pi z+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{-2n+1}$.
309) $(z-2)^3+6(z-2)^2+\frac{23}{2}(z-2)+5+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{48n^2+72n+23}{(2n+2)!}(z-2)^{-2n+1}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}2(-1)^n\frac{16n^2+24n+5}{(2n+2)!}(z-2)^{2n}$. **310)** $-\sum\limits_{n=-\infty}^{-2}ez^n+(1-e)z^{-1}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{p=n+2}^{\infty}\frac{1}{p!}\right)z^n$.
311) $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n-1}\frac{(z-1)^n}{e}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{p=0}^{n}\frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}(n-p)!}+\sum\limits_{p=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}}{(p)!}\right)(z-1)^n$.

332) $z=0-$ үшінші ретті полюс, $z=\infty-$ елеулі ерекше нүкте. **333)** $z=0-$ ерекше нүкте, бірақ оқшауланбаған, $z=\infty-$ бірінші ретті нөл. **334)** $z=0-$ жөнделетін ерекше нүкте, $z_k=2\pi k,\ k\in Z-$ екінші ретті полюс, $z=\infty-$ ерекше нүкте, бірақ оқшауланбаған, ол z_k полюстерінің шектік нүктесі. **335)** $z_1=1,\ z_1=-1,\ z_1=i,\ z_1=-i-$ бірінші ретті полюстер, $z=\infty-$ жөнделетін ерекше нүкте. **336)** $z=0-$ елеулі ерекше нүкте, $z=\infty-$ бірінші ретті нөл. **337)** 1. **338)** -1. **339)** e. **340)** $\frac{\pi^3}{6}$. **341)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

342) 0. **343)** $\cos 1$. **344)** $\operatorname*{res}_{i} f(z)=\frac{1}{4},\ \operatorname*{res}_{-i} f(z)=\frac{1}{4},\ \operatorname*{res}_{1} f(z)=-\frac{1}{2}$. **345)** $\operatorname*{res}_{-1} f(z)=1$. **346)** $\operatorname*{res}_{2} f(z)=-\sin 2$. **347)** $\operatorname*{res}_{3} f(z)=0$. **348)** $\operatorname*{res}_{z_k} f(z)=-1,\ z_k=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$. **349)** $\operatorname*{res}_{z_k} f(z)=1,\ z_k=i\pi k,\ k\in Z$. **350)** $\operatorname*{res}_{z_k} f(z)=0,\ z_k=ik,\ k\in Z$. **351)** $\operatorname*{res}_{z_k} f(z)=-1,\ z_k=i(2k+1)\pi,\ k\in Z$. **352)** $\operatorname*{res}_{3} f(z)=\frac{\operatorname{ch}3}{10},\ \operatorname*{res}_{i} f(z)=-\frac{\cos 1}{20}(1-3i),\ \operatorname*{res}_{-i} f(z)=-\frac{\cos 1}{20}(1+3i)$. **353)** 0. **354)** π. **355)** 0. **356)** -1. **358)** $-2\pi i$. **359)** $2\pi i$. **360)** $-\pi i$. **361)** 0. **362)** $\frac{-2\pi i}{3}$. **363)** $-6\pi i$. **364)** 0. **365)** $\frac{\pi i}{3}$. **366)** 0.

Амалдық қисап бөліміне арналған

есептер мен тапсырмалар

1. Көрсетілген функциялардың қайсысы тұпнұсқа-функция болатынын тексеріңіз:

а) $f(t)=b^t\eta(t),\ b>0, b\neq 1$; б) $f(t)=e^{(2+4i)t}\eta(t)$;

в) $f(t)=\dfrac{1}{t-3}\eta(t)$; г) $f(t)=t^2\eta(t)$;

д) $f(t)=\operatorname{ch}(3-i)t\eta(t)$; е) $f(t)=\operatorname{tg}t\eta(t)$;

ж) $f(t)=t^t\eta(t)$; з) $f(t)=e^{-t}\cos t\eta(t)$;

и) $f(t)=e^{t^2}\eta(t)$; к) $f(t)=e^{-t^2}\eta(t)$;

Анықтама бойынша келесі фунциялардың L-кескінін табу керек:

2. $f(t)=t$.
3. $f(t)=te^t$.
4. $f(t)=\sin 3t$.
5. $f(t)=t^\alpha\ (\alpha>-1)$.

Фунциялардың L-кескінін табу керек:

6. $f(t)=(1+t)$. 7. $f(t)=\sin t-\cos t$. 8. $f(t)=t+\dfrac{1}{2}e^{-t}$.

Ұқсастық теоремасын пайдаланып, келесі фунциялардың L-кескінін табу керек:

9. $f(t)=e^{\alpha t}$.
10. $f(t)=\sin 4t$.
11. $f(t)=\cos\omega t$.
12. $f(t)=\operatorname{sh}3t$.

Сызықтық және ұқсастық теоремаларды пайдаланып, келесі фунциялардың L-кескінін табу керек:

14. $f(t)=\sin^2 t$.

15. $f(t)=\sin mt\cos nt$.

16. $f(t)=\cos^3 t$.

17. $f(t)=\sin mt\sin nt$.

18. $f(t)=\sin^4 t$.

19. $f(t)=\cos mt\cos nt$.

Түпнұсқаны дифференциалдау туралы теореманы пайдаланып, келесі фунциялардың L-кескінін табу керек:

20. $f(t)=\cos^2 t$.

21. $f(t)=\sin^3 t$.

22. $f(t)=t\sin\omega t$.

23. $f(t)=\cos^4 t$.

24. $f(t)=t\cos\omega t$.

25. $f(t)=te^t$.

Фунциялардың L-кескінін табу керек:

26. $f(t)=t^2\cos t$.

27. $f(t)=t\left(e^t+\operatorname{ch} t\right)$.

28. $f(t)=(t+1)\sin 2t$.

29. $f(t)=t\operatorname{sh} 3t$.

30. $f(t)=\int\limits_0^t \sin\tau d\tau$.

31. $f(t)=\int\limits_0^t (\tau+1)\cos\omega\tau d\tau$.

32. $f(t)=\int\limits_0^t \tau\operatorname{sh} 2\tau d\tau$.

33. $f(t)=\int\limits_0^t \cos^2\omega\tau d\tau$.

34. $f(t)=\int\limits_0^t \operatorname{ch}\omega\tau d\tau$.

35. $f(t)=\int\limits_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$.

36. $\frac{e^t-1}{t}$. 37. $\frac{1-e^{-t}}{t}$. 38. $\frac{\sin^2 t}{t}$. 39. $\frac{1-\cos t}{t}$

40. $\frac{\cos t-\cos 2t}{t}$. 41. $\frac{e^t-1-t}{t}$. 42. $\frac{e^t-e^{-t}}{t}$.

Интегралдарды есептеу керек:

43. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt \ (a>0,\ b>0)$.

44. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}\sin at}{t}dt \ (\alpha>0,\ a>0)$.

45. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{t}\sin mt dt \ (\alpha>0,\ \beta>0, m>0)$.

46. $\int\limits_0^\infty \frac{Ae^{-\alpha t}+Be^{-\beta t}+Ce^{-\gamma t}+De^{-\delta t}}{t}dt,$

$(A+B+C+D=0, \alpha>0,\ \beta>0, \gamma>0, \delta>0)$.

47. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos at-\cos bt}{t}dt,\ (a>0,\ b>0)$.

48. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin at\sin bt}{t}dt,\ (a>0,\ b>0)$.

Фунциялардың L-кескінін табу керек:

49. $e^{2t}\sin t$. 50. $e^t\cos nt$. 51. $e^{-t}t^3$. 52. $e^t \operatorname{sh} t$.

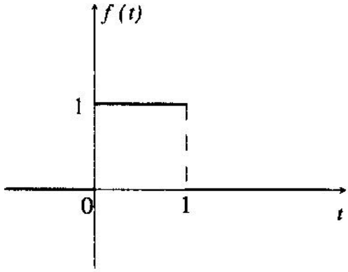
53. $te^t\cos t$. 54. $e^{3t}\sin^2 t$. 55. $e^{-\alpha t}\cos^2 \beta t$.

56. $\sin(t-b)\eta(t-b)$.

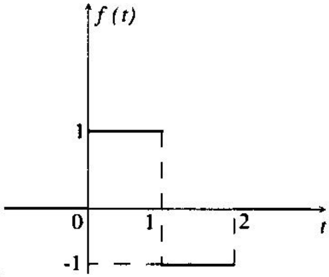
57. $\cos^2(t-b)\eta(t-b)$.

58. $e^{t-2}\eta(t-2)$.

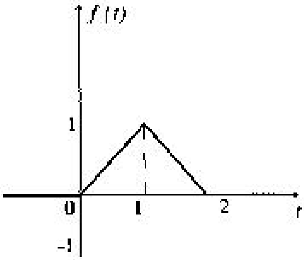
Сызбасы бойынша берілген функциялардың L-кескінін табу керек:



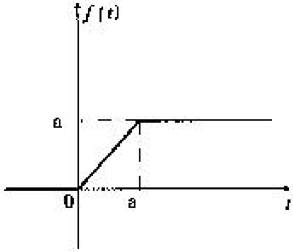
59.



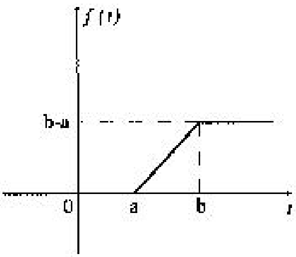
60 .



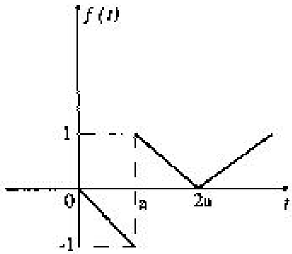
61.



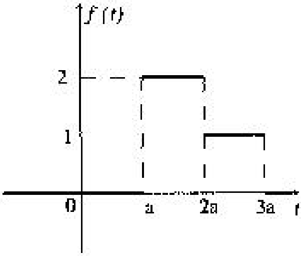
62.



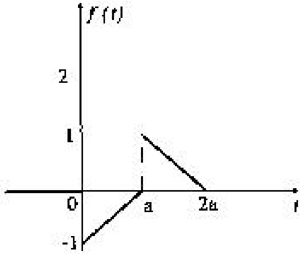
63.



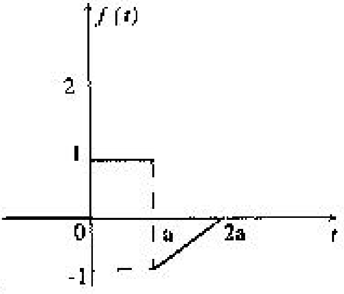
64.

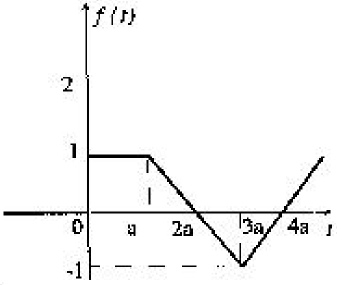


65.



66.

67. 

68. 

Фунциялардың L-кескінін табу керек:

69. $\int_0^t e^{t-\tau}\sin\tau d\tau.$

70. $\int_0^t \cos(t-\tau)e^{2\tau}d\tau.$

71. $\int_0^t (t-\tau)^2 \operatorname{ch}\tau d\tau.$

72. $\int_0^t (t-\tau)^n f(\tau)d\tau.$

73. $\int_0^t e^{2(\tau-t)}\tau^2 d\tau.$

Берілген L-кескіннің түпнұсқаларын тауып,
олардың сызбасын салу керек:

74. $F(p)=\dfrac{2e^{-p}}{p^3}.$

75. $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{p^2}.$

76. $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{p-1}.$

77. $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{p+3}.$

Берілген L-кескіннің түпнұсқаларын табу керек:

78. $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+5}$.

79. $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+3}$.

80. $F(p)=\dfrac{p}{(p+1)^2}$.

81. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)^2}$.

82. $F(p)=\dfrac{1}{p+2p^2+p^3}$.

83. $F(p)=\dfrac{1}{7-p+p^2}$.

84. $F(p)=\dfrac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}$.

85. $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$.

86. $F(p)=\dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$.

87. $F(p)=\dfrac{n!}{p(p+1)(p+2)\dots(p+n)}$.

88. $F(p)=\dfrac{1}{p^4+2p^3+3p^2+2p+1}$.

89. $F(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$.

90. $F(p)=\dfrac{p}{p^3+1}$.

91. $F(p)=\dfrac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}$.

92. $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$.

93. $F(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^3-2p^2+2p-1}$.

94. $F(p)=\dfrac{3p^2}{(p^3-1)^3}$.

95. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2-2p+5}+\dfrac{pe^{-2p}}{p^2+9}$.

96. $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{(p+1)^2}$.

97. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p(p-1)}$.

98. $F(p)=\dfrac{1}{p^2+1}\left(e^{-2p}+2e^{-3p}+3e^{-4p}\right)$.

99. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2-1}+\dfrac{pe^{-2p}}{p^2-4}$.

100. $F(p)=\dfrac{e^{-\frac{p}{2}}}{p(p+1)(p+4)}$.

101. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2}+\dfrac{2e^{-2p}}{p^3}+\dfrac{6e^{-3p}}{p^4}$.

102. $F(p)=\dfrac{e^{-\frac{p}{3}}}{p(p^2+1)}$.

Алғашқы шарттарымен берілген дифференциалдық теңдеулерді шешу керек:

112. $x' + x = e^{-t}, \quad x(0) = 1.$

113. $x' - x = 1, \quad x(0) = -1.$

114. $x' + 2x = \sin t, \quad x(0) = 0.$

115. $x'' = 1, \quad x(0) = 0, \ x'(0) = 1.$

116. $x'' + x' = 1, \quad x(0) = 0, \ x(0) = 1.$

117. $x'' + x = 0, \quad x(0) = 1, \ x'(0) = 0.$

118. $x'' + 3x' = e^{t}, \quad x(0) = 0, \ x'(0) = -1.$

119. $x'' - 2x' = e^{2t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

120. $x'' + 2x' = t\sin t, \quad x(0) = 0, \ x'(0) = 0.$

121. $x'' + 2x' + x = \sin t, \quad x(0) = 0, \ x'(0) = -1.$

122. $x''' - x'' = \sin t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

123. $x' + x = e^{-t}, \quad x(0) = 1.$

124. $x''' + x' = t, \quad x(0) = 0, \ x'(0) = -1, \ x''(0) = 0.$

125. $x'' - 2x' + x = e^{t}, \quad x(0) = 0, \ x'(0) = 1.$

126. $x''' + 2x'' + 5x' = 0, \quad x(0) = -1, \ x'(0) = 2, \ x''(0) = 0.$

127. $x'' - 2x' + 2x = 1, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

128. $x'' + x' = \cos t, \quad x(0) = 2, \ x'(0) = 0.$

129. $x'' + 2x' + x = t^2, \quad x(0) = 1, \ x'(0) = 0.$

130. $x''' + x'' = \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 1, \ x''(0) = 0.$

131. $x'' + x = \cos t, \quad x(0) = -1, \ x'(0) = 1.$

132. $x''' + x'' = t, \quad x(0) = -3,\ x'(0) = 1,\ x''(0) = 0.$

133. $x'' + 2x' + 5x = 3, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 0.$

134. $x^{IV} + x'' = \cos t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = -1,\ x''(0) = x'''(0) = 0.$

135. $x'' + 2x' + 2x = 1, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

136. $x'' + x = 1, \quad x(0) = -1,\ x'(0) = 0.$

137. $x'' + 4x = t, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 0.$

138. $x'' - 2x' + 5x = 1 - t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

139. $x''' + x = 0, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = -1,\ x''(0) = 2.$

140. $x''' + x'' = \cos t, \quad x(0) = -2,\ x'(0) = x''(0) = 0.$

141. $x''' + x' = e^t, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 2,\ x''(0) = 0.$

142. $x^{IV} - x'' = 1, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0.$

143. $x'' + x' = \cos t, \quad x(0) = 2,\ x'(0) = 0.$

144. $x'' - x = te^t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

145. $x''' + x'' = \cos t, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = -2,\ x''(0) = 0.$

146. $x'' + 2x' + x = t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

147. $x'' - x' + x = e^{-t}, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 1.$

148. $x'' - x = \sin t, \quad x(0) = -1,\ x'(0) = 0.$

149. $x''' + x = e^t, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 2,\ x''(0) = 0.$

150. $x'' + x = 2\sin t, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = -1.$

151. $x'' - 2x' + x = t - \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

152. $x'' + 2x' + x = 2\cos^2 t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

153. $x'' + 4x = 2\cos t \cos 3t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

154. $x'' + x = te^t + 4\sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

155. $x'' - x' = te^t, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 0.$

156. $x'' + 4x = f(t),\ x(0) = x'(0) = 0,\ f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1, \\ 2 - t, & 1 < t < 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$

157. $x'' + x' = f(t),\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0,\ f(t) = \begin{cases} b, & 0 < t < a, \\ 2b, & a < t < \infty. \end{cases}$

158. $x'' + 9x = f(t),\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1,\ f(t) = \begin{cases} t - 1, & 1 < t < 2; \\ 3 - t, & 2 < t < 3; \\ 0, & t > 3. \end{cases}$

159. $x'' - 2x' + x = f(t),\ x(0) = x'(0) = 0,\ f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < a, \\ 0, & a < t < 2a, \\ 1, & 2a < t < 3a, \\ 0, & t > 3a. \end{cases}$

160. $x'' + x = 0;\ x(\pi) = 1,\ x'(\pi) = 0.$

161. $x'' + x' = 2t;\ x(1) = 1,\ x'(1) = -1.$

162. $x'' - x' = -2t;\ x(2) = 8,\ x'(2) = 6.$

163. $x'' + x = -2\sin t;\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

164. $x'' + 2x' + x = 2e^{1-t};\ x(1) = 1,\ x'(1) = -1.$

Дюамель формуласын пайдаланып, алғашқы шарттарымен берілген дифференциалдық теңдеулерді шешу керек:

165. $x'' - x' = \dfrac{e^{2t}}{\left(1 + e^t\right)^2}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

166. $x'' + 2x' + x = \dfrac{e^{-t}}{1 + t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

167. $x'' - x' = \dfrac{e^{2t}}{2 + e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

168. $x'' - x' = \dfrac{1}{1 + e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

169. $x'' + x' = \dfrac{1}{2 + \cos t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

170. $x'' + x' = \dfrac{1}{4 + \operatorname{tg}^2 t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

171. $x'' + x = \dfrac{1}{1 + \cos^2 t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

172. $x'' + x = \dfrac{1}{1 + \sin^2 t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

173. $x'' - x = \operatorname{th} t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

174. $x''' + x' = \dfrac{1}{2 + \sin t}, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

Дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешу керек:

175. $\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' + x = 0, \ x(0) = 1, \quad y(0) = -1. \end{cases}$

176. $\begin{cases} x + x' = y + e^t, \\ y + y' = x + e^t, \ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$

177. $\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t', \\ x'' + 2y' + x = 0, \ x(0) = x'(0) = y(0) = 1. \end{cases}$

178. $\begin{cases} x'' - 3x' + 2x + y' - y = 0, \\ -x' + x + y'' - 5y' + 4y = 0, \ x(0) = x'(0) = y'(0) = 0, \ y(0) = 1. \end{cases}$

179. $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = 2x + 2y, \ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$

180. $\begin{cases} x' - y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \ \ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

181. $\begin{cases} x' = -x + y + z + e^t, \\ y' = x - y + z + e^{3t}, \ \ x(0) = y(0) = z(0) = 0. \\ z' = x + y + z + 4, \end{cases}$

182. $\begin{cases} x' = -y - z, \\ y' = -x - z, \ \ x(0) = -1, \ \ y(0) = 0, \ z(0) = 1. \\ z' = -x - y, \end{cases}$

183. $\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = 3x + z, \ \ x(0) = 0, \ \ y(0) = 1, \ z(0) = 1. \\ z' = 3x + y, \end{cases}$

184. $\begin{cases} x' = 2x - y + z, \\ y' = x + z, \qquad x(0) = 1, \ \ y(0) = 1, \ \ z(0) = 0. \\ z' = -3x + y - 2z, \end{cases}$

Лаплас түрлендіруін пайдаланып интегралдарды есептеу керек:

185. $\int\limits_0^\infty e^{-2x}\cos(6x)dx.$

186. $\int\limits_0^\infty y^5 e^{-2y}dy$

187. $\int\limits_0^\infty e^{-2x}\sin(3x)\cos(2x)dx.$

188. $\int\limits_0^\infty \frac{x - \sin x}{x^3}dx.$

189. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{15}}{(x+2)^{19}}dx.$

190. $J(t) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin(tx)}{x^2 + a^2}dx.$

191. $J(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^\infty \left(\text{ch}(at) - 1\right)e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau.$

192. $J(t) = \int\limits_0^t (t-\tau)^5\tau^7 d\tau.$

193. $J(t)=\int_0^t \tau\cos(t-\tau)e^{-\tau}d\tau.$ 194. $\int_0^\infty \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}dx.$

Интегралдық теңдеулерді шешу керек:

195. $\varphi(x)=\sin x+\int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt.$

196. $\varphi(x)=x+\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)\,dt.$

197. $\varphi(x)=x+\int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)\,dt.$

198. $\varphi(x)=\cos x+\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt.$

199. $\varphi(x)=1+x+\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt.$

200. $\varphi(x)=\frac{x^2}{2}+\int_0^x (x-t)e^{-(t-x)}\varphi(t)\,dt.$

201. $\varphi(x)=e^{-x}+\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)\,dt.$

202. $\varphi(x)=x+2\int_0^x \left[(x-t)-\sin(x-t)\right]\varphi(t)\,dt.$

203. $\varphi(x)=\sin x+2\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt.$

204. $\varphi(x)=1-2x-4x^2+\int_0^x \left[3+6(x-t)-4(x-t)^2\right]\varphi(t)\,dt.$

205. $\varphi(x)=1+\frac{1}{2}\int_0^x \sin 2(x-t)\varphi(t)\,dt.$

206. $\varphi(x) = e^x - 2\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

207. $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{6}\int_0^x (x-t)^3\,\varphi(t)\,dt.$

208. $\varphi(x) = x - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

209. $\varphi(x) = \operatorname{sh} x + \int_0^x \operatorname{ch}(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

210. $\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt = x.$

211. $\int_0^x J_0(x-t)\,\varphi(t)\,dt = \sin x.$

212. $\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt = \sin x.$

213. $\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt = \sin x.$

214. $\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt = x + x^2.$

215. $\int_0^x e^{2(x-t)}\varphi(t)\,dt = x^2 e^x.$

216. $\int_0^x \operatorname{ch}(x-t)\,\varphi(t)\,dt = \operatorname{sh} x.$

217. $\int_0^x \operatorname{ch}(x-t)\,\varphi(t)\,dt = x.$

Амалдық қисап

Жауаптары

1. а) ия; б) ия; в) жоқ; г) ия; д) ия; е) жоқ; ж) жоқ; з) ия;
2. и) жоқ); к) ия; л) ия; м) ия.

2. $\frac{1}{p^2}$. 3. $\frac{1}{(p-1)^2}$. 4. $\frac{3}{p^2+9}$. 5. $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$. 6. $\frac{p+1}{p^2}$.

7. $\frac{1-p}{p^2+1}$. 8. $\frac{p^2+2p+2}{2p^2(p+1)}$. 9. $\frac{1}{p-a}$. 10. $\frac{4}{p^2+16}$. 11. $\frac{p}{p^2+\omega^2}$

12. $\frac{3}{p^2-9}$. 13. $aF(pa)$. 14. $\frac{2}{p(p^2+4)}$.

15. $\frac{m(p^2+m^2-n^2)}{(p^2+m^2+n^2)^2-4m^2n^2}$. 16. $\frac{p^3+7p}{(p^2+9)(p^2+1)}$.

17. $\frac{2mnp}{(p^2+m^2-n^2)^2-4m^2n^2}$. 18. $\frac{1}{8}\left(\frac{3}{p}+\frac{p}{p^2+16}-\frac{4p}{p^2+1}\right)$.

19. $\frac{p(p^2+m^2+n^2)}{(p^2+m^2+n^2)^2-4m^2n^2}$. 20. $\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}$.

21. $\frac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}$. 22. $\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$.

23. $\frac{p^4+16p^2+24}{p(p^2+4)(p^2+16)}$. 24. $\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$. 25. $\frac{1}{(p-1)^2}$.

26. $\frac{2p^3-6p}{(p^2+1)^3}$. 27. $\frac{2(p^2+p+1)}{(p^2-1)^2}$. 28. $\frac{2p^2+4p+8}{(p^2+4)^2}$.

29. $\frac{6p}{(p^2-1)^2}$. 30. $\frac{1}{p(p^2+1)}$. 31. $\frac{p^3+p^2+p\omega^2-\omega^2}{p(p^2+\omega^2)^2}$.

32. $\dfrac{4}{\left(p^2-4\right)^2}$. 33. $\dfrac{p^2+2\omega^2}{p^2\left(p^2+4\omega^2\right)}$. 34. $\dfrac{1}{p^2-\omega^2}$. 35. $\dfrac{2}{p\left(p+1\right)^3}$.

36. $\ln\dfrac{p}{p-1}$. 37. $\ln\dfrac{p+1}{p}$. 38. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{p^2+4}}{p}$. 39. $\ln\dfrac{\sqrt{p^2+1}}{p}$.

40. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p^2+4}{p^2+1}$. 41. $\ln\dfrac{p}{p-1}-\dfrac{1}{p}$. 42. $\ln\dfrac{p+1}{p-1}$. 43. $\ln\dfrac{b}{a}$.

44. $\operatorname{arctg}\dfrac{a}{\alpha}$. 45. $\operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{m}-\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha}{m}$. 46. $A\ln\dfrac{\delta}{\alpha}+B\ln\dfrac{\delta}{\beta}+C\ln\dfrac{\delta}{\gamma}$.

47. $\ln\dfrac{b}{a}$. 48. $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{a+b}{a-b}\right|$. 49. $\dfrac{1}{\left(p-2\right)^2+1}$. 50. $\dfrac{p-m}{\left(p-m\right)^2+n^2}$.

51. $\dfrac{3!}{\left(p+1\right)^4}$. 52. $\dfrac{1}{\left(p-1\right)^2-1}$. 53. $\dfrac{p^2-2p}{\left(p^2-2p+2\right)^2}$.

54. $\dfrac{1}{2\left(p-3\right)}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p-3}{\left(p-3\right)^2+4}$.

55. $\dfrac{1}{2\left(p+\alpha\right)}+\dfrac{p+\alpha}{2\left[\left(p+\alpha\right)^2+4\beta^2\right]}$. 56. $\dfrac{e^{-bp}}{p^2+1}$.

57. $\dfrac{e^{-bp}}{2p}+\dfrac{pe^{-bp}}{2(p^2+4)}$. 58. $\dfrac{e^{-2p}}{p-1}$. 59. $\dfrac{1-e^{-p}}{p}$.

60. $\dfrac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p}$. 61. $\dfrac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p^2}$. 62. $\dfrac{1-e^{-ap}}{p^2}$.

63. $\dfrac{e^{-ap}-e^{-bp}}{p^2}$. 64. $F(p)=\dfrac{1}{ap^2}\left(2e^{-2ap}-1\right)+\dfrac{2}{p}e^{-ap}$.

65. $F(p)=\dfrac{e^{-ap}}{p}(2-e^{-ap}-e^{-2ap})$.

66. $F(p)=-\frac{1}{p}+\frac{1}{ap^2}+\frac{ap-2}{ap^2}e^{-ap}+\frac{1}{ap^2}e^{-2ap}$.

67. $F(p)=\frac{1}{p}+\frac{1-2ap}{ap^2}e^{-ap}-\frac{1}{ap^2}e^{-2ap}$.

68. $F(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{ap^2}e^{-ap}+\frac{2}{ap^2}e^{-3ap}$. 69. $\frac{1}{(p-1)(p^2+1)}$

70. $\frac{p}{(p-2)(p^2+1)}$. 71. $\frac{2}{p^2(p^2-1)}$.

72. $\frac{n!F(p)}{p^{n+1}}$. 73. $\frac{2}{p^3(p+2)}$. 74. $(t-1)^2\eta(t-1)$.

75. $(t-2)\eta(t-2)$. 76. $e^{t-2}\eta(t-2)$. 77. $e^{-3(t-3)}\eta(t-3)$.

78. $e^{-2t}\sin t$. 79. $\frac{1}{2}\left(e^{-t}-e^{-3}\right)$. 80. $(1-t)e^{-t}$.

81. $\frac{1}{2}t\sin t$. 82. $1-e^{-t}-te^{-t}$. 83. $\frac{2\sqrt{3}}{9}e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}t$.

84. $\frac{t^2}{2}+2e^{-t}\sin t$. 85. $t-\sin t$.

86. $\frac{1}{6}e^{2t}-\frac{1}{15}e^{-t}-\frac{1}{10}\cos 2t-\frac{1}{5}\sin 2t$.

87. $1-ne^{-t}+\frac{1}{2}n(n-1)e^{-2t}-...+(-1)^n e^{-nt}$.

88. $\frac{2}{3}e^{-t/2}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t-t\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$.

89. $e^{-t}\left(1-t^2\right)$. 90. $\frac{1}{3}e^{t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-\frac{1}{3}e^{-t}$

91. $\frac{3}{5}+\frac{e^{-2t}}{5}(4\sin t-3\cos t)$. 92. $\frac{1}{9}\left(e^{-2t}-e^{t}+3te^{t}\right)$.

93. $2e^{t}+e^{t/2}\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

94. $\frac{1}{3}te^{t}-\frac{1}{3}te^{-t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

95. $\frac{1}{2}e^{t-1}\sin 2(t-1)\eta(t-1)+\cos 3(t-2)\eta(t-2)$.

96. $(t-3)e^{-(t-3)}\eta(t-3)$. 97. $e^{t-1}\eta(t-1)-\eta(t-1)$.

98. $\sin(t-2)\eta(t-2)+2\sin(t-3)\eta(t-3)+3\sin(t-4)\eta(t-4)$.

99. $\operatorname{sh}(t-1)\eta(t-1)+\operatorname{ch}2(t-2)\eta(t-2)$.

100. $\frac{1}{3}\eta\left(t-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{5}e^{-\left(t-\frac{1}{2}\right)}\eta\left(t-\frac{1}{2}\right)-$
$-\frac{1}{20}\cos 2\left(t-\frac{1}{2}\right)\eta\left(t-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{10}\sin 2\left(t-\frac{1}{2}\right)\eta\left(t-\frac{1}{2}\right)$.

101. $(t-1)\eta(t-1)+(t-2)^{2}\eta(t-2)+(t-3)^{3}\eta(t-3)$.

102. $\eta\left(t-\frac{1}{3}\right)-\cos\left(t-\frac{1}{3}\right)\eta\left(t-\frac{1}{3}\right)$.

103. $1-\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$. 104. $\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}}\doteqdot 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-\frac{a^{2}}{4t}}-a\operatorname{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$.

105. $\left(t+\frac{\alpha^{2}}{2}\right)\operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)-\alpha\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-\frac{\alpha^{2}}{4t}}$.

106. $ae^{hx+a^{2}h^{2}t}\operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}+ah\sqrt{t}\right)$.

107. $\frac{1}{a}\operatorname{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)-\frac{e^{a(at+\alpha)}}{a}\operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}\right)$.

108. $\Phi(p)F\left(\sqrt{p}\right)=\dfrac{1}{p-1}\doteqdot e^{t}$. 109. $I(t)=e^{-t}$.

110. $I(t)=2te^{t}$. 111. $I(t)=2te^{-t}$. 112. $x(t)=(t+1)e^{-t}$.

113. $x(t)=-1$. 114. $x(t)=\dfrac{e^{-2t}-\cos t+2\sin t}{5}$.

115. $x(t)=t+\dfrac{1}{2}t^{2}$. 116. $x(t)=t$. 117. $x(t)=\cos t$.

118. $x(t)=\dfrac{1}{4}e^{t}+\dfrac{5}{12}e^{-3t}-\dfrac{2}{3}$. 119. $x(t)=\dfrac{1}{4}\left(1-e^{2t}+2te^{2t}\right)$.

120. $x(t)=\dfrac{2}{25}e^{-2t}-\dfrac{2}{25}\cos t+\dfrac{14}{25}\sin t-\dfrac{1}{5}t\sin t-\dfrac{2}{5}t\cos t$.

121. $x(t)=\dfrac{1}{4}\left(e^{-t}-te^{-t}-\cos t\right)$.

122. $x(t)=\dfrac{1}{2}e^{t}-t-1+\dfrac{1}{2}(\cos t+\sin t)$.

123. $x(t)=\dfrac{1}{2}t^{2}-1+\cos t-\sin t$. 124. $x(t)=t-\sin t$.

125. $x(t)=\dfrac{1}{2}t^{2}e^{t}+te^{t}$. 126. $x(t)=\dfrac{3}{5}e^{-t}\sin 2t-\dfrac{4}{5}e^{-t}\cos 2t-\dfrac{1}{5}$.

127. $x(t)=\dfrac{1}{2}\left(1-e^{t}\cos t+e^{t}\sin t\right)$.

128. $x(t)=2+\dfrac{1}{2}\left(e^{-t}-\cos t+\sin t\right)$.

129. $x(t)=t^{2}-4t+6-5e^{-t}-te^{-t}$.

130. $x(t)=2t+\dfrac{1}{2}\left(e^{t}+\cos t-\sin t\right)$.

131. $x(t)=\dfrac{1}{2}t\sin t-\cos t+\sin t$.

132. $x(t)=\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}t^2+2t-4+e^t.$

133. $x(t)=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}e^{-t}\cos 2t+\frac{1}{5}e^{-t}\sin 2t.$

134. $x(t)=\frac{1}{2}(\cos t+\operatorname{ch} t)-t-1.$

135. $x(t)=\frac{1}{2}\left(1-e^t\cos t-e^{-t}\sin t\right).$

136. $x(t)=1-\cos t.$ 137. $x(t)=\frac{1}{4}t+\cos 2t-\frac{1}{8}\sin 2t.$

138. $x(t)=\frac{3}{25}-\frac{t}{5}-\frac{3}{25}e^t\cos 2t+\frac{4}{25}e^t\sin 2t.$

139. $x(t)=e^{-t}-e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$

140. $x(t)=-1-\frac{1}{2}\left(\sin t+\cos t+e^{-t}\right).$

141. $x(t)=\frac{1}{2}e^t+\frac{3}{2}\sin t+\frac{1}{2}\cos t-1.$

142. $x(t)=\operatorname{ch} t-\frac{1}{2}t^2-1.$ 143. $x(t)=2+\frac{1}{2}\left(e^t+\sin t-\cos t\right).$

144. $x(t)=e^t\left(1-t+\frac{1}{2}t^2\right)-1.$ 145. $x(t)=-\frac{3}{2}\sin t-\frac{1}{2}t\cos t.$

146. $x(t)=2e^{-t}+te^{-t}+t-2.$

147. $x(t)=\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-3\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$

148. $x(t)=-\frac{1}{4}e^t-\frac{3}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\sin t.$

149. $x(t)=\frac{1}{2}e^{t}-\frac{5}{6}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$

150. $x(t)=\cos t-t\cos t.$ 151. $x(t)=2+t-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}te^{t}-\frac{3}{2}e^{t}.$

152. $x(t)=1-\frac{22}{25}e^{-t}-\frac{6}{5}te^{-t}-\frac{3}{25}\cos 2t+\frac{4}{25}\sin 2t.$

153. $x(t)=\frac{t}{4}\sin 2t+\frac{1}{12}(\cos 2t-\cos 4t).$

154. $x(t)=\frac{1}{2}(t-1)e^{t}+\frac{1}{2}\cos t+2\sin t-2t\cos t.$

155. $x(t)=e^{t}\left(\frac{t^{2}}{2}-t+1\right).$

156. $$x(t)=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\eta(t)-\left[(t-1)-\frac{1}{2}\sin 2(t-1)\right]\times$$
$$\times\eta(t-1)+\frac{1}{2}\left[(t-2)-\frac{1}{2}\sin 2(t-2)\right]\eta(t-2).$$

157. $x(t)=\left[b+(1-b)\cos t\right]\eta(t)+\left[b-b\cos(t-a)\right]\eta(t-a).$

158. $$x(t)=\frac{1}{3}\sin 3t\eta(t)+\frac{1}{9}\left[(t-1)-\frac{1}{3}\sin 3(t-1)\right]\eta(t-1)-$$
$$-\frac{2}{9}\left[(t-2)-\frac{1}{3}\sin 3(t-2)\right]\eta(t-2)+$$
$$+\frac{1}{9}\left[(t-3)-\frac{1}{3}\sin 3(t-3)\right]\eta(t-3).$$

159. $x(t)=\sum_{k=0}^{3}(-1)^{k}\left[1-e^{t-ka}+e^{t-ka}(t-ka)\right]\eta(t-ka).$

160. $x(t)=-\cos t.$ 161. $x(t)=(t-1)^{2}+e^{1-t}.$ 162. $x(t)=t^{2}+2t.$

163. $x(t)=\left(t-1-\dfrac{\pi}{2}\right)\cos t.$ 164. $x(t)=\left(t^2-2t+2\right)e^{1-t}.$

165. $x(t)=\dfrac{1}{2}(e^t-1)-\ln\dfrac{1+e^t}{2}.$

166. $x(t)=e^{-t}\left[(t+1)\ln(t+1)-t\right].$

167. $x(t)=(e^t+2)\ln\dfrac{e^t+2}{3}-e^t+1.$

168. $x(t)=e^t-1-(t+\ln 2)(e^t+1)+(e^t+1)\ln(e^t+1).$

169. $x(t)=\sin t\left(t-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{tg\dfrac{t}{2}}{\sqrt{3}}\right)+\cos t\ln(2+\cos t)-\ln 3\cos t.$

170. $$x(t)=\frac{1}{3}-\frac{9-\pi\sqrt{3}}{27}\cos t+\frac{\sqrt{3}}{36}\sin t\ln\left|\frac{\sqrt{3}\sin t-2}{\sqrt{3}\sin t+2}\right|-$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{9}\cos t\operatorname{arctg}(\sqrt{3}\cos t).$$

171. $x(t)=\cos t\ \operatorname{arctg}(\cos t)-\dfrac{\pi}{4}\cos t-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\sin t\cdot\ln\left|\dfrac{\sin t-\sqrt{2}}{\sin t+\sqrt{2}}\right|.$

172. $$x(t)=\sin t\operatorname{arctg}(\sin t)+$$
$$+\cos t\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\cos t}{\sqrt{2}-\cos t}\right|-\ln(3+2\sqrt{2})\right\}.$$

173. $x(t)=-\operatorname{sh}t+2\operatorname{ch}t\left(\operatorname{arctg}e^t-\dfrac{\pi}{4}\right).$

174. $x(t) = \ln 2\cos t - \cos t\ln(2+\sin t) - t\sin t +$

$$+\frac{2}{\sqrt{3}}(2\sin t+1)\left(\operatorname{arctg}\frac{2tg\frac{t}{2}+1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6}\right).$$

175. $x(t) = e^t$, $y(t) = -e^t$. 176. $x(t) = e^t$, $y(t) = e^t$.

177. $x(t) = 2(1-e^{-t}-te^{-t})$, $y(t) = 2-t-2e^{-t}-2te^{-t}$.

178. $x(t) = \frac{1}{4}(e^t - e^{3t} + 2te^{3t})$, $y(t) = \frac{1}{4}(5e^t - e^{3t} - 2te^{3t})$.

179. $x(t) = e^t(\cos t - 2\sin t)$, $y(t) = e^t(\cos t + 3\sin t)$.

180. $x(t) = e^t - \frac{11}{34}e^{4t} - \frac{3}{17}\cos t + \frac{5}{17}\sin t - \frac{1}{2,}$,

$$y(t) = -\frac{2}{3}e^t + \frac{22}{51}e^{4t} + \frac{4}{17}\cos t - \frac{1}{17}\sin t.$$

181. $x(t) = -\frac{1}{15}e^{-2t} + \frac{13}{12}e^{-t} - 2 + \frac{1}{6}e^t + \frac{2}{3}e^{2t} + \frac{3}{20}e^{3t}$,

$$y(t) = \frac{1}{15}e^{-2t} + \frac{13}{12}e^{-t} - 2 - \frac{1}{6}e^t + \frac{2}{3}e^{2t} + \frac{7}{20}e^{3t},$$

$$z(t) = -\frac{13}{12}e^{-t} - \frac{1}{2}e^t + \frac{4}{3}e^{2t} + \frac{1}{4}e^{3t}.$$

182. $x(t) = -e^t$, $y(t) = 0$, $z(t) = e^t$.

183. $x(t) = \frac{3e^{-2t}}{4(2+a)} + \frac{(11-4a)e^{2t}}{4(2-a)} + \frac{3e^{at}}{a^2-4}$,

$$y(t) = -\frac{e^{-2t}}{4(2+a)} + \frac{(11-4a)e^{2t}}{4(2-a)} + \frac{(a+1)e^{at}}{a^2-4}.$$

184. $x(t) = 2-e^{-t}$, $y(t) = 2-e^{-t}$, $z(t) = 2e^{-t}-2$.

185. $\frac{1}{20}$. 186. $\frac{45}{4}$. 187. $\frac{27}{145}$. 188. $\ln\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$. 189. $-\frac{15!}{18!}\frac{1}{4}$.

190. $\dfrac{1}{p^2-a^2}\ln\sqrt{\dfrac{a^2+x^2}{p^2+x^2}}$. 191. $\operatorname{sh}\dfrac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t}$. 192. $\dfrac{t^{13}}{10296}$.

193. $-\dfrac{1}{2}\sin t+\dfrac{1}{2}te^{-t}$. 194. $\ln\sqrt{\dfrac{x^2+a^2}{x^2+b^2}}$.

195. $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}\operatorname{sh}x+\dfrac{1}{2}\sin x$.

196. $\varphi(x)=\dfrac{1}{3}\left(e^x-e^{-x/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2}+\sqrt{3}e^{-x/2}\sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)$.

197. $\varphi(x)=x+\dfrac{1}{6}x^3$. 198. $\varphi(x)=\dfrac{2}{5}e^{2x}+\dfrac{3}{5}\cos x+\dfrac{1}{5}\sin x$.

199. $\varphi(x)=2+x-e^{\frac{x}{2}}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2}-\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)$.

200. $\varphi(x)=-\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{8}x+\dfrac{3}{8}x^2+\dfrac{1}{16}e^{\frac{x}{2}}-\dfrac{1}{12}x^3$.

201. $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}e^{-x}+\dfrac{1}{6}e^{x}+\dfrac{1}{3}e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2}-\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)$.

202. $\varphi(x)=\dfrac{1}{3}\left(e^x-e^{-x}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\sqrt{2}x\right)$. 203. $\varphi(x)=xe^x$.

204. $\varphi(x)=e^x$. 205. $\varphi(x)=\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{3}\cos\sqrt{3}x$.

206. $\varphi(x)=\operatorname{ch}x-xe^{-x}$. 207. $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}(\operatorname{ch}x+\cos x)$.

208. $\varphi(x)=x-\dfrac{1}{6}x^3$. 209. $\varphi(x)=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$.

210. $\varphi(x)=1-x$. 211. $\varphi(x)=\sin x$. 212. $\varphi(x)\equiv 1$.

213. $\varphi(x) = e^{-x}$. 214. $\varphi(x) = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$.

215. $\varphi(x) = 2xe^x - x^2e^x$. 216. $\varphi(x) \equiv 1$.

217. $\varphi(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$.

218. $u(x,t) = u_0\left(1 - \mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right) = \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{x/(2a\sqrt{t})}^{\infty} e^{-u^2}du$.

219. $u(x,t) = u_0\mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{x/(2a\sqrt{t})} e^{-u^2}du$.

220. $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int\limits_{x/a}^{\infty} \varphi(\tau - x/a) e^{-\tau^2/4t} d\tau$,

мұнда $\varphi(\tau - x/a)\eta(\tau - x/a) \doteqdot pF(p^2) e^{-p\frac{x}{a}}$, **ал** $F(p)$ **берілген** $f(t)$ **функциясының** L**-кескіні.**

221. $u(x,t) = 2qa\sqrt{\frac{t}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right) - qx\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$.

222. $u(x,t) = u_0\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) -$

$-u_0\exp\left(\alpha^2a^2t + \alpha x\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + \alpha a\sqrt{t}\right)$.

223.

$u(x,t) = \frac{u_0}{2}\left(\exp\left(-\sqrt{H}\frac{x}{a}\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} - \sqrt{Ht}\right) + \exp\left(\sqrt{H}\frac{x}{a}\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + \sqrt{Ht}\right)\right)$.

224.

$u(x,t) = \frac{qa}{2}\left(\exp\left(-\sqrt{H}\frac{x}{a}\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} - \sqrt{Ht}\right) + \exp\left(\sqrt{H}\frac{x}{a}\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + \sqrt{Ht}\right)\right)$.

Типтік есептерді шығару үлгілері

1-есеп. Түбірдің барлық мәндерін табу керек:

$\sqrt[3]{-27i}$.

Шешуі. $z = -27\, i$ комплекс санының модулі $|z| = 27$, аргументінің бас мәні $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$. Бұл мәндерді және $n = 3$ санын $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}),\quad k = 0,1,\cdots,n-1$ формуласына қойсақ, $\sqrt[3]{-27i} = \sqrt[3]{27}(\cos\dfrac{-\pi/2 + 2\pi k}{3} + i\sin\dfrac{-\pi/2 + 2\pi k}{3})$, $k = 0,1,2$ аламыз. Бұдан $k = 0,1,2$ мәндеріне сәйкес, $k = 0$ үшін $\omega_0 = 3(\cos(-\dfrac{\pi}{6}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{6})) = 3(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{3}{2}$, $k = 1$ үшін $\omega_1 = 3(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}) = 3(0 + i) = 3i$, $k = 2$ үшін $\omega_2 = 3(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\sin\dfrac{7\pi}{6}) = 3(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{3}{2}$ аламыз.

Жауабы: $\sqrt[3]{-27i} = \{\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{3}{2};\ 3i;\ -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{3}{2}\}$.

2-есеп. Алгебралық түрде жазу керек: $ch(3 + \dfrac{\pi i}{4})$.

Шешуі. $chz = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ және $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ формулаларын пайдаланамыз:

$$ch(3 + \frac{\pi}{4}i) = \frac{1}{2}(e^{3+\frac{\pi}{4}i} + e^{-3-\frac{\pi}{4}i}) = \frac{1}{2}(e^3(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\sin\frac{\pi}{4}) + e^{-3}(\cos(-\frac{\pi}{4}) +$$

$$+i\sin(-\frac{\pi}{4}))=$$

$$=\frac{1}{2}(e^3(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})+e^{-3}(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}))=\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}(e^3+e^{-3})+i\frac{\sqrt{2}}{2}(e^3-e^{-3}))=$$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}ch3+i\frac{\sqrt{2}}{2}sh3.$ *Жауабы:* $ch(3+\frac{\pi i}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}ch3+i\frac{\sqrt{2}}{2}sh3\cdot$

2-есепті келесі тәсілмен де шығаруға болады:

$$ch(3+\frac{\pi i}{4})=ch3\cdot ch\frac{\pi i}{4}+sh3\cdot sh\frac{\pi i}{4}=ch3\cdot\cos\frac{\pi}{4}+sh3\cdot(i\sin\frac{\pi}{4})=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}ch3+i\frac{\sqrt{2}}{2}sh3.$$

3-есеп. Алгебралық түрде жазу керек: $(-12+5i)^{-i}$.

Шешуі. $z^b=e^{b\ln z}$ $z^b=e^{e\ln z}$; $\ln z=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k)$, $k\in z$ және $e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$. теңдіктерін пайдаланамыз. Мұнда $|-12+5i|=\sqrt{(-12)^2+5^2}=\sqrt{169}=13$ және $\arg(-12+5i)=\pi-arctg\frac{5}{12}$, болғандықтан,

$\ln(-12+5i)=\ln 13+i(\pi-arctg\frac{5}{12}+2\pi k)$, $k\in z$. Олай болса,

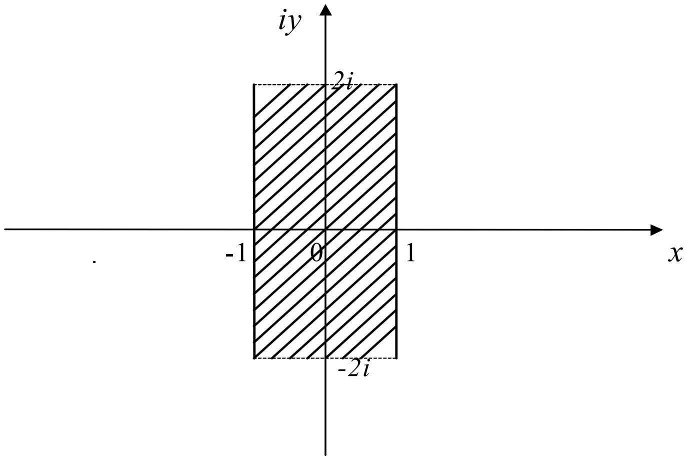
$$(-12+5i)^{-i}=e^{-i\ln(-12+5i)}=e^{-i\ln 13}-i^2(\pi-arctg\frac{5}{12}+2\pi k)=$$

$$=e^{\pi+2\pi k-arc\frac{5}{12}-i\ln 13}=e^{\pi+2\pi k-arctg\frac{5}{12}}(\cos\ln 13-i\sin\ln 13)\cdot$$

Жауабы: $(-12+5i)^{-i}=e^{\pi+2\pi k-arctg\frac{5}{12}}(\cos\ln 13-i\sin\ln 13)$, $k\in z$.

4-есеп. $|\operatorname{Re} z| \le 1$, $|\operatorname{Im} z| < 2$ теңсіздіктерімен берілген аймақты салу керек.

Шешуі. $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$, екенін ескерсек, онда берілген теңсіздіктер келесі түрде жазылады: $-1 \le x \le 1$, $-2 < y < 2$. Бұл теңсіздіктер комплекс жазықтықта тік төртбұрышты анықтайды (төмендегі сурет).



Мұнда аймақта жататын шекара сызықтары тұтас, ал жатпайтын шекара сызықтары үзік сызықпен көрсетілген.

5-есеп. $z = t^2 - 2t + 3 + i(t^2 - 2t + 1)$, $t \in R$, теңдеуімен берілген қисықты анықтау керек.

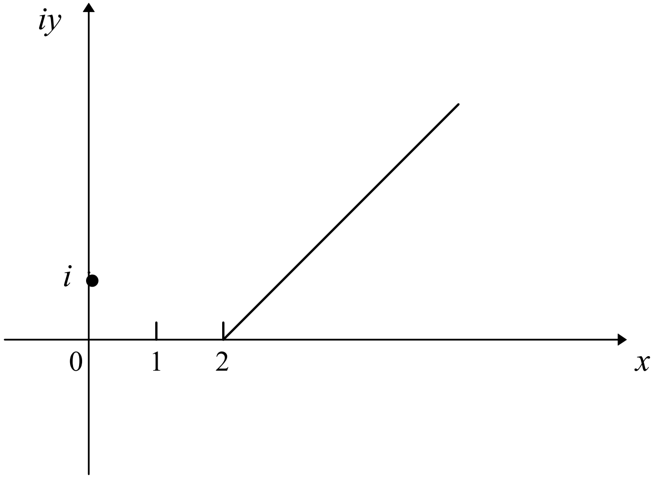
Шешуі. $z = x + iy$ саны мен $z = t^2 - 2t + 3 + i(t^2 - 2t + 1)$ комплекс сандарының теңдігінен

$$\begin{cases} x = t^2 - 2t + 3, \\ y = t^2 - 2t + 1 \end{cases}$$

жүйесін аламыз. Бұл жүйеден x пен y арасындағы байланысты табамыз:

$$\begin{cases} x = (x-1)^2 + 2, \\ y = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = (x-1)^2, \\ y = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2, \\ x \ge 2. \end{cases}$$

Мұндағы y теріс емес екенін ескерсек, алынған теңдеу oxy жазықтығында $y = x - 2$, $y \in [0,+\infty)$, $x \in [2,+\infty)$ жарты түзуін беретінін көреміз (төмендегі сурет).



6-есеп. Берілген жорамал $v(x,y) = 2xy + x$ бөлігі және $f(0) = 0$ мәні бойынша $z_0 = 0$ нүктесінің маңайында аналитикалық $f(z)$ функциясын табу керек.

Шешуі. Алдымен $v(x,y) = 2xy + x$ функциясының $z_0 = 0$ нүктесінің маңайында аналитикалық функция екенін тексерейік: $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$, $0+0=0$, яғни $v(x,y) = 2xy + x$ функциясы Лаплас теңдеуін комплекс жазықтықтың кез келген нүктесінде қанағаттандырады, демек, ол – осы көрсетілген жазықтықта гармоникалық функция.

Енді жорамал бөлігі $v(x,y) = 2xy + x$ болатын аналитикалық функцияны табайық. Оған арналған келесі екі тәсілді көрсетеміз.

1-тәсіл. *Коши-Риман шарттарын*: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}; \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ *пайдаланамыз*. Бірінші теңдік бойынша, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=2x=\dfrac{\partial u}{\partial x}$ аламыз.

Бұдан $u=\int 2xdx+c(y)=x^2+c(y)$ аламыз. Мұндағы $c(y)$ белгісізін табу үшін u функциясын Коши-Риман шарттарының екінші теңдігіне қоямыз:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(x^2+c(y)\right)_y^/=c^/(y), \text{ ал } \frac{\partial v}{\partial x}=\left(2xy+x\right)_x^/=2x+1$$

екенін ескеріп екінші шарттан $c'(y)=-2y-1$ аламыз. Бұдан $c(y)=\int(-2y-1)dy=-y^2-y+c$, демек,

$u=x^2+c(y)=x^2-y^2-y+c.$ Сонымен,

$$f(z)=u+iv=x^2-y^2-y+c+i(2xy+x)=$$

$$=x^2+2xiy+(iy)^2+i(x+iy)+c=z^2+iz+c.$$

Мұндағы c тұрақтысының мәнін $f(0)=0$ шартынан табамыз: $0+c+i\cdot 0=0 \Rightarrow c=0$.

Жауабы: $f(z)=x^2-y^2-y+i(2xy+x).$

2-тәсіл: z_0 нүктесінің маңайында аналитикалық $f(z)$ функциясын табу үшін келесі екі формуланың бірін пайдалануға болады:

$$f(z)=2u\left(\frac{z+\overline{z}_0}{2},\frac{z-\overline{z}_0}{2i}\right)-\overline{C}_0, \qquad \text{(a)}$$

$$f(z)=2iv\left(\frac{z+\overline{z}_0}{2},\frac{z-\overline{z}_0}{2i}\right)+\overline{C}_0. \qquad \text{(á)}$$

Мұндағы $\overline{C}_0$ – $f(z_0)$ санына түйіндес сан.

Біздің мысалымызда $v(x,y)=2xy+x$, $z_0=0$, $\overline{C}=0$. Жоғарыдағы формулалардың екіншісін пайдаланамыз:

$$f(z)=2i\left(2\cdot\frac{z+0}{2}\cdot\frac{z-0}{2i}+\frac{z+0}{2}\right)+0=z^2+iz\,.$$

Жауабы: $y(z)=z^2+iz$.

7-есеп. Комплекс айнымалды функцияның интегралын берілген қисық бойынша есептеу керек:

$$\int_L z|z|dz\,;\qquad L:\{|z|=1\,,\operatorname{Im}z\geq 0\}\,.$$

Шешуі. L қисығы – центрі 0 нүктесі, радиусі 1 болатын, жоғарыдағы жарты жазықтықта жататын жарты шеңбер:

L: $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \end{cases}$ $t\in[0,\pi]$. Олай болса,

$L:\ z(t)=x(t)+iy(t)=\cos t+i\sin t,\quad z'(t)=-\sin t+i\cos t.$

Енді $\int\limits_L \alpha(z)dz=\int\limits_\alpha^\beta \alpha(z(t))z'(t)dt$ формуласын пайдаланып есептейміз:

$$\int_L z|z|dz=\int_0^\pi(\cos t+i\sin t)\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}\cdot(-\sin t+i\cos t)dt=$$

$$=\int_0^\pi(-\cos t\sin t+i\cos^2 t-i\sin^2 t-\cos t\sin t)dt=$$

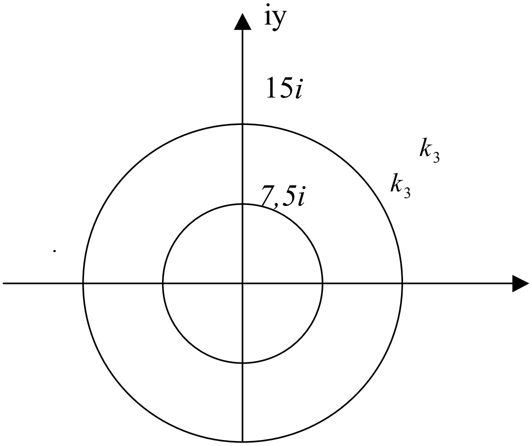
$$=\int_0^\pi(-\sin 2t+i\cos 2t)dt=\left(\frac{\cos 2t}{2}+i\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^\pi=\left(\frac{\cos 2\pi}{2}+i\frac{\sin 2\pi}{2}\right)-$$

$$-\left(\frac{\cos 0}{2}+i\frac{\sin 0}{2}\right)=0$$ аламыз. Жауабы: $\int\limits_L z|z|dz=0$.

Ескерту. Берілген интегралды $z=e^{it}$ айнымал ауыстыруы арқылы да есептеуге болады.

8-есеп. $\omega=\dfrac{15z+450}{225z+15z^2-2z^3}$ функциясының Лоран қатарына z дәрежесі бойынша жіктелуін табу керек.

Шешуі: Берілген функцияның ерекше нүктелері $2z^3-15z^2-225z=0$ немесе $z(2z^2-15z-225)=0$ теңдеуінің түбірлері. Бұдан $z_0=0$ және $2z^2-15z-225z=0$; $D=15^2+2\cdot 4\cdot 225=2025$; $z_{1,2}=\dfrac{15\pm\sqrt{2025}}{4}\Rightarrow z_1=15,$ $z_2=-7.5$ аламыз. Сондықтан берілген функция центрі 0 нүктесіндегі келесі үш сақинада аналитикалық функция болады: $k_1=\{z:0<|z|<7.5\}$, $k_2=\{z:7.5<|7|<15\}$, $k_3=\{z:15<|z|\}$ (төмендегі суретті қараңыз).



Берілген функцияны осы сақиналардың әрқайсысында Лоран қатарына жіктейік. Ол үшін функцияны қарапайым функциялар қосындысына жіктейік.

$$2z^3-15z^2-225z=2z(z-15)(z+7{,}5)=z(z-15)(2z+15),$$

$$\omega=\frac{-15z-450}{2z^3-15z^2-225z}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-15}+\frac{C}{(2z+15)}\Rightarrow 15z-450=$$

$$=A(z-15)(2z+15)+Bz(2z+15)+Cz(z-15).$$

Мұнда $z_0=0$ деп алсақ, $-450=A(-15)(15)\Rightarrow A=2,$

$z_1 = 15$ деп алсақ, $\quad -15\cdot 15 - 450 = B\cdot 15\cdot 45 \Rightarrow B = -1$,

$z_2 = -7.5$ деп алсақ, $+15\cdot 7.5 - 450 = C(-7.5)(-22.5) \Rightarrow C = -2$

аламыз. Сонымен, $\omega = \dfrac{2}{z} - \dfrac{1}{z-15} - \dfrac{z}{2z+15}$.

1. $\quad z \in \mathrm{k}_1 = \{z:\ 0 < |z| < 7{,}5\}$ нүктелері үшін берілген функцияны жіктейік. Ол үшін геометриялық прогрессияның жіктелуін: $\dfrac{a_1}{1-q} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots \quad (|q| < 1)$. пайдаланамыз:

$$-\frac{1}{z-15} = \frac{1}{15-z} = \frac{1}{15(1-z/15)} = \left| |z| < 7{,}5 \ \Rightarrow\ \left|\frac{z}{15}\right| < 1 \right| =$$

$$= \frac{1}{15} + \frac{z}{15\cdot 15} + \frac{1}{15}\left(\frac{z}{15}\right)^2 + \ \ldots\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{15^{n+1}}.$$

$$\frac{-2}{2z+15} = \frac{-1}{z+7.5} = \frac{-1}{7.5(1-(-\frac{z}{7.5}))} = \left| \left|\frac{z}{7{,}5}\right| < 1 \right| =$$

$$= \left| \left|\frac{-z}{7.5}\right| < 1 \right| = \frac{-1}{7.5} + \frac{-1}{7.5}\left(-\frac{z}{7.5}\right) + \frac{-1}{7.5}\left(-\frac{z}{7.5}\right)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{(7.5)^{n+1}}.$$

Сонымен, $\mathrm{k}_1 = \{z:\ 0 < |z| < 7{,}5\}$ сақинада

$$\omega = \frac{2}{z} - \frac{1}{z-15} - \frac{2}{2z+15} = \frac{2}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{15^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{(7.5)^{n+1}}$$ алдық.

2. $\quad z \in K_2 = \{z : 7.5 < |z| < 15\}$. нүктелерін қарастырайық. Мұнда $\left|\dfrac{z}{15}\right| < 1$ болатындықтан, $\dfrac{-1}{z-15}$ бөлшегінің қатарға жіктелуі алдыңғы жағдайға келеді.

K_2 жиынында үшінші бөлшекті қатарға жіктейік:

$$\frac{-1}{2z+15}=\frac{-2}{2z(1+\dfrac{15}{2z})}=\frac{-1}{z\left(1-\left(-\dfrac{15}{2z}\right)\right)}=$$

$$=\left\|-\frac{15}{2z}\right|<1\Big|=-\frac{1}{z}+\frac{-1}{z}\left(-\frac{15}{2z}\right)+\frac{-1}{z}\left(\frac{-15}{2z}\right)^2+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n15^{n-1}}{2^{n-1}z^n}\ .$$

Сондықтан $z\in K_2=\{z:7.5<|z|<15\}$ сақинасындағы нүктелер үшін

$$\omega=\frac{2}{z}-\frac{1}{z-15}-\frac{2}{2z+15}=\frac{2}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{15^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n15^{n-1}}{2^{n-1}z^n}.$$

3. $z\in K_3=\{t:|z|>15\}$ болсын. $|z|>15$ болғандықтан, $\left|\dfrac{15}{z}\right|<1$ шығады. Демек,

$$-\frac{1}{z-15}=\frac{-1}{z(1-{}^{15}\!/\!_{z})}=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\cdot\frac{15}{z}-\frac{1}{z}\left(\frac{15}{z}\right)^2-\cdots=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{15^{n-1}}{z^n}$$

.

$\left|-\dfrac{15}{2z}\right|=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\dfrac{15}{z}\right|<\left|\dfrac{15}{z}\right|<1$ болатындықтан, K_3 сақинасында, яғни $z\in K_3=\{t:|z|>15\}$ нүктелері үшін $\dfrac{-2}{2z+15}$ бөлшегінің қатарға жіктелуі алдыңғы жағдайға келеді:

$$\omega=\frac{2}{z}-\frac{1}{z-15}-\frac{2}{2z+15}=\frac{2}{z}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{15^{n-1}}{z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n15^{n-1}}{2^{n-1}z^n}.$$

Жауабы:

1. $k_1=\{z\ :\ 0<z<7,5\}$ жиынында,

$$\omega=\frac{2}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{15^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}}{(7.5)^{n+1}}\right)z^n;$$

2. $z \in K_2 = \{z : 7{,}5 < |z| < 15\}$ жиынында,

$$\omega = \frac{2}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{15^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n1} 15^{n-1}}{2^{n-1} z^n}.;$$

3. $z \in K_3 = \{t : |z| > 15\}$ жиынында,

$$\omega = \frac{2}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-15^{n-1} + \frac{(-1)^n 15^{n-1}}{2^{n-1}} \right) \frac{1}{z^n} \cdot$$

9-*есеп.* $\omega = \dfrac{2z}{z^2 - 4}$ функциясының $z - z_0$ айырымының дәрежесі бойынша Лоран қатарына жіктеу керек. Мұнда $z_0 = 3 - 2i$ тең.

Шешуі. Функцияның ерекше нүктелері $z^2 - 4 = 0$ теңдеуінің түбірлері, яғни $z_1 = 2$, $z_2 = -2$. Ол нүктелерден z_0 нүктесіне дейінгі қашықтық

$$R_1 = |z_1 - z_0| = |2 - 3 + 2i| = |-1 + 2i| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

$$R_2 = |z_2 - z_0| = |-2 - 3 + 2i| = |-5 + 2i| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

тең. Сондықтан берілген функция центрі $z_0 = 3 - 2i$, радиустері R_1 мен R_2 болатын келесі үш сақинада:

$$K_1 = \{z : |k| < |z - 3 + 2i| < \sqrt{5}\},$$

$$K_2 = \{z : \sqrt{5} < |z - 3 + 2i| < \sqrt{29}\},$$

$$K_3 = \{z : \sqrt{29} < |z - 3 + 2i|\}$$

аналитикалық функция.

Берілген функцияны қарапайым функциялардың қосындысына келтірейік:

$$\omega = \frac{2z}{z^2 - 4} = \frac{2z}{(z-2)(z+2)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z+2} \Rightarrow$$

$2z = A(z+2) + B(z-2):$ $\qquad z = 2 \Rightarrow 4 = 4A \Rightarrow A = 1.$

$z = -2 \Rightarrow -4 = -4B \Rightarrow B = 1.$

Олай болса, $\omega=\dfrac{2z}{z^2-4}=\dfrac{1}{z-2}+\dfrac{1}{z+2}$.

1. $K_1=\{z:|k|<|z-3+2i|<\sqrt{5}\}$ жиынындағы нүктелер үшін $\dfrac{1}{z-2}=\dfrac{1}{(z-3+2i)+(1-2i)}=\dfrac{1}{1-2i}\cdot\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{z-3+2i}{-1+2i}\right)}=$

$$=\left|\ \left|\frac{z-3+2i}{-1+2i}\right|<\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=1\right|=\frac{1}{1-2i}+\frac{1}{1-2i}\cdot\frac{z-3+2i}{(-1+2i)}+$$

$$\frac{1}{1-2i}\cdot\left(\frac{z-3+2i}{-1+2i}\right)^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-3+2i)^n}{(1-2i)^{n+1}};$$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{(-z+2i)+(5-2i)}=\frac{1}{5-2i}\cdot\frac{1}{1-\left(\dfrac{z-3+2i}{-5+2i}\right)}=$$

$$=\left|\ \left|\frac{z-3+2i}{-5+2i}\right|<\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{29}}<1\right|=\frac{1}{5-2i}+\frac{1}{5-2i}\left(\frac{z-3+2i}{-5+2i}\right)+$$

$$+\frac{1}{5-2i}\left(\frac{z-3+2i}{-5+2i}\right)^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-3+2i)^n}{(5-2i)^{n+1}}$$

аламыз. Демек, $K_1=\{z:|k|<|z-3+2i|<\sqrt{5}\}$ жиынындағы нүктелер үшін

$$\omega=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-3+2i)^n}{(-1+2i)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-3+2i)^n}{(5-2i)^{n+1}}\ .$$

2. $K_2=\{z:\sqrt{5}<|z-3+2i|<\sqrt{29}\}$, яғни $z\in k_2$ нүктелері үшін

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z-3+2i)+(1-2i)}=\frac{1}{(z-3+2i)}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{-1+2i}{z-3+2i}}=$$

$$=\left\|\left|\frac{-1+2i}{z-3+2i}\right|<\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=1\right\|=\frac{1}{z-3+2i}+\frac{1}{z-3+2i}\cdot\left(\frac{-1+2i}{z-3+2i}\right)+$$

$$+\frac{1}{z-3+2i}\cdot\left(\frac{-1+2i}{z-3+2i}\right)^2+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1+2i)^{n-1}}{(z-3\_2i)^n}.$$

$K_2=\{z:\sqrt{5}<|z-3+2i|<\sqrt{29}\}$ сақинасының нүктелерінде $\left|\frac{z-3=2i}{-5+2i}\right|<\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{29}}=1$ орындалатындықтан, $\frac{1}{z+2}$ бөлшегінің жіктелуі алдыңғы жағдайдағыдай. Ендеше, $K_2=\{z:\sqrt{5}<|z-3+2i|<\sqrt{29}\}$ жиынында

$$\omega=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z+2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1+2i)^{n-1}}{(z-3+2i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-3+2i)^n}{(5-2i)^{n+1}}.$$

3. $K_3=\{z:\sqrt{29}<|z-3+2i|\}$ нүктелерінде $\left|\frac{-1+2i}{z-3+2i}\right|<\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{29}}<1$ орындалатындықтан, $\frac{1}{z-2}$ бөлшегінің жіктелуі 2 п.-дей болады.

Екінші бөлшекті қатарға жіктейік:

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{(z-3+2i)+(5-2i)}=\frac{1}{z-3+2i}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{-5+2i}{z-3+2i}\right)}=$$

$$=\left\|\left|\frac{-5+2i}{z-3+2i}\right|<\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{29}}=1\right\|=\frac{1}{z-3+2i}+\frac{1}{z-3+2i}\cdot\left(\frac{-5+2i}{z-3+2i}\right)+$$

$$+\frac{1}{z-3+2i}\cdot\left(\frac{-5+2i}{z-3+2i}\right)^2+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5+2i)^{n-1}}{(z-3+2i)^n}.$$

Демек, $K_3=\{z:\sqrt{29}<|z-3+2i|\}$ жиынында

$$\omega=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z+2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1+2i)^{n-1}}{(z-3+2i)^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5+2i)^{n-1}}{(z-3+2i)^n}.$$

Жауабы:

1. $$\omega=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{-1}{1-2i}\right)^{n+1}+\left(\frac{-1}{5-2i}\right)^{n+1}\right)(z-3+2i)^n,$$

$$K_1=\{z:|k|<|z-3+2i|<\sqrt{5}\};$$

2. $$\omega=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1+2i)^{n-1}}{(z-3+2i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{5-2i}\right)^{n+1}(z-3+2i)^n,$$

$$K_2=\{z:\sqrt{5}<|z-3+2i|<\sqrt{29}\};$$

3. $$\omega=\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1+2i)^{n-1}+(-5+2i)^{n-1}\right)\frac{1}{(z-3+2i)^n},$$

$$K_3=\{z:\sqrt{29}<|z-3+2i|\}.$$

10-*есеп.* $\omega=z\sin\dfrac{\pi z}{z-a}$ функциясын $z_0=a$ нүктесінің маңайында Лоран қатарына жіктеу керек.

Шешуі: $z-a$ айырымын t арқылы белгілесек, $z=t+a$ болады да:

$$\omega=(t+a)\sin\frac{\pi(t+a)}{t}=(t+a)\sin\left(\pi+\frac{a}{t}\right)=-(t+a)\sin\frac{a}{t}=-t\sin\frac{a}{t}-a\sin\frac{a}{t}$$

аламыз.

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$ жіктелуін $x=\dfrac{a}{t}$,

үшін жазсақ,

$$\omega=-t\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a^{2n+1}}{t^{2n+1}(2n+1)!}-a\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a^{2n+1}}{t^{2n+1}(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^{2n+1}}{t^{2n}(2n+1)!}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^{2n+2}}{t^{2n+1}(2n+1)!}$$ шығады. Енді мұнда $t=z-a$ ауыстыруын жасаса болғаны.

Жауабы: $\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^{2n+1}}{(z-a)^{2n}(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^{2n+2}}{(z-a)^{2n+1}(2n+1)!}.$

11-*есеп.* $\omega = \frac{e^{z^5}-1}{e^z-1-z}$ функциясының $z=0$ ерекше нүктесінің түрін анықтау керек.

Шешуі: $\omega = e^z$ функциясының Маклорен қатарына жіктелу формуласын: $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ \ldots$

Пайдаланамыз. Мұндағы z орнына z^5қойсақ $e^{z^5} = 1 + z^5 + \frac{z^{10}}{2!} + \cdots,$ және бұл қатар $z=0$ нүктесінің маңайында жинақты. Сондықтан

$$\omega = \frac{e^{z^5}-1}{e^z-1-z} = \frac{-1+1+z^5+\frac{z^{10}}{2!}+\cdots}{-1-z+1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots} =$$

$$= \frac{z^5+\frac{z^{10}}{2!}+\cdots}{\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots} = \frac{z^5\left(1+\frac{z^5}{2!}+\cdots\right)}{z^2\left(\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\cdots\right)} = z^3 \cdot h(z)$$

Мүнда $h(z) = \frac{1+\frac{z^5}{2!}+\cdots}{\frac{1}{2}+\frac{z}{3!}+\cdots}$ арқылы $z=0$ нүктесінің маңайында аналитикалық функция белгіленген (екі аналитикалық функцияның қатынасы және бөлімі нөлге тең емес).

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^{z^5}-1}{e^z-1-z} = \lim_{z\to 0} z^3 \cdot h(z) = 0 < \infty$$

Болғандықтан, $z_0 = 0$ – жөнделетін ерекше нүкте.

12-есеп. $\omega = \dfrac{\sin \pi z}{z^4 - 1}\; e^{\frac{1}{z}}$ функциясының оқшауланған ерекше нүктелерін тауып, олардың түрлерін анықтау керек.

Шешуі: Берілген функция $z_1 = 0$ нүктесінде және $z^4 - 1 = 0$ теңдеуінің түбірлерінде анықталмаған.

$$z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i)$$

жіктелуін тағы да $z_2 = 1,\ z_3 = -1,\ z_4 = i,\ z_5 = -i$ төрт ерекше нүкте аламыз. Осы нүктелердің түрлерін анықтайық.

1. $z_1 = 0$ нүктесінде берілген функцияның шегі жоқ екенін көрсету үшін $z = x + 0i$ нөлге ұмтылсын ($y = 0$):

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sin \pi x}{x^4 - 1} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin \pi x}{x^4 - 1} \cdot \lim_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}} = (0 \cdot e^{-\infty}) = 0;$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin \pi x}{x^4 - 1} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^4 - 1} \cdot \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{(\sin \pi x)^{-1}} =$$

$$= -\lim_{x\to 0+} \frac{e^{1/x}}{(\sin \pi x)^{-1}} - 1 = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \left|\textit{Лопиталь}\ \text{ережесі}\right| =$$

$$= -\lim_{x\to 0+} \frac{e^{1/x}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{-(\sin \pi x)^{-2} \cdot \cos \pi x \cdot \pi} = -\lim_{x\to 0+} e^{1/x} \cdot \lim_{x\to 0+} \cdot \frac{\sin^2 \pi x}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\cos \pi x \cdot \pi} =$$

$$= \left(\infty \cdot \pi^2 \cdot \frac{1}{\pi}\right) = \infty.$$

Функцияның оң және сол жақ шектері өзара тең емес, яғни $z_1 = 0$ нүктеде функцияның шегі жоқ, демек, $z_1 = 0$ – елеулі ерекше нүкте.

2) $z_2 = 1$ нүктесін зерттейік.

$$\lim_{z\to 1}\frac{\sin\pi z}{z^4-1}e^{1/z}=\lim_{z\to 1}e^{1/z}\cdot\lim_{z\to 1}\frac{\sin\pi z}{z^4-1}=e\cdot\lim_{z\to 1}\frac{(\sin\pi z)'}{(z^4-4)'}=$$

$$=e\lim_{z\to 1}\frac{\pi\cos\pi z}{4z^3}=\frac{\pi e}{4}.$$

Олай болса, $z_2=1$ – жөнделетін ерекше нүкте.

3. $z_3=-1$ нүктесін де осы сияқты зерттеуге болады:

$$\lim_{z\to -1}\frac{\sin\pi z}{z^4-1}e^{1/z}=\lim_{z\to -1}e^{1/z}\cdot\lim_{z\to -1}\frac{\sin\pi z}{z^4-1}=$$

$$=e^{-1}\cdot\lim_{z\to -1}\frac{(\sin\pi z)'}{(z^4-4)'}=e^{-1}\lim_{z\to -1}\frac{\pi\cos\pi z}{4z^3}=\frac{\pi e^{-1}}{4},$$

яғни $z_3=-1$ – жөнделетін ерекше нүкте.

4. $z_4=i$ нүктесін зерттейік.

$$\lim_{z\to i}\frac{\sin\pi z\cdot e^{1/z}}{z^4-1}=\left(\frac{\sin\pi i\cdot e^{-i}}{0}\right)=\infty,$$

олай болса, $z_4=i$ нүктесі – полюс. Оның ретін анықтау үшін функцияны келесі түрде жазайық: $\omega=\dfrac{x(z)}{\mu(z)}=\dfrac{\sin\pi z\cdot e^{1/z}}{z^4-1}$,

мұнда $\lambda(i)=\sin\pi i e^{-i}\neq 0$, $\mu(i)=i^4-1=0$, $\mu'(z)=4z^3$,

$\mu'(i)=4i^3\neq 0$ орындалады, демек, $z_4=i$ – 1-ші ретті полюс.

4. $z_5=-i$ жағдайы алдыңғы сияқты, мұнда да

$\lambda(-i)=\sin(-\pi i)e^{i}\neq 0$ $\mu(-i)=(-i)^4-1=0$,

$\mu'(-i)=-4i^3\neq 0$,

орындалады, олай болса, $z_5=-i$ – 1-ші ретті полюс..

Жауабы:

$z_1=0$ – елеулі ерекше нүкте;

$z_{2,3}=\pm 1$ – жөнделетін ерекше нүктелер;

$z_{4,5}=\pm i$ – 1-ші ретті полюстер.

13-*есеп.* Интегралды есептеу керек:

$$\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{z^2+1}{(z^2+4)\sin\frac{z}{3}}dz \cdot$$

Шешуі: Интеграл астындағы функцияның ерекше нүктелерін табамыз, ол үшін бөлшектің бөлімін нөлге теңестіреміз:

$(z^2+4)\sin z/3 = 0$, бұдан $z^2+4=0$ немесе $z_{1,2}=2i$, ал $\sin z/3 = 0$ болса $z/3 = \pi k,\ z_k = 3\pi k,\ k \in Z$.

$\left|1-(\pm 2i)\right| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} > 2$, яғни $z_n = \pm 2i$ нүктелері интегралдау контурының сыртында жатыр, сондықтан оларды қарастырмаймыз, ал $z_k = 3\pi k,\ k \in Z$ нүктелер жиынындағы $z_0 = 0$ нүктесі ғана $|z-1| = 2$ контурының ішінде жатыр.

$z_0 = 0$ нүктесінің түрін анықтайық.

Интеграл астындағы функция $f(z) = \dfrac{\lambda(z)}{\mu(z)}$, $\lambda(z) = z^2+1$, $\mu(z) = (z^2+4)\sin\dfrac{z}{3}$ түрінде берілген және $\lambda(z_0) \neq 0,\ \mu(z_0) = 0$, $\mu'(z_0) \neq 0$ орындалады, шынында да,

$\lambda(z) = z^2+1$ үшін $\lambda(0) = 1 \neq 0$;

$\mu(z) = (z^2+4)\sin\dfrac{z}{3}$, үшін $\mu(0) = 0$,

ал $\mu'(z) = 2z\sin\dfrac{z}{3} + (z^2+4)\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{z}{3}$, үшін

$\mu'(0) = 0 + 4\cdot\dfrac{1}{3}\cdot 1 = \dfrac{4}{3} \neq 0 \cdot$ Сондықтан $z_0 = 0$ – жай (1-ші ретті) полюс. Олай болса, $\underset{я}{шег}\left(\dfrac{z^2+1}{(z^2+4)\sin\frac{z}{3}}\right) = \dfrac{\lambda(0)}{\mu'(0)} = \dfrac{1}{\frac{4}{3}} = \dfrac{3}{4}.$

Кошидің шегерім туралы негізгі теоремасына сәйкес

$$\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{z^2+1}{(z^2+4)\sin\frac{z}{3}}dz = 2\pi i \cdot \underset{я=0}{шег}\left(\frac{z^2+1}{(z^2+4)\sin\frac{я}{3}}\right) = 2\pi i\frac{3}{4} = \frac{3}{2}\pi i. \cdot$$

Жауабы: $\frac{3}{2}\pi i$.

14-*есеп.* Интегралды есептеу керек: $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2 e^{\frac{1}{z^2}}-1}{z}dz.$

Шешуі: Интеграл астындағы функцияның жалғыз ерекше нүктесі $z_0 = 0$ бар және ол $|z| = 1$ контурының ішінде жатыр. Функцияны $z_0 = 0$ нүктесінің маңайында Лоран қатарына жіктей отырып, осы нүктедегі оның шегерімін табамыз.

$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots$ түріндегі Маклорен қатарын $t = \frac{1}{z^2}$ үшін жазсақ, $e^{\frac{1}{z^2}} = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4 \cdot 2!} + \frac{1}{z^6 \cdot 3!} + \cdots$ аламыз. Олай болса, $\frac{z^2 e^{\frac{1}{z^2}}-1}{z} = \frac{z^2\left(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4\cdot 2!} + \frac{1}{z^6 \cdot 3!} + \cdots\right) - 1}{Z} =$

$$= \frac{\left(z^2 + 1 + \frac{1}{z^2 \cdot 2!} + \frac{1}{z^4 \cdot 3!} + \cdots\right) - 1}{z} = z + \frac{1}{2!\cdot z^3} + \frac{1}{3!\cdot z^5} + \cdots \quad .$$

$\underset{z=s_0}{шег} f(z) = c_{-1}$ екені белгілі, ал бізде $\frac{1}{z}$ дәрежесінің коэффициенті c_{-1} нөлге тең, демек, $\underset{z=s_0}{шег}\left(\frac{z^2 e^{1/z^2}-1}{z}\right) = 0.$

Олай болса, $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2 e^{1/z^2} - 1}{z} dz = 2\pi i \cdot \underset{z=s_0}{шег} f(z) = 0.$

Жауабы: 0.

15-*есеп.* Интегралды есептеу керек:

$$\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{2z} - \cos 9z}{z \sin \pi i z} dz\ .$$

Шешуі: $shiz = i \sin z$ теңдігін пайдалана отырып, берілген интегралда келесі түрде жазамыз:

$$\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{2z} - \cos 9z}{iz \sin \pi z} dz.$$

Интеграл астындағы функцияның ерекше нүктелері $z \cdot \sin \pi z = 0$ теңдеуінен табылады: $z = 0,\quad \pi z = \pi k,\quad k \in Z,$ немесе $z = k,\ k \in Z.$

$|z| = 0,5$ шеңберінің ішінде $z_0 = 0$ нүктесі ғана жатыр. Оның түрін анықтайық. Интеграл астындағы функция

$f(z) = \dfrac{\lambda(z)}{\mu(z)} = \dfrac{e^{2z} - \cos 9z}{i \sin \pi\, z}$ түрінде жазылған және

$\lambda(0) = e^0 - \cos 0 = 0,\qquad \lambda'(z) = 2e^{2z} + 9\sin 9z,$

$\lambda'(0) = 2 \cdot e^0 - \sin 0 = 2 \neq 0$, яғни $z_0 = 0$ нүктесі $\lambda(z)$ функцияның 1-ші ретті нөлі;

$$\mu(0) = 0,\quad \mu'(z) = i \sin z + i\pi z \cos \pi z,\qquad \mu'(0) = 0\cdot$$

$\mu''(z) = i\pi \cos \pi z + i\pi \cos \pi z - i\pi^2 z \sin z,\qquad \mu''(0) = zi\pi \neq 0,$ яғни

$z_0 = 0$ нүктесі $\mu(z)$ функциясының 2-ші ретті нөлі.

Олай болса, $z_0 = 0$ нүктесі функцияның $2 - 1 = 1$ ретті полюсі. Шегерімді $\underset{z=s_0}{шег} f(z) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)$ формуласы бойынша іздейміз:

$$\underset{z=s_0}{шег}\, f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^{2z} - \cos 9z}{iz \sin \pi z} \cdot z = \lim_{z\to 0} \frac{e^{2z} = \cos 9z}{i \sin z} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{(e^{2z} - \cos 9z)'}{(i \sin \pi z)'} = \lim_{z\to 0} \frac{2e^{2z} + 9 \sin 9z}{i\pi \cos \pi z} = \frac{2}{i\pi} .$$

Шегерім туралы негізгі теорема бойынша

$$\oint\limits_{|z|=0,5} f(z)dz = 2\pi i \underset{z=s_0}{шег}\, f(z) = 2\pi i \frac{2}{i\pi} = 4.$$ *Жауабы:* 4.

16-*есеп.* Интегралды есептеу керек:

$$\oint\limits_{|z+2i|=3} \left(\frac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}} + 1} + \frac{6\, ch \frac{\pi i z}{2-2i}}{(z-2+2i)^2 (z-4-2i)} \right) dz .$$

Шешуі: **1)** Бірінші бөлшектің ерекше нүктелерін келесі теңдеуден табамыз: $e^{\frac{\pi z}{2}} + 1 = 0$, $e^{\frac{\pi z}{2}} = -1$, $\frac{\pi z}{2} = Ln(-1)$.

Бұдан $|-1| = 1$, $\arg(-1) = \pi$ болғандықтан,

$$\frac{\pi z}{2} = \ln 1 + i(\pi + 2\pi k); \quad \pi z = 2i(\pi + 2\pi k); \quad z = i(2+4k),\ k \in Z$$

аламыз. Бұл нүктелердің $|z+2i| = 3$ контурының ішінде жататыны тек $z_0 = -2i$ нүктесі ($k = -1$ болса). Бұл нүктенің түрін анықтайық:

$$f_1(z) = \frac{\lambda_1(z)}{\mu_1(z)} = \frac{\pi}{e^{\pi \frac{z}{2}} + 1}, \quad \lambda_1(-2i) = \pi \neq 0,$$

$$\mu_1(-2i) = e^{-\pi i} + 1 = 0, \quad \mu_1'(z) = \frac{\pi}{2} e^{\frac{\pi z}{2}},$$

$$\mu'(-2i) = \frac{\pi}{2} e^{-\pi i} = -\frac{\pi}{2} \neq 0,$$ олай болса, $z_0 = -2i$ − нүктесі 1-ші

ретті полюс. Бұл нүктедегі шегерімді $\underset{z=s_0}{шег} f(z) = \dfrac{\lambda_1(z_0)}{\mu_1'\ (z_0)}$

формуласын қолданып табамыз: $\underset{z=s_0}{шег} f_1(z) = \dfrac{\pi}{-\pi/2} = -2.$ Сонымен,

бірінші бөлшектің интегралы $\oint\limits_{|z+2i|=3} \dfrac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}}+1} dz = 2\pi i(-2) = -4\pi i$ тең.

2) Екінші $f_2(z) = \dfrac{6ch\dfrac{\pi iz}{2-2i}}{(z-2+2i)^2(z-4-2i)}$ бөлшектің ерекше нүктелерін $(z-2+2i)^2(z-4-2i)=0$ теңдеуінен табамыз. Бұдан $z_1 = 2-2i,$ $z_2 = 4+2i.$ Екінші нүкте үшін $|-2i-(4+2i)| = |-4-4i| = \sqrt{32} > 3$ орындалады, яғни $4+2i$ нүктесі $|z+2i|=3$ контурының сыртында, ал $z_1 = 2-2i$ нүктесі бұл контурдың ішінде жататынын көру қиын емес. Осы нүктенің түрін анықтайық.

$$f_2(z) = \frac{6\cos\dfrac{\pi z}{2-2i}}{(z-2+2i)^2(z-4-2i)} = \frac{\dfrac{6\cos\dfrac{\pi z}{2-2i}}{z-4-2i}}{[z-(2-2i)]^2},$$ және

мұнда

$\varphi(z) = \dfrac{6\cos\dfrac{\pi z}{2-2i}}{z-4-2i}$ функциясы үшін

$\varphi(2-2i) = \dfrac{-6}{2-2i-4-2i} = \dfrac{6}{2+4i} \neq 0$, сонымен бірге ол $-$ 2-2i нүктесінің маңайында аналитикалық функция. Сондықтан белгілі критерий бойынша 2-2i нүктесі $-$ 2-ші ретті полюс.

2-2i нүктесіндегі шегерімді табу үшін

$\underset{z=z_1}{шег} f_2(z) = \lim\limits_{z\to z_1}(f(z)(z-z_1)^2)'$ формуласын пайдаланамыз:

$$= \lim_{z\to 2-2i}\left(\frac{6\cos\frac{\pi z}{2-2i}}{(z-4-2i)}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to 2-2i}\frac{-\frac{6\pi}{2-2i}\sin\frac{\pi z}{2-2i-}\cdot(z-4-2i)-6\cos\frac{\pi z}{2-2i}\cdot 1}{(z-4-2i)^2} =$$

$$= \frac{\frac{-6\pi}{2-2i}\sin\pi\cdot(2-2i-4-2i)-6\cos\pi}{(2-2i-4-2i)^2} = \frac{6}{(-2-4i)^2} =$$

$$= \frac{6}{4+16i-16} = \frac{3}{-6+8i} = \frac{3(-6-8i)}{(-6+8i)(-6-8i)} = \frac{-18-24i}{36+64} =$$

$= -0{,}18-0{,}24i.$ Сондықтан

$$\oint\limits_{|z+2i|=3} f_2(z)dz = 2\pi i \mathop{\textit{шег}}_{z=2-2i} f_2(z) = 2\pi i(-0{,}18-0{,}24i) = \pi(0{,}48-0{,}36i).$$

Сонымен, $\oint\limits_{|z+2i|=3}(f_1(z)+f_2(z))dz = \oint\limits_{|z+2i|=3} f_1(z)dz + \oint\limits_{|z+2i|=3} f_2(z)dz =$

$= -4\pi i + \pi(0{,}48-0{,}36i) = \pi(0{,}48-4{,}36i).$

Жауабы: $0{,}48\pi - 4{,}36\pi i$.

17-*есеп.* Интегралды есептеу керек: $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{4\sqrt{2}\sin t+6}$.

$$\mathop{\textit{шег}}_{z=2-2i} f_2(z) = \lim_{z\to 2-2i}\left(\frac{6\cos\frac{\pi z}{2-2i}}{(z-2+2i)^2(z-4+2i)}(z-2+2i)^2\right)' =$$

Шешуі: $z = e^{it}$ айнымал ауыстыруын жасайық. Онда $\int\limits_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \oint\limits_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{zi}$.

Сондықтан

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{2}\sin t + 6} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\left(4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)+6\right)iz} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{2\sqrt{2}z^2 + 6iz - 2\sqrt{2}}.$$

Енді $f(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}z^2 + 6iz - 2\sqrt{2}} = \frac{\lambda(z)}{\mu(z)}$ функциясының ерекше нүктелерін $2\sqrt{2}z^2 + 6iz - 2\sqrt{2} = 0$ теңдеуінен табамыз:

$$z_{1,2} = \frac{-3i \pm \sqrt{(3i)^2 + 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} = \frac{-3i \pm \sqrt{-9+8}}{2\sqrt{2}} = \frac{-3i \pm i}{2\sqrt{2}}.$$

$|z_1| = \left|\frac{-2i}{2\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1,$ àё $|z_2| = \left|\frac{-4i}{2\sqrt{2}}\right| = \sqrt{2} > 1,$ демек, $|z| = 1$ контурының ішінде $z_1 = \frac{-2i}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}i$ нүктесі жатыр. Оның түрін анықтайық. $\lambda(-\frac{\sqrt{2}}{2}i) = 1 \neq 0$, $\mu\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 0,$ өйткені z_1 – бөлшек бөлімінің түбірі. Сонымен бірге $\mu'(z) = 4\sqrt{2}z + 6i$,

$\mu'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -4\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}i + 6i = 2i \neq 0.$ Олай болса, $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}i$ – 1-ші ретті полюс. Бұл нүктедегі шегерім

$\underset{z_1}{\textit{шег}}\, f(z) = \frac{\lambda(z_1)}{\mu'(z_1)} = \frac{1}{2i}$ тең. Олай болса,

$$\oint_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i res_{z_1} f(z) = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi \cdot$$ *Жауабы:* π .

18-*есеп.* Интегралды есептеу керек:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5}+\sqrt{2}\cos t)^2}.$$

Шешуі: Алдыңғы есептің шешу әдісін пайдаланамыз: $z = e^{it}$ деп алайық. Онда

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5}+\sqrt{2}\cos t)^2} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\left(\sqrt{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)^2 iz} =$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{zdz}{i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}z^2+\sqrt{5}z+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}.$$

$$f(z) = \frac{\lambda(z)}{\mu(z)} = \frac{z}{i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}z^2+\sqrt{5}z+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$ функциясының

ерекше нүктелерін $\frac{\sqrt{2}}{2}z^2+\sqrt{5}z+\frac{\sqrt{2}}{2}=0$ теңдеуінен табамыз: $z_{1,2} = \frac{-\sqrt{5}\pm\sqrt{5-2}}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{5}\pm\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Мұнда $\left|\frac{-\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right| > 1$ және

$\left|\frac{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right| < 1$ болғандықтан, $|z| < 1$ контурының ішінде $z_1 = \frac{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ерекше нүктесі ғана жатады.

$\lambda(z_1) = \frac{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \neq 0$, ал $\mu(z)$ үшін

$\mu(z_i) = \mu'(z_i) = 0$ және $\mu''(z_1) \neq 0$ болады. Шынында да,

$$\mu'(z) = i2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}z^2 + \sqrt{5}z + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sqrt{2}z + \sqrt{5}\right).$$

$$\mu''(z) = i2(\sqrt{2}z + \sqrt{5})^2 + i2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}z^2 + \sqrt{5}z + \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Бұл функцияның z_1 нүктедегі мәні

$\mu''(z_1) = i2\left(\sqrt{2}\frac{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \sqrt{5}\right)^2 = 6i \neq 0$. Олай болса, z_1 нүктесі – $f(z)$ функциясының 2-ші ретті полюсі.

$\mu(z)$ -ті көбейткіштерге жіктеп алайық:

$$\mu(z) = i\frac{\sqrt{2}}{2}(z-z_1)^2(z-z_2)^2 = i\frac{\sqrt{2}}{2}\left(z - \frac{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(z + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

z_1 нүктесіндегі шегерімді келесі формула арқылы табамыз: $\underset{я_н}{шег} f(z) = \lim_{z\to z_1}\left(f(z)(z-z_1)^2\right)'$.

$$\underset{я''}{шег} f(z) = \lim_{z \to \frac{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{Z}{i\frac{\sqrt{2}}{2}\left(z - \frac{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(z + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2} \left(z - \frac{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 \right)' =$$

$$= \lim_{z \to (-\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}z}{i(z+(\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2})^2} \right)' =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{i} \lim_{z \to (-\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2}} \frac{(z+(\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2})^2 - z \cdot 2(z+(\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2})}{(z+(\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2})^4} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{i} \frac{((-\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2}+(\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2})^2 - (-\sqrt{5}+\sqrt{3})\sqrt{2}((-\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2}+(\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2})}{((-\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2}+(\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2})^4} =$$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{i} \dfrac{6+(\sqrt{5}-\sqrt{3})\cdot 2\sqrt{3}}{36} = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{15}}{i \cdot 18} = \dfrac{\sqrt{30}}{18i}$. Сонымен,

$$\oint_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i \underset{z_1}{шег} f(z) = 2\pi i \frac{\sqrt{30}}{18i} = \frac{\sqrt{30}}{9}\pi.. \quad \text{\textit{Жауабы:}} \ \frac{\sqrt{30}}{9}\pi.$$

19-*есеп*. Интегралды есептеу керек:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+16)}.$$

Шешуі: $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2(z^2+16)}$ функциясының жоғарғы жарты жазықтықта жатқан ерекше нүктелерін табайық. Ол үшін $(z^2+1)^2 = 0$ және $z^2+16=0$ теңдеулерін шешіп, жоғарғы жарты жазықтықта жатқан ерекше нүктелерді: $z_1 = i, \quad z_2 = 4i$ аламыз. Енді $f(z)$ функциясының осы нүктелердегі шегірімдерін табамыз.

1) $z_1 = i.$ $\quad f(z)$ функциясын келесі түрде жазайық:

$$f(z)=\frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2(z^2+16)}=\frac{(z+i)^{-2}(z^2+16)^{-1}}{(z-i)^2}=\frac{\lambda_1(z)}{\mu_1(z)},$$

мұнда, $\lambda_1(i)\neq 0$ және $\mu_1(z)$ функциясы үшін i – екінші ретті нөл (түбір), сондықтан $z_1=i$ нүктесі $f(z)$ функциясының 2-ші ретті полюсі. Одан әрі

$$\underset{i}{шег}\, f(z)=\lim_{z\to i}\left(f(z)(z-i^2)\right)'=\lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z+i)^2(z^2+16)}\right)'=$$

$$=-\lim_{z\to i}\frac{2(z+i)(z^2+16)+(z+i)^2\cdot 2z}{(z+i)^4(z^2+16)^2}=-\frac{4i(-1+16)-8i}{16(-1+16)^2}=$$

$$=-\frac{52i}{16\cdot 225}=-\frac{13}{900}i.$$

2) $z_2=4i.$ $f(z)$ функциясын келесі түрде жазайық:

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)^2(z+4i)(z-4i)}=\frac{(z+1)^{-2}(z+4i)^{-1}}{(z-4i)}=\frac{\lambda_2(z)}{\mu_2(z)}\cdot$$

Мұнда $\lambda_2(4i)\neq 0,$ ал $\mu_2(z)$ үшін $4i$ – бірінші ретті нөл. Демек, $z_2=4i$ нүктесі – $f(z)$ функциясының 1-ші ретті полюсі. Одан әрі

$$\underset{4i}{шег}\, f(z)=\lim_{z\to 4i}f(z)(z-4i)=\lim_{z\to 4i}\frac{1}{(z^2+1)^2(z+4i)}=$$

$$=\frac{1}{(-16+1)^2\cdot 8i}=\frac{-i}{1800}.$$

$f(z)$ функциясының нақты өсте жатқан ерекше нүктелері жоқ болғпндықтан және бөлшектің бөлімінің дәрежесі алымынан 6-ға артық болғандықтан,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2 (x^2+16)} = 2\pi i (\underset{i}{шег}\, f(z) + \underset{4i}{шег}\, f(z)) =$$

$$= 2\pi i\left(\frac{-13i}{900} - \frac{i}{1800}\right) = \pi\left(\frac{13}{450} + \frac{1}{900}\right) = \pi\frac{27}{900} = \pi\frac{3}{100}.$$ *Жауабы:* 0.03π.

20-*есеп.* Интегралды есептеу керек:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{(x^2+1)^2} dx \cdot$$

Шешуі: $f(z) = \dfrac{e^{3iz} - e^{2iz}}{(z^2+1)^2}$ функциясының $\operatorname{Im} z > 0$ жарты жазықтықтағы ерекше нүктелерін және осы нүктелердегі шегерімдерін табамыз. $(z^2+1)^2 = 0$ теңдеуінен $z_{1,2} = \pm i$ аламыз, жоғары жарты жазықтықта $z_1 = i$ ерекше нүкте жатыр. $f(z)$ функциясын келесі түрде жазамыз

$$f(z) = \frac{e^{3iz} - e^{2iz}}{(z^2+1)^2 (z-i)^2} = \frac{(e^{3iz} - e^{2iz})(z+i)^{-2}}{(z-i)^2} = \frac{\lambda(z)}{\mu(z)},$$

мұнда $\lambda(i) \neq 0$ және $z_1 = i$ нүктесі – $\mu(z)$ функциясының 2-ші ретті нөлі, яғни $z_1 = i$ нүктесі – $f(z)$ функциясының 2-ші ретті полюсі. Одан әрі

$$\underset{i}{шег}\; f(z) = \lim_{z\to i} (f(z)(z-i)^2)' = \lim_{z\to i}\left(\frac{e^{3iz} - e^{2iz}}{(z+i)^2}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{(3ie^{3iz} - 2ie^{2iz})(z+i)^2 - (e^{3ix} - e^{2iz})2(z+i)}{(z+i)^4} =$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{(3ie^{3iz} - 2ie^{2iz})(z+i) - 2e^{3iz} + 2e^{2iz}}{(z+)^3} =$$

$$= \frac{(3ie^{-3} - 2ie^{-2})2i - 2e^{-3} + 2e^{-2}}{-8i} = \frac{-6e^{-3} + 4e^{-2} - 2e^{-3} + 2e^{-2}}{-8i} =$$

$$= \frac{+4e^{-3} - 3e^{-2}}{4i}.$$

$R(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2}$ функциясы нақты өсте үзіліссіз және бөлшектің бөлімінің дәрежесі алымының дәрежесінен 4-ке артық болғандықтан,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{(x^2+1)^2} dx = R_0(2\pi i \cdot res_i f(z)) = \operatorname{Re} 2\pi i \frac{4e^{-3} - 3e^{-3}}{4i} =$$

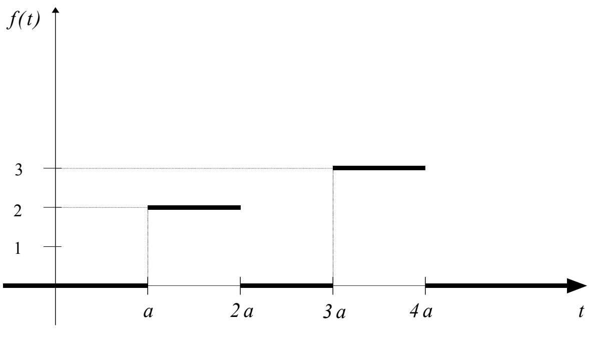
$$= \frac{\pi}{2}(4e^{-3} - 3e^{-2}).$$ *Жауабы:* $\frac{\pi}{2}(4e^{-3} - 3e^{-2})\cdot$

21-*есеп.* $f(t)$ түпнұсқаның берілген сызбасы арқылы оның кескінін табу керек:

Шешуі: Берілген функция мен оның туындылары

$\tau_1 = a,\ \tau_2 = 2a,\ \tau_3 = 3a,\ \tau_4 = 4a$ нүктелерінде үзілісті. Бұл нүктелердегі функцияның секірмелері: $\alpha_1 = 2 - 0 = 2;$

$\alpha_2 = 0 - 2 = -2,\quad \alpha_3 = 3 - 0 = 3,\quad \alpha_4 = 0 - 3 = -3$ тең.



Туындының секірмелері: $\beta_k = 0, \quad k = 1,2,3,4,$ тең, өйткені $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ -ден басқа нүктелерде $f'(t) = 0$. Олай болса, $f(t)$ -ның кескіні

$$F(p) = \sum_{k=1}^{4} e^{-p\tau k}\left(\frac{\alpha_k}{p} + \frac{\beta_k}{p^2}\right) = e^{-pa}\frac{2}{p} - e^{-2pa}\frac{2}{p} + e^{-3pa}\frac{3}{p} - e^{-4pa}\frac{3}{p}.$$

Жауабы: $\dfrac{2e^{-pa} - 2e^{-2pa} + 3e^{-3pa} - 3e^{-4pa}}{p}$.

22-*есеп.* Берілген $F(p) = \dfrac{3p-2}{(p-1)(p^2-6p+10)}$ бейнесі бойынша оның түпнұсқасын табу керек.

Шешуі: Берілген функцияны қарапайым бөлшектердің қосындысына келтіреміз:

$$\frac{3p-2}{(p-1)(p^2-6p+10)} = \frac{A}{p-1} + \frac{Bp+C}{p^2-6p+10}.$$

$$3p-2 = A(p^2-6p+10) + (Bp+C)(p-1),$$

$$p = 1 \Rightarrow 1 = A(1-6+10); \ 1 = 5A, \ A = 0,2.$$

A-ның мәнін орнына қойып, *x*-тің бірдей дәрежелерінің коэффициенттерін теңестіреміз:

$$3p-2 = 0,2p^2 - 1,2p + 2 + Bp^2 - Bp + Cp,$$

$$-2 = 2 - C$$

$$3 = -1,2 - B + C.$$

Бұдан $C = 4, \ B = -0,2$.

Сондықтан $F(p) = \dfrac{0,2}{p-1} + \dfrac{-0,2p+4}{p^2-6p+10}$.

Екінші бөлшектің бөліміндегі өрнектен толық квадрат бөлеміз: $p^2-6p+10=p^2-6p+9+1=(p-3)^2+1$, содан соң $F(p)$ функциясын келесі түрде жазамыз:

$$F(p)=\frac{0{,}2}{p-1}+\frac{-0{,}2(p-3)-0{,}6+4}{(p-3)^2+1}=\frac{0{,}2}{p-1}-0{,}2\frac{p-3}{(p-3)^2+1}+\frac{3{,}6}{(p-3)^2+1}$$

Енді $e^{at}\leftrightarrow\frac{1}{p-a}$, $\quad e^{at}\cos\omega t\leftrightarrow\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$;

$e^{at}\sin\omega t\leftrightarrow\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$ сәйкестіктерін пайдалана отырып,

$F(p)\leftrightarrow 0{,}2e^{t}-0{,}2e^{3t}\cos t+3{,}6e^{3t}\sin t$ аламыз.

Жауабы: $0{,}2e^{t}=0{,}2e^{3t}\cos t+3{,}6e^{3t}\sin t.$

23-*есеп.* $y^4+4y'+4y=\frac{e^{-2t}}{(1+2t)^2}$ дифференциалдық теңдеуінің $y(0)=0,\quad y'(0)=0$ бастапқы шарттарын қанағаттандыратын шешімдерін табу керек.

Шешуі: $y_1''+4y_1'+4y_1=1$ түріндегі көмекші теңдеудің шешімін табамыз. y_1-дің кескінін $Y(p)$ арқылы белгілейміз, онда $y_1'\leftrightarrow pY(p),\quad y_1''\leftrightarrow p^2Y(p).$ Операторлық теңдеуге өтеміз және оны шешеміз: $p^2Y(p)+4pY(p)+4Y(p)=\frac{1}{p}$;

$Y(p)(p^2+4p+4)=\frac{1}{p}$; $Y(p)=\frac{1}{p(p+2)^2}$. Түпнұсқаны табу үшін, алынған бөлшекті қарапайым бөлшектердің қосындысына келтіреміз: $1=A(p+2)^2+Bp(p+2)+Cp.$

$p=0$ болса, $1=4A$, яғни $A=0{,}25$.

$p=-2$ болса, $1=-2C$, яғни $C=-0{,}5$.

Енді p^2 дәрежесінің коэффициенттерін теңестіреміз: $1=0{,}25p^2+p+1+Bp^2+2Bp-0{,}5p$.

$$p^2\Big|0=0{,}25+B\Rightarrow B=-0{,}25.$$

Сонымен, $Y(p)=\frac{0{,}25}{p}-\frac{0{,}25}{p+2}-\frac{0{,}5}{(p+2)^2}$.

Одан әрі $e^{at}\leftrightarrow\frac{1}{p-a}$, $te^{at}\leftrightarrow\frac{1}{(p-a)^2}$ сәйкестіктерін және сызықтық қасиетті пайдаланып, $Y(p)$ кескіннің түпнұсқасын табамыз: $y_1(t)=0{,}25-0{,}25e^{-2t}-0{,}5te^{-2t}$. Бастапқы теңдеудің $y(t)$ шешімін табу үшін Дюамель формуласын пайдаланамыз: $y(t)=\int\limits_0^t y_1'(t-\tau)f(\tau)d\tau$.

$$y_1'=0{,}5e^{-2t}-0{,}5e^{-2t}+te^{-2t}=te^{-2t},\ y_1'(t-\tau)=(t-\tau)e^{-2t+2\tau},$$

$$y(t)=\int_0^t(t-\tau)e^{-2t+2\tau}\frac{l^{-2\tau}}{(1+2\tau)^2}d\tau=e^{-2t}\int_0^t\frac{t-\tau}{(1+2\tau)^2}d\tau=$$

$$=-te^{-2t}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{(2\tau+1)}\Big|_0^t-e^{-2t}\int_0^t\left(\frac{\tau+\frac{1}{2}}{(1+2\tau)^2}-\frac{1/2}{(1+2\tau)^2}\right)d\tau=$$

$$=-\frac{t}{2}e^{-2t}\,\frac{1}{2t+1}+\frac{t}{2}-e^{-2t}\left(\frac{1}{2}\int_0^t\frac{d\tau}{(2\tau+1)}-\frac{1}{2}\int_0^t\frac{d\tau}{(2\tau+1)^2}\right)=$$

$$=-\frac{t}{2}\frac{e^{2t}}{2t+1}+\frac{te^{-2t}}{2}-\frac{e^{-2t}}{4}\left(\ln(2\tau+1)\Big|_0^t+\frac{1}{2\tau+1}\Big|_0^t\right)=$$

$$=-\frac{te^{-2t}}{2(2\tau+1)}+\frac{te^{-2t}}{2}-\frac{e^{-2t}\ln(2t+1)}{4}-\frac{e^{-2t}}{4(2t+1)}+\frac{e^{-2t}}{4}=$$

$$=e^{-2t}\left(\left(\frac{-2t}{4(2t+1)}-\frac{1}{4(2t+1)}\right)+\frac{1}{4}+\frac{t}{2}-\frac{\ln(2t+1)}{4}\right)=$$

$$=e^{-2t}\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{t}{2}-\frac{\ln(2t+1)}{4}\right)=e^{-2t}\left(\frac{t}{2}-\frac{\ln(2t+1)}{4}\right)$$

Жауабы: $y(t)=e^{-2t}\left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{\ln(2t+1)}{4}\right)$.

24-*есеп.* Амалдық әдіспен Коши есебін шешу керек:

$$y''-3y'+2y=2e^t\cos\frac{t}{2},\qquad y(0)=1, y'(0)=0\,.$$

Шешуі: $e^{\alpha t}\cos\omega t\leftrightarrow\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$ сәйкестігін

Пайдалансақ, $2e^t\cos\dfrac{t}{2}\ \leftrightarrow\ 2\dfrac{p-1}{(p-1)^2+1/4}$ аламыз.

$y(t)$-ның кескінін $Y(p)$ арқылы белгілейміз. Онда $y'(t)\leftrightarrow pY(p)-y(0)=pY(0)-1,$

$$y''(t) \leftrightarrow p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2 Y(p) - p \cdot$$

Операторлық теңдеуге өтеміз және оны шешеміз:

$$p^2 Y(p) - p - 3PY(p) + 3 + 2Y(p) = 2\frac{p-1}{(p-1)^2 + \frac{1}{4}},$$

$$Y(p)(p^2 - 3p + 2) = 2\frac{p-1}{(p-1)^2 + \frac{1}{4}} + p - 3,$$

$$Y(p) = \frac{2(p-1)}{\left[(p-1)^2 + \frac{1}{4}\right](p-1)(p-2)} + \frac{p-3}{(p-1)(p-2)},$$

$$Y(p) = \frac{2}{\left[(p-1)^2 + \frac{1}{4}\right](p-2)} + \frac{p-3}{(p-1)(p-2)}.$$

Алынған әрбір бөлшекті қарапайым бөлшектердің қосындысына келтіреміз:

1) $$\frac{2}{\left[(p-1)^2 + \frac{1}{4}\right](p-2)} = \frac{Ap+B}{(p-1)^2 + \frac{1}{4}} + \frac{C}{p-2};$$

$$2 = (Ap+B)(p-2) + C\left[(p-1)^2 + \frac{1}{4}\right];$$

$p = 2$ áîëñà, $2 = C \cdot \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad C = 1{,}6.$

$$2 = Ap^2 - 2Ap + Bp - 2B + 1{,}6p^2 - 3{,}2p + 2$$

$$\begin{array}{l|l} p^0 & 2 = -2B + 2 \qquad \Rightarrow B = 0 \\ p^1 & 0 = -2A + B - 3{,}2 \ \Rightarrow A = -1{,}6. \end{array}$$

Сонымен, $$\frac{2}{\left((p-1)^2+\frac{1}{4}\right)(p-2)}=\frac{-1{,}6p}{\left((p-1)^2+\frac{1}{4}\right)}+\frac{1{,}6}{p-2}.$$

2) $$\frac{p-3}{(p-1)(p-2)}=\frac{D}{p-1}+\frac{E}{p-2}; \qquad p-3=D(p-2)+E(p-1).$$

$p=2$ болса, $-1=E$.

$p=1$ болса, $-2=-D \;\Rightarrow\; D=2$.

Демек, $\frac{p-3}{(p-1)(p-2)}=\frac{2}{p-1}-\frac{1}{p-2}$. Ақырында,

$$Y(p)=\frac{-1{,}6p}{(p-1)^2+\frac{1}{4}}+\frac{1{,}6}{p-2}+\frac{2}{p-1}-\frac{1}{p-2}=\frac{-1{,}6p+1{,}6}{(p-1)^2+\frac{1}{4}}-\frac{1{,}6}{(p-1)^2+\frac{1}{4}}+$$

$$+\frac{0{,}6}{p-2}+\frac{2}{p-1}=-1{,}6\frac{p-1}{(p-1)^2+\frac{1}{4}}-3{,}2\frac{\frac{1}{2}}{(p-1)^2+\frac{1}{4}}+\frac{0{,}6}{p-2}+\frac{2}{p-1}.$$

Енді $\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}\leftrightarrow e^{at}\cos\omega t$, $\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}\leftrightarrow e^{at}\sin\omega t$, $\frac{1}{p-a}\leftrightarrow e^{at}$ сәйкестіктерін және сызықтық қасиетті пайдаланып, түпнұсқаны табамыз:

$$y(t)=-1{,}6e^t\cos\frac{1}{2}t-3{,}2e^t\sin\frac{1}{2}t+0{,}6e^{2t}+2e^t.$$

Жауабы: $-1{,}6e^t\cos\frac{1}{2}t-3{,}2e^t\sin\frac{1}{2}t+0{,}6e^{2t}+2e^t$.

25-*есеп.* Массасы m материалдық нүктеге **v** жылдамдығына пропорционал $R=kv$ кедергі күш әсер етеді. Егер нүктенің бастапқы жылдамдығы v_0 болса, ол шектеусіз уақыт ішінде қанша қашықтыққа орын ауыстырады ($k = 10m.$,

$v_0 = 1$ м/сек.) ?

Шешуі: t уақыт кезеңіндегі нүктенің координатын $y(t)$ арқылы белгілейміз. $y(0)$ деп 0, ал $y'(0) = v_0 = 1$ деп аламыз. Нүктенің қозғалу заңын Ньютонның 2-ші заңынан $-R = m \cdot y''$ табамыз:

$$-kv = my''; \quad -10my' = my''.$$

Нәтижесінде Коши есебіне келеміз:

$$y'' + 10y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y''(0) = 1.$$

$y(t)$ -нің кескінін $Y(p)$ арқылы белгілейік. Онда

$$y' \leftrightarrow pY(p) - y(0) = pY(p);$$

$$y'' \leftrightarrow p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 1.$$

Бұдан келесі теңдеуді аламыз:

$$p^2Y(p) - 1 + 10pY(p) = 0; \qquad Y(p)(p^2 + 10p) = 1;$$

$$Y(p) = \frac{1}{p^2 + 10p}.$$

Бөлшекті қарапайым бөлшектердің қосындысына келтіреміз:

$$\frac{1}{p(p+10)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+10}; \qquad 1 = A(p+10) + Bp;$$

$$p = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = 10A \quad \Rightarrow \quad A = 0{,}1,$$

$$p = -10 \Rightarrow 1 = -10B \Rightarrow B = -0{,}1.$$

Сондықтан $Y(p) = \frac{0{,}1}{p} - \frac{0{,}1}{p+10}$.

Енді $\frac{1}{p-a} \leftrightarrow e^{at}$ сәйкестігін және сызықтық қасиетті пайдаланып, $y(t) = 0{,}1 - 0{,}1e^{-10t}$ аламыз.

Шектеусіз уақыт ішіндегі нүктенің орын ауыстыру қашықтығы келесі шек арқылы табылады:

$\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to\infty}(0{,}1 - 0{,}1e^{-10t}) = 0{,}1$. *Жауабы:* 0,1м.

26-есеп. Келесі дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешу керек: $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = 3x; \end{cases}$ $x(0) = 0,$ $y(0) = 1$.

Шешуі: $x(t)$-нің кескінін $X(p)$ арқылы, ал $y(t)$-нің кескінін $Y(p)$ арқылы белгілесек, онда

$$\dot{x}(t) \leftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p).$$

$$\dot{y}(t) \leftrightarrow pY(p) - y(0) = pY(p) - 1.$$

Нәтижесінде, $\begin{cases} pX = -2X + 4 \\ pY - 1 = 3X \end{cases}$; $\begin{cases} (p+2)X - Y = 0 \\ -3X + pY = 1 \end{cases}$

жүйесін аламыз. Оны Крамер ережесі бойынша шешеміз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (p+2) & -1 \\ -3 & p \end{vmatrix} = p(p+2) - 3 = p^2 + 2p - 3;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & p \end{vmatrix} = 1; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} (p+2) & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = p + 2;$$

$$X = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{p^2 + 2p - 3}; \qquad Y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{p+2}{p^2 + 2p - 3}.$$

Бұл бөлшектердің әрқайсысын қарапайым бөлшектердің қосындысына келтіреміз:

а) $X = \dfrac{1}{p^2 + 2p - 3} = \dfrac{1}{(p-1)(p+3)} = \dfrac{A}{p-1} + \dfrac{B}{p+3}$;

$$1 = A(p+3) + B(p-1).$$

$$p = 1 \Rightarrow 1 = 4A \Rightarrow A = 0{,}25.$$

$$p = -3 \Rightarrow 1 = -4B \Rightarrow B = -0{,}25.$$

Сондықтан $X(p) = \dfrac{0{,}25}{p-1} - \dfrac{0{,}25}{p+3}$. Бұл кескіннің түпнұсқасы $X(p) \leftrightarrow x(t) = 0{,}25e^t - 0{,}25e^{-3t}$.

ә) $Y = \dfrac{p+2}{p^2 + 2p - 3} = \dfrac{p+2}{(p-1)(p+3)} = \dfrac{A}{p-1} + \dfrac{B}{p+3}$;

$$p + 2 = A(p+3) + B(p-1).$$

$$p = 1 \Rightarrow 3 = 4A \Rightarrow A = 0{,}75.$$

$$p = -3 \Rightarrow 1 = -4B \Rightarrow B = -0{,}25.$$

Сондықтан $Y(p) = \dfrac{0{,}75}{p-1} + \dfrac{0{,}25}{p+3}$. Бұл кескіннің түпнұсқасы $Y(p) \leftrightarrow y(t) = 0{,}75e^t + 0{,}25e^{-3t}$

Жауабы: $\begin{cases} x(t) = 0{,}25e^t - 0{,}25e^{-3t} \\ y(t) = 0{,}75e^t + 0{,}25e^{-3t} \end{cases}$.

ТИПТІК ЕСЕПТЕР

1-есеп. Түбірдің барлық мәндерін табу керек.

1.1. $\sqrt[4]{-1}$. **1.2.** $\sqrt[4]{\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$.

1.3. $\sqrt[3]{1}$. **1.4.** $\sqrt[3]{i}$.

1.5. $\sqrt[4]{1}$. **1.6.** $\sqrt[4]{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}}$.

1.7. $\sqrt[3]{-1}$. **1.8.** $\sqrt[3]{-i}$.

1.9. $\sqrt[4]{-16}$. **1.10.** $\sqrt[4]{\dfrac{1+i\sqrt{3}}{32}}$.

1.11. $\sqrt[3]{8}$. **1.12** $\sqrt[3]{8i}$.

1.13. $\sqrt[4]{16}$. **1.14.** $\sqrt[4]{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{32}}$

1.15. $\sqrt[3]{-8}$ **1.16.** $\sqrt[3]{-8i}$.

1.17. $\sqrt[4]{-1/16}$. **1.18.** $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$.

1.19. $\sqrt[3]{1/8}$. **1.20.** $\sqrt[3]{i/8}$.

1.21. $\sqrt[4]{1/16}$. **1.22.** $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$.

1.23. $\sqrt[3]{-1/8}$. **1.24.** $\sqrt[3]{-1/8}$.

1.25. $\sqrt[4]{-128+i128\sqrt{3}}$. **1.26.** $\sqrt[3]{27}$.

1.27. $\sqrt[4]{1/256}$.

1.28. $\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}$.

1.29. $\sqrt[3]{i/27}$.

1.30. $\sqrt[4]{256}$.

1.31. $\sqrt[3]{-i27}$.

2-есеп. Алгебралық түрде жазу керек.

2.1. sin(π/4+2i).

2.2. cos(π/6+2i).

2.3. Ln 6.

2.4. sh(2+πi/4).

2.5. ch(2+πi/2).

2.6. ln(1+i).

2.7. sin(π/3+i).

2.8. cos(π/4+i).

2.9. ln($\sqrt{3}$ +i).

2.10. sh(1+πi/2).

2.11. ch(1-πi).

2.12. ln(1+ $\sqrt{3}$ i).

2.13. ln(-1+i).

2.14. cos(π/4-2i).

2.15. sin(π/2-5i).

2.16. sh(3+πi/4).

2.17. ch(1+πi/3).

2.18. ln(-1-i).

2.19. sin(π/6-3i).

2.20. cos(π/3-3i).

2.21. ln(1-i).

2.22. sh(1-πi/3).

2.23. ch(2-πi/6).

2.24. 1^{2i}.

2.25. sin(π/3-2i).

2.26. cos(π/6-i).

2.27. i^{3i}.

2.28. sh(2-πi).

2.29. $(-i)^{5i}$.

2.30. $(-1)^{4i}$.

2.31. ch(3+πi/4).

3-есеп. Алгебралық түрде жазу керек.

3.1. $(-1+i\sqrt{3})^{-3i}$.

3.2. arcsin 4.

3.3. arch(-2).

3.4. $\text{arctg}\left(\dfrac{-2\sqrt{3}+3i}{3}\right)$.

3.5. $\text{arcth}\left(\dfrac{3-4i}{5}\right)$.

3.6. $\text{arcctg}\left(\dfrac{4+3i}{5}\right)$.

3.7. $\text{arth}\left(\dfrac{3+i2\sqrt{3}}{3}\right)$.

3.8. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-i\right)$.

3.9. $\text{sh}\left(1-\dfrac{\pi}{2}i\right)$.

3.10. $(-1-i)^{4i}$.

3.11. sin(π/4+i).

3.12. arch(3i).

3.13. $\text{arctg}\left(\dfrac{3+4i}{5}\right)$.

3.14. $\text{arch}\left(\dfrac{8+i3\sqrt{3}}{7}\right)$.

3.15. $\text{arcth}\left(\dfrac{3\sqrt{3}-8i}{7}\right)$.

3.16. $\text{arth}\left(\dfrac{4-3i}{5}\right)$.

3.17. $\text{arctg}\left(\dfrac{-2\sqrt{3}+3i}{7}\right)$.

3.18. $\text{arcth}\left(\dfrac{3-i2\sqrt{3}}{7}\right)$.

3.19. arcccos(-5).

3.20. arsh(-4i).

3.21. $(-\sqrt{3}+i)^{-6i}$.

3.22. $\omega=\sin\dfrac{i}{z}$, *мұндағы* $z=\dfrac{8+2\pi i}{\pi^2+16}$.

3.23. $\omega=e^{\frac{1}{z}}$, *мұндағы* $z=\dfrac{4+2\pi i}{\pi^2+4}$.

3.24. $\text{arcctg}\left(\dfrac{2\sqrt{3}+3i}{7}\right)$.

3.25. $\operatorname{arth}\left(\frac{3+i2\sqrt{3}}{7}\right)$.

3.26. $\operatorname{arcth}\left(\frac{4+3i}{5}\right)$.

3.27. ω =ch iz, *мұндағы* z=π/4+2i.

3.28. $\operatorname{arctg}\left(\frac{3\sqrt{3}+8i}{7}\right)$.

3.29. arccos(-3i).

3.30. $(4\text{-}3i)^{i}$.

3.31. $(-12+5i)^{-i}$.

4-есеп. Теңсіздікпен берілген аймақты сызу керек

4.1. |z-1|≤1, |z+1|>2.

4.2. |z+i|≥1, |z|<2.

4.3. |z-i|≤2, Re z>1.

4.4. |z+1|≥1, |z+i|<1.

4.5. |z+1|<1, |z-i|≤1.

4.6. |z+i|≤2, |z-i|>2.

4.7. |z-1-i|≤1, Im z>1, Re z≥1.

4.8. |z-1+i|≥1, Re z<1, Im z≤-1.

4.9. |z-2-i|≤2, Re z≥3, Im z<1.

4.10. |z-1-i|≥1, 0≤Rez<2, 0<Imz≤2.

4.11 $|z+i|<2, \quad 0<\operatorname{Re} z\leq 1.$

4.12 $|z-i|\leq 1, \quad 0<\arg z<\pi/4.$

4.13 $|z-i|\leq 2, \quad 0<\operatorname{Im} z<2.$

4.14 $|z+i|>1, \quad -\pi/4\leq \arg z<0.$

4.15 $|z-1-i|<1, \quad |\arg z|\leq \pi/4.$

4.16 $|z|<2, \quad -\pi/4\leq \arg(z-1)\leq \pi/4.$

4.17 $|z| \le 1, \quad \arg(z+i) > \pi/4.$

4.18 $1 < |z-i| \le 2, \quad \operatorname{Im} z \ge 0, \operatorname{Re} z < 1.$

4.19 $1 \le |z-i| < 2, \quad \operatorname{Re} z \le 0, \operatorname{Im} z > 1.$

4.20 $|z| < 2, \quad \operatorname{Re} z \ge 1, \arg z < \pi/4$

4.21 $|z| > 1 \quad -1 < \operatorname{Im} z \le 1, \ 0 < \operatorname{Re} z \le 2.$

4.22 $|z-1| > 1, \quad -1 \le \operatorname{Im} z < 0, \ 0 \le \operatorname{Re} z < 3.$

4.23 $|z+i| < 1, \quad -3\pi/4 \le \arg z \le -\pi/4.$

4.24 $|z-i| \le 1, \quad -\pi/2 < \arg(z-i) < \pi/4.$

4.25 $z\bar{z} < 2, \quad \operatorname{Re} z \le 1, \operatorname{Im} z > -1.$

4.26 $z\bar{z} \le 2, \quad \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z > -1.$

4.27 $1 < z\bar{z} < 2, \quad \operatorname{Re} z > 0, \ 0 \le \operatorname{Im} z \le 1.$

4.28 $|z-1| < 1, \quad \arg z \le \pi/4, \arg(z-1) > \pi/4.$

4.29 $|z-i| < 1, \quad \arg z \ge \pi/4, \arg(z+1-i) \le \pi/4.$

4.30 $|z-2-i| \ge 1, \quad 1 \le \operatorname{Re} z < 3, \ 0 < \operatorname{Im} z \le 3.$

4.31 $|\operatorname{Re} z| \le 1, \quad |\operatorname{Im} z| < 2.$

5-есеп. Қисықтың трін анықтау керек

5.1 $z = 3\sec t + i2tgt.$ **5.2** $z = 2\sec t - i3tgt.$

5.3 $z = -\sec t + i3tgt.$ **5.4** $z = 4tgt - i3\sec t.$

5.5 $z = 3tgt + i4\sec t.$ **5.6** $z = -4tgt - i2\sec t.$

5.7 $z = 3\cos ect + i3ctgt.$ **5.8** $z = 4\cos ect - i2ctgt.$

5.9 $z = ctgt - i2\cos ect.$ **5.10** $z = -ctgt + i3\cos ect.$

5.11 $z = 3ch2t + i2sh2t.$ **5.12** $z = 2ch3t - i3sh3t.$

5.13 $z = 5sh4t + i4ch4t.$ **5.14** $z = -4sh5t - i5ch5t.$

5.15 $z = \dfrac{2}{ch2t} + i4th2t.$ **5.16** $z = \dfrac{4}{ch4t} + i2th4t.$

5.17 $z = th5t + \dfrac{5i}{ch5t}.$ **5.18** $z = \dfrac{1}{sht} - icth t.$

5.19 $z = 2e^{it} + \dfrac{1}{2e^{it}}.$ **5.20** $z = 3e^{it} - \dfrac{1}{2e^{it}}.$

5.21 $z = -2e^{it} + \dfrac{1}{e^{it}}.$ **5.22** $z = 2e^{2it} - \dfrac{1}{e^{2it}}.$

5.23 $z = \dfrac{1+t}{1-t} + i\dfrac{2+t}{2-t}.$ **5.24** $z = \dfrac{t-1+it}{t(t-1)}.$

5.25 $z = \dfrac{1+i}{1-t} + i\dfrac{t}{1-t}(2-4i).$ **5.26** $z = \dfrac{2+t}{2-t} + i\dfrac{1+t}{1-t}.$

5.27 $z = t^2 + 4t + 20 - i(t^2 + 4t + 4).$

5.28 $z = t^2 + 2t + 5 + i(t^2 + 2t + 1).$

5.29 $z = 2t^2 + 2t + 1 - i(t^2 + t + 4).$

5.30 $z = t - 2 + i(t^2 - 4t + 5).$

5.31 $z = t^2 - 2t + 3 + i(t^2 - 2t + 1).$

6-есеп. Берілген нақты $u(x, y)$ немесе жорамал $v(x, y)$ бөлігі және $f(z_0)$ мәні бойынша z_0 нүктесінің маңайында аналитикалық $f(z)$ функциясын тұрғызу керек.

6.1 $u = x^2 - y^2 + x, f(0) = 0.$ **6.2** $u = x^3 - 3xy^2 + 1, f(0) = 1.$

6.3 $v = e^x(y\cos y + x\sin y), f(0) = 0.$

6.4 $u = x^2 - y^2 - 2y, f(0) = 0.$

6.5 $u = \dfrac{e^{2x} + 1}{e^x}\cos y, f(0) = 2.$ **6.6** $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2},\ f(1) = 1 + i.$

6.7 $v = e^{-y}\sin x + y, f(0) = 1.$ **6.8** $v = e^x\cos y, f(0) = 1 + i.$

6.9 $v = -\dfrac{y}{(x+1)^2 + y^2}, f(0) = 1.$

6.10 $v = y - \dfrac{y}{x^2 + y^2}, f(1) = 2.$

6.11 $u = e^{-y}\cos x, f(0) = 1.$ **6.12** $u = y - 2xy, f(0) = 0.$

6.13 $v = x^2 - y^2 + 2x + 1, f(0) = i.$

6.14 $u = x^2 - y^2 - 2x + 1, f(0) = 1.$

6.15 $v = 3x^2y - y^3 - y, f(0) = 0.$

6.16 $v = 2xy + y, f(0) = 0.$

6.17 $v = 3x^2y - y^3, f(0) = 1.$

6.18 $u = e^x(x\cos y - y\sin y), f(0) = 0.$

6.19 $v = 2xy + 2x, f(0) = 0.$

6.20 $u = 1 - \sin y \cdot e^x, f(0) = 1 + i.$

6.21 $v = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{x}}\sin y, f(0)=2.$

6.22 $v = 1-\dfrac{y}{x^2+y^2}, f(1)=1+i.$

6.23 $u = e^{-y}\cos x + x, f(0)=1.$ **6.24** $v = e^{-y}\sin x, f(0)=1.$

6.25 $u = \dfrac{x+1}{(x=1)^2+y^2}, f(0)=1.$

6.26 $u = x/(x^2+y^2)+x, f(1)=2.$

6.27 $v = x^2-y^2-x, f(0)=0.$ **6.28** $u = -2xy-2y, f(0)=i.$

6.29 $v = 2xy-2y, f(0)=1.$

6.30 $u = x^3-3xy^2-x, f(0)=0.$

6.31 $v = 2xy+x, f(0)=0.$

7-есеп. Комплек айнымалды функцияны берілген қисық бойынша интегралдау керек.

7.1 $\int\limits_{AB}\bar{z}^2dz;\quad AB:\{y=x^2; z_A=0, z_B=1+i\}.$

7.2 $\int\limits_{L}(z+1)e^z dz;\quad L:\{|z|=1; \operatorname{Re} z\ge 0\}.$

7.3 $\int\limits_{AB}\operatorname{Im} z^3 dz;\ z_A=0, z_B=2+2i,\ AB-$ кесінді.

7.4 $\int\limits_{AB}(z^2+7z+1)dz;\ z_A=1, z_B=1-i,\quad AB-$ кесінді.

7.5 $\int\limits_{ABC} |z|dz;\ z_A = 0, z_B = -1+i, z_C = 1+i,\ ABC -$ сынық сызық.

7.6 $\int\limits_{AB} (12z^5 + 4z^3 + 1)dz;\ z_A = 1, z_B = i,\ AB -$ кесінді.

7.7 $\int\limits_{AB} \bar{z}^2 dz;\ z_A = 0, z_B = 1+i,\ \ AB -$ кесінді.

7.8 $\int\limits_{ABC} z^3 e^{z^4} dz;\ z_A = i, z_B = 1, z_C = 0,\ ABC -$ сынық сызық.

7.9 $\int\limits_{ABC} \operatorname{Re}\frac{\bar{z}}{z} dz; AB : \{|z| = 1, \operatorname{Im} z \ge 0\},\ z_B = 1, z_C = 2,$

$BC -$ кесінді.

7.10 $\int\limits_{ABC} (z^2 + \cos z)dz;\ z_A = 0, z_B = 1, z_C = i,$

$ABC -$ сынық сызық.

7.11 $\int\limits_{L} \frac{\bar{z}}{z} dz;\ L:\ \{1 < |z| < 2, \operatorname{Re} z > 0\} -$ аймағының шекарасы.

7.12 $\int\limits_{ABC} (chz + \cos iz)dz;\ z_A = 0, z_B = -1, z_C = i,\ ABC -$ сынық сызық.

7.13 $\int\limits_{L} |z|\bar{z}dz; L : \{|z| = 4, \operatorname{Re} z \ge 0\}.$

7.14 $\int\limits_{L} (chz + z)dz; L : \{|z| = 1, \operatorname{Im} z \le 0\}$.

7.15 $\int\limits_{L} |z| \operatorname{Re} z^2 dz; L : \{|z| = R, \operatorname{Im} z \ge 0\}$.

7.16 $\int\limits_{AB} (3z^2 + 2z)dz; AB : \{y = x^2; z_A = 0, z_B = 1 + i\}$.

7.17 $\int\limits_{L} z \operatorname{Re} z^2 dz; L : \{|z| = R, \operatorname{Im} z \ge 0\}$.

7.18 $\int\limits_{ABC} (z^2 + 1)dz;\ z_A = 0, z_B = -1 + i, z_C = i,\ ABC -$ сынық сызық.

7.19 $\int\limits_{AB} e^{|z|^2} \operatorname{Im} z dz;\ z_A = 1 + i, z_B = 0,\ AB -$ кесінді.

7.20 $\int\limits_{L} (\sin iz + z)dz; L : \{|z| = 1, \operatorname{Re} z \ge 0\}$.

7.21 $\int\limits_{AB} z \operatorname{Re} z^2 dz;\ z_A = 0, z_B = 1 + 2i,\ AB -$ кесінді.

7.22 $\int\limits_{AB} (2z + 1)dz; AB : \{y = x^3; z_A = 0, z_B = 1 + i\}$.

7.23 $\int\limits_{ABC} z\bar{z} dz;\ AB : \{|z| = 1, \operatorname{Re} z \ge 0, \operatorname{Im} z \ge 0\},\ z_B = 1, z_C = 0,$

$BC -$ кесінді.

7.24 $\int\limits_L (\cos iz + 3z^2)dz; L:\{|z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

7.25 $\int\limits_L |z|dz; L:\{|z| = \sqrt{2}, 3\pi/4 \leq \arg z \leq 5\pi/4\}$.

7.26 $\int\limits_{ABC} (z^9 + 1)dz;\ z_A = 0, z_B = 1 + i, z_C = i,$

$ABC -$ сынық сызық.

7.27 $\frac{1}{2i} \int\limits_{|z|=R} \bar{z}dz.$

7.28 $\int\limits_{ABC} (\sin z + z^5)dz;\ z_A = 0, z_B = 1, z_C = 2i,$

$ABC -$ сынық сызық.

7.29 $\int\limits_{AB} z \operatorname{Im} z^2 dz;\ \ z_A = 0, z_B = 1 + i,\ \ AB -$ кесінді.

7.30 $\int\limits_L (z^3 + \sin z)dz; L:\{|z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$.

7.31 $\int\limits_L z|z|dz; L:\{|z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

8-есеп. Берілген функцияның z дәрежесі бойынша барлық Лоран қатарларын табу керек.

8.1 $\frac{z-2}{2z^3 + z^2 - z}$. **8.2** $\frac{z-4}{z^4 + z^3 - 2z^2}$.

8.3 $\dfrac{3z-18}{2z^3+3z^2-9z}$.

8.4 $\dfrac{2z-16}{z^4+2z^3-8z^2}$.

8.5 $\dfrac{5z-50}{2z^3+5z^2-25z}$.

8.6 $\dfrac{3z-36}{z^4+3z^3-18z^2}$.

8.7 $\dfrac{7z-98}{2z^3+7z^2-49z}$.

8.8 $\dfrac{4z-64}{z^4+4z^3-32z^2}$.

8.9 $\dfrac{9z-162}{2z^3+9z^2-81z}$.

8.10 $\dfrac{5z-100}{z^4+5z^3-50z^2}$.

8.11 $\dfrac{11z-242}{2z^3+11z^2-121z}$.

8.12 $\dfrac{6z-144}{z^4+6z^3-72z^2}$.

8.13 $\dfrac{13z-338}{2z^3+12z^2-169z}$.

8.14 $\dfrac{7z-196}{z^4+7z^3-98z^2}$.

8.15 $\dfrac{15z-450}{2z^3+15z^2-225z}$.

8.16 $\dfrac{8z-256}{z^4+8z^3-128z^2}$.

8.17 $\dfrac{z+2}{z+z^2-2z^3}$.

8.18 $\dfrac{z+4}{2z^2+z^3-z^4}$.

8.19 $\dfrac{3z+18}{9z+3z^2-2z^3}$.

8.20 $\dfrac{2z+16}{8z^2+2z^3-z^4}$.

8.21 $\dfrac{5z+50}{25z+5z^2-2z^3}$.

8.22 $\dfrac{3z+36}{18z^2+3z^3-z^4}$.

8.23 $\dfrac{7z+98}{49z+7z^2-2z^3}$.

8.24 $\dfrac{4z+64}{32z^2+4z^3-z^4}$.

8.25 $\dfrac{9z+162}{81z+9z^2-2z^3}$.

8.26 $\dfrac{5z+100}{50z^2+5z^3-z^4}$.

8.27 $\dfrac{11z+242}{121z+11z^2-2z^3}$.

8.28 $\dfrac{6z+144}{72z^2+6z^3-z^4}$.

8.29 $\dfrac{13z+338}{169z+13z^2-2z^3}$.

8.30 $\dfrac{7z+196}{98z^2+7z^3-z^4}$.

8.31 $\dfrac{15z+450}{225z+15z^2-2z^3}$.

9-есеп. Берілген функцияның z-z_0 дәрежесі бойынша барлық Лоран қатарларын табу керек.

9.1 $\dfrac{z+1}{z(z-1)}, z_0=1+2i.$

9.2 $\dfrac{z+1}{z(z-1)}, z_0=2-3i.$

9.3 $\dfrac{z+1}{z(z-1)}, z_0=-3-2i.$

9.4 $\dfrac{z+1}{z(z-1)}, z_0=-2+i.$

9.5 $\dfrac{z-1}{z(z+1)}, z_0=1+3i.$

9.6 $\dfrac{z-1}{z(z+1)}, z_0=2-i.$

9.7 $\dfrac{z-1}{z(z+1)}, z_0=-1+2i.$

9.8 $\dfrac{z-1}{z(z+1)}, z_0=-2-3i.$

9.9 $\dfrac{z+3}{z^2-1}, z_0=2+i.$

9.10 $\dfrac{z+3}{z^2-1}, z_0=3-i.$

9.11 $\dfrac{z+3}{z^2-1}, z_0=-2+3i.$

9.12 $\dfrac{z+3}{z^2-1}, z_0=-2-2i.$

9.13 $\dfrac{z}{z^2+1}, z_0=2+i.$

9.14 $\dfrac{z}{z^2+1}, z_0=1-2i.$

9.15 $\dfrac{z}{z^2+1}, z_0=-3+i.$

9.16 $\dfrac{z}{z^2+1}, z_0=-3-2i.$

9.17 $4\cdot\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}, z_0=-2+2i.$

9.18 $4\cdot\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}, z_0=1-3i.$

9.19. $\dfrac{4(z+2)}{(z-1)(z+3)}$ **, z_0=-3-i.**

9.20. $\dfrac{4(z+2)}{(z-1)(z+3)}$, z_0=-2+1.

9.21. $\dfrac{4(z-2)}{(z+1)(z-3)}$ **, z_0=-1-2i.**

9.22. $\dfrac{4(z-2)}{(z+1)(z-3)}$, z_0=3+i.

9.23. $\dfrac{4(z-2)}{(z+1)(z-3)}$ **, z_0=2-2i.**

9.24. $\dfrac{4(z-2)}{(z+1)(z-3)}$, z_0=-2-i.

9.25. $\dfrac{2z}{z^2+4}$**, z_0=-1-3i.**

9.26. $\dfrac{2z}{z^2+4}$, z_0=-3+2i.

9.27. $\dfrac{2z}{z^2+4}$, z_0=2+3i.

9.28. $\dfrac{2z}{z^2+4}$, z_0=3+2i.

9.29. $\dfrac{2z}{z^2-4}$, z_0=-1+3i.

9.30. $\dfrac{2z}{z^2-4}$, z_0 =2+2i.

9.31. $\dfrac{2z}{z^2-4}$, z_0=3-2i.

10-есеп. Берілген функцияның z_0 дәрежесі бойынша барлық Лоран қатарларын табу керек.

10.1. $z\cos\dfrac{1}{z-2}$, z_0 =2.

10.2. $\sin\dfrac{z}{z-1}$, z_0=1.

10.3. $ze^{z/(z-5)}$, z_0=5.

10.4. $\sin\dfrac{2z-2}{z+2}$, z_0=-2.

10.5. $\cos\dfrac{3z}{z-i}$, z_0=i.

10.6. $\sin\dfrac{5z}{z-2i}$, z_0=2i.

10.7. $\sin\frac{3z-i}{3z+i}$, z_0=-i/3. **10.8.** $z\cos\frac{3z}{z-1}$, z_0=1.

10.9. $z\sin\frac{z}{z-1}$, z_0=1. **10.10.** $(z-3)\cos\frac{\pi(z-3)}{z}$, z_0=0.

10.11. $z^2\sin\pi\frac{z+1}{z}$, z_0=0. **10.12.** $z\cos\frac{z}{z+2i}$, z_0=-2i.

10.13. $\cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}$, z_0=2. **10.14.** $\sin\frac{z+i}{z-i}$, z_0=i.

10.15. $\sin\frac{z}{z-3}$, z_0=3. **10.16.** $ze^{\frac{1}{z-2}}$, z_0=2.

10.17. $e^{\frac{z}{z-3}}$, z_0=3. **10.18.** $\sin\frac{2z}{z-4}$, z_0=4.

10.19. $\sin\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}$, z_0=2. **10.20.** $e^{\frac{4z-2z^2}{(z-1)^2}}$, z_0=1.

10.21. $ze^{\frac{\pi}{(z-a)^2}}$, z_0=a. **10.22.** $ze^{\frac{\pi z}{z-\pi}}$, $z_0=\pi$.

10.23. $z\sin\pi\frac{z+2}{z}$, z_0=0. **10.24.** $z\cos\pi\frac{z+3}{z-1}$, z_0=1.

10.25. $z^2\sin\frac{z+3}{z}$, z_0=0. **10.26.** $z\sin\frac{z^2-2z}{(z-1)^2}$ **, z_0=1.**

10.27. $z\cos\frac{z}{z-3}$, z_0=3. **10.28.** $z\sin\pi\frac{z-1}{z-2}$, z_0=2.

10.29. $z\cos\frac{z}{z-5}$, z_0=5. **10.30.** $ze^{\frac{z}{z-4}}$, z_0=4.

10.31. $z\sin\dfrac{\pi z}{z-a}$, z_0=a.

11-есеп. Берілген функцияның $z=0$ ерекше нүктесінің түрін анықтау керек.

11.1. $\dfrac{e^{9z}-1}{\sin z - z + z^3/6}$.

11.2. $z^3 e^{7/z^2}$.

11.3. $\dfrac{\sin 8z - 6z}{\cos z - 1 + z^2/2}$.

11.4. $\dfrac{\cos 7z - 1}{shz - z - z^3/6}$.

11.5. $\dfrac{sh6z - 6z}{chz - 1 - z^2/2}$.

11.6. $\dfrac{ch5z - 1}{e^z - 1 - z}$.

11.7. $z\sin\dfrac{6}{z^2}$.

11.8. $\dfrac{e^z - 1}{\sin z - z + z^3/6}$.

11.9. $\dfrac{\sin z^2 - z^2}{\cos z - 1 + z^2/2}$.

11.10. $\dfrac{\cos z^2 - 1}{shz - z - z^3/6}$.

11.11. $\dfrac{e^{5z}-1}{chz - 1 - z^2/2}$.

11.12. $\dfrac{\sin 4z - 4z}{e^z - 1 - z}$.

11.13. $z^4\cos\dfrac{5}{z^2}$.

11.14. $\dfrac{\cos 3z - 1}{\sin z - z + z^3/6}$.

11.15. $\dfrac{sh2z - 2z}{\cos z - 1 + z^2/2}$.

11.16. $\dfrac{ch2z - 1}{shz - z - z^3/6}$.

11.17. $\dfrac{e^{z^3}}{chz - 1 - z^2/2}$.

11.18. ze^{4/z^3}.

11.19. $\dfrac{\sin z^3 - z^3}{e^z - 1 - z}$.

11.20. $\dfrac{\cos z^3 - 1}{\sin z - z + z^3/6}$.

11.21. $\dfrac{e^{7z}-1}{\cos z-1+z^2/2}$.

11.22. $\dfrac{\sin 6z-6z}{shz-z-z^3/6}$.

11.23. $z\sin\dfrac{3}{z^3}$.

11.24. $\dfrac{\cos 5z-1}{chz-1-z^2/2}$.

11.25. $\dfrac{sh4z-4z}{e^z-1-z}$.

11.26. $\dfrac{ch3z-1}{\sin z-z+z^3/6}$.

11.27. $\dfrac{e^{z^4}-1}{\cos z-1+z^2/2}$.

11.28. $\dfrac{\sin z^4-z^4}{shz-z-z^3/6}$.

11.29. $z\cos\dfrac{2}{z^3}$.

11.30. $\dfrac{\cos z^4/2}{chz-1-z^2/2}$.

11.31. $(e^{z^5}-1)/(e^z-1-z)$.

12-есеп. Берілген функцияның ерекше нүктелерін тауып, олардың түрлерін анықтау керек.

12.1. $e^{1/2}/\sin(1/z)$.

12.2. $1/\cos z$.

12.3. $tg^2 z$.

12.4. $ztgze^{1/z}$.

12.5. $\dfrac{e^z-1}{z^3(z+1)^2}$.

12.6. $\dfrac{z^2+1}{(z-i)^2(z^2+4)}$.

12.7. $\dfrac{(z+\pi)\sin\dfrac{\pi}{2}z}{z\sin^2 z}$.

12.8. $tg\dfrac{1}{z}$.

12.9. $ctg\dfrac{1}{z}$.

12.10. $\dfrac{1}{e^z+1}$.

12.11. $ctg\pi z$.

12.12. $\dfrac{\sin \pi z}{(z-1)^3}$.

12.13. $\dfrac{1}{\sin z^2}$.

12.14. $\dfrac{\sin 3z - 3\sin z}{z(\sin z - z)}$.

12.15. $\dfrac{1}{e^2 - 1} - \dfrac{1}{z}$.

12.16. $\dfrac{e^z - 1}{\sin \pi z}$.

12.17. thz.

12.18. $\dfrac{\sin z}{z^3(1-\cos z)}$.

12.19. $\dfrac{e^{1/z}}{(e^z - 1)(1-z)^3}$.

12.20. $\dfrac{1}{z^2} + \sin\dfrac{1}{z^2}$.

12.21. $\dfrac{z^2}{(z^2-4)^2 \cos\dfrac{1}{z-2}}$.

12.22. $z^2 \sin\dfrac{1}{z}$.

12.23. $\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{2}z}{z^4 - 1}$

12.24. $\dfrac{\sin \pi z}{(z^3-1)^2}$.

12.25. $\dfrac{\sin^3 z}{z(1-\cos z)}$.

12.26. $ctg\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z}$.

12.27. $\dfrac{\sin 3z^2}{z(z^3+1)} e^{1/z}$.

12.28. $\dfrac{\cos \pi z}{(4z^2-1)(z^2+1)}$.

12.29. $\dfrac{\sin 3z}{z(1-\cos z)}$.

12.30. $\dfrac{2z - \sin 2z}{z^2(z^2+1)}$.

12.31. $\dfrac{\sin \pi z}{z^4 - 1} e^{1/z}$.

13-есеп. Интегралды есептеу керек.

13.1. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{dz}{z(z^2+1)}$.

13.2. $\oint\limits_{|z-1-i|=5/4} \frac{2dz}{z^2(z-1)}$.

13.3. $\oint\limits_{|z-i|=3/2} \frac{dz}{z(z^2+4)}$.

13.4. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{2+\sin z}{z(z+2i)}dz$.

13.5. $\oint\limits_{|z-3|=1/2} \frac{e^z dz}{\sin z}$.

13.6. $\oint\limits_{|z-3/2|=2} \frac{z(\sin z+2)}{\sin z}dz$.

13.7. $\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{ze^z dz}{\sin z}$.

13.8. $\oint\limits_{|z-3/2|=2} \frac{2z|z-1|dz}{\sin z}$.

13.9. $\oint\limits_{|z-1/4|=1/3} \frac{z(z+1)^2 dz}{\sin 2\pi z}$.

13.10. $\oint\limits_{|z-1/2|=1} \frac{iz(z-i)dz}{\sin \pi z}$.

13.11. $\oint\limits_{|z-3|=1} \frac{(\sin 3z+2)dz}{z^2(z-\pi)}$.

13.12. $\oint\limits_{|z-1/2|=1} \frac{(e^z+1)dz}{z(z-1)}$.

13.13. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{(e^{zi}+2)dz}{\sin 3zi}$.

13.14. $\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{(\cos^2 z+1)dz}{z^2-\pi^2}$.

13.15. $\oint\limits_{|z-1|=3/2} \frac{\ln(z+2)dz}{\sin z}$.

13.16. $\oint\limits_{|z-6|=1} \frac{(\sin^3 z+2)dz}{z^2-4\pi^2}$.

13.17. $\oint\limits_{|z+1|=1/2} \frac{(tgz+2)dz}{4z^2+\pi z}$.

13.18. $\oint\limits_{|z+3/2|=1} \frac{(\cos^2 z+3)dz}{2z^2+\pi z}$.

13.19. $\oint\limits_{|z+1|=2} \frac{(\sin^2 z+3)dz}{z^2+2\pi z}$.

13.20. $\oint\limits_{|z|-1/4} \frac{\ln(z+e)dz}{z\sin(z+\frac{\pi}{4})}$.

13.21. $\oint\limits_{|z|=\pi/2} \frac{(z^2+z+3)dz}{\sin z(\pi+z)}$. **13.22.** $\oint\limits_{|z|=1} \frac{(z^3-i)dz}{\sin 2z(z-\pi)}$.

13.23. $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{z(z+\pi)dz}{\sin 2z}$. **13.24.** $\oint\limits_{|z|=2} \frac{(z^2+\sin z+2)dz}{z^2+\pi z}$.

13.25. $\oint\limits_{|z-3/2|=1} \frac{z(z+\pi)dz}{\sin 3z(z-\pi)}$. **13.26.** $\oint\limits_{|z-3/2|=2} \frac{\sin z dz}{z(z-\pi)(z+\frac{\pi}{3})}$.

13.27. $\oint\limits_{|z-\pi|} \frac{(z^2+\pi)^2 dz}{i\sin z}$. **13.28.** $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin^2 z dz}{z\cos z}$.

13.29. $\oint\limits_{|z-\pi|=2} \frac{\cos^2 z dz}{z\sin z}$. **13.30.** $\oint\limits_{|z-3/2|=2} \frac{(z^3+\sin 2z)dz}{\sin\frac{z}{2}(z-\pi)}$.

13.31. $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{(z^2+1)dz}{(z^2+4)\sin\frac{z}{3}}$.

14-есеп. Интегралды есептеу керек.

14.1. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z^2-1}{z^3}dz$. **14.2.** $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{2-z^2+3z^3}{4z^3}dz$.

14.3. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^{1/z}+1}{z}dz$. **14.4.** $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z^3}{1-\cos z}dz$.

14.5. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{1-2z+3z^2+4z^3}{2z^2}dz$. **14.6.** $\oint\limits_{|z|=2} \frac{1-\cos z^2}{z^2}dz$.

14.7. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{3z^4 - 2z^3 + 5}{z^4} dz$.

14.8. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{1 - \sin\frac{1}{z}}{z} dz$.

14.9. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{e^{2z^2} - 1}{z^3} dz$.

14.10. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{3 - 2z + 4z^4}{z^3} dz$.

14.11. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z - \sin z}{2z^4} dz$.

14.12. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^3 - 3z^2 + 1}{2z^4} dz$.

14.13. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{4z^5 - 3z^3 + 1}{z^6} dz$.

14.14. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z} - z}{z^2} dz$.

14.15. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos iz - 1}{z^3} dz$.

14.16. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos iz - 1}{z^3} dz$.

14.17. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{1 - 2z^4 + 3z^5}{z^4} dz$.

14.18. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^2 + \cos z}{z^3} dz$.

14.19. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{z^5 - 3z^3 + 5z}{z^4} dz$.

14.20. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z - \sin z}{z^4} dz$.

14.21. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos z^2 - 1}{z^4} dz$.

14.22. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{2 + 3z^3 - 5z^4}{z^5} dz$.

14.23. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{ze^{\frac{1}{z}} - z - 1}{z^3} dz.$

4.24. $\oint\limits_{|z|=2} z^2 \sin\frac{i}{z^2} dz.$

14.25. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{z^4 + 2z^2 + 3}{2z^6} dz.$

14.26. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{iz} - 1}{z^3} dz.$

14.27. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{1-z^4+3z^6}{2z^3}dz.$ **14.28.** $\oint\limits_{|z|=2} z^3\cos\frac{2i}{z}dz.$

14.29. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{e^z-\sin z}{z^2}dz.$ **14.30.** $\oint\limits_{|z|=3} \frac{2z^3+3z^2-2}{2z^5}dz.$

14.31. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2e^{1/z^2}-1}{z}dz.$

15-есеп. Интегралды есептеу керек.

15.1. $\oint\limits_{|z|=0,2} \frac{3\pi z-\sin 3\pi z}{z^2-sh^2\pi^2 z}dz.$ **15.2.** $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos 3z-1+9z^2/2}{z^4 sh\frac{9}{4}z}dz.$

15.3. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{sh2\pi z-2\pi z}{z^2\sin^2\frac{\pi^2 z}{3}}dz.$ **15.4.** $\oint\limits_{|z|=2} \frac{ch3z-1-9z^2/2}{z^4\sin\frac{9z}{8}}dz.$

15.5. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{2z}-1-2z}{zsh^2 4iz}dz.$ **15.6.** $\oint\limits_{|z|=0,4} \frac{e^{4z}-\cos 7z}{zsh2\pi z}dz.$

15.7. $\oint\limits_{|z|=0,2} \frac{e^{8z}ch4z}{z\sin 4\pi z}dz.$ **15.8.** $\oint\limits_{|z|=0,1} \frac{chz-\cos 3z}{z^2\sin 5\pi z}dz.$

15.9. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{sh3z-\sin 3z}{z^3 sh2z}dz.$ **15.10.** $\oint\limits_{|z|=0,05} \frac{e^{4z}-1-\sin 4z}{z^3 sh16z}dz.$

15.11. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{6z-\sin 6z}{z^2 sh^2 2z}dz.$ **15.12.** $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos 4z-1+8z^2}{z^4 sh\frac{4z}{3}}dz.$

15.13. $\oint\limits_{|z|=5} \frac{sh\pi z - \pi z}{z^2 \sin^2 \frac{\pi z}{6}} dz.$

15.14. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{ch4z - 8z^2 - 1}{z^4 \sin \frac{8z}{3}} dz.$

15.15. $\oint\limits_{|z|=0,9} \frac{e^{3z} - 1 - 3z}{sh^2 \pi z} dz.$

15.16. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{6z} - \cos 8z}{zsh4z} dz.$

15.17. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{7z} - ch5z}{z \sin 2iz} dz.$

15.18. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{ch3z - \cos 4iz}{z^2 \sin 5z} dz.$

15.19. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{sh3z - \sin 3z}{z^3 sh - iz} dz.$

15.20. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{5z} - 1 - \sin 5z}{z^2 sh5z} dz.$

15.21. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin 3z - 3z}{z^2 sh^2 iz} dz.$

15.22. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos 2z - 1 + 2z^2}{z^4 sh \frac{\pi z}{3}} dz.$

15.23. $\oint\limits_{|z|=5} \frac{sh2z - 2z}{z^2 \sin^2 \frac{z}{3}} dz.$

15.24. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{ch2z - 1 - 2z^2}{z^4 \sin \frac{2\pi z}{3}} dz.$

15.25. $\oint\limits_{|z|=0,4} \frac{e^{2z} - 1 - 2z}{zsh^2 2\pi z} dz.$

15.26. $\oint\limits_{|z|=0,3} \frac{e^{4z} - 1 - \sin 4z}{z^2 sh8iz} dz.$

15.27. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{5z} - ch6z}{z \sin \pi z} dz.$

15.28. $\oint\limits_{|z|=0,2} \frac{ch2z - \cos 2z}{z^2 \sin 8z} dz.$

15.29. $\oint\limits_{|z|=4} \frac{shiz - \sin iz}{z^3 sh \frac{z}{3}} dz.$

15.30. $\oint\limits_{|z|=0,3} \frac{e^{3z} - 1 - \sin 3z}{z^2 sh3\pi z} dz.$

15.31. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{2z} - \cos 9z}{zsh\pi iz} dz.$

16-есеп. Интегралды есептеу керек.

16.1. $$\oint\limits_{|z+i|=3}\left(\frac{4\sin\frac{\pi z}{4-2i}}{(z-2+i)^2(z-4+i)}+\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}\right)dz.$$

16.2. $$\oint\limits_{|z+6|=2}\left(ze^{\frac{1}{z+6}}+\frac{2\cos\pi z/5}{(z+5)^2(z+3)}\right)dz.$$

16.3. $$\oint\limits_{|z-i|=3}\left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}-i}-\frac{2sh\frac{\pi iz}{4+2i}}{(z-2-i)^2(z-4-i)}\right)dz.$$

16.4. $$\oint\limits_{|z+2|=2}\left(zch\frac{1}{z+2}-\frac{2\sin(\pi z/2)}{(z+1)^2(z-1)}\right)dz.$$

16.5. $$\oint\limits_{|z-2i|=2}\left(\frac{2\cos\frac{\pi z}{2+2i}}{(z-2-2i)^2(z-4-2i)}+\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}\right)dz.$$

16.6. $$\oint\limits_{|z+3|=2}\left(zsh\frac{i}{z+3}-\frac{4sh(\pi iz/4)}{(z+2)^2z}\right)dz.$$

16.7. $$\oint\limits_{|z+5i|=2}\left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}+\frac{8ch\frac{\pi iz}{1-5i}}{(z-1+5i)^2(z-3+5i)}\right)dz.$$

16.8. $$\oint\limits_{|z+4|=2}\left(z\cos\frac{1}{z+4}+\frac{2\sin(\pi z/6)}{(z+3)^2(z+1)}\right)dz.$$

16.9. $$\oint\limits_{|z-7i|=2}\left(\frac{2\sin\frac{\pi iz}{2+14i}}{(z-1-7i)^2(z-3-7i)}+\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+i}\right)dz.$$

16.10. $$\oint\limits_{|z+5|=2}\left(z\sin\frac{1}{z+5}+\frac{2ch(\pi iz/4)}{(z+4)^2(z+2)}\right)dz.$$

16.11. $$\oint\limits_{|z-3i|=2}\left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}+\frac{2\cos\frac{\pi z}{1+3i}}{(z-1-3i)^2(z-3-3i)}\right)dz.$$

16.12. $$\oint\limits_{|z-1|=2}\left(ze^{\frac{2}{z-1}}+\frac{2\cos\pi z/2}{(z-2)^2(z-4)}\right)dz.$$

16.13. $$\oint\limits_{|z+i|=2}\left(\frac{2\sin\frac{\pi z}{2-2i}}{(z-1+i)^2(z-3+i)}-\frac{3\pi i}{e^{\pi z/2}+i}\right)dz.$$

16.14. $$\oint\limits_{|z-2|=2}\left(z\,ch\frac{3}{z-2}+\frac{2\cos\pi z/3}{(z-3)^2(z-5)}\right)dz.$$

16.15. $$\oint\limits_{|z+7i|=2}\left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i}-\frac{8ch\frac{\pi i z}{1-7i}}{(z-1+7i)^2(z-3+7i)}\right)dz.$$

16.16. $$\oint\limits_{|z-3|=2}\left(z\,sh\frac{1}{z-3}-\frac{2\sin\pi z/8}{(z-4)^2(z-6)}\right)dz.$$

16.17. $$\oint\limits_{|z+3i|=2}\left(\frac{4sh\frac{\pi i z}{2-6i}}{(z-1+3i)^2(z-3+3i)}-\frac{\pi}{e^{\pi z/2}-i}\right)dz.$$

16.18. $$\oint\limits_{|z-4|=2}\left(z\cos\frac{1}{z-4}+\frac{10ch\pi i z/5}{(z-5)^2(z-7)}\right)dz.$$

16.19. $$\oint\limits_{|z-5i|=2}\left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i}+\frac{2\cos\frac{\pi z}{1+5i}}{(z-1-5i)^2(z-3-5i)}\right)dz.$$

16.20. $$\oint\limits_{|z-5|=2}\left(z\sin\frac{i}{z-5}+\frac{2sh\pi i z/12}{(z-6)^2(z-8)}\right)dz.$$

16.21. $$\oint\limits_{|z-i|=2}\left(\frac{4\sin\frac{\pi z}{2+2i}}{(z-1-i)^2(z-3i)}+\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i}\right)dz.$$

16.22. $$\oint\limits_{|z-6|=2}\left(ze^{\frac{1}{z-6}}-\frac{2ch\pi iz/5}{(z-5)^2(z-3)}\right)dz.$$

16.23. $$\oint\limits_{|z-6i|=2}\left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}-\frac{2ch\frac{\pi iz}{1+6i}}{(z-1-6i)^2(z-3-6i)}\right)dz.$$

16.24. $$\oint\limits_{|z-5|=2}\left(zch\frac{2}{z-5}+\frac{2\cos\pi z/4}{(z-4)^2(z-2)}\right)dz.$$

16.25. $$\oint\limits_{|z+6i|=2}\left(\frac{2sh\frac{\pi iz}{2-12i}}{(z-1+6i)^2(z-3+6i)}+\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+1}\right)dz.$$

16.26. $$\oint\limits_{|z-4|=2}\left(zsh\frac{1}{z-4}+\frac{2\sin\pi z/6}{(z-3)^2(z-1)}\right)dz.$$

16.27. $$\oint\limits_{|z+2i|=2}\left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}+\frac{4\cos\frac{\pi z}{1-2i}}{(z-1+2i)^2(z-3+2i)}\right)dz.$$

16.28. $$\oint\limits_{|z-3|=2}\left(z\cos\frac{1}{z-3}+\frac{4ch\pi iz/2}{z(z-2)^2}\right)dz.$$

16.29. $$\oint\limits_{|z-2i|=2}\left(\frac{2\sin\frac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)}-\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}\right)dz.$$

16.30. $$\oint\limits_{|z-2|=2}\left(z\sin\frac{i}{z-2}-\frac{2sh\pi iz/2}{(z-1)^2(z+1)}\right)dz.$$

16.31. $$\oint\limits_{|z+2i|=3}\left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}+\frac{6ch\,\frac{\pi iz}{2-2i}}{(z-2+2i)^2(z-4-2i)}\right)dz.$$

17-есеп. Интегралды есептеу керек.

17.1. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2+\sqrt{3}\sin t}.$$

17.2. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4+\sqrt{15}\sin t}.$$

17.3. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5+2\sqrt{6}\sin t}.$$

17.4. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{6+\sqrt{35}\sin t}.$$

17.5. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{7+4\sqrt{3}\sin t}.$$

17.6. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5-4\sin t}.$$

17.7. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5-3\sin t}.$$

17.8. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{8-3\sqrt{7}\sin t}.$$

17.9. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{9-4\sqrt{5}\sin t}.$$

17.10. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4-\sqrt{7}\sin t}.$$

17.11. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3-\sqrt{5}\sin t}.$$

17.12 $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3-\sqrt{5}\sin t}.$$

17.13. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4-2\sqrt{3}\sin t}.$$

17.14. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3-\sqrt{5}\sin t}$$

17.15. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{6-4\sqrt{2}\sin t}.$$

17.16. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3-\sqrt{5}\sin t}$$

17.17. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{3}\sin t-2}.$$

17.18. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3-\sqrt{5}\sin t}$$

17.19. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{6}\sin t - 5}$.

17.20. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - \sqrt{5}\sin t}$

17.21. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{3}\sin t - 7}$.

17.22. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - \sqrt{5}\sin t}$

17.23. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3\sin t + 5}$.

17.24. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3\sqrt{7}\sin t + 8}$.

17.25. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{5}\sin t + 9}$.

17.26. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - \sqrt{5}\sin t}$

17.27. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{5}\sin t + 3}$.

17.28. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - \sqrt{5}\sin t}$

17.29. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{3}\sin t + 4}$.

17.30. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - \sqrt{5}\sin t}$

17.31. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{2}\sin t + 6}$.

18-есеп. Интегралды есептеу керек.

18.1. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(1 + \sqrt{10/11}\cos t)^2}$.

18.2. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(\sqrt{5} + \cos t)^2}$.

18.3. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(1 + \sqrt{6/7}\cos t)^2}$.

18.4. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(2\sqrt{3} + \sqrt{11}\cos t)^2}$.

18.5. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\cos t)^2}$.

18.6. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(4+\cos t)^2}$.

18.7. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(4+3\cos t)^2}$.

18.8. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(\sqrt{5}+\sqrt{3}\cos t)^2}$.

18.9. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(\sqrt{7}+2\cos t)^2}$

18.10. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(4+\sqrt{7}\cos t)^2}$.

18.11. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(3+\sqrt{5}\cos t)^2}$.

18.12. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(3+2\sqrt{2}\cos t)^2}$.

18.13. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(2\sqrt{2}+\sqrt{7}\cos t)^2}$.

18.14. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(\sqrt{6}+\cos t)^2}$.

18.15. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(\sqrt{6}+\sqrt{5}\cos t)^2}$.

18.16. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(\sqrt{7}+\sqrt{5}\cos t)^2}$.

18.17. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(\sqrt{2}+\cos t)^2}$.

18.18. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(\sqrt{5}+2\cos t)^2}$.

18.19. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(3+\cos t)^2}$.

18.20. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(\sqrt{7}+\sqrt{2}\cos t)^2}$.

18.21. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(\sqrt{3}+\cos t)^2}$.

18.22. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(2+\sqrt{3}\cos t)^2}$.

18.23. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(\sqrt{13}+2\sqrt{3}\cos t)^2}$.

18.24. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(2+\cos t)^2}$.

18.25. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(3+2\cos t)^2}$.

18.26. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(2+\cos t)^2}$.

18.27. $\int\limits_{0}^{2\Pi} \frac{dt}{(\sqrt{10}+3\cos t)^2}$.

18.28. $\int\limits_{0}^{2\Pi} \frac{dt}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}\cos t)^2}$.

18.29. $\int\limits_{0}^{2\Pi} \frac{dt}{(\sqrt{7}+\sqrt{3}\cos t)^2}$.

18.30. $\int\limits_{0}^{2\Pi} \frac{dt}{(\sqrt{7}+\cos t)^2}$.

18.31. $\int\limits_{0}^{2\Pi} \frac{dt}{(\sqrt{5}+\sqrt{2}\cos t)^2}$.

19-есеп. Интегралды есептеу керек.

19.1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$.

19.2 $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{(x^2+4)^2}dx$.

19.3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+1)^2}$.

19.4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+16)}$.

19.5. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-x+1)^2}$.

19.6. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)^2}$.

19.7. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+10x^2+9}$.

19.8. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2(x^2+4)^2}$.

19.9. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+3)^2}$.

19.10. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2)(x^2+3)^2}$.

19.11. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+1)^2}$.

19.12. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2}dx$.

19.13. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+4x+13)^2}$.

19.14. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+5)^2}dx$.

19.15. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$.

19.16. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+5}{x^4+5x^2+6} dx$

19.17. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$.

19.18. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{(x^2-10x+29)^2} dx$.

19.19. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+5)^2}$.

19.20. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+7x^2+12}$.

19.21. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+4}{(x^2+9)^2} dx$.

19.22. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^5}$.

19.23. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2)^2(x^2+10)^2}$.

19.24. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-1}{(x^2+8x+17)^2} dx$.

19.25. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+10}{(x^2+4)^2} dx$.

19.26. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^4}$.

19.27. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+3)^2(x^2+15)^2}$.

19.28. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^4+7x^2+12} dx$.

19.29. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-10x+29)^2}$.

19.30. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+11)^2} dx$.

19.31. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+16)}$.

20-есеп. Интегралды есептеу керек.

20.1. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\sin 3x}{(x^2+4)^2} dx$.

20.2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\sin x}{(x^2+9)^2} dx$.

20.3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2} dx$.

20.4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{(x^2+1)^2} dx$.

20.5. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\cos x}{x^4+5x^2+6} dx$.

20.6. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x/2)}{(x^2+1)(x^2+9)} dx$.

20.7. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+3)\cos 2x}{x^4+3x^2+2} dx$.

20.8. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3-2)\cos(x/2)}{(x^2+1)^2} dx$.

20.9. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2-x)\sin x}{x^4+9x^2+20} dx$.

20.10. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+17} dx$.

20.11. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 2x-\sin x}{(x^2+4)^2} dx$.

20.12. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5x}{(x^2+1)^2(x^2+4)} dx$.

20.13. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4+5x^2+4} dx$.

20.14. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2} dx$.

20.15. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+1)^2} dx$.

20.16. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1/4)^2} dx$.

20.17. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^3} dx$.

20.18. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+16)(x^2+9)} dx$.

20.19. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2-2x+10} dx$.

20.20. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10} dx$.

20.21. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\sin(x/2)}{x^2-2x+10} dx$.

20.22. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2-x+1)^2} dx$.

20.23. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2-x+1)^2} dx$.

20.24. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+5x)\sin x}{x^4+10x^2+9} dx$.

20.25. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x dx}{x^4 + 10x^2 + 9}$.

20.26. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 + 1)\sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$.

20.27. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x - \cos x}{(x^2 + 1)^2} dx$.

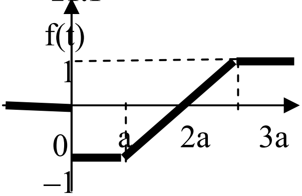
20.28. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + x)\sin x}{x^4 + 13x^2 + 36} dx$.

20.29. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + x)\cos x}{x^4 + 13x^2 + 36} dx$.

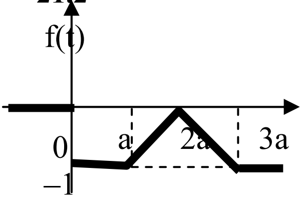
20.30. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{(x^2 + 1)^2} dx$.

21-есеп. Түпнұсқаның берілген сызбасы бойынша L кескінін табу керек.

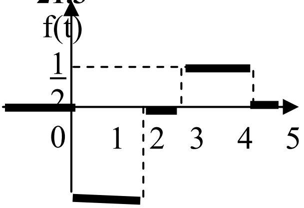
21.1



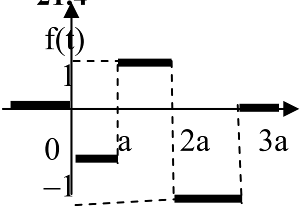
21.2



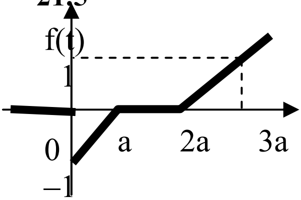
21.3



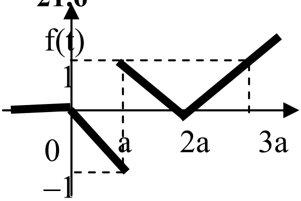
21.4



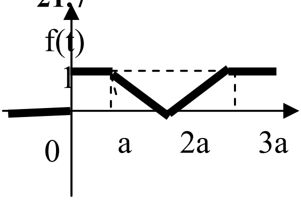
21.5



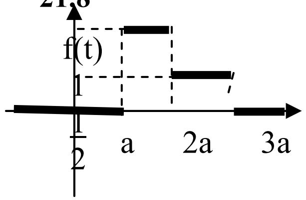
21.6



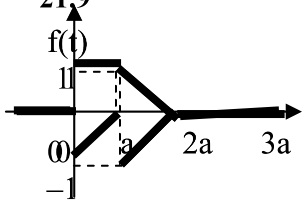
21.7



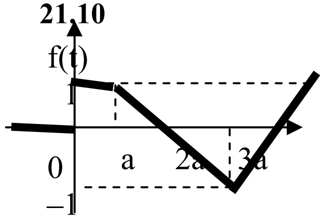
21.8



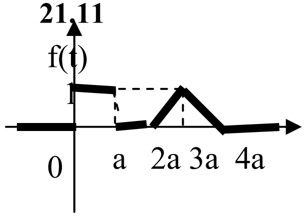
21.9



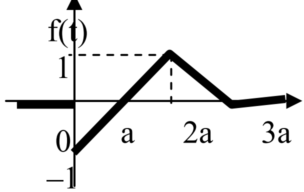
21.10



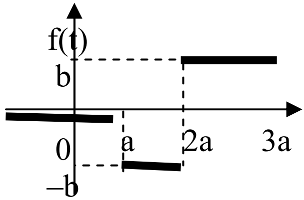
21.11



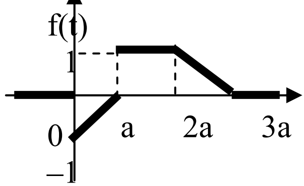
21.12



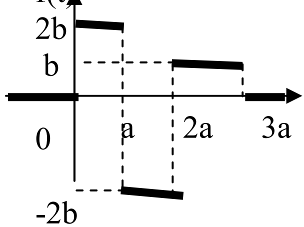
21.13



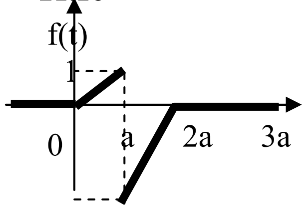
21.14



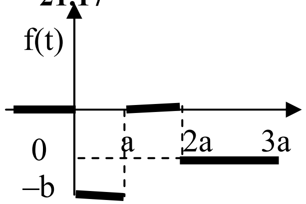
21.15



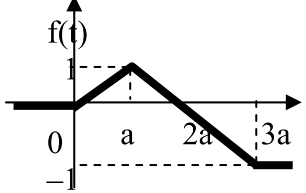
21.16



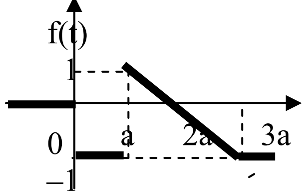
21.17



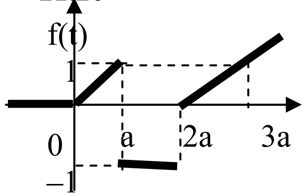
21.18



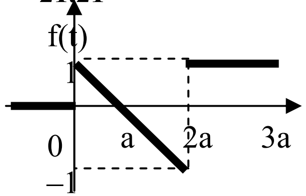
21.19



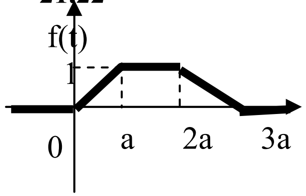
21.20



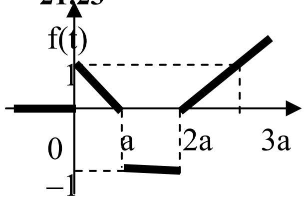
21.21



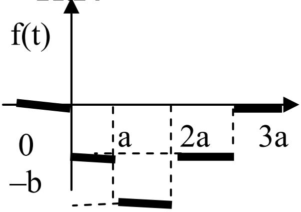
21.22



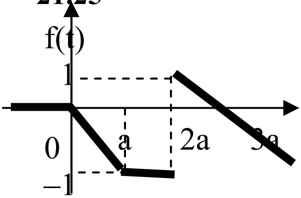
21.23



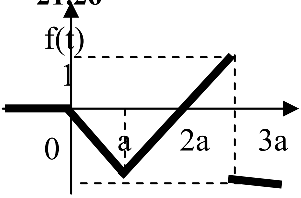
21.24



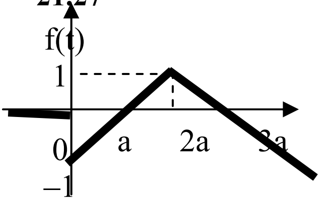
21.25



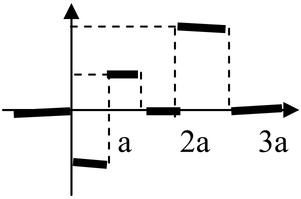
21.26



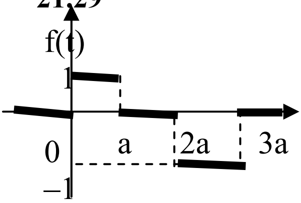
21.27



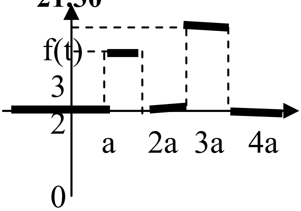
21.28



21.29



21.30



22-есеп. Берілген L-кескіні бойынша түпнұсқаны табу керек.

2.1. $\dfrac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}$.

22.2. $\dfrac{p}{(p+1)(p^2+p+1)}$.

22.3. $\dfrac{2p}{(p^2+4p+8)^2}$.

22.4. $\dfrac{1}{p(p^2+1)^2}$.

22.5. $\dfrac{p+3}{p^3+2p^2+3p}$.

22.6. $\dfrac{p}{(p+1)(p^2+4p+5)}$.

22.7. $\dfrac{6}{p^3-8}$.

22.8. $\dfrac{4}{p^3+8}$.

22.9. $\dfrac{1}{p^5+p^3}$.

22.10. $\dfrac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}$.

22.11. $\dfrac{p}{(p+1)(p^2+p+1)}$.

22.12. $\dfrac{2p}{(p^2+4p+8)^2}$.

22.13. $\dfrac{1}{p(p^2+1)^2}$.

22.14. $\dfrac{p+3}{p^3+2p^2+3p}$.

22.15. $\dfrac{p}{(p+1)(p^2+4p+5)}$.

22.16. $\dfrac{6}{p^3-8}$.

22.17. $\dfrac{4}{p^3+8}$.

22.18. $\dfrac{1}{p^5+p^3}$.

22.19. $\dfrac{p+4}{p^2+4p+5}$.

22.20. $\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$.

22.21. $\dfrac{p+5}{(p+1)(p^2-2p+5)}$.

22.22. $\dfrac{1}{p^3+p^2+p}$.

22.23. $\dfrac{p+5}{(p+1)(p^2+4p+5)}$.

22.24. $\dfrac{1}{p(p^3+1)}$.

22.25. $\dfrac{1}{p^3(p^2-4)}$.

22.26. $\dfrac{3p-2}{(p-1)(p^2-6p+10)}$.

22.27. $\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2-2)}$.

22.28. $\dfrac{1}{p^3-1}$.

22.29. $\dfrac{e^{-p/2}}{(p^2+1)(p^2+2)}$. **22.30.** $\dfrac{5p}{(p+2)(p^2-2p+2)}$.

22.31. $\dfrac{1}{(p-2)(p^2+2p+3)}$.

23-есеп. Дифференциалдық теңдеудің $y(0)=0$, $y'(0)=0$ алғашқы шартты қанағаттандыратын шешімін табу керек.

23.1. $y''-y=th\,t$. **23.2.** $y''-y'=\dfrac{1}{1+e^t}$.

23.3. $y''-2y'+y=\dfrac{e^t}{1+t^2}$. **23.4.** $y''-2y'+2y=2e^t\cos t$.

23.5. $y''-y=th^2\,t$. **23.6.** $y''-y=\dfrac{1}{ch\,t}$.

23.7. $y''-y'=\dfrac{e^t}{1+e^t}$. **23.8.** $y''-2y'+y=\dfrac{e^t}{t+1}$.

23.9. $y''+y'=\dfrac{e^{2t}}{3+e^t}$. **23.10.** $y''-2y'=\dfrac{e^t}{ch\,t}$.

23.11. $y''-y'=\dfrac{1}{1+ch\,t}$. **23.12.** $y''+y'=\dfrac{1}{1+e^t}$.

23.13. $y''-4y'+4y=\dfrac{2e^{2t}}{ch^2 2t}$. **23.14.** $y''-4y=\dfrac{1}{ch^3 2t}$.

23.15. $y''-y=\dfrac{1}{ch^2 t}$. **23.16.** $y''+y'=\dfrac{e^t}{1+e^t}$.

23.17. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-t}}{(t+1)^2}$. **23.18.** $2y'' - y' = \dfrac{e^{t}}{(1+e^{t/2})^2}$.

23.19. $y'' - y = \dfrac{1}{ch^3 t}$. **23.20.** $y'' - y' = \dfrac{e^{2t}}{(1+e^{t})^2}$.

23.21. $y'' + 2y' + y = \dfrac{te^{-t}}{t+1}$. **23.22.** $y'' - y' = \dfrac{e^{2t}}{2+e^{t}}$.

23.23. $y'' - y = \dfrac{sh\,t}{ch^2 t}$. **23.24.** $y'' + y' = \dfrac{e^{t}}{(1+e^{t})^2}$.

23.25. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-t}}{1+t^2}$. **23.26.** $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^{t}}{ch^2 t}$.

23.27. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-t}}{ch^2 t}$. **23.28.** $y'' - 4y = th^2 2t.$

23.29. $y'' + 2y' = \dfrac{1}{ch^2 t}$. **23.30.** $y'' + y' = \dfrac{1}{(1+e)^2}$.

23.31. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2t}}{(1+2t)^2}$.

24-есеп. Амалдық әдіспен Коши есебін шешу керек.

24.1. $y'' + y = 6e - t, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1.$

24.2. $y'' - y' = t^2, \; y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

24.3. $y'' + y' = t^2 + 2t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

24.4. $y'' - y = \cos 3t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

24.5. $y''+y'+y=7e2t,\quad y(0)=1,\ y'(0)=4.$

24.6. $y''+y'-2y=-2(t+1),\quad y(0)=1,\ y'(0)=1.$

24.7. $y''-9y=\sin t-\cos t,\quad y(0)=-3,\ y'(0)=2.$

24.8. $y''+2y'=2+et,\quad y(0)=1,\ y'(0)=2.$

24.9. $2y''-y'=\sin 3t,\quad y(0)=2,\ y'(0)=1.$

24.10. $y''+2y'=\sin t/2,\quad y(0)=-2,\ y'(0)=4.$

24.11. $y''+y'=sht,\quad y(0)=2,\ y'(0)=1.$

24.12. $y''+4y'+29y=e-2t,\quad y(0)=0,\ y'(0)=1.$

24.13. $y''-3y'+2y=et,\quad y(0)=1,\ y'(0)=0.$

24.14. $2y''+3y'+y=3et,\quad y(0)=0,\ y'(0)=1.$

24.15. $\begin{gathered}y''-2y'-3y=2t,\\ y(0)=1, y'(0)=1.\end{gathered}$

24.16. $\begin{gathered}y''+4y=\sin 2t,\\ y(0)=0, y'(0)=1.\end{gathered}$

24.17. $\begin{gathered}2y''+5y'=29\cos t,\\ y(0)=-1, y'(0)=0.\end{gathered}$

24.18. $\begin{gathered}y''+y'+y=t^2+t,\\ y(0)=1, y'(0)=-3.\end{gathered}$

24.19. $\begin{gathered}y''+4y=8\sin 2t,\\ y(0)=3, y'(0)=-1.\end{gathered}$

24.20. $\begin{gathered}y''-y'-6y=2,\\ y(0)=1, y'(0)=0.\end{gathered}$

24.21. $\begin{gathered}y''+4y=4e^{2t}+4t^2,\\ y(0)=1, y'(0)=2.\end{gathered}$

24.22. $\begin{gathered}y''+4y'+4y=t^3e^{2t},\\ y(0)=1, y'(0)=2.\end{gathered}$

24.23. $\begin{gathered}y''-3y''+2y=12e^{3t},\\ y(0)=2, y'(0)=6.\end{gathered}$

24.24. $\begin{gathered}y''+4y=3\sin t+10\cos 3t,\\ y(0)=-2, y'(0)=3.\end{gathered}$

24.25. $\begin{array}{l} y'' + 2y' + 10y = 2e^{-t}\cos 3t, \\ y(0) = 5, y'(0) = 1. \end{array}$

24.26. $\begin{array}{l} y'' + 3y' - 10y = 47\cos 3t - \sin 3t, \\ y(0) = 3, y'(0) = -1. \end{array}$

24.27 $\begin{array}{l} y'' + y' - 2y = e^{-t}, \\ y(0) = -1, y'(0) = 0. \end{array}$

24.28. $\begin{array}{l} y'' - 2y' = e^{t}(t^2 + t - 3), \\ y(0) = 2, y'(0) = 2. \end{array}$

24.29. $\begin{array}{l} y'' + y = 2\cos t, \\ y(0) = 0, y'(0) = 1. \end{array}$

24.30. $\begin{array}{l} y'' - y = 4\sin t + 5\cos 2t, \\ y(0) = -1, y'(0) = -2. \end{array}$

24.31. $\begin{array}{l} y'' - 3y' + 2y = 2e^{t}\cos\dfrac{t}{2}, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{array}$

25-есеп.

1-8-нұсқалар

Массасы m тең нүкте x ығысуына пропорционал және қарама-қарсы бағытталған $F=-kx$ қалыптастырушы күші мен $R= r\upsilon$ кедергі күшінің әсерінен түзу сызық бойымен қозғалады. t=0 уақыт кезеңінде өзінің тепе-теңдік қалпынан x_0 қашықтықта және жылдамдығы υ_0 тең болды. $x=x$(t) қоғалыс заңдылығын табу керек.

25.1. k=m, r=2m, $x_{0=}$1 м, υ_0=0.

25.2 k=m, r=2m, x_0=1м, υ_0=м/с.

25.3 k=5m, r=2m, x_0=1м, υ_0=0.

25.4 k=5m, r=2m, x_0=1м, υ_0=1 м/с.

25.5 k=5m, r=4m, x_0=2 м, υ_0=1 м/с.

25.6 k=5m, r=4m, x_0=1 м, υ_0=0.

25.7 k=3m, r=2m, x_0=1м, υ_0=0.

25.8 k=3m, r=2m, x_0=1м, υ_0=1м/с.

9-16-нұсқалар

Массасы m тең нүкте координат бас нүктесінен жүрілген қашықтыққа пропорционал болатын $F=kx$ күш әсерінен түзу сызықпен қозғалады. Нүктеге ортаның υ жылдамдығына пропорционал $R=r\upsilon$ кедергі күші әсер етеді. t=0 кезінде нүктенің координат бас нүктесінен қашықтығы – $x_{0,}$ ал жылдамдығы – υ_0.

$x=x(t)$ – қозғалыс заңдылығын табу керек.

25.9. k=2m, r=m, x_0=1м, υ_0=0.

25.10. k=2m, r=m, x_0=1 м, υ_0=1м/с.

25.11. k=3m, r=2m, x_0=1 м, υ_0=1м/с.

25.12. k=3m, r=2m, x_0=1 м, υ_0=2 м/с.

25.13. k=4m, r=3m, x_0=2 м, υ_0=0.

25.14. k=4m, r=3m, x_0=1 м, υ_0=1м/с.

25.15. k=5m, r=4m, x_0=1 м, υ_0=1м/с.

25.16. k=5m, r=4m, x_0=1 м, υ_0=2м/с.

17-24-нұсқалар

Массасы m тең материалдық нүкте (координат басынан) x-қашықтығына пропорционал және координат басына қарай бағытталған $F=-kx$ қалыптастырушы күшінің және $f=A\cos t$ ауытқушы күшінің әсерінен түзу сызықты тербеліс жасайды. Бастапқы уақытты $x(0)=x_0$, $\upsilon(0)=\upsilon_0$ деп алып, $x=x(t)$ – қозғалыс заңдылығын табу керек.

k=m, A=2m, x_0=0, υ_0=0.

25.17. k=m, A=m, x_0=0, υ_0=1 м/с.

25.18. k=m, A=2m, x_0=1м, υ_0=0.

25.19. k=m, A=m, x_0=1м, υ_0=0,5 м/с.

25.20. k=9m, A=8m, x_0=1м, υ_0=0.

25.21. k=9m, A=4m, x_0=0, υ_0=0.

25.22. k=9m, A=8m, x_0=0, υ_0=3 м/с.

25.23. k=9m, A=m, x_0=1/8 м, υ_0=3 м/с.

25-31-нұсқалар

Массасы m тең материалдық нүкте υ жылдамдығына пропорционал $R=k\upsilon$ кедергі күші әсер етеді. Егер нүктенің бастапқы жылдамдығы υ_0 болса, онда ол шектеусіз уақыт ішінде қанша қашықтыққа орын ауыстыралы?

25.24. k=$2m$, υ_0=10*м*/с. **25.26.** k=$\frac{m}{3}$, υ_0=5 м/с.

25.27. k=3m, υ_0=6 м/с. **25.28.** k=m, υ_0=7 м/с.

25.29. k=m/2, υ_0=6 м/с **.** **25.30.** k=0,1m, υ_0=1 м/с.

25.31. k=10m, υ_0=1 м/с.

26-есеп. Алғашқы шарттармен берілген дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешу керек.

26.1. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 2, \\ \dot{y} = x - y + 1; \end{cases}$ $x(0) = -1, y(0) = 2.$

26.2. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + 1, \\ \dot{y} = x + y; \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 2.$

26.3. $\begin{cases} \dot{x} = x + 4y, \\ \dot{y} = 2x - y + 9; \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 0.$

26.4. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 1, \\ \dot{y} = 4x - y; \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 1.$

26.5. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2; \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 1.$

26.6. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 5y + 1, \\ \dot{y} = x + 2y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 2.$

26.7. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = -5x - 3y + 2; \end{cases}$ $x(0) = 2,\ y(0) = 0.$

26.8. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - 4y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 3y; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 2.$

26.9. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 6y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 2; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

26.10. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y + 1, \\ \dot{y} = 4x - 2y; \end{cases}$ $x(0) = -1,\ y(0) = 0.$

26.11. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = 2x + y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 5.$

26.12. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y, \\ \dot{y} = -4x; \end{cases}$ $x(0) = 3,\ y(0) = 1.$

26.13. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 1, \\ \dot{y} = -\frac{3}{2}x + y; \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

26.14. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 5y + 2, \\ \dot{y} = 3x + y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 2.$

26.15. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = \frac{5}{2}x - y + 2; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

26.16. $\begin{cases} \dot{x} = 2y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 3; \end{cases}$ $x(0) = -1,\ y(0) = 0.$

26.17. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8y + 1, \\ \dot{y} = 3x + 4y; \end{cases}$ $x(0) = 2,\ y(0) = 1.$

26.18. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y + 2, \\ \dot{y} = 4y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

26.19. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 4x + y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

26.20. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + 1, \\ \dot{y} = -3x; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

26.21. $$\begin{cases} \dot{x} = 3y + 2, \\ \dot{y} = x + 2y; \end{cases}$$ $x(0) = -1,\ y(0) = 1.$

26.22. $$\begin{cases} \dot{x} = x + 4y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 3y; \end{cases}$$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

26.23. $$\begin{cases} \dot{x} = 2y, \\ \dot{y} = 2x + 3y + 1; \end{cases}$$ $x(0) = 2,\ y(0) = 1.$

26.24. $$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y + 2, \\ \dot{y} = 3x; \end{cases}$$ $x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

26.25. $$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 3, \\ \dot{y} = x + 2y; \end{cases}$$ $x(0) = -1,\ y(0) = 0.$

26.26. $$\begin{cases} \dot{x} = y + 3, \\ \dot{y} = x + 2; \end{cases}$$ $x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

26.27. $$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 3, \\ \dot{y} = x - y + 1; \end{cases}$$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

26.28. $$\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + 2, \\ \dot{y} = x + y + 1; \end{cases}$$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

26.29. $$\begin{cases} \dot{x} = 3y, \\ \dot{y} = 3x + 1; \end{cases}$$ $x(0) = 2,\ y(0) = 0.$

26.30. $$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = x - y; \end{cases}$$ $x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

26.31. $$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = 3x; \end{cases}$$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

Бақылау жұмысына арналған тапсырмалар.

Комплекс айнымалды теориялар функциясы

1.

1. Комплекс санды алгебралық түрде жазу керек.

2. Берілген шартты қанағаттандыратын нүктелер жиынын комплекс жазықтықта бейнелеу керек.

3. Комплекс санды тригонометриялық және көрсеткіштік түрлерде жазу қажет.

4. Есептеу қажет.

5. Теңдеудің түбірлерін тауып, оларды комплекс жазықтықта көрсету керек.

1-нұсқа

1. $z=\dfrac{2}{i+1}-\dfrac{(1+i)(2-2i)}{(1-i)(1-2i)}$
2. $|z-1|\le|z+1|$
3. $z=1+2i$
4. $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{15}$
5. $z^2-(2+i)z+2i=0$

2-нұсқа

1. $z=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2-i\sqrt{3}}-\dfrac{(1+i)(\sqrt{3}+2i)}{7}$
2. $\operatorname{Re} z^2<1$
3. $z=\sqrt{3}+i$
4. $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{9}$
5. $z^2-(5+2i)z+5+5i=0$

3-нұсқа

1. $z=\dfrac{(1+i)(2+i)}{2-i}-\dfrac{(1-i)(2-i)}{2+i}$
2. $|1+z|<|2-z|$
3. $z=1+i\sqrt{3}$
4. $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{7}$
5. $z^4+1=0$

4-нұсқа

1. $z=\dfrac{1}{i+1}-\dfrac{(1-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+i)}$
2. $\dfrac{\pi}{4}\le\arg z\le\dfrac{3\pi}{4};\ 1\le\operatorname{Im} z\le 2$
3. $z=-1+i\sqrt{3}$
4. $\left(\dfrac{\sqrt{3}+3i}{1-i}\right)^{8}$
5. $z^3-zi=0$

5-нұсқа

1. $z=\frac{3}{1-i}-\frac{(1+i)(3+3i)}{(1+2i)(1-i)}$
2. $\frac{|z|^2-|z|+1}{2+|z|}<3$
3. $z=-1+2i$
4. $\left(\frac{\sqrt{3}-3i}{1+i}\right)^4$
5. $z^4+i=0$

6-нұсқа

1. $z=\frac{i-3}{3-2i}-\frac{i(1+2i)}{3+2i}$
2. $\operatorname{Re}(z-\frac{1}{z})=0$
3. $z=\sqrt{3}-i$
4. $\left(\frac{3-i}{-3+i}\right)^5$
5. $z^3+1=i$

7-нұсқа

1. $z=\frac{3-2i}{i-3}-\frac{(3+2i)i}{1+i}$
2. $\operatorname{Im}(z-i)\geq 2$
3. $z=-1-i\sqrt{3}$
4. $\left(\frac{\sqrt{3}+3i}{1+i}\right)^7$
5. $z^2-2\sqrt{3}i+2=0$

8-нұсқа

1. $z=\frac{i-1}{i+1}-\frac{(1-2i)(1-i)}{(1+i)(2-2i)}$
2. $1<|1+z|+|z-3|<2$
3. $z=1-2i$
4. $\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^6$
5. $z^4-i=0$

9-нұсқа

1. $z=\frac{2+3i}{3-i}-\frac{3}{(3+i)(1-i)}$
2. $z\cdot\bar{z}+z+\bar{z}+i(z-\bar{z})=0$
3. $z=-\sqrt{3}+i$
4. $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2+2i}\right)^{10}$
5. $z^2+2\sqrt{3}i-2=0$

10-нұсқа

1. $z=\frac{1-i}{3}-\frac{(1-2i)(1+i)}{(1+2i)(1-i)}$
2. $\operatorname{Im}\left(z^2-\bar{z}\right)=2-\operatorname{Im}\bar{z}$
3. $z=1-i\sqrt{3}$
4. $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^8$
5. $z^4-1=0$

11-нұсқа

1. $z=\dfrac{2+3i}{i-3}-\dfrac{2-3i}{(1-i)i}$

2. $|z-2|=\bar{z}$

3. $z=-1-2i$

4. $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^{8}$

5. $z^{3}-i=0$

12-нұсқа

1. $z=\dfrac{i-1}{2}-\dfrac{(1+i)(i+2)}{(1-i)^{2}}$

2. $\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z\geq -1$

3. $z=\sqrt{3}-i$

4. $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{7}$

5. $z^{2}-\sqrt{3}i+3=0$

13-нұсқа

1. $z=\dfrac{i-1}{2+i}-\dfrac{(1+i)(2-i)}{(1-i)}$

2. $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|\leq 1$

3. $z=1-i$

4. $\left(\dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{10}$

5. $z^{3}+i=0$

14-нұсқа

1. $z=\dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{(1+i)(2i+2)}{(1-i)(2-2i)}$

2. $|z-1|<|z+i|$

3. $z=3+i\sqrt{3}$

4. $\left(\dfrac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{8}$

5. $z^{2}+2i+2=0$

15-нұсқа

1. $z=\dfrac{(4+i)(3+i)}{3-i}-\dfrac{(4-i)(3-i)}{3+i}$

2. $2<|z-1+2i|<4$

3. $z=2-2i$

4. $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-3i}\right)^{8}$

5. $z^{4}+i=1$

16-нұсқа

1. $z=\dfrac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2i}+\dfrac{(1+i)i}{\sqrt{3}+2i}$

2. $-1<\operatorname{Re} z<5,\quad 0<\operatorname{Im} z<1$

3. $z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

4. $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+3i}\right)^{6}$

5. $z^{3}+zi=0$

17-нұсқа

1. $z=\dfrac{i-i}{i+1}-\dfrac{(1+i)(1-2i)}{(1-i)(1+2i)}$

2. $|z-3|<\bar{z}$

3. $z=-2+i2\sqrt{3}$

4. $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}-3i}\right)^5$

5. $z^2-2\sqrt{3}i+2=0$

18-нұсқа

1. $z=\dfrac{3-i}{2+3i}-\dfrac{(3+i)(1-i)}{2i}$

2. $|z|>2+\operatorname{Im}z$

3. $z=-3-i\sqrt{3}$

4. $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+3i}\right)^{10}$

5. $z^3-i-1=0$

19-нұсқа

1. $z=\dfrac{3}{1+i}-\dfrac{(1-2i)(1+i)}{(1-i)(1+2i)}$

2. $4\le|z-1|+|z+1|\le 8$

3. $z=1+i$

4. $\left(\dfrac{-i}{2\sqrt{3}+2i}\right)^3$

5. $z^4-16=0$

20-нұсқа

1. $z=\dfrac{i-3}{2+3i}+\dfrac{i(1+i)}{2-3i}$

2. $|z-i|+|z+i|>4$

3. $z=-3+i\sqrt{3}$

4. $\left(\dfrac{i}{2\sqrt{3}-2i}\right)^5$

5. $z^2+\sqrt{3}i=3$

21-нұсқа

1. $z=\dfrac{1+i}{2}+\dfrac{(1+i)(2i+2)}{(1-i)i}$

2. $|z-4|<|1-4\bar{z}|$

3. $z=-2-2i$

4. $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{10}$

5. $z^2-2i+2=0$

22-нұсқа

1. $z=\dfrac{(1-i)(2+i)}{2-i}-\dfrac{(1+i)(2-i)}{(2+i)}$

2. $\dfrac{3}{4}<\operatorname{Im}z+|z|^2<\dfrac{7}{4}$

3. $z=2+2\sqrt{3}i$

4. $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^5$

5. $z^4+16=0$

23-нұсқа

1. $z=\dfrac{2}{i-2}-\dfrac{(1-i)^2}{1+i}$

2. $|z+i|<|z-i|$

3. $z=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

4. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^7$

5. $z^2-2\sqrt{3}i-2=0$

24-нұсқа

1. $z=\dfrac{1+i}{1-i}-\dfrac{(1-i)(2-2i)}{(1+i)(2+2i)}$

2. $1\le|z-1-i|<3$

3. $z=-1+i$

4. $\left(\dfrac{-\sqrt{3}-3i}{1-i}\right)^6$

5. $z^3-i=1$

25-нұсқа

1. $z=\dfrac{3+2i}{i+3}-\dfrac{(3-i)(i+1)}{i}$

2. $|z|>1-\operatorname{Re}z$

3. $z=3-i\sqrt{3}$

4. $\left(\dfrac{2+2\sqrt{3}i}{i}\right)^8$

5. $z^4+1=i$

(1-*бақылау жұмысындағы 5-тапсырманы келесі №1-20-тапсырмаға ауыстыруға болады*)

№ 1-20-теңдеуді шешу және оның түбірлерін комплекс жазықтықта бейнелеу керек

1. $z^5 + \frac{i}{1-i} = 0;$

2. $z^3 + 4 = 4\sqrt{3}i;$

3. $z^3 + \frac{2}{1-i} = 0;$

4. $z^4 - \frac{2i}{1+\sqrt{3}i} = 0;$

5. $z^5 + \sqrt{3}i = 3;$

6. $z^3 + \frac{2}{\sqrt{3}-i} = 0;$

7. $z^4 + \frac{i}{1+i} = 0;$

8. $z^5 + \sqrt{3}i = 1;$

9. $z^3 + 32\sqrt{3}i = 32;$

10 $z^3 + 2\sqrt{3}i = 2;$

11. $z^4 + \frac{2i}{\sqrt{3}-i} = 0;$

12. $z^3 + \frac{2}{\sqrt{3}-i} = 0;$

13. $z^5 + \frac{i}{1+i} = 0;$

14. $z^5 - \sqrt{3}i = 1;$

15. $z^3 - 4 = 4\sqrt{3}i;$

16. $z^4 + 32\sqrt{2} = 32\sqrt{2}i;$

17. $z^3 - \frac{2}{1-i} = 0;$

18. $z^4 + \frac{2i}{1-\sqrt{3}i} = 0;$

19. $z^5 + \sqrt{2}i = \sqrt{2};$

20. $z^4 + \frac{2i}{1+\sqrt{3}i} = 0.$

2.

№21-40. Берілген $u(x;y)$ **(**$v(x;y)$**)** функциясы қандай да бір аналитикалық функцияның нақты **(**жорамал**)** бөлігі болатынын тексеру керек. Белгілі $u(x;y)$ – нақты немесе

$v(x;y)$ – жорамал бөлігі және $f(z_0)$ мәні бойынша z_0 нүктенің маңайында аналитикалық $f(z)$ функциясын тұрғызу керек.

21. $v = e^{-y}\sin x + y, \quad f(0) = 1;$

22. $v = x^2 - y^2 + 2x + 1, \quad f(0) = i;$

23. $u = x^3 - 3xy^2 - x, \quad f(0) = 0$

24. $u = e^{-y}\cos x, \quad f(0) = 1;$

25. $v = e^{-y}\sin x, \quad f(0) = 1;$

26. $u = x^2 - y^2 - 2y, \quad f(0) = 0;$

27. $v = 3x^2y - y^3 - y, \quad f(0) = 0;$

28. $u = x^2 - y^2 - 2x + 1, \quad f(0) = 1;$

29. $v = 3x^2y - y^3, \quad f(0) = 1;$

30. $u = e^{-y}\cos x + x, \quad f(0) = 1;$

31. $v = 2xy + x, \quad f(0) = 0;$

32. $u = x^3 - 3xy^2 + 1, \quad f(0) = 1;$

33. $u = -2xy - 2y, \quad f(0) = i;$

34. $v = e^x\cos y, \quad f(0) = 1 + i;$

35. $v = 2xy - 2y, \quad f(0) = 1;$

36. $v = 2xy + y, \quad f(0) = 0;$

37. $u = x^2 - y^2 + x, \quad f(0) = 0;$

38. $v = 2xy + 2x, \quad f(0) = 0;$

39. $u = y - 2xy, \quad f(0) = 0;$

40. $v = x^2 - y^2 - x, \quad f(0) = 0.$

№ 41-60. Берілген функцияны көрсетілген аймақта Лоран қатарына жіктеу керек:

41. $\dfrac{1}{(z-2)(z+3)}, \quad 2 < |z| < 3;$

42. $\dfrac{1}{z(z+1)}, \quad 1 < |z| < +\infty;$

43. $\dfrac{2z+3}{z^2+3z+2}, \quad 1 < |z| < 2;$

44. $\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}, \quad |z| < 1;$

45. $\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}, \quad 0 < |z-2| < 1;$

46. $\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}, \quad 2 < |z| < +\infty;$

51. $\dfrac{1}{z^2-5z+6}, \quad 3 < |z| < +\infty;$

52. $\dfrac{1}{z^2+2z-8}, \quad 2 < |z+2| < 4;$

53. $\dfrac{z^2-2z+3}{z^3-3z+2}, \quad |z| < 1;$

54. $\dfrac{2z-4}{(z-3)(z-1)}, \quad 1 < |z| < 3;$

55. $\dfrac{2z-3}{(z-1)(z-2)}, \quad 0 < |z-1| < 1;$

56. $\dfrac{1}{z^2-5z+6}, \quad 2 < |z| < 3;$

47. $\dfrac{2z+2}{z^2-4z+3}$, $1<|z|<3$;

48. $\dfrac{2z+2}{z^2-4z+3}$, $|z|>3$;

49. $\dfrac{1}{z^2-7z+12}$, $3<|z|<4$;

50. $\dfrac{1}{z^2+z}$, $0<|z|<1$;

57. $\dfrac{1}{z^2-5z+6}$, $0<|z|<2$;

58. $\dfrac{z+3}{z^2-6z+5}$, $1<|z|<5$;

59. $\dfrac{z+3}{z^2-6z+5}$, $|z|>5$;

60. $\dfrac{1}{z^2-7z+12}$, $|z|>4$.

3.

1 Келесі функциялардың барлық ақырлы және ақырсыз нүктелердегі шегерімдерін табу керек. Ерекше нүктелердің сипатын беру қажет.

2. ∂D-тұйық контур бойынша интегралдардарды есептеу керек.

3. Меншіксіз интегралдарды есептеу қажет.

1-нұсқа

1. $\dfrac{1}{z^6(z-2)}$

2. $\int\limits_{\partial D} \sin\dfrac{1}{z-1}dz$, $\quad D:|z-1|>1$

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{(x-1)e^{ix}}{x^2-2x+2}dx$;

б) $\int\limits_{0}^{2\pi} \dfrac{d\varphi}{2+\sin\varphi}$

2-нұсқа

1. $\dfrac{\sin z}{\left(z^2+1\right)^2}$

2. $\int\limits_{\partial D} \exp\dfrac{1}{1-z}\dfrac{dz}{z}, D:|z-2|+|z+2|<6$

3. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \dfrac{x^4dx}{\left(a+bx^2\right)^4}$, $\quad a>0,\ b>0$;

б) $\int\limits_{0}^{2\pi} \dfrac{\sin^2 x}{5+4\cos x}dx$

3-нұсқа

1. $\sin z \sin \frac{1}{z}$

2. $\int\limits_{\partial D} z \cos \frac{z}{z+1} dz, \quad D: |z| > 2$

3. a) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx;$

б) $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$

4-нұсқа

1. $\frac{\cos z}{\left(z^2+1\right)^2}$

2. $\int\limits_{\partial D} \frac{zdz}{e^{z^2}-1}, \quad D: |z| > 4$

3. a) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)e^{-3ix}}{x^2-2x+5} dx;$

б) $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{2+\cos\varphi}{2-\sin\varphi} d\varphi$

5-нұсқа

1. $\frac{e^z}{(z-1)^2}$

2. $\int\limits_{\partial D} \sin \frac{z}{z+1} dz, \quad D: |z| > 3$

3. a) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(x^3+5x\right)\sin x}{x^4+2x^2+2} dx;$

б) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$

6-нұсқа

1. $z^2 \sin \frac{\pi}{z}$

2. $\int\limits_{\partial D} z \sin \frac{z+1}{z-1} dz, \quad D: |z| < 2$

3. a) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(2x^3+13x\right)}{x^4+3x^2+4.5} \sin x dx;$

б) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{2+3x} dx$

7-нұсқа

1. $ze^{\frac{1}{z-1}}$

2. $\int\limits_{\partial D} \frac{z^2 \sin^2 \frac{1}{z}}{(z-1)(z-2)} dz, \quad D: |z| < 3$

8-нұсқа

1. $\frac{e^{z^2}}{z^{2n+1}}$

2. $\int\limits_{\partial D} \frac{z^3}{z^4-1} dz, \quad D: |z| < 2$

3. a) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^4 + 2x^2 + 2} dx, \quad a > 0;$

б) $\int\limits_0^{\pi} \operatorname{tg}(x + 4i) dx$

3. a) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 4x^2 + 8} dx;$

б) $\int\limits_0^{2\pi} \operatorname{ctg}(x - 1) dx$

9-нұсқа

1. $\frac{1 + z^8}{z^4 (z^4 + 1)} \cos z$

2. $\int\limits_{\partial D} \frac{z}{z + 3} e^{\frac{1}{3z}} dz, \quad D: |z| > 4$

3. a) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx;$

б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{5 + 4\cos x}$

10-нұсқа

1. $\frac{1 + z^8}{z^6 (z + 2)}$

2. $\int\limits_{\partial D} \frac{\sin z}{(z + 1)^3} dz, \quad D: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} < 2^{\frac{2}{3}}$

3. a) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + a^2)^2} dx, \quad a > 0;$

б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x} dx$

11-нұсқа

1. $\operatorname{ctg} \pi z$

2. $\int\limits_{\partial D} \frac{z^3 dz}{e^{z^2} - 1} \quad (D: |z| < 4)$

3. a) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^6 dx}{(x^4 + a^4)^2} \quad a > 0;$

б) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(3-x)\sqrt{1 - x^2}}$

12-нұсқа

1. $\operatorname{ctg}^2 \pi z$

2. $\int\limits_{\partial D} \frac{e^{\pi z}}{2z - i} dz \quad \begin{pmatrix} D: |z| < 1 \\ \operatorname{Im} z > 0 \end{pmatrix}$

3. a) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 5ix - 4)^2}$

б) $\int\limits_0^{\pi} \operatorname{tg}(x + 8i) dx$

13-нұсқа

1. $\dfrac{1}{e^z - 2}$

2. $\displaystyle\int_{\partial D} \exp\frac{1}{1-z}\frac{dz}{z}$

$(D: |z-2| + |z+2| < 6)$

3. а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}dx}{x^2 - 2ix - 1}$;

б) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}dx}{9+8x}$

14-нұсқа

1. $\cos\pi\dfrac{z+2}{2z}$

2. $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{z^2 dz}{e^{2\pi i z^3} - 1} \quad \left(D: |z| < \sqrt[3]{\frac{7}{2}}\right)$

3. а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2ix - 1}$;

б) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \operatorname{ctg}(x-9)dx$

15-нұсқа

1. $\dfrac{1}{e^z + 1}$

2. $\displaystyle\int_{\partial D} z\cos\frac{z}{z+1}dz \quad (D: |z| > 2)$

3. а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-3)e^{ix}dx}{x^2 - 6x + 109}$;

б) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{(13+12x)\sqrt{1-x^2}}dx$

16-нұсқа

1. $\dfrac{1}{\sin\pi z}$

2. $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{\sin z dz}{(z^3 - 1)(z-i)} \quad (D: |z-1| < 1)$

3. а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2 + 2x + 10}dx$;

б) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{2 - \sin^2\varphi}$

17-нұсқа

1. $ze^{\frac{1}{z-1}}$

2. $\int\limits_{\partial D} \frac{z}{e^{z^2}-1}$ $(D: |z| < 3)$

3. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^6 dx}{\left(x^4+2^4\right)^2}$;

б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{dx}}{\sin^6 x + \cos^6 x}$

18-нұсқа

1. $z\cos^2 \frac{\pi}{z}$

2. $\int\limits_{\partial D} \frac{z}{e^{z^2}-1} dz$ $(D: |z| > 5)$

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3}$;

б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{8+\sin\varphi}$

19-нұсқа

1. $z^n e^{\frac{a}{z}}$

2. $\int\limits_{\partial D} \frac{ctgz}{z}$ $(D: |z| > 1)$

3. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^4+2x^2+2} dx$;

б) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{4+7x} dx$

20-нұсқа

1. $\frac{1}{\sin z^2}$

2. $\int\limits_{\partial D} \frac{\sin z\, dz}{\left(z^3-1\right)(z-i)}$ $(D: |z-1| < 1)$

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2+2x+10}$;

б) $\int\limits_0^{2\pi} \operatorname{ctg}(x-2i) dx$

21-нұсқа

1. $\dfrac{2}{e^{z}+\pi}$

2. $\int\limits_{\partial D} z\sin\dfrac{z+1}{z-1}dz \quad (D:|z|>2)$

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{(x-1)\cos 2x}{x^{2}-4x+5}$;

б) $\int\limits_{0}^{\pi}\mathrm{tg}(x+3i)dx$

22-нұсқа

1. $\cos\pi\dfrac{z+2}{2z}$

2. $\int\limits_{\partial D}\dfrac{e^{\pi z}}{(2z^{2}-i)}dz \quad \begin{pmatrix} D:|z|<1 \\ \operatorname{Re} z>0 \\ \operatorname{Im} z>0 \end{pmatrix}$

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x\cos x}{x^{2}-2x+10}dx$;

б) $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{(7-a)\sqrt{1-x^{2}}}$

23-нұсқа

1. $\dfrac{\cos z}{z^{2}-\dfrac{\pi}{4}}$

2. $\int\limits_{\partial D}\dfrac{z}{(z+3)(e^{z}-1)} \quad (D:|z|<4)$

3. а) $\int\limits_{0}^{\infty}\dfrac{x^{2}dx}{(x^{2}+5ix-4)^{2}}$;

б) $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{d\varphi}{6+\sin\varphi}$

24-нұсқа

1. $\dfrac{e^{z}}{(z-1)^{2}}$

2. $\int\limits_{\partial D}\dfrac{z^{2}}{e^{2\pi i z^{3}}-1}dz \quad \left(D:|z|>\sqrt[3]{\dfrac{9}{2}}\right)$

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{(x^{2}+4)(x^{2}+1)^{2}}$;

б) $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{\sin^{2}x+5\cos^{2}x}$

25-нұсқа

1. $z\cos^2\dfrac{\pi}{4}$

2. $\displaystyle\int\limits_{\partial D}\frac{z^2\sin^2\dfrac{1}{z}}{(z-1)(z-2)}dz \quad (D:|z|>3)$

3. а) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+1}dx;$

б) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\cos 2x}{\left(1+3\cos^3 x\right)\left(1+8\sin^2 x\right)}dx$

26-нұсқа

1. $\dfrac{\left(z^{10}1\right)\cos\dfrac{1}{z}}{\left(z^5+2\right)\left(z^6-1\right)}$

2. $\displaystyle\int\limits_{\partial D}\frac{\mathrm{ctg}z}{z}dz \quad (D:|z|>1)$

3. а) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+1)e^{-3ix}dx}{x^2-2x+5};$

б) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{2+\cos\varphi}{2-\sin\varphi}d\varphi$

27-нұсқа

1. $\dfrac{1}{(z-1)^2\left(e^z-\dfrac{\pi}{2}\right)}$

2. $\displaystyle\int\limits_{\partial D}\frac{z^3}{z^4-1}dz \quad (D:|z-1|<1.5)$

3. а) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x\sin 2x}{x^2+4}dx;$

б) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{(4+x)\sqrt{1-x^2}}$

28-нұсқа

1. $\dfrac{\sin\dfrac{1}{z}}{z-1}$

2. $\displaystyle\int\limits_{\partial D}z\cos\frac{z}{z+1}dz \quad (D:|z|>2)$

3. а) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(x^3+5x\right)\sin x\,dx}{x^4+4x^2+8};$

б) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\left(a^2+1\right)\sqrt{1-x^2}}$

Амалдық қисап

Бақылау жұмысы

№ 4

1. Берілген функция түпнұсқа бола ала ма?

2. Түпнұсқаның L бейнесін табу керек.

3. L бейнеге сәйкес түпнұсқаны табу қажет.

4. Интегралды есептеместен, оның L бейнесін табу керек.

5. Интегралды есептеу қажет.

6. Коши есебінің шешімін табу керек.

7. Дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешу қажет.

1-нұсқа

1. $f(t) = 3^t \cdot \sigma_0(t)$

2. $f\left(t\right) = \dfrac{\sin 2t}{t} + \sin 2t \cos 3t;$

3. $F\left(p\right) = \dfrac{2p+7}{\left(p+1\right)\left(p^2 - 3p\right)};$

4. $\int_0^t \tau e^{\tau} \sin 2\tau d\tau$

5. $\int_0^t \sin\tau \cos\left(t-\tau\right) d\tau$

6. $x'' + 2x' + x = t^2 + 5t + 4; x\left(0\right) = -1; x'\left(0\right) = 0$

7. $\begin{cases} x' + x - y = 2t + 5 \\ y' + 2x' - 3x = t \end{cases} x\left(0\right) = 0; y\left(0\right) = 1$

2-нұсқа

1. $f(t) = t^3 \cdot \chi(t)$

2. $f\left(t\right) = \dfrac{\sin 2t}{t} + e^{2t} cht;$

3. $F\left(p\right) = \dfrac{p}{\left(2p-1\right)\left(p-3\right)};$

4. $\int_0^t \tau \sin 2\tau d\tau$

5. $\int_0^t \sin\tau \sin\left(t-\tau\right) d\tau$

6. $x' - x = 1; x\left(0\right) = -1$

7. $\begin{cases} x' + x - y = \sin t, \\ y' + 2x = \sin t, \end{cases} x\left(0\right) = 0; y\left(0\right) = 1$

3-нұсқа

1. $f(t) = e^{it} \cdot \chi(t)$

2. $f\left(t\right) = \dfrac{\sin^2 2t}{t} + \dfrac{1}{2^t};$

3. $F\left(p\right) = \dfrac{p}{\left(2p+1\right)\left(p+3\right)};$

4. $\int_0^t \tau \cos 2\tau d\tau$

5. $\int_0^t \sin\tau \cdot e^{\pi/2-\tau} d\tau$

6. $x'' + 3x' = e^t; x\left(0\right) = 0; x'\left(0\right) = -1$

7. $\begin{cases} x' - 2x + y = 3 - 4t \\ y' + x + 2y = 4 + t \end{cases} x\left(0\right) = 0; y\left(0\right) = 2$

4-нұсқа

1. $f(t)=e^{-t^2}\cdot\chi(t)$
2. $f\left(t\right)=\dfrac{\sin t\cdot\sin 3t}{t}+2sh4t-t^2;$
3. $F\left(p\right)=\dfrac{p}{\left(2p-1\right)\left(p^2-4\right)};$
4. $\int_0^t \tau^2\sin 2\tau d\tau$
5. $\int_0^t \left(t-x\right)^2\cos 2xdx$
6. $x''+3x'=e^t;x\left(0\right)=0;x'\left(0\right)=-1$
7. $\begin{cases} x''+y'-x=4-t^2 \\ x'-2y+2x=2t^2 \end{cases} x\left(0\right)=-1;x'\left(0\right)=0;y\left(0\right)=-1$

5-нұсқа

1. $f(t)=\dfrac{1}{(t-1)^2}\cdot\chi(t)?$
2. $f\left(t\right)=\dfrac{1-e^{2t}}{te^t}-e^t\cos^2 t;$
3. $F\left(p\right)=\dfrac{p}{\left(p^2-1\right)\left(p^2+3\right)};$
4. $\int_0^t \tau^2 e^{2\tau}d\tau$
5. $\int_0^t \sin\tau e^{\pi/2-\tau}d\tau$
6. $x''-4x'+x=1-2e^t;x\left(0\right)=2;x'\left(0\right)=1$
7. $\begin{cases} x'+x-y=2 \\ y'+x+y=2t \end{cases} x\left(0\right)=0;y\left(0\right)=-1$

6-нұсқа

1. $f(t)=\ln t\cdot\chi(t)$?

2. $f\left(t\right)=\dfrac{\cos 2t}{t}+t^2e^{t-3}$;

3. $F\left(p\right)=\dfrac{p}{\left(2p+1\right)\left(p+3\right)}$;

4. $\int_0^t \tau e^{\tau}\sin 2\tau d\tau$

5. $\int_0^t \tau\left(\pi-\tau\right)\sin\left(\pi-\tau\right)d\tau$

6. $x''+x=\cos t; x\left(0\right)=-1; x'\left(0\right)=1$

7. $\begin{cases} x'+2x-y=\sin t \\ y'-x=-1 \end{cases} x\left(0\right)=1; y\left(0\right)=1$

7-нұсқа

1. $f(t)=\operatorname{tg} t\cdot\chi(t)$?

2. $f\left(t\right)=\dfrac{\cos^2 2t}{t}+2te^{t-1}$;

3. $F\left(p\right)=\dfrac{p-1}{\left(2p-1\right)\left(p^2+3\right)}$;

4. $\int_0^t \tau\cos^2 2\tau d\tau$

5. $\int_0^t \cos\tau\cdot\chi\left(t-\tau\right)d\tau$

6. $x''+x=1; x\left(0\right)=-1; x'\left(0\right)=0$

7. $\begin{cases} 2x''-x'+x-y'=\sin t \\ y'+2x'-x=2t \end{cases} x\left(0\right)=0; y\left(0\right)=1$

8-нұсқа

1. $f(t)=\frac{1}{(t-1)^2}\cdot\chi(t)$?

2. $f\left(t\right)=\frac{\sin 2t-\sin 4t}{t}+e^{-2t+1}$;

3. $F\left(p\right)=\frac{p^2+3}{\left(2p+1\right)\left(p-3\right)}$;

4. $\int_0^t \tau\sin^2 2\tau d\tau$

5. $\int_0^t \sin\tau\sin\left(t-\tau\right)d\tau$

6. $x''+2x'+x=t^2+5t+4; x\left(0\right)=-1; x'\left(0\right)=0$

7. $\begin{cases} x'+2x-y=t \\ y'+2x=1-t \end{cases} x\left(0\right)=1; y\left(0\right)=1$

9-нұсқа

1. $f(t)=e^{(2+i)t}\cdot\chi(t-1)$?

2. $f\left(t\right)=\frac{\cos 2t\cdot\cos 6t}{t}-e^t\cos t$;

3. $F\left(p\right)=\frac{p}{\left(2p-1\right)\left(p^2+4\right)}$;

4. $\int_0^t \tau\, \mathrm{s}h 2\tau d\tau$

5. $\int_0^t \tau\sin\left(t-\tau\right)d\tau$

6. $x'-4x=1-t^2; x\left(0\right)=1$

7. $\begin{cases} x'+x+2y=2t \\ y'+x-y=2-t \end{cases} x\left(0\right)=0; y\left(0\right)=-1$

10-нұсқа

1. $f(t) = \sin t \cdot \chi(t+1)$?

2. $f(t) = \dfrac{\sin 2t}{t} + 3e^{-t};$

3. $F(p) = \dfrac{p+2}{(2p-1)(p-3)(p^2+4)};$

4. $\int_0^t \tau \cdot ch2\tau d\tau$

5. $\int_0^t \tau^3 \sin(t-\tau) d\tau$

6. $x'' - x' - 2x = 2e^t; x(0) = -1; x'(0) = 1$

7. $\begin{cases} x' + x - y = 2t - 3 \\ y' + 2x' - y = 4 \end{cases} x(0) = 0; y(0) = 1$

11-нұсқа

1. $f(t) = \dfrac{1}{t} \cdot \chi(t-1)$?

2. $f(t) = \dfrac{\sin 2t}{t} - te^{-t} sht;$

3. $F(p) = \dfrac{p^2+1}{(2p-1)(p^2-3p)};$

4. $\int_0^t \tau \cos 2\tau d\tau$

5. $\int_0^t \sin\tau \sin(t-\tau) d\tau$

6. $x'' - x = 1; x(0) = -1; x'(0) = 0$

7. $\begin{cases} x' + 5x - y'' = \sin t \\ y' + 2x = t \end{cases} x(0) = 0; y(0) = 1$

12-нұсқа

1. $f(t) = e^{it^2} \cdot \chi(t)$

2. $f\left(t\right) = \dfrac{\sin 2t}{t} - te^{2t}\cos 3t;$

3. $F\left(p\right) = \dfrac{p+5}{\left(2p^2 - p\right)\left(p-3\right)};$

4. $\int_0^t \tau^2 \sin 2\tau d\tau$

5. $\int_0^t e^{\tau} \sin\left(t-\tau\right) d\tau$

6. $x'' - x' = te^t 1; x\left(0\right) = x\left(0\right) = 0$

7. $\begin{cases} x' + x - y' = \mathrm{s}\,ht \\ \quad y' + 2x = t \end{cases} x\left(0\right) = 0; y\left(0\right) = 1$

13-нұсқа

1. $f(t) = 2^{\sqrt[3]{1+t^4}} \cdot \chi(t)\,?$

2. $f\left(t\right) = \dfrac{\sin 2t}{t} + \left(t-3\right)^3 \chi\left(t-3\right);$

3. $F\left(p\right) = \dfrac{2p-1}{\left(2p^2 + 3p\right)\left(p-3\right)};$

4. $\int_0^t \tau e^{\tau} \cos 2\tau d\tau$

5. $\int_0^t \sin \tau e^{\left(t-\tau\right)} d\tau$

6. $x'' - x' = te^{2t}; x\left(0\right) = x'\left(0\right) = 1$

7. $\begin{cases} x' + x - y = t^2 \\ y' + 2x = 2 + t \end{cases} x\left(0\right) = 0; y\left(0\right) = 1$

14-нұсқа

1. $f(t) = 3^t \cdot \chi(t)$?

2. $f(t) = \dfrac{\cos 2t}{t} - ch(2t-1)\chi(t-1/2);$

3. $F(p) = \dfrac{3p-7}{(p^2-1)(p^2+3)};$

4. $\int_0^t \tau \sin 2\tau d\tau$

5. $\int_0^t \sin^2 \tau \sin(t-\tau) d\tau$

7. $x''' - x' = t-1; x(0) = -1; x'(0) = x''(0) = 0$

8. $\begin{cases} x' + x - y = \sin t \\ y' + 2x = \sin t \end{cases} x(0) = 0; y(0) = 1$

15-нұсқа

1. $f(t) = \ln t \cdot \chi(t)$?

2. $f(t) = (t-\pi/3)\sin(3t-\pi)\chi(t-\pi/3);$

3. $F(p) = \dfrac{p}{(2p+1)^2(p-3)};$

4. $\int_0^t \tau e^{3\tau} d\tau$

5. $\int_0^t (1-2\tau)\tau \sin(t-\tau) d\tau$

6. $x'' - x' = t^2 - 1; x(0) = -1; x(0) = 0$

7. $\begin{cases} x'' + x - y' = 2+t \\ y' + 2x = \sin t \end{cases} x(0) = 0; y(0) = 1$

16-нұсқа

1. $f(t)=t^3\cdot\chi(t)$?
2. $f\left(t\right)=te^{2t}cos3t-\sin\left(t-2\right)\chi\left(t-2\right);$
3. $F\left(p\right)=\dfrac{p+3}{\left(2p-1\right)\left(p^2-5p+6\right)};$
4. $\int_0^t\tau^2e^\tau\sin 2\tau d\tau$
5. $\int_0^t\sin\tau\left(t-\tau\right)^3d\tau$
6. $x'-x=e^t-1; x\left(0\right)=-1$
7. $\begin{cases}x'+x+2y=t^2\\ y'+2x=2t-3\end{cases} x\left(0\right)=0; y\left(0\right)=1$

17-нұсқа

1. $f(t)=e^{it}\cdot\chi(t)$?
2. $f\left(t\right)=e^{3t}cht-t\cos 3t;$
3. $F\left(p\right)=\dfrac{p}{\left(2p-1\right)\left(p-3\right)};$
4. $\int_0^t\tau e^\tau\cos 2\tau d\tau$
5. $\int_0^t\sin\tau\sin\left(t-\tau\right)d\tau$
6. $x''+2x'+x=t^2+5t+4; x\left(0\right)=-1; x'\left(0\right)=0$
7. $\begin{cases}x'+x-y=\sin t\\ y'+2x=\sin t\end{cases} x\left(0\right)=0; y\left(0\right)=1$

18-нұсқа

1. $f(t)=e^{-t^2}\cdot\chi(t)$?

2. $f(t)=\dfrac{\sin^2 2t}{t}+sh(2t+1)\chi(t+1/2)$;

3. $F(p)=\dfrac{p}{(2p-1)(p-3)}$;

4. $\int_0^t \tau\sin 4\tau d\tau$

5. $\int_0^t \cos\tau\sin(t-\tau)d\tau$

6. $x''-x'+x=t^2-2; x(0)=-1; x(0)=0$

7. $\begin{cases} x'+2x-y=2t-1 \\ y'+2x'=t^2 \end{cases} x(0)=0; y(0)=1$

19-нұсқа

1. $f(t)=\operatorname{tg}t\cdot\chi(t)$?

2. $f(t)=\dfrac{\sin 2t}{t}-e^{t-1}t^2$;

3. $F(p)=\dfrac{p-3}{(2p^2-p)(p+3)}$;

4. $\int_0^t \tau^2 e^{-2\tau}d\tau$

5. $\int_0^t \sin\tau\, sh(t-\tau)d\tau$

6. $x''+2x'-x=3t-1; x(0)=-1$

7. $\begin{cases} x'+x-y=t^3-2 \\ y'+2x=2t \end{cases} x(0)=0; y(0)=1$

20-нұсқа

1. $f(t)=\dfrac{1}{(t-1)^2}\cdot\chi(t)$?

2. $f\left(t\right)=\dfrac{\cos 2t}{t}+t^2e^{t-2};$

3. $F\left(p\right)=\dfrac{3p+1}{\left(p^3-1\right)\left(p-3\right)};$

4. $\int_0^t \tau\cos 2\tau d\tau$

5. $\int_0^t \sin\tau e^{\pi-\tau}d\tau$

6. $x''-x'+x=3t-1; x\left(0\right)=-1; x\left(0\right)=0$

7. $\begin{cases} x'+2x-y=t \\ y'+2x=1-t \end{cases} x\left(0\right)=1; y\left(0\right)=1$

21-нұсқа

1. $f(t)=\ln t\cdot\chi(t)$?

2. $f\left(t\right)=\dfrac{\sin 2t}{t}-3sh3t-t^2;$

3. $F\left(p\right)=\dfrac{3p+2}{\left(2p^2-4p\right)\left(p-3\right)};$

4. $\int_0^t \tau\sin^2 2\tau d\tau$

5. $\int_0^t \sin\tau\cdot ch\left(t-\tau\right)d\tau$

6. $x''+x=1; x\left(0\right)=-1; x'\left(0\right)=0$

7. $\begin{cases} x'+x-y'=\sin t \\ y'+2x=t \end{cases} x\left(0\right)=0; y\left(0\right)=1$

22-нұсқа

1. $f(t) = \operatorname{tg} t \cdot \chi(t)$?

2. $f\left(t\right) = te^{-2t}\cos 3t + sh\left(t-3\right)\chi\left(t-3\right);$

3. $F\left(p\right) = \dfrac{p+3}{\left(p^2-4\right)\left(p-1\right)};$

4. $\int_0^t \tau\cos^2 2\tau d\tau$

5. $\int_0^t \sin 2\tau\left(t-\tau\right)^2 d\tau$

6. $x'' + 2x' - x = 3t - 1; x\left(0\right) = -1$

7. $\begin{cases} x' + x - y = 2 \\ y' + x + y = 2t \end{cases} x\left(0\right) = 0; y\left(0\right) = -1$

23-нұсқа

1. $f(t) = e^{(2+i)t} \cdot \chi(t-1)$?

2. $f\left(t\right) = \dfrac{\sin 2t}{t} + \sin 2t\cos 3t;$

3. $F\left(p\right) = \dfrac{2p+7}{\left(p+1\right)\left(p^2-3p\right)};$

4. $\int_0^t \tau e^{\tau}\sin 2\tau d\tau$

5. $\int_0^t \sin\tau\cos\left(t-\tau\right)d\tau$

6. $x'' + 2x' + x = t^2 + 5t + 4; x\left(0\right) = -1; x'\left(0\right) = 0$

7. $\begin{cases} x' + x - y = 2t + 5 \\ y' + 2x' - 3x = t \end{cases} x\left(0\right) = 0; y\left(0\right) = 1$

24-нұсқа

1. $t\cos\left(t+3\right)\chi\left(t+3\right)-\left(2t-5\right)^2\chi\left(2t-5\right)$

2. $f\left(t\right)=e^{t^2}$?

3. $F\left(p\right)=\dfrac{p+1}{p\left(p^2+4\right)};$

4. $\int_0^t \tau^2 e^{-\tau}\sin\tau d\tau$

5. $\int_0^t \cos\tau\sin\left(t-\tau\right)d\tau$

6. $x''-x'=te^t 1; x\left(0\right)=x\left(0\right)=0$

7. $\begin{cases} x'+5x-y''=\sin t \\ y'+2x=t \end{cases} x\left(0\right)=0; y\left(0\right)=1$

25-нұсқа

1. $f(t)=\dfrac{1}{t}\cdot\chi(t-1)$?

2. $f\left(t\right)=\dfrac{\sin^2 2t}{t}-\dfrac{1}{3^t};$

3. $F\left(p\right)=\dfrac{3p-5}{\left(2p-1\right)\left(p^2-3p\right)};$

4. $\int_0^t \tau^2\sin^2 2\tau d\tau$

5. $\int_0^t \cos\tau\cos\left(t-\tau\right)d\tau$

6. $x'-4x=1-t^2; x\left(0\right)=1$

7. $\begin{cases} x'+x-y=t^3-2 \\ y'+2x=2t \end{cases} x\left(0\right)=0; y\left(0\right)=1$

26-нұсқа

1. $f(t)=e^{it^2}\cdot\chi(t)$?
2. $f\left(t\right)=e^{2t-1}sh2t;$
3. $F\left(p\right)=\dfrac{p}{\left(2p-1\right)\left(p-3\right)};$
4. $\int_0^t\tau\cdot ch2\tau d\tau$
5. $\int_0^t sh\tau\cdot sh\left(t-\tau\right)d\tau$
6. $x'-4x=1-t^2;x\left(0\right)=1$
7. $\begin{cases}x''+y'-x=4-t^2\\ x'-2y+2x=2t^2\end{cases}x\left(0\right)=-1;x'\left(0\right)=0;y\left(0\right)=-1$

27-нұсқа

1. $f(t)=2^{\sqrt[3]{1+t^4}}\cdot\chi(t)$?
2. $f\left(t\right)=3e^{1-t}-\dfrac{\sin^2 2t}{t};$
3. $F\left(p\right)=\dfrac{p}{\left(2p-1\right)\left(p-3\right)};$
4. $\int_0^t\tau\cos^2 2\tau d\tau$
5. $\int_0^t e^{\tau}\sin\left(t-\tau\right)d\tau$
6. $x''-4x'+x=1-2e^t;x\left(0\right)=2;x'\left(0\right)=1$
7. $\begin{cases}x'+x''-y'=3t\\ y'+2x=t-3\end{cases}x\left(0\right)=0;y\left(0\right)=1;x'\left(0\right)=0$

28-нұсқа

1. $f(t)=3^t\cdot\chi(t)$?

2. $f\left(t\right)=\dfrac{\mathrm{s}h2t}{t}-e^{2-t}\sin 3t;$

3. $F\left(p\right)=\dfrac{3p-1}{\left(2p-1\right)\left(p-3\right)};$

4. $\int_0^t \tau^2 e^{2\tau}d\tau$

5. $\int_0^t \sin\tau e^{(t-\tau)}d\tau$

6. $x''-x=1; x\left(0\right)=-1; x'\left(0\right)=0$

7. $\begin{cases} x'-2x+y=3-4t \\ y'+x+2y=4+t \end{cases} x\left(0\right)=0; y\left(0\right)=2$

29-нұсқа

1. $f(t)=t^3\cdot\chi(t)$?

2. $f\left(t\right)=t\chi\left(t\right)-\left(t-\pi\right)\chi\left(t-\pi\right)+\dfrac{\cos 3t}{t};$

3. $F\left(p\right)=\dfrac{p}{\left(2p-1\right)\left(p-3\right)};$

4. $\int_0^t \tau e^{\tau}\sin 3\tau d\tau$

5. $\int_0^t \sin\tau\sin\left(t-\tau\right)d\tau$

6. $x'''-x'=t-1; x\left(0\right)=-1; x'\left(0\right)=x''\left(0\right)=0$

7. $\begin{cases} x'+2x-y=\sin t \\ y'-x=-1 \end{cases} x\left(0\right)=1; y\left(0\right)=1$

30-нұсқа

1. $f(t) = e^{it} \cdot \chi(t)$?

2. $f(t) = (t+4)\chi(t+4) - \sin^2 4t;$

3. $F(p) = \dfrac{p}{(2p-1)(p-3)};$

4. $\int_0^t \tau \sin^2 2\tau d\tau$

5. $\int_0^t \sin\tau e^{\pi/2-\tau} d\tau$

6. $x'' + 3x' = e^t; x(0) = 0; x'(0) = -1$

7. $\begin{cases} x' + x - y = \sin t \\ y' + 2x = \sin t \end{cases} x(0) = 0; y(0) = 1$

Бақылау жұмысына қосымша.

№ 61-80. Амалдық қисап әдісімен Коши есебін шешу керек:

61. $x'' + x' - 2x = e^t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$;

62. $x'' + 3x' = e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$;

63. $x'' + x = \cos t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 1$;

64. $x'' + 4x' - 5x = 0$, $x(0) = 3$, $x'(0) = -3$;

65. $x'' + 4x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 6$;

66. $x'' + 2x' + x = t + 2$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$;

67. $x'' - x' = e^t$, $x(0) = 4$, $x'(0) = 4$;

68. $x'' - x = \sin t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$;

69. $x'' - 3x' + 2x = 2e^{3t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 3$;

70. $x'' + 4x = \sin 3t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$;

71. $x'' + 4x = e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$;

72. $x'' + x = 1$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$;

73. $x'' - 2x' + 2x = 2t - 2$, $x(0) = x'(0) = 0$;

74. $x'' - 6x' + 9x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$;

75. $x'' - x' - 2x = 1$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -2$;

76. $x'' - 2x' + 5x = 1 - t$, $x(0) = x'(0) = 0$;

77. $x'' + x = 1$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$;

78. $x'' + 2x' + x = t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$;

79. $x'' + 9x = 1$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$;

80. $x'' - 2x' + 2x = 1$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

№ 81-100. Алғашқы шарттармен бірге берілген дифференциалдық теңдеулер жүйесін амалдық қисап әдісімен шешу керек:

81. $\begin{cases} x' + y = 0 \\ y' + x = 0 \end{cases}$, $x(0) = 1, \quad y(0) = -1$;

82. $\begin{cases} x' - 3x - 4y = 0 \\ y' - 4x + 3y = 0 \end{cases}$, $x(0) = 1, \quad y(0) = 1$;

83. $\begin{cases} x' = 2x - 2y \\ y' = -4x \end{cases}$, $x(0) = 3, \quad y(0) = 1$;

84. $\begin{cases} x' + y = 2e^t \\ y' + x = 2e^t \end{cases}$, $x(0) = 1, \quad y(0) = 1$;

85. $\begin{cases} x' = 4x + 3 \\ y' = x + 2y \end{cases}$, $x(0) = -1, \quad y(0) = 0$;

86. $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = 3x \end{cases}$, $x(0) = 0, \quad y(0) = 1$;

91. $\begin{cases} x' = -y + 2 \\ y' = x + 1 \end{cases}$, $x(0) = -1, \quad y(0) = 0$;

92. $\begin{cases} x' - 2y = 0 \\ y' - 2x = 0 \end{cases}$, $x(0) = 2, \quad y(0) = 2$;

93. $\begin{cases} x' = 2x + 3y + 1 \\ y' = 4x - 2y \end{cases}$, $x(0) = -1, \quad y(0) = 0$;

94. $\begin{cases} x' = -x + 3y + 1 \\ y' = x + y \end{cases}$, $x(0) = 1, \quad y(0) = 2$;

95. $\begin{cases} x' = -y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$, $x(0) = 1, \quad y(0) = 1$;

96. $\begin{cases} x + x' = y + e^t \\ y + y' = x + e^t \end{cases}$, $x(0) = 1, \quad y(0) = 1$;

87. $\begin{cases} x' + x - y = 0 \\ y' + x + y = 0 \end{cases}$,

$x(0) = 0, \quad y(0) = 0$;

88. $\begin{cases} x' - 3y = 0 \\ y' + x - 2y = 0 \end{cases}$,

$x(0) = 0, \quad y(0) = 0$;

89. $\begin{cases} x' = 3y \\ y' = 3x + 1 \end{cases}$,

$x(0) = 2, \quad y(0) = 0$;

90. $\begin{cases} x' = 3y \\ y' = 3x + 1 \end{cases}$,

$x(0) = 2, \quad y(0) = 0$;

97. $\begin{cases} x' = 3y + 2 \\ y' = x + 2y \end{cases}$,

$x(0) = -1, \quad y(0) = 1$;

98. $\begin{cases} x' = 2y + 1 \\ y' = 2x + 3 \end{cases}$,

$x(0) = -1, \quad y(0) = 0$;

99. $\begin{cases} x' = y + 3 \\ y' = x + 2 \end{cases}$,

$x(0) = 1, \quad y(0) = 0$;

100. $\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = x - y \end{cases}$,

$x(0) = 1, \quad y(0) = 0$.

Комплекс айнымалды функциялар теориясы және амалдық қисап бөліміне арналған

I. Анықтама материал

1. Түбір табу

z комплекс санының n-ші дәрежелі түбірінің әртүрлі n мәні бар және оларды келесі формула арқылы табуға болады:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad \varphi = \arg z,$$

$$k = 0,1,...,n-1.$$

2. Комплек айнымалды элементар функциялар

Комплекс айнымалды **көрсеткіштік функция** келесі теңдікпен анықталады:

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y). \qquad (1)$$

Көрсеткіштік функцияның қасиеттері:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2},$$

мұндағы z_1 мен z_2 – кез келген комплекс сандар;

$$e^{z+2\pi ki} = e^z, \; k = 0,1,...,$$

яғни, e^z - негізгі периоды $2\pi i$ тең.

Тригонометриялық $\sin x$ және $\cos x$ **функциялары** көрсеткіштік функция арқылы өрнектеледі:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

tgz және $ctgz$ функциялары келесі теңдікпен анықталады:

$$tgz = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad ctgz = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Тригонометриядағы барлық формулалар комплекс айнымалды тригономертиялық функцияларға да сақталады.

Гиперболалық shz, chz, thz, $cthz$ **функциялары** келесі теңдіктермен анықталады:

$$shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2};$$

$$thz = \frac{shz}{chz}; \quad cthz = \frac{chz}{shz}.$$

Тригонометриялық және гиперболалық функциялардың арасындағы байланыс келесі теңдіктерден көрінеді:

$$\sin iz = ishz, \quad \cos iz = chz.$$

Логарифмдік функция көрсеткіштік функцияға кері функция ретінде анықталады:

$$Lnz = \ln|z| + iArgz = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), \; k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Функцияның $k = 0$ сәйкес мәні оның **бас мәні** деп аталады және $\ln z$ арқылы белгіленеді:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z$$

Логарифмдік функцияның қасиеттері:

$$Ln(z_1 z_2) = Lnz_1 + Lnz_2;$$

$$Ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Lnz_1 - Lnz_2;$$

$$Lnz^n = nLnz + 2\pi ki, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

$$Ln\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} Lnz \cdot$$

Кері тригонометриялық функциялар: $Arc\sin z$, $Arc\cos z$, $Arctgz$, $Arctgz$, ñ¸éêåñ $\sin z$, $\cos z$, tgz, $ctgz$ **тригонометриялық** функцияларына кері функциялар ретінде анықталады. Бұл функциялардың барлығы көпмәнді және логарифмдік функция арқылы өрнектеледі:

$$Arc\sin z = -iLn(iz + \sqrt{1 - z^2}); \quad Arc\cos z = -iLn(z + \sqrt{z^2 - 1});$$

$$Arctgz = -\frac{i}{2} Ln \frac{1 + iz}{1 - iz},$$

$$Arcctgz = \frac{i}{2} Ln \frac{z - i}{z + 1}.$$

Логарифмнің бас мәніне сәйкес келетін функциялар кіші әріптермен басталып жазылады $(\arcsin z, ...)$.

Дәрежелік $\omega = z^2$ (α –кез келген комплекс сан) **функция:** $z^\alpha = e^{\alpha Lnz}$, $z \neq 0$.

Бұл көпмәнді функция, $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$ – оның бас мәні.

Көрсеткіштік $\omega = \alpha^z$, $\alpha \neq 0$ **функция**

$$\alpha^z = e^{zLn\alpha}$$

теңдігімен анықталады. Бұл функцияның бас мәні – $\alpha^z = e^{z\ln\alpha}$.

3. Комплекс жазықтықтағы қисықтар

$z = z(t) = x(t) + iy(t)$ түріндегі теңдеу, комплекс жазықтықта параметрлік теңдеулері

$$x = x(t), \ \ y = y(t)$$

Түрінде болатын қисықты анықтайды. Бұл теңдеулерден t параметрін шығарсақ, қисықтың $F(x, y) = 0$ түріндегі теңдеуін аламыз.

4. Комплекс айнымалды функцияларды дифференциалдау. Коши-Риман шарттары

$\omega = f(z)$ функциясы қандай да бір G аймағында анықталсын. z пен $z + \Delta z$ нүктелері G аймағында жатсын және $\Delta\omega = f(z + \Delta z) - f(z)$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ болсын.

Егер $\Delta z \to 0$ ұмтылғанда, $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ қатынасының ақырлы шегі бар болса, онда $w = f(z)$, $z \in G$ нүктесінде дифференциалданатын функция деп аталады және $f'(z)$, $\dfrac{dw}{dz}$ символдарымен белгіленеді: $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}$.

Егер $z = x + iy$, $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ болса, онда $f(z)$ функциясының дифференциалданатын әрбір нүктесінде ***Коши-Риман шарттары деп аталатын***

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2)$$

теңдіктері орындалады.

Керісінше, егер қандай да бір (x, y) нүктесінде Коши-Риман шарттары орындалса, сонымен бірге $u(x, y)$, $v(x, y)$ нақты екі айнымалды функция дифференциалданатын болса, онда $z = x + iy$ нүктесінде комплекс айнымалды $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ функциясы дифференциалданады.

$w = f(z)$ функциясы z нүктесінде және оның қандай бір маңайында дифференциалданса, онда ол z ***нүктесінде аналитикалық функция*** деп аталады. Егер $f(x)$, G аймағының әрбір нүктесінде дифференциалданатын функция болса, онда ол G ***аймағында аналитикалық функция*** деп аталады.

Аналитикалық функцияның туындысын

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$ ф

ормулалары бойынша есептеуге болады..

Егер $f(z)$ функциясының нақты $u = u(x, y)$ немесе жорамал $v = v(x, y)$ бөлігі беріліп және қандай да бір z_0 нүктедегі $f(z_0)$ мәні белгілі болса, онда Коши-Риман шарттарын пайдаланыпғ $w = f(z)$ аналитикалық функциясын құруға болады.

5. Комплекс айнымалды функцияларды интегралдау

G аймағында бірмәнді үзіліссіз $w = f(z)$ функциясы анықталсын. Γ, G – аймағында жатқан құрақты-тегіс қисық; $z = x + iy$, $f(x) = u + iv$, мұндағы $u(x, y)$, $v(x, y)$, x пен y айнымалдарының нақты функциялары. Комплекс айнымалды $w = f(x)$ функциясының интегралын есептеу екінші текті қисықсызықты

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma udx - vdy + i\int_\Gamma vdx + udy$$

интегралды есептеуге әкеледі.

Егер Γ қисығы $x = x(t),\ y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ параметрлік теңдеумен берілсе, онда

$$\int_\Gamma f(x)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt, \quad z(t) = x(t) + iy(t).$$

Егер $w = f(t)$ бір байламды G аймағында аналитикалық функция болса, онда, интеграл интегралдау қисығының түріне тәуелсіз, бірақ қисықтың бастапқы және соңғы нүктелеріне тәуелді болады. Бұл жағдайда интегралды есептеуге Ньютон-Лейбниц формуласын пайдалану керек:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \Phi(z_2) - \Phi(z_1),$$

мұндағы $\Phi(z)$ – $f(z)$ функциясының қандай да бір алғашқы функциясы: $\Phi'(z) = f(z)$, $z \in G$.

Егер $w = f(t)$ құрақты-тегіс Γ тұйық контурымен шектелген G аймағында және Γ контурында аналитикалық функция болса, онда Коши теоремасы:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

және $z_0 \in G$ ішкі нүкте үшін Кошидік интегралдық формуласы

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0 dz}$$

орындалады.

6. Лоран қатары

Егер $w = f(z)$ функциясы $\rho < \left| z - z_0 < R \right|$ сақиналы аналитикалық функция болса, онда ол осы сақинада Лоран қатарына жіктеледі:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad (6)$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{k+1}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \quad (7)$$

Мұнда Γ – центрі z_0 нүктесі болатын, сақина ішінде жатқан (сағат тіліне қарама-қарсы бағытталған) кез келген шеңбер.

(6) фонрмуладағы

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z - z_0)^k \quad \text{және} \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

қатарлары Лоран қатарының сәйкес бас және дұрыс бөліктері деп аталады.

7. Аналитикалық функциялардың оқшауланған ерекше нүктелері

Егер $w = f(z)$ бірмәнді және $0 < |z - z_0| < \delta$ сақинасының z_0 нүктесінен басқа нүктелерде аналитикалық функция болса, онда z_0 – ***функцияның оқшауланған ерекше нүктесі*** деп аталады.

$w = f(z)$ функциясын z_0 нүктесінің маңайында $0 < |z - z_0| < \delta$ сақинасында жинақталатын Лоран қатарына жіктеуге болады. Келесі жағдайлар болуы мүмкін:

1) Лоран қатырнда $z - z_0$ айырымының теріс дәрежелі мүшелері жоқ, яғни $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$. Бұл жағдайда z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының **жөнделетін ерекше нүктесі** деп аталады;

2) Лоран қатары мүшелерінің құрамында $z - z_0$ айырымының теріс дәрежелері бар және ондай мүшелер саны ақырлы, яғни $f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z - z_0)^n$, $c_{-n} \neq 0$. Бұл жағдайда z_0 нүктесі $w = f(z)$ ***функциясының n-ші ретті полюсі деп аталады;***

3) Лоран қатары мүшелерінің құрамында $z - z_0$ айырымының теріс дәрежелері бар және ондай мүшелер саны ақырсыз, яғни $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^n$. Бұл жағдайда, z_0 нүктесі $w = f(z)$ ***функциясының елеулі ерекше нүктесі деп аталады.***

Ерекше нүктелердің сипатын анықтау үшін келесі тұжырымдарды пайдалануға болады:

1. z_0 нүктесі $w = f(z)$ аналитикалық функциясының жөнделетін ерекше нүктесі áîëóû ¾øií, $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = C_0$, $|C_0| < \infty$ шегінің бар болуы қажетті және жеткілікті.

2. z_0 нүктесі $w = f(z)$ аналитикалық функциясының полюсі болуы үшін $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$ шегінің бар болуы қажетті және жеткілікті.

$2'$. z_0 нүктесі $w = f(z)$ функциясының n-ші ретті полюсі болуы үшін, $f(z)$ функциясы

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^n}$$

түрінде көрсетілуі қажетті және жеткілікті (мұндағы $\varphi(z)$ функциясы z_0 нүктесінде аналитикалық функция және $\varphi(z_0) \neq 0$).

$2''$. z_0 нүктесі $f(z) = \dfrac{\lambda(z)}{\mu(z)}$ функциясының оқшауланған ерекше нүктесі болсын ($\lambda(z)$ пен $\mu(z)$ – z_0 нүктесінде аналитикалық функциялар). Егер $\lambda(z_0) = \lambda'(z_0) = ... = \lambda^{(k-1)}(z_0) = 0$, $\lambda^{(k)}(z_0) \neq 0$ (яғни z_0 нүктесі $\lambda(z)$ функциясының k-ші ретті нөлі), ал $\mu(z)$ үшін $\mu(z_0) = \mu'(z_0) = ... = \mu^{l-1}(z_0) = 0$, $\mu^{l}(z_0) \neq 0$ (яғни z_0 – $\mu(z)$ функциясының l-ші ретті нөлі) болып:

$l > k$ болса, онда z_0, $f(z)$ аналитикалық функциясының $l - k$ ретті полюсі;

$l \leq k$ болса, онда z_0, $f(z)$ аналитикалық функциясының жөнделетін ерекше нүктесі.

Дербес жағдайда, $k=0$, $l=1$: $\lambda(z_0)\neq 0$, $\mu(z_0)=0$, $\mu'(z_0)\neq 0$ болса, онда z_0 $f(z)$ функцияның бірінші ретті полюсі (жай полюсі) болады.

3. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ шегінің болмауы – z_0 нүктесінің $w=f(z)$ функциясы үшін елеулі ерекше нүкте болуының қажетті және жеткілікті шарты.

8. Шегерімдер

z_0 арқылы $w=f(z)$ функциясының дараланған ерекше нүктесін белгілейік. $f(z)$ функциясының z_0 нүктесіндегі шегерімі деп $\underset{z=z_0}{\text{шег}}\, f(z)$ (немесе $\text{шег} f(z_0)$ арқылы белгіленетін,

$$\underset{z=z_0}{\text{шег}}\, f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz \qquad (8)$$

санын айтады. Мұндағы γ тұйық контур ішінде $f(z)$ функциясының z_0 нүктесінен басқа ерекше нүктелері жоқ.

(7) және (8)-ші формулаларды салыстыра отырып, функция шегерімі $f(z)$-тің z_0 нүктесі мкаңайындағы Лоран қатарының минус бірінші дәрежелі мүшесінің коэффициентіне тең екенін көреміз:

$$\text{шег} f(z_0)=C_{-1} \qquad (9)$$

Функецияның жөнделетін ерекше нүктедегі шегерімі нөлге тең.

Функцияның ***n-ші ретті полюстегі шегерімі*** келесі формуламен есептеледі:

$$\underset{z=z_0}{шег} f(z) = \frac{1}{(n-1)} \lim_{z \to z_0} \left[f(z)(z-z_0)^n \right]^{(n-1)};$$

Егер $n=1$ болса, онда

$$\underset{z=z_0}{шег} f(z) = \lim_{z \to z_0} f(z)(z-z_0).$$

Егер $w = f(z)$ функциясы z_0 нүктесінің маңайында екі аналитикалық функцияның қатынасы түрінде берілсе: $f(z) = \dfrac{\lambda(z)}{\mu(z)}$, және $\lambda(z_0) \neq 0$, $\mu(z_0) = 0$, $\mu'(z_0) \neq 0$ (яғни, z_0 – жай полюс) болса, онда

$$\underset{z=z_0}{шег} f(z) = \frac{\lambda(z_0)}{\mu'(z_0)}.$$

Егер z_0 – $w = f(z)$ функциясының елеулі ерекше нүктесі болса, онда шегерім (9) формуламен есептеледі.

Шегерімдер туралы Кошидің негізгі теоремасы. Егер $w = f(z)$, G аймағының саны ақырлы $z_1, z_2, ... z_n$ нүктелерінен басқа ішкі нүктелерінде және Γ шекарасында аналитикалық функция болса, онда

$$\oint_{\Gamma} f(z)ds = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{шег} f(z). \qquad (10)$$

8. Рационал функциялардың меншіксіз интегралдарын есептеу

$$R(x) = \frac{P_k(x)}{Q_l(x)} \qquad (11)$$

түріндегі рационал функция (мұндағы $P_k(x)$ пен $Q_l(x)$, сәйкес k –ші және l –ші дәрежелі көпмүшеліктер) бүкіл сан өсінде үзіліссіз және $l \geq k+2$, яғни бөлімінің дәреже көрсеткіші алымының дәреже көрсеткішінен, ең болмағанда, екі бірлікке артық болса, онда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum\limits_{m} \underset{z=z_k}{шег} f(z)$, мұндағы $R(z)$ функциясының шегерімдерінің қосындысы $\operatorname{Im} z > 0$ жарты жазықтықта орналасқан барлық z_m полюстері бойынша алынады.

9. Арнайы түрдегі меншіксіз интегралдарды есептеу

Егер $R(x)$ бүкіл сан өсінде үзіліссіз және $l \geq k+1$ болса, (яғни $R(x)$ – дұрыс бөлшек), онда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\lambda x dx = \operatorname{Re}\left\{2\pi i \sum\limits_{m} \underset{z=z_m}{шег} R(z)e^{i\lambda z}\right\}, \ \lambda > 0,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\lambda x dx = \operatorname{Im}\left\{2\pi i \sum\limits_{m} \underset{z=z_m}{шег} R(z)e^{i\lambda z}\right\}, \ \lambda > 0,$$

мұнда $R(z)e^{i\lambda z}$ функциясының шегерімдерінің қосындысы $\operatorname{Im} z > 0$ жарты жазықтықта орналасқан барлық z_m полюстері бойынша алынады.

10. Арнайы түрдегі интегралдарды есептеу

R, $\cos t$ мен $\sin t$-ге қатысты рационал функция және ол интегралдау аралығында үзіліссіз функция болсын. $z = e^{it}$ деп алсақ,

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \ \sin t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \ dt = \frac{dz}{iz}$$

болады да,

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \oint_{|z|=1} F(z)dz \qquad (12)$$

аламыз. (12)-нің оң жағындағы контурлық интеграл (10)-формуламен есептеледі ($F(z)$ функциясының шегерімдерінің қосындысы $|z|<1$ аймағында жатқан барлық ерекше нүктелер бойынша алынады).

11. Лаплас түрлендіруі

Түпнұсқа деп келесі шарттарды қанағаттандыратын, нақты t аргументтің $f(t)$ функциясын айтады:

1) $f(t)$ *функциясы* t *өсінің кез келген ақырлы аралығында интегралданады;*

2) *Барлық теріс* t *үшін* $f(t)=0$*;*

3) $f(t)$ *функциясының өсуі көрсеткіштік функцияның өсуінен артық емес, яғни барлық* t *үшін* $|f(t)| < M \cdot e^{s_0 t}$ *теңсіздігі орындалатындай* M *мен* s_0 *тұрақтылары табылады.*

$f(t)$ ***функциясының Лаплас кескіні*** *деп*

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$$

теңдігімен анықталатын, комплекс $p=\delta+i\tau$ *айнымалдың* $F(p)$ *функциясын айтады және оны*

$$f(t) \leftrightarrow F(p)$$

*арқылы белгілейді (**оның басқа да белгілеулері бар**).*

Кез келген $f(t)$ түпнұсқа функция үшін $F(p)$ кескіні $\operatorname{Re} p > s_0$ жарты жазықтықта анықталады және сонда ол аналитикалық функция болады.

Қасиеттері

1^0. **Сызықтығы:** кез келген C_1 және C_2 комплекс тұрақтылары үшін

$$C_1 f_1(t)+C_2 f_2(t) \leftrightarrow C_1 F_1(p)+C_2 F_2(p).$$

2^0. **Ұқсастық формуласы:** кез келген $\omega>0$ тұрақтысы үшін $f(\omega t)\leftrightarrow \frac{1}{\omega}F\left(\frac{p}{\omega}\right)$.

3^0. **Түпнұсқаны дифференциалдау:** егер

$f(t), f'(t), \ldots f^{(n)}(t)$ - түпнұсқа функциялар болса, онда

$f'(t)\leftrightarrow pF(p)-f(0)$,

$f''(t)\leftrightarrow p^2F(p)-pf(0)-f'(0)$,

. . . .

$f^{(n)}(t)\leftrightarrow p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0).$

Мұндағы $f^{(k)}(0)=\lim\limits_{t\to 0+}f^{(k)}(t),\quad k=0,1,\ldots,n-1.$

4^0. **Кескінді дифференциалдау:** $F'(p)\leftrightarrow -tf(t)$.

5^0. **Түпнұсқаны интегралдау:** $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(p)}{P}$.

6^0. **Кескінді интегралдау:** егер $\frac{f(t)}{t}$ түпнұсқа функция болса, онда $\int\limits_p^{+\infty} F(p)dp \leftrightarrow \frac{f(t)}{t}$.

7^0. **Ығыстыру формуласы:** кез келген λ комплекс саны үшін $f(t)\cdot e^{-\lambda t}\leftrightarrow F(p+\lambda)$.

8^0. **Кешігу формуласы:** $f(t-\tau)\leftrightarrow e^{-p\tau}F(p),\ \tau>0$.

9^0. **Кескіндерді көбейту формуласы:**

$$F_1(p)\cdot F_2(p)\leftrightarrow\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau. \qquad (13)$$

(13) формуладағы интеграл, $f_1(t)$ мен $f_2(t)$ **функцияларының үйірткісі** деп аталады да, $f_1 * f_2$ символымен белгіленеді. Сонымен,

$$F_1(p)\cdot F_2(p)\leftrightarrow f_1 * f_2.$$

Кескіні бойынша түпнұсқаны табу

Белгілі $F(p)$ кескін бойынша $f(t)$ түпнұсқаны табу үшін көбінесе келесі әдістер қолданылады:

1) егер $F(p)$ дұрыс рационал функция болса, онда оны қарапайым бөлшектердің қосындысына жіктейді, содан соң 1^0-9^0 қасиеттерді пайдаланып, алынған әрбір бөлшектің түпнұсқасын табады;

2) белгілі жеткілікті шарттар орындалғанда, $F(p)$ үшін

$$f(t)=\sum_k \underset{z=z_k}{шег}\left[F(p)e^{pt}\right]$$

функциясы түпнұсқа болады. Бұл теңдік **жіктеу формуласы** деп аталады.

12. Негізгі сәйкестік формулалары

$$1\leftrightarrow\frac{1}{p}; \qquad e^{at}\leftrightarrow\frac{1}{p-a}; \qquad \sin\omega t\leftrightarrow\frac{\omega}{p^2+\omega^2};$$

$$\cos\omega t\leftrightarrow\frac{p}{p^2+\omega^2}; \qquad sh\omega t\leftrightarrow\frac{\omega}{p^2-\omega^2}; \qquad ch\omega t\leftrightarrow\frac{p}{p^2-\omega^2};$$

$$t^n\leftrightarrow\frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Көрстілген сәйкестіктердің сол жақ бөліктері

$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ функциясына көбейтілген деп қабылданады.

13. Сызықтық дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есебі

Сызықтық дифференциалдық теңдеулерді ***амалдық,*** шешу үш кезеңнен тұрады:

1) берілген функциялардың Лаплас кескіндеріне өту (дифференциалдық теңдеу ізделінетін функцияның кескініне қатысты алгебралық теңдеу түріне ауысады);
2) алынған алгебралық теңдеуді шешу;
3) кескіні бойынша ізделінген функцияға өту.

Сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесін де осы схема бойынша шешуге болады.

14. Дюамель формуласы

n-ші ретті сызықтық коэффициенттері тұрақты дифференциалдық теңдеу:

$$L\{x(t)\} \equiv a_0 x^{(n)}(t) + a_1\, x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n x(t) = f(t)$$

(15)

және алғашқы шарттар:

$$x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = (0) \qquad (16)$$

берілсін. Алғашқы шарты (16) болатын $L\{x(t)\} = 1$ теңдеуінің шешімі $x_1(t)$ болсын. Онда (15)–(16) есептің $x(t)$ шешімін келесі фомулалардың бірін пайдаланып, $x_1(t)$ мен $f(t)$ арқылы өрнектеуге болады:

$$x(t)=\int_{0}^{t} x_1'(\tau)f(t-\tau)d\tau, \quad x(t)=\int_{0}^{t} x_1'(t-\tau)f(\tau)d\tau,$$

$$x(t)=f(0)x_1(t)+\int_{0}^{t} f'(\tau)x_1(t-\tau)d\tau$$

$$x(t)=f(0)x_1(t)+\int_{0}^{t} f'(t-\tau)x_1(\tau)d\tau.$$

Бұл өрнектердің әрбіреуі Дюамель формуласы (немесе инетегралы) деп аталады.

Дюамель формуласына негізделген дифференциалдық теңдеулерді шешу әдісін, (15) теңдеудің оң жағындағы $f(t)$ функциясының $F(p)$ кескінін табу қиын болғанда және де (15) – (16) есептерін әртүрлі $f(t)$ функциясы үшін бірнеше рет шешу қажеттілігі болғанда қолданады.

Теориялық сұрақтар:

1. Комплекс сандар, оларға жасалатын амалдар.
2. Комплекс айнымалды көрсеткіштік және логарифмдік функциялар. Эйлер формулалары.
3. Дәрежелік функция. Тригонометриялық және гиперболалық функциялар.
4. Комплекс айнымалды функция туындысы. Коши-Риман шарттары. Аналитикалық функция түсінігі.
5. Комплекс айнымалды функция туындысының модулі мен аргументініңгеометриялық мағынасы. Конформдық бейне туралы түсінік.
6. Комплекс айнымалды функцияның интегралы, оның қасиеттері.
7. Бір және көпбайламды аймақтар үшін Коши теоремасы. Ньютон-Лейбниц формуласы.
8. Кошидің интегралдық формуласы.
9. Аналитикалық функцияның жоғарғы ретті барлық туындыларының бар болуы.
10. Тейлор қатары. Аналитикалық функцияның Тейлор қатарына жіктелуі туралы теорема.
11. Лоран қатары. Жинақтылық сақинасы. Лоран теоремасы.
12. Оқшауланған ерекше нүктелердің жіктелуі.
13. Шегерімдер. Шегерімдерді есептеу.
14. Шегерімдер туралы Кошидің негізгі теоремасы. Контурлық интегралды есептеу.
15. Шегерімдер көмегімен меншіксіз интегралдарды есептеу. Жордан леммасы.
16. Лаплас түрлендіруі. Түпнұсқа.
17. Лаплас түрлендіруінің қасиеттері.
18. Түпнұсқа мен кескінді интегралдау.
19. Берілген кескін бойынша түпнұсқаны табу әдістері.

Теориялық жаттығулар

1. Теңдікті дәлелдеу керек::

$$\sin\theta + \sin 2\theta + ... + \sin n\theta = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta \sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}},\ \theta \neq 2\pi n,$$

$$n = 0, \pm 1 \dots$$

Нұсқау. $e^{i\theta}, e^{i2\theta}, ..., e^{in\theta}$ геометриялық прогрессиясын пайдалануға болады.

2. Коши-Риман шарттары r, φ координаттары бойынша $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{r}\ \frac{\partial v}{\partial \varphi};\quad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r}\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}$ түрінде жазылатынын дәлелдеу керек.

3. $w = |z|$ функциясы ешбір нүктеде дифференфиалданбайтынын дәлелдеу керек.

4. $U(x, y)$ – қандай да бір G аймағында гармониялық функция, яғни $\forall(x, y) \in G$, $\Delta U = 0$. f функциялары қандай болғанда, $f[u(x, y)]$ күрделі функциясы G аймағында гармониялық функция болады?

5. $f(z)$ функциясы $|z| \leq R$ дөңгелегінде аналитикалық функция және $M = \max\limits_{z \subset R} |f(z)|$ болсын. $|z| < R$ дөңгелегінің ішкі барлық нүктелерінде $\left|\frac{f^{(n)}(z)}{n!}\right| \leq \frac{M \cdot R}{(R - (z)^{n+1}}$, $n = 1, 2, ...$

теңсіздігінің орындалатынын дәлелдеу керек.

6. $A_0 = 1$, $A_1 = 1$, $A_{n+2} = A_n + A_{n+1}$, $n = 0, 1, ...$ шарттарымен анықталатын A_n сандары Фибоначчи сандары деп аталады. Кандай

да бір аймақта $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n z^n = \dfrac{1}{1-z-z^2}$ теңдігінің орындалатынын дәлелдеу керек. Қатардың жинақталу аймағын табу керек.

6. $f(z)$ жұп функциясы үшін $\underset{z=z_0}{шег} f(z) = -\underset{z=-z_0}{шег} f(z)$, ал, $f(z)$ тақ функциясы үшін $\underset{z=z_0}{шег} f(z) = \underset{z=-z_0}{шег} f(z)$ ьеңдігі орындалатынын дәлелдеу керек.

7. $f(z)$ пен $\varphi(z)$ функциялары үшін $z = z_0$ нүктесі, сәйкес *m*-ші және *n*-ші ретті полюс.

a) $f(z)\cdot\varphi(z)$; b) $\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}$; c) $f(z)+\varphi(z)$

функциялары үшін $z = z_0$ ерекше нүктесінің сипаты туралы не айтуға болады?

8. $f(z)$ және $g(z)$, z_0 нүктеде аналитикалық функциялар және $f(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = g'(z_0) = 0$, $g''(z_0) \neq 0$. $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$ функциясының $z = z_0$ нүктедегі шегерімін табу керек.

9. $f(z) = \eta(t)\sin e^{t^2}$ функциясы және оның туындысы түпнұсқа бола ма? Мұндағы $\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$.

10. Бейнелерді көбейту формуласын пайдаланып,

$$\int\limits_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)d\tau = 1-\cos t$$

интегралдақ теңдеуінің шешімін табу керек..

Пайдаланылған әдебиеттер:

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М: Наука, 1989.
2. Араманович И.Г., Лунц Л.Г., Эльсгльц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М: Наука, 1989.
3. Айдос Е.Ж. Жоғары математика-3. «Бастау», 2015.
4. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. Высшая школа, 1983.
5. Л.В.Борисова, В.В.Новиков, С.В Тышкевич, А.В.Шаталина. Теория функций комплексной переменной. Учебное пособие для студентов механико-математического, физического и геологического факультетов. Издательство Саратовского университета. 2004.
6. Контрольные работы по математическому анализу. Методические указания для студентов заочной формы обучения направления подготовки «Информатика и вычислительная техника». – Ухта, УГТУ, 2013.
7. Қазақша-орысша орысша-қазақша терминологиялық сөздік: Математика, – Алматы, «Рауан» баспасы, 1999.
8. Қазақша-орысша орысша-қазақша терминологиялық сөздік: Математика – «ҚАЗақпарат» баспа корпорациясы, – Алматы, 2014.

Алғы сөз

Білім беру саласы кредиттік оқыту жүйесіне көшкелі оқулықтар мен оқу құралдарының құрылымына да едәуір өзгерістер ене бастады. Оқушының өз бетінше оқып, білім алуына қолайлы болуын көздеп, сонымен бірге оқытушының да жұмысына ыңғайлы болуы мақсатында қазіргі оқулықтарда теориялық материалдармен бірге тәжірибелік сабақтардың материалдары, типтік есептерді орындау үлгілері, бақылау жұмысына арналған материалдар және т.б. қажетті материалдар беріледі. Біз де жоғары математиканың арнайы бөлімдерінің бірі – комплекс айнымалды функциялар теориясы мен амалдық қисап бөліміне арналған кітабымызды осы аталған құрылымда жаздық. Әрине, қазіргі уақытта интернет арқылы қажетті материалдарды тауып алу қиын іс емес. Бірақ та, біріншіден, ондағы іздеген материалдардың барлығы дерлік шет тілінде немесе орыс тілінде ғана жазылған (қазақ тіліндегі материалдар жоқтың қасы), екіншіден, қағаз бетіндегі материалдар – оқулықтар мен оқу құралдары әлі де өзектілігін жойған жоқ.

Біз бұл кітапты жазу барысында көптеген белгілі оқулықтардың (мысалы, [1]-[3]) теориялық материалдарын, жоғары оқу орындарының қазіргі кездегі оқу бағдарламаларына сәйкес, кейбір әдістемелік өгерістер енгізе отырып пайдаландық. Сонымен бірге материалдың математикалық қатаңдығын сақтай отырып, оны оқушыға түсінікті, жеңіл тілмен жеткізуге тырыстық. Теоремалардың басым көпшілігінің дәлелдемелері келтірілген. Ал тәжірибелік сабақтарға немесе студенттердің өздік жұмысына арналған тапсырмаларды интернет арқылы іздеп тауып, пайдаландық (мысалы, [4]-[6]).

Теорема дәлелдеуінің немесе мысалдарды шығарудың басталуы мен аяқталуын сәйкес ▼ жәңе ▲ белгілерімен көрсетіп отырдық.

Қазіргі кезде қазақша математикалық терминдер толық қалыптасып болмағандықтан, кітабымызда оқушының көңілінен шықпай жатқан терминдер бар болса, оларды бірігіп талқылауға дайынбыз. Біз қолданған математикалық терминдер 1999 ж. және 2014ж. жарық көрген [7]-[8] сөздіктерден алынды.

Автор

§ 1. Комплекс сандар

Комплекс сан деп теңдік түсінігі мен арифметикалық амалдар төмендегі 1)-4) ережелермен анықталған, $x+yi$ (немесе $x+iy$) түріндегі өрнекті айтады. Ықшамдылық үшін, комплекс санды бір әріппен белгілейді: $z = x + yi$, мұндағы *x, y* – нақты сандары *z* санының сәйкес **нақты** және **жорамал бөліктері** деп аталады және олар сәйкес $x = Rez$, $y = Imz$ арқылы белгіленеді (*Re* – лат. realis – нақты, *Jm* – лат. imaginaries – жорамал), ал *i* – **жорамал бірлік сан** деп аталады. Комплекс сандардың теңдігі мен оларға жасалатын арифметикалық амалдар келесі ережелер арқылы енгізілген:

1) **а)** $z_1 = x_1 + iy_1$ санының нақты бөлігі мен жорамал бөлігі $z_2 = x_2 + iy_2$ санының сәйкес нақты бөлігі мен жорамал бөлігіне тең болса, олар өзара тең деп аталады және $z_1 = z_2$ символымен белгіленеді: $(z_1 = z_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2; \end{cases}$

б) $x + 0i = x, \quad 0 + yi = yi, \quad 1i = i;$

2) $\left(x_1 + iy_1\right) \pm \left(x_2 + iy_2\right) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2);$

3) $\left(x_1 + iy_1\right)\left(x_2 + iy_2\right) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1);$

4) $\dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\dfrac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad x_2^2 + y_2^2 \neq 0.$

Анықтама. $z = x + iy$ комплекс санының *n* рет көбейтіндісі осы санның *n*-ші дәрежесі деп аталады және $z^n = \left(x + iy\right)^n$ символымен белгіленеді: $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n\text{ рет}} = \left(x + iy\right)^n$.

Осы анықтаманы және 1-б) мен 3) шарттарды пайдалана отырып, i^2 дәрежесін табайық

$$i^2 = i \cdot i = 1i \cdot 1i = (0+1i)\cdot(0+1i) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1) + (0\cdot 1 + 1\cdot 0)i = -1 + 0i = -1,$$

яғни $i^2 = -1$. Сонымен, жорамал бірлік сан квадраты минус бірге тең комплекс сан екен.

Назар аударыңыз! Нақты сан – жорамал бөлігі нөлге тең комплекс сан (**1- б)** теңдіктерінің біріншісін қараңыз), олай болса, нақты сандар жиынымен салыстырғанда, комплекс сандар – кең жиын. Нақты сандар жиынында дискриминанты теріс квадрат теңдеудің түбірі болмайтыны белгілі, ал комплекс сандар жиынында олай емес, мысалы, $x^2 + 9 = 0$, яғни $x^2 = -9$ теңдеуінің түбірлері $x_1 = 3i,\ x_2 = -3i$; ал $x^2 + 2x + 5 = 0$ теңдеуінің түбірлері: $x_1 = -1 + 2i, \quad x_2 = -1 - 2i$ (комплекс санның түбірі туралы төменде қарастырылады).

2) мен **3)** теңдіктерден нақты сандарды қосу және көбейту амалдарының барлық қасиеттері комплекс сандарға да қатысты орындалатынын, сонымен бірге комплекс сандарға жасалатын амалдар ($i^2 = -1$ теңдігін ескере отырып) алгебралық өрнектерге жасалатын амалдар сияқты орындалатынын көруге болады.

Мысалы,

$$(2-3i)(-5+2i) = 2\cdot(-5) + 2\cdot 2i + (-3)i\cdot(-5) + (-3)i\cdot 2i =$$
$$= -10 + 19i - 6i^2 = -4 + 19i.$$

$\overline{z} = x - iy$ саны $z = x + iy$ санына ***түйіндес*** деп аталады.

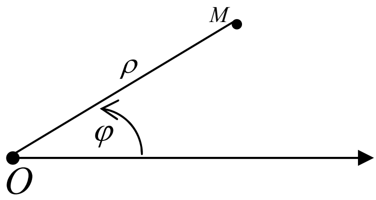
$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$ теңдігінің орындалатынын көру қиын емес.

Енді мына бір жайтқа назар аударыңыз! Комплекс сандарды бөлу үшін **4)** ережені қолданып жатпастан, бөлшектің алымы мен бөлімін бөлгіштің түйіндесіне көбейтсе болғаны. Мысалы,

$$\frac{2+5i}{4-3i} = \frac{(2+5i)\cdot(4+3i)}{(4-3i)\cdot(4+3i)} = \frac{8-15+20i+6i}{16+9} = \frac{-7+26i}{25} = \frac{-7}{25} + \frac{26}{25}i.$$

Әрбір $z = x + iy$ комплекс санына OXY жазықтығының (мұны ***комплекс сандар жазықтығы*** деп те атайды) $M(x, y)$ нүктесін және, керісінше, OXY жазықтығының әрбір (x, y) нүктесіне $x+iy$ комплекс санын сәйкес қоюға болады. Сондықтан $z = x+iy$ комплекс санының OXY жазықтығындағы геометриялық бейнесі – $M(x, y)$ нүктесі немесе $\overrightarrow{OM}$ радиус-векторы (1-сурет).

Алгебралық түрде жазылған комплекс сан деп $x+iy$ өрнегін айтады. Комплекс сандарды ***тригонометриялық*** немесе ***көрсеткіштік түрде*** де жазуға болады. Ол үшін алдымен жазықтықтағы нүктенің орнын поляр координаттары деп аталатын ρ, φ сандарымен анықтауға болатынын көрсетейік. Жазықтықта ***полюс*** деп аталатын O нүктесін және осы нүктеден шығатын сәулені (оны ***поляр өсі*** деп атайды) таңдап алсақ, жазықтықтың әрбір M нүктесіне екі санды**:** OM кесіндісінің ұзындығына тең ρ санын (***полярлық радиус***) және поляр өсі мен OM сәулесінің арасындағы бұрышқа тең φ санын (***полярлық бұрыш***) сәйкес қоюға болады (1-сурет).

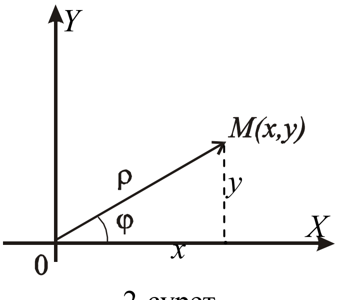


1-сурет

Бұл екі шама $0 \le \rho < +\infty$; $-\infty < \varphi < +\infty$ мәндеріне ие бола алады.

Егер жазықтықта тік бұрышты декарт координаттар жүйесінің бас нүктесін O полюсімен, OX өсінің оң бағытын поляр өсімен беттесетіндей етіп, ал OY өсінің оң бағытын $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ бұрышына сәйкес келетіндей етіп алсақ, онда бұл екі жүйе координаттарының арасындағы байланыс келесі теңдіктермен өрнектеледі (2-сурет):

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (1)$$



2-сурет

Ал бұл теңдіктерден келесі теңдік шығады

$$z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (2)$$

(2) теңдіктің оң жағындағы өрнек *комплекс санның* **тригонометриялық түрі** деп аталады.

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ санын $z = x + iy$ комплекс санының ***модулі*** деп атайды және оны $|z|$ арқылы белгілейді: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$;

φ бұрышы (радиан өлшемінде) z комплекс санының **аргументі** деп аталады және $Argz$ арқылы белгіленеді. Оның мәндері $(-\pi + 2k\pi,\ \pi + 2k\pi]$, $k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ ...$ аралықтарында жатады, ал мұндағы $k = 0$ мәніне сәйкес алынған $(-\pi,\ \pi]$ аралығындағы аргумент $\arg z$ арқылы белгіленеді және ол аргументтің ***бас мәні*** деп аталады: $-\pi < \arg z \le \pi$.

Егер $z = 0$ болса, онда $|0| = 0$, ал $\arg 0$ өрнегінің мағынасы жоқ.

Ескерту! Аргументтің бас мәні $\arg z$ – бірмәнді функция, ал $\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$, $k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, ...$ – көп мәнді функция. Олай болса, ***z-тің әрбір мәніне полярлық радиус ρ-ның жалғыз мәні***

мен полярлық бұрыш $\varphi = \mathrm{Arg}\, z$ ***-тің саны ақырсыз мәндері сәйкес*** келеді.

Аргументтің бас мәнін келесі қатыстарды пайдаланып табуға болады:

$$\arg z = \begin{cases} \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}, \ \ x > 0, \\ \pi + \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}, \ \ x < 0, \ \ y > 0, \\ -\pi + \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}, \ \ x<0, \ \ y < 0. \end{cases}$$

Ал $x = 0,\ y > 0;$ $x = 0,\ y < 0$ немесе $y = 0,\ x > 0;$ $y = 0,\ x < 0$ жағдайларында, *комплекс санның аргументін оның геометриялық бейнесі арқылы табуға болады*. Мысалы, $\arg 4i = \dfrac{\pi}{2}$, мұнда $x = 0,\ \ y > 0$; $\arg(-2) = \pi$, мұнда $y = 0,\ \ x = -2 < 0,$ т.с.с.

Мысал. Берілген комплекс санды тригонометриялық түрде жазу керек: $-1 + \sqrt{3}\ i$.

▼ Мұнда $x = -1 < 0,\ \ y = \sqrt{3} > 0$ болғандықтан,

$$\arg(-1 + \sqrt{3}\ i) = \pi + arctg\frac{\sqrt{3}}{-1} = \pi - arctg\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3},$$

ал $\left|-1 + \sqrt{3}\ i\right| = \sqrt{1+3} = 2.$ Олай болса,

$$-1 + \sqrt{3}\ i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right). \quad ▲$$

Жоғарыдағы ескертуге сәйкес, келесі анықтаманы беруге болады.

Анықтама. *Модульдері тең, ал аргументтері тең немесе олардың айырымы 2π-ге еселі комплекс сандар өзара тең:*

$$z_1 = z_2 \ \Leftrightarrow \ |z_1| = |z_2|, \ \ Argz_1 = Argz_2 + 2k\pi, \ \ k = 0, \ \pm 1, \ ...$$

$$(\, z_1 = z_2 \ \Leftrightarrow \ \rho_1 = \rho_2\,, \ \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \ \ k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ ....).$$

Мысалы, $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{-17\pi}{3} + i\sin\frac{-17\pi}{3}\right)$ сандары тең, өйткені $|z_1| = |z_2| = 2$, ал $Argz_1 = \frac{\pi}{3}$, $Argz_2 = \frac{-17\pi}{3}$ және $Argz_1 - Argz_2 = \frac{\pi}{3} - \frac{-17\pi}{3} = 6\pi = 3\cdot 2\pi.$

Анықтама бойынша,

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad -\infty < \varphi < +\infty. \tag{3}$$

Бұл 2π периодты функция: $e^{i(\varphi+2\pi)} = e^{i\varphi}$ (көз жеткізіңіз) және келесі теңдіктер орындалады

$$e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2}, \qquad e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}}, \tag{4}$$

(тексеріңіз), ал бұл екі теңдіктен $e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}$ теңдігі шығады.

Ал (3), (4) теңдіктерден ***Муавр формуласын*** алуға болады:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \qquad (\textbf{\textit{Муавр}}\ \text{ф.})$$

Назар аударыңыз! Кез келген $\varphi \in [0;2\pi)$ үшін $\left|e^{i\varphi}\right| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$ теңдігі орындалатындықтан, φ бұрышы $[0;2\pi)$ аралығында өзгергенде, $z = e^{i\varphi}$ нүктесі радиусі 1-ге тең, центрі $z = 0$ нүктеде болатын шеңберді сызады.

(2), (3) теңдіктерден келесі теңдік шығады:

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad \rho \geq 0. \tag{5}$$

Мұндағы $\rho = |z|$; ал $\varphi = Argz = \arg z + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

(5) теңдіктің оң жағындағы өрнек *комплекс санның* **көрсеткіштік түрі** деп аталады.

Сонымен, комплекс санды үш түрде жазуға болады екен:

$$z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}.$$

Мысал. Комплекс санды көрсеткіштік түрде жазу керек:

а)$1+i$;   ә) i;   б)1;   в)-1.

▼ а) $\rho=|1+i|=\sqrt{2}$, $\varphi=\arg(1+i)=\text{actg}\frac{1}{1}=\frac{\pi}{4}$ болғандықтан,

$1+i=\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$;

ә) $\rho=|i|=1,\ \ \varphi=\arg i=\frac{\pi}{2}$ болғандықтан, $i=e^{i\frac{\pi}{2}}$;

б) $\rho=|1|=1,\ \ \varphi=\arg 1=0,$ демек, $1=e^{i0}$;

в) $\rho=|-1|=1,\ \ \varphi=\arg(-1)=\pi\ \Rightarrow\ \ -1=e^{i\pi}$.   ▲

Ескерту. *Жалпы жағдайда, кез келген комплекс айнымал* $z=x+iy$ *үшін* e^z *функциясын келесі теңдікпен анықтайды:* $e^z=e^x\cdot e^{iy}$, $z\neq 0$. *Бұдан* (3) *теңдікті ескеріп,*

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y) \tag{6}$$

аламыз.

Сонымен бірге кез келген z комплекс саны үшін ***Эйлер формулалары*** *деп аталатын келесі теңдіктер орындалады:*

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z,\qquad e^{-iz}=\cos z-i\sin z. \tag{$3'$}$$

Өз кезегінде, бұл екі теңдіктен келесі формулалар шығады:

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\quad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}. \tag{7}$$

Кез келген $z_1=\rho_1 e^{i\varphi_1}$ және $z_2=\rho_2 e^{i\varphi_2}$ комплекс сандары үшін келесі теңдіктердің орындалатынын тексеру қиын емес:

$$z_1 z_2=\rho_1 e^{i\varphi_1}\cdot\rho_2 e^{i\varphi_2}=\rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}; \tag{*}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}}=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},\qquad z_2\neq 0. \tag{**}$$

Бұл теңдіктерден келесі ереже шығады. ***Комплекс сандарды көбейту үшін,*** *олардың модульдерін көбейтіп, аргументтерін қосу керек;* ***комплекс сандарды бөлу үшін****, олардың модульдерін (бөлінгіштің модулін бөлгіштің модуліне) бөліп, аргументтерін (бөлінгіштің аргументінен бөлгіштің аргументін) шегеру керек*.

Осы ережені пайдаланып, комплекс санның натурал дәрежесінің формуласын жаза аламыз:

$$z^n = \left(\rho e^{i\varphi}\right)^n = \rho^n e^{in\varphi}. \tag{8}$$

Мысал. $(-1+\sqrt{3}i)^{12}$ табу керек.

▼ Берілген комплекс санды көрсеткіштік түрде жазып, (8) формуланы пайдаланамыз. Бұл санның модулі мен аргументінің бас мәні: $\rho = \left|-1+\sqrt{3}i\right| = \sqrt{1+3} = 2;\ \varphi = \arg(-1+\sqrt{3}i) =$

$= \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{-1} = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$ тең болғандықтан, $(-1+\sqrt{3}i)^{12} =$

$$= \left(2\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{12} = 2^{12}\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}\cdot 12} = 2^{12}e^{i8\pi} =$$

$$= 2^{12}\cdot e^{i0} = 2^{12}(\cos 0 + i\sin 0) = 2^{12}. \quad ▲$$

Келесі теңдіктердің орындалатынын тексерейік

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}; \quad \overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}; \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \quad z_2 \neq 0. \tag{9}$$

▼ $\overline{\rho e^{i\varphi}} = \overline{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \rho e^{-i\varphi}$

теңдігін ескерсек, $\overline{z_1 z_2} = \overline{\rho_1 e^{i\varphi_1}\cdot\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \rho_1\rho_2\overline{e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}} = \rho_1\rho_2 e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)} =$

$= \rho_1 e^{-i\varphi_1}\rho_2 e^{-i\varphi_2} = \overline{\rho_1 e^{i\varphi_1}}\cdot\overline{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ аламыз. Бөлінді үшін де дәлелдеуі осындай, ал қосындыға қатысты теңдікті комплекс санның алгебралық түрі арқылы тексеруді оқушыға ұсынамыз. ▲

Анықтама. $z=\rho e^{i\varphi}$ комплекс санының ***n*-ші дәрежелі түбірі** деп n-ші дәрежесі z-ке тең $w=\sqrt[n]{z}$ комплекс санды айтады.

Осы $z=\rho e^{i\varphi}$ комплекс санының n-ші дәрежелі түбірін табу формуласын шығарайық. Егер $\sqrt[n]{z}=w=re^{i\theta}$ болса, онда анықтамаға сәйкес, $w^n=(re^{i\theta})^n=z=\rho e^{i\varphi}$ тең. Бұдан

$$r^n e^{i\theta n}=\rho e^{i\varphi} \;\Leftrightarrow\; r^n=\rho,\; \theta n=\varphi+2k\pi,\;\; k=0,\pm1,.... \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad r=\sqrt[n]{\rho}, \quad \theta=\frac{\varphi+2k\pi}{n},\; k=0,\pm1,....$$

Олай болса, $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho e^{i\varphi}}=\sqrt[n]{\rho}\cdot e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$, $k=0,\pm1,...$. Бұл өрнек $k=0,\,1,\,...,\;n-1$ үшін әртүрлі n мәнге ие болады да, ал $k=\pm n,\;\pm(n+1),...$ және $k=-1,-2,...,-(n-1)$ үшін ($e^{i\varphi}$ функциясының периоды $2\pi k,\;\; k=\pm1,\pm2,...$ шамасына тең болуына байланысты) бұл мәндер қайталанады. Сондықтан $\sqrt[n]{z}$ түбірінің әртүрлі n мәнін алсақ жеткілікті

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho e^{i\varphi}}=\sqrt[n]{\rho}\cdot e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, \quad k=0,1,...,n-1. \tag{10}$$

Мұндағы $\sqrt[n]{\rho}$ шамасы $\rho=|z|$ нақты санының n-ші дәрежелі арифметикалық түбірі (келесі мысалды қараңыз).

1-Мысал. $\sqrt[4]{1}=\sqrt[4]{1\cdot e^{i0}}=\sqrt[4]{1}\cdot e^{i\frac{0+2k\pi}{4}}$, $k=0,1,2,3.$

$$k=0,\;\; w_0=e^{i0}=\cos 0+i\sin 0=1;$$

$$k=1,\;\; w_1=e^{i\frac{2\pi}{4}}=e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i\,;$$

$$k=2,\;\; w_2=e^{i\frac{4\pi}{4}}=e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1\,;$$

$$k=3,\ \ w_3=e^{i\frac{6\pi}{4}}=e^{i\frac{3\pi}{2}}=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i.$$

Назар аударыңыз! Осы мысалдағы $\sqrt[4]{1}=\sqrt[4]{1\cdot e^{i0}}=\sqrt[4]{1}\cdot e^{i\frac{0+2k\pi}{4}}$ теңдігінің сол жағындағы $\sqrt[4]{1}$ өрнегінің (1 комплекс санының төртінші дәрежелі түбірінің) төрт мәні бар, ал оң жағындағы $\sqrt[4]{1}$ өрнегінің (1 нақты санының арифметикалық түбірінің) бір мәні бар!

2-мысал. $$\sqrt[3]{1+i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\cdot e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}},\quad k=0,1,2.$$

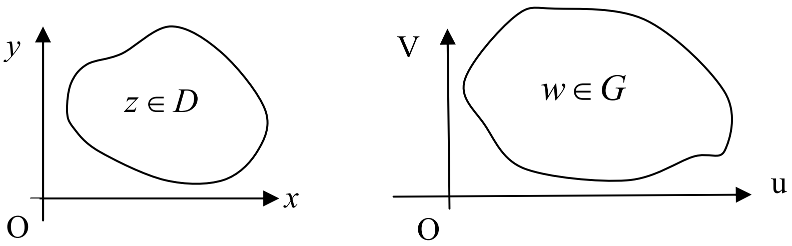
$$k=0,\ \ w_0=\sqrt[6]{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{12}};$$

$$k=1,\ \ w_1=\sqrt[6]{2}\cdot e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3}}=\sqrt[6]{2}\cdot e^{i\frac{9\pi}{12}}=\sqrt[6]{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

$$k=2,\ \ w_2=\sqrt[6]{2}\cdot e^{i\frac{17\pi}{12}}.$$

§ 2. Комплекс айнымалды функция

$z = x + iy$ және $w = u + iv$ комплекс сандарының сәйкес екі жазықтығы берілсін (3-сурет).



3-сурет

Егер әрбір $z \in D$ комплекс санына қандай да бір f ережесі бойынша $w \in G$ саны сәйкес қойылса, онда D жиынында D жиынын G жиынының ішіне бейнелейтін бірмәнді функция берілді дейді және оны $w = f(z)$ арқылы белгілейді.

D жиыны $f(z)$ функциясының анықталу жиыны (аймағы) деп аталады. Егер G жиынының әрбір нүктесі $f(z)$ функциясының мәні болса, онда G осы функцияның мәндер жиыны немесе D жиынының f функция бойынша бейнесі деп аталады: $G = f(D)$. Бұл жағдайды f функциясы D жиынын G жиынына бейнелейді дейді.

Мұнда $w = f(z) = u + iv$, сонымен бірге u мен v айнымалдарының $z = x + iy$, яғни (x, y) нүктесіне тәуелділігін ескерсек, онда функцияны $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $(x, y) \in D$ түрінде жазуға болатынын көреміз. Мұндағы $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $(x, y) \in D$ нақты мәнді функциялары f функциясының сәйкес нақты және жорамал бөліктері: $u\left(x,y\right)=\operatorname{Re}f(z)$, $v\left(x,y\right)=\operatorname{Im}f(z)$.

Мысалы, $w=z^2$ **дәрежелік функция** үшін, $z^2=\left(x+iy\right)^2=$ $=x^2-y^2+i2xy$, яғни $\operatorname{Re}z^2=x^2-y^2$, $\operatorname{Im}z^2=2xy$;

$w=e^z$ – **көрсеткіштік функциясы** үшін $w=e^z=e^x(\cos y+$ $+i\sin y)=e^x\cos y+ie^x\sin y$, (§ 1 (6) теңдікті қараңыз), яғни $\operatorname{Re}e^z=e^x\cos y$, $\operatorname{Im}e^z=e^x\sin y$. Бұл функция нақты айнымалды көрсеткіштік функцияның қасиеттеріне ие: $e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$; $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}=e^{z_1-z_2}$; $\left(e^z\right)^n=e^{nz}$. Сонымен бірге ол периоды $T=2\pi i$ тең периодты функция: $e^{z+2\pi i}=e^z$. Шынында да,

$$e^{z+2\pi i}=e^{x+iy+2\pi i}=e^{x+i\left(y+2\pi\right)}=e^x\cdot e^{i\left(y+2\pi\right)}=$$
$$=e^x\left(\cos\left(y+2\pi\right)+i\sin\left(y+2\pi\right)\right)=e^x\left(\cos y+i\sin y\right)=e^x\cdot e^{iy}=$$
$$=e^{x+iy}=e^z.$$

Енді **тригонометриялық функцияларды** қарастырайық (§1 (7) теңдіктерді қараңыз): $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.

Бұл функциялардың көмегімен тангенс және котангенс функциялары анықталады: $tgz=\dfrac{\sin z}{\cos z}$, $ctgz=\dfrac{\cos z}{\sin z}$.

Тригонометриялық функциялар үшін нақты тригонометриялық функциялардың барлық қасиеттері сақталады. Мысалы,

$\cos^2 z+\sin^2 z=1$; $\cos 2z=\cos^2 z-\sin^2 z$; $\cos\left(z+2\pi\right)=\cos z$ және т.с.с Шынында да, мысалы, $\cos^2 z+\sin^2 z=\left(\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2=$

$$=\frac{e^{i2z}+2e^{iz}e^{-iz}+e^{-i2z}}{4}-\frac{e^{i2z}-2e^{iz}e^{-iz}+e^{-i2z}}{4}=\frac{4}{4}=1.$$ Қалғандары да осылай дәлелденеді (өз бетіңізше дәлелдеңіз).

Нақты айнымалды гиперболалық функцияларға ұқсас етіп комплекс айнымалды **гиперболалық функцияларды** анықтайық:

$$\mathrm{c}hz=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2},\ \sin z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2i},\ thz=\frac{\mathrm{s}hz}{\mathrm{c}hz},\ cthz=\frac{\mathrm{c}hz}{shz}.$$

Гиперболалық функциялар үшін де нақты айнымалды гиперболалық функциялардың қасиеттері сақталады. Мысалы,

$$\mathrm{c}h^2z-sh^2z=\left(\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{e^{2z}+2e^{z}e^{-z}+e^{-2z}-e^{2z}+2e^{z}e^{-z}-e^{-2z}}{4}=\frac{4}{4}=1.$$

Тригонометриялық функциялар мен гиперболалық функциялар арасындағы байланыстар келесі формулалармен өрнектеледі:

$$\cos iz=chz,\quad chiz=cosz,\quad \sin iz=i\cdot shz,\quad shiz=i\cdot\sin z. \qquad (1)$$

Бұл теңдіктердегі i жорамал бірлік сан нақты тригонометриялық функциялардағы минус «-» таңбасын елестетеді. Мысал ретінде бірінші теңдікті дәлелдейік: $\cos iz=\frac{e^{i\cdot iz}+e^{-i\cdot iz}}{2}=\frac{e^{-z}+e^{z}}{2}=chz.$

Қалғандары да осылай дәлелденеді (өз бетіңізше дәлелдеңіз).

Мысал.

$$\sin(2+i)=\sin 2\cdot\cos i+\cos 2\cdot\sin i=\sin 2\cdot \mathrm{c}h1+i\cos 2\cdot \mathrm{s}h1.$$

Логарифмдік функция $w=Lnz$ – ол $e^{w}=z$ көрсеткіштік функциясына кері функция. Оны анықтау үшін $w=u+iv=Lnz$ функциясының нақты және жорамал бөліктерін тапсақ болғаны. Ол үшін $e^{w}=z$ теңдігін пайдаланамыз:

$e^{u+iv}=e^{u}\cdot e^{iv}=e^{u}\left(\cos v+i\cdot\sin v\right)=z.$ Бұдан, екі комплекс санның теңдігінің анықтамасын пайдаланып,

$e^u = |z|,\ v = Argz = \arg z + 2k\pi$ аламыз. Бірінші теңдіктен $u = \ln|z|$ шығады. Олай болса, кез келген $z \neq 0$ сандары үшін

$$Lnz = \ln|z| + i \cdot Argz = \ln|z| + i\left(\arg z + 2k\pi\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad (2)$$

Бұдан, берілген z санына логарифмдік функцияның ақырсыз көп мәндері сәйкес келетінін көреміз. Бұлардың ішіндегі $k = 0$-ге сәйкес функцияны **логарифмдік функцияның бас мәні** деп атайды да, $\ln z$ арқылы белгілейді: $\ln z = \ln|z| + i \cdot \arg z$.

Мысалы, $Ln(-1) = \ln|-1| + i\left(\arg(-1) + 2k\pi\right) =$

$= \ln 1 + i(\pi + 2k\pi) = i(1+2k)\pi, \quad k -$ бүтін сандар.

Логарифмдік функцияның қасиеттері:

$$Ln(z_1 z_2) = Lnz_1 + Lnz_2; \qquad Ln\frac{z_1}{z_2} = Lnz_1 - Lnz_2.$$

Бұны комплекс сандардың екі жиынының теңдігі деп түсіну керек.

Мысалы, бірінші теңдікті дәлелдейік.

Анықтама бойынша $Ln(z_1 z_2) = \ln|z_1 z_2| + iArg(z_1 z_2)$, бұдан $\ln|z_1 z_2| = \ln|z_1||z_2| = \ln|z_1| + \ln|z_2|$, $\qquad Arg(z_1 z_2) = Argz_1 + Argz_2$ қатыстары орындалатындықтан, жоғарыдағы бірінші теңдікті аламыз.

Кез келген комплекс а саны мен z саны үшін $a^z = e^{z \cdot Lna}$.

Мысалы,

$$i^i = e^{iLni} = e^{i\cdot\left(\ln|i| + iArgi\right)} = e^{i\cdot(\ln 1 + i(\arg i + 2k\pi))} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k}, \quad k - \text{бүтін сандар.}$$

Кері тригонометриялық функциялар тригонометриялық функцияларға кері функция ретінде анықталады (мысалы, егер $z = \sin w$ берілсе, онда $w = Arc\sin z$).

$$Arc\sin z = -i \cdot Ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right); \qquad (3)$$

$$Arc\cos z = -i \cdot Ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right); \tag{4}$$

$$Arctgz = -\frac{i}{2} \cdot Ln\frac{1+iz}{1-iz}; \tag{5}$$

$$Arcctgz = \frac{i}{2} \cdot Ln\frac{z-1}{z=1}. \tag{6}$$

Назар аударыңыз! Логарифмдік функция арқылы өрнектелген функциялар – көп мәнді болады.

Мысалы, (3) теңдікті дәлелдейік (қалған теңдіктер де осылай дәлеледенеді): $z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$. Бұдан $e^{iw} - 2iz - e^{-iw} = 0$ немесе $e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$ аламыз. Бұл теңдеуді шеше отырып, (3) теңдікке келеміз.

Мысал.

$$Arc\cos 1 = -i \cdot Ln\left(1 + \sqrt{1^2 - 1}\right) = -i \cdot Ln1 = -i \cdot \left(\ln 1 + i \cdot Arg1\right) =$$

$= -i \cdot i2k\pi = 2k\pi,\ \ k -$ бүтін сандар.

Комплекс айнымалды функциялардың шегі және үзіліссіздігі.

Егер

$$\lim_{|z-z_0|\to 0} \left|f(z) - A\right| = 0 \tag{7}$$

теңдігі орындалса, онда $w = f(z) = u\left(x, y\right) + iv\left(x, y\right)$ функциясының z_0 нүктесінде $A = a + ib$ санына тең шегі бар дейді және оны $\lim_{z\to z_0} f(z) = A$ деп жазады.

Мұнда $\left|f(z) - A\right| = \sqrt{\left(u-a\right)^2 + \left(v-b\right)^2}$ теңдігін ескерсек, (7) теңдік $\lim_{|z-z_0|\to 0} \sqrt{\left(u-a\right)^2 + \left(v-b\right)^2} = 0$ түріне көшеді. Ал $z = \left(x, y\right),\ \ z_0 = \left(x_0, y_0\right)$ деп алсақ, бұл теңдік келесі қос теңдікке парапар:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u\left(x,y\right)=a, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v\left(x,y\right)=b. \tag{8}$$

Комплекс айнымалды $f(z)$ және $g(z)$ функцияларының шектері үшін нақты мәнді функциялар шектерінің келесі қасиеттері сақталады: егер $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)$ шектері бар болса, онда $\lim\limits_{z\to z_0}\left[f(z)\pm g(z)\right]$, $\lim\limits_{z\to z_0}\left[f(z)g(z)\right]$, $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}$ шектері де бар және келесі теңдіктер орындалады:

$$\lim_{z\to z_0}\left[f(z)\pm g(z)\right]=\lim_{z\to z_0} f(z)\pm\lim_{z\to z_0} g(z);$$

$$\lim_{z\to z_0}\left[f(z)g(z)\right]=\lim_{z\to z_0} f(z)\lim_{z\to z_0} g(z);$$

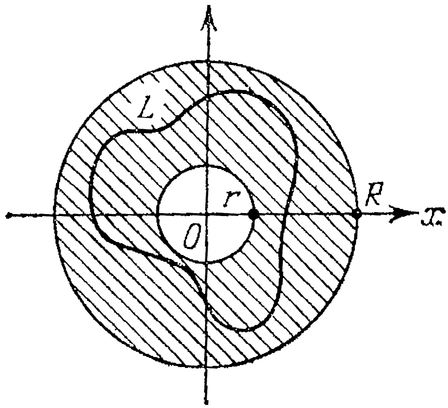
$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)}, \qquad \lim_{z\to z_0} g(z)\neq 0.$$

Анықтама. Егер z_0 нүктесінде және оның маңайында анықталған f функциясы үшін $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$ теңдігі орындалса, онда $w=f(z)=u\left(x,y\right)+iv\left(x,y\right)$ функциясы z_0 нүктесінде үзіліссіз деп аталады.

Мұндағы $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$ келесі қос теңдікке парапар $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u\left(x,y\right)=u\left(x_0,y_0\right)$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u\left(x,y\right)=u\left(x_0,y_0\right)$ болғандықтан, f функциясының z_0 нүктеде үзіліссіздігі u,v функцияларының $\left(x_0,y_0\right)$ нүктесіндегі үзіліссіздікке парапар. Ал жоғарыда арифметикалық амалдарға қатысты теңдіктерге сүйенсек, z_0 нүктесінде үзіліссіз $f(z)$ және $g(z)$ функцияларының қосындысы, айырымы, көбейтіндісі және бөліндісі де осы нүктеде үзіліссіз болатынын көреміз.

§ 3. Комплекс айнымалды функцияның туындысы

Аймақ деп байланысты ашық жиынды айтады (мысалы, Айдос Е.Ж. «Жоғары математика-3, «Бастау», 2015 ж. 9.1.1. п. қараңыз). Егер D аймақта жүргізілген кез келген үзіліссіз, өзімен-өзі қиылыспайтын, тұйық қисықпен шектеліп тұрған G аймағы толығымен D аймағында жатса, онда D аймағы ***бірбайланысты деп*** аталады. Бұл қасиетке ие емес аймақ ***көпбайланысты*** деп аталады. Мысалы, ашық шар – бір байланысты. Ал $D = \{z : 2 <| z |< 5\}$ – аймағы (сақина) көпбайланысты (екібайланысты), өйткені аймақта жатқан L қисығы шектеп тұрған аймақ $D = \{z : 2 <| z |< 5\}$ аймағында толығымен жатпайды (4-сурет).



4-сурет

Комплекс жазықтықтың D аймағында бірмәнді $w = f(z)$ функциясы берілсін.

$f(z)$ функциясының $z \in D$ нүктедегі туындысы деп $\Delta z -$ аргумент өсімшесі нөлге ***кез келген тәсілмен ұмтылғандағы***

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) \qquad (1)$$

түріндегі шекті айтады.

Мұндағы $\Delta z-$аргумент өсімшесінің нөлге ұмтылу тәсілдерінің саны – ақырсыз, бірақ сол жағдайдың барлығында (1) шек бар болуы керек.

Бұл анықтамадан және комплекс айнымалды функцияның шегінің қасиеттерінен дифференциалдық есептеулердегі қосындының, айырымның, көбейтіндінің, бөліндінің, кері функцияның, күрделі функция туындыларының ережелері комплекс айнымалды функция үшін де сақталатынын айтуға болады.

Теорема. $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ функциясы $z=x+iy=(x,y)\in D$ нүктесінің маңайында анықталсын, сонымен бірге оның $u-$накты және $v-$жорамал бөліктері (x,y) нүктесінде дифференциалдансын. Онда $w=f(z)$ функцияның осы нүктеде туындысы бар болуы үшін келесі шарттардың орындалуы қажетті және жеткілікті:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2}$$

(2) теңдіктерді Коши-Риман немесе Даламбер-Эйлер шарттары деп атайды. Мұндағы u,v функцияларын D аймағында **өзара түйіндес** деп атайды.

▼ ***Қажеттілігі.*** Функцияның туындысы z нүктесінде бар болсын: $f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$, мұндағы

$$\Delta w=\left[u(x+\Delta x,y+\Delta x)-u(x,y)\right]+i\left[v(x+\Delta x,y+\Delta x)-v(x,y)\right].$$

Сонымен, $\Delta z-$аргумент өсімшесінің нөлге қандай тәсілмен ұмтылса да, шек $f'(z)$ санына тең болсын. Мысалы, егер

А) $\Delta z=\Delta x+i0=\Delta x$ болса, онда $\Delta z\to 0 \quad\Leftrightarrow\quad \Delta x\to 0;$

Ал егер Б) $\Delta z=0+i\Delta y=i\Delta y$ болса, онда $\Delta z\to 0 \quad\Leftrightarrow\quad i\Delta y\to 0.$

А) жағдайында $f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u\left(x+\Delta x,y\right)-u\left(x,y\right)}{\Delta x}+i\frac{v\left(x+\Delta x,y\right)-v\left(x,y\right)}{\Delta x}\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u\left(x+\Delta x,y\right)-u\left(x,y\right)}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\left(x+\Delta x,y\right)-v\left(x,y\right)}{\Delta x}=$$

$=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$, ал Б) жағдайында $f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\left[\frac{u\left(x,y+\Delta y\right)-u\left(x,y\right)}{i\Delta y}+\frac{v\left(x,y+\Delta y\right)-v\left(x,y\right)}{\Delta y}\right]=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u\left(x,y+\Delta y\right)-u\left(x,y\right)}{i\Delta y}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{v\left(x,y+\Delta y\right)-v\left(x,y\right)}{\Delta y}=$$

$=-i\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial y}$ аламыз. Алынған екі мән өзара тең болуы керек болатындығын ескеріп, (2) теңдіктерге келеміз.

Жеткіліктілігі. $u\left(x,y\right)$, $v\left(x,y\right)$ функциялары $\left(x,y\right)$ нүктесінде дифференциалдансын және (2) шарттар орындалсын. Онда u, v функцияларының $\left(x,y\right)$ нүктесіндегі өсімшелерін келесі түрлерде жазуға болады:

$$\Delta u=u\left(x+\Delta x,y+\Delta x\right)-u\left(x,y\right)=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+o_1(\rho),\ \rho\to 0,$$

$$\Delta v=v\left(x+\Delta x,y+\Delta x\right)-v\left(x,y\right)=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+o_2(\rho),\ \ \rho\to 0,$$

мұндағы, $\rho = \left|\Delta z\right| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, ал $o_1(\rho),\ o_2(\rho)$ шамалары $\rho \to 0$ ұмтылғанда $\rho = \left|\Delta z\right| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ақырсыз кішкенеге салыстырғанда, реті жоғары ақырсыз кішкенелер:

$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{o_1(\rho)}{\rho} = 0,\quad \lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{o_2(\rho)}{\rho} = 0.$ Сондықтан $\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = \dfrac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} =$

$= \left| o\left(\rho\right) = o_1(\rho) + i o_2(\rho)\ \to\ 0,\ \rho \to 0 \right| =$

$$= \frac{= \dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\Delta y + i\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{o\left(\rho\right)}{\Delta z} =$$

$$= \frac{= \dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta y + i\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta y\right)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{o\left(\rho\right)}{\Delta z} =$$

$$= \frac{= \dfrac{\partial u}{\partial x}\left(\Delta x + i\Delta y\right) + \dfrac{\partial v}{\partial x}\left(-\Delta y + i\Delta x\right)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{o\left(\rho\right)}{\rho}\cdot\frac{\rho}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \underset{\rho\to 0}{o}\left(1\right).$$

Мұндағы $\underset{\rho\to 0}{o}\left(1\right)$ белгісі $\rho \to 0$ ұмтылғанда ақырсыз кішкене функция. Сонымен, $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$, яғни функцияның z нүктесінде $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$ тең туындысы бар. ▲

Назарыңызға! Функцияның туындысын $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} =$

$= \dfrac{\partial v}{\partial y} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x} - i\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial y} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}$ түрлерінде де жазуға болады.

Теоремадан нақты айнымалды функцияның туындыларының формулалары комплекс айнымалды функция үшін де орындалатынын көруге болады. Мысалы, $f(z)=e^z=$ $=e^x(\cos y+i\sin y)=e^x\cos x+ie^x\sin y.$

Мұндағы $u=e^x\cos y,\quad v=e^x\sin y$ функциялары жазықтықтың кез келген нүктесінде дифференциалданады және $\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y=$ $=\dfrac{\partial v}{\partial y},\qquad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y=-\dfrac{\partial v}{\partial x},$ яғни Коши-Риман шарттары орындалады. Олай болса,

$$f'(z)=\left(e^z\right)'=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos x+ie^x\sin y=e^z.$$

Анықтама. Егер D аймақта анықталған $w=f(z)$ функцияның осы аймақтың әрбір нүктесінде туындысы бар болса, онда ол D *аймақта аналитикалық функция* деп аталады.

Мысалы, жоғарыдағы $f(z)=e^z$ функциясы – комплекс жазықтықта аналитикалық функция.

Егер D аймақта екінші ретті үзіліссіз дербес туындылары бар $f(x,y)$ функциясы Лаплас теңдеуін: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ қанағаттандырса, ол D *аймағында гармониялық функция* деп аталады.

D аймағында аналитикалық $w=f(z)=u\left(x,y\right)+iv\left(x,y\right)$ функциясының нақты және жорамал бөліктері осы аймақта *гармониялық функциялар* болатынын көрсетейік.

▼ Шынында да, $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$ шарттарынан

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, ал бұдан $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ аламыз. Дәл осылай, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, ал бұдан $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$ аламыз. ▲

Бірақ $u(x,y)$, $v(x,y)$ қандай да бір аймақта гармониялық функциялар болғанымен, $u(x,y)+iv(x,y)$ бұл аймақта аналитикалық функция болмауы мүмкін. Мысалы, $u(x,y)=x$, $v(x,y)=-y$ – гармониялық функциялар, бірақ $f(z)=x+i(-y)=\overline{z}$ - аналитикалық функция емес, өйткені олар үшін Коши-Риман шарттары орындалмайды: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=1$, ал $\dfrac{\partial v}{\partial y}=-1$.

Егер аймақта қандай да бір гармониялық функция берілсе, $u(x,y)$немесе $v(x,y)$, онда екіншісін осы аймақта Коши-Риман шарттарын қанағаттандыратындай етіп таңдап алуға болады. Оны өзінің екі дербес туындысы арқылы немесе оның толық дифференциалы арқылы тұрақтыға дейінгі дәлдікпен анықтауға болады. Сондықтан аналитикалық функция нақты немесе жорамал бөлігі бойынша тұрақтыға дейінгі дәлдікпен анықталады.

Мысал. Жорамал бөлігі $v=2x^2-2y^2+x$ тең аналитикалық функцияны табу керек.

▼ Берілген функция үшін Коши-Риман шарттарын жазайық: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=-4y$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=4x+1=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$. Бірінші теңдіктен $u(x,y)=-\int 4y dx=-4xy+\varphi(y)$ аламыз, мұндағы $\varphi(y)$ – қазірше кез келген функция. Бұл функцияны анықтау үшін алынған теңдікті y бойынша дифференциалдап алып, Коши-Риман шарттарының екіншісін пайдаланамыз: $\dfrac{\partial u\left(x,y\right)}{\partial y}=-4x+\varphi'(y)=-4x-1$. Бұдан $\varphi'(y)=-1 \quad\Rightarrow\quad \varphi(y)=-y+C$ аламыз. Табылған функцияның өрнегін орнына қоямыз: $u\left(x,y\right)=-4xy-y+C$. Олай болса,

$$w=u\left(x,y\right)+iv(x,y)=-4xy-y+C+i\left(2x^2-2y^2+x\right)=$$

$$=2i\left(x^2-y^2+2ixy\right)+i\left(x+iy\right)+C=2iz^2+iz+C. \qquad \blacktriangle$$

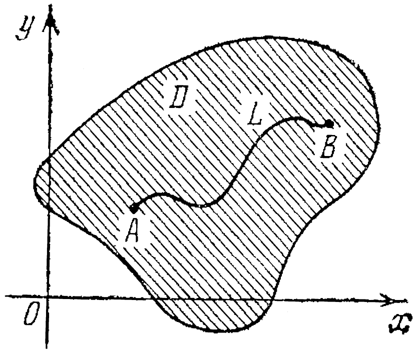
Назарыңызға! Берілген бір гармониялық функция бойынша аналитикалық функция құру туралы төменде, типтік есептер шығару үлгілерінде қарастырылады.

§ 4. Комплекс айнымалды функцияларды интегралдау

D аймағында анықталған $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ функциясы берілсін. $L \subset D$ басы – A нүктесі, ал соңы B нүктесі болатын тегіс қисық және ол $z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad \alpha \le t \le \beta$ – векторлық немесе оған парапар параметрлік:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta \tag{1}$$

теңдеулермен берілсін (5-сурет).



5-сурет

Мұнда $t = \alpha$ мәні – қисықтың $A = z(\alpha)$ нүктесіне, $t = \beta$ мәні қисықтың $B = z(\beta)$ нүктесіне сәйкес келеді. Ал $t = \alpha$ -дан $t = \beta$ – ға дейінгі мәндерге ($\alpha < t < \beta$) сәйкес нүкте қисық бойымен, A-дан B нүктесіне қарай орын ауыстырады. Басқаша айтқанда, $L \subset D$ қисығының бағыты t параметрінің α -дан β -ге дейін өзгеруіне сәйкес келеді.

$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ функциясының $L \subset D$ қисығы бойынша интегралы келесі түрде анықталады:

$$\int_L f(z)dz = \int_L (u+iv)\left(dx+idy\right) = \int_L \left(udx - vdy\right) + i\int_L \left(vdx+udy\right) =$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[u\left(x(t),y(t)\right)x'(t) - v\left(x(t),y(t)\right)y'(t)\right]dt =$$

$$+ i\int_\alpha^\beta \left[v\left(x(t),y(t)\right)x'(t) + u\left(x(t),y(t)\right)y'(t)\right]dt. \qquad (2)$$

Мұнда $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ және $u\left(x(t),y(t)\right) = u(z(t))$ болатынын ескеріп, (2) теңдікті қысқаша жазуға болады:

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f\left[z(t)\right]z'(t)dt. \qquad (3)$$

Сонымен, комплекс айнымалды функцияның интегралы – екі қисықсызықты интегралдардың қосындысы және оны есептеу жай интегралдарды есептеуге әкеледі екен.

Жоғарыдағы интегралдар кез келген үзіліссіз $f(z)$ фунция және кез келген L тегіс қисығы үшін – бар (тегіс қисық ұғымын Айдос Е.Ж. «Жоғары математика-2», § 5.1 қараңыз, «Бастау», 2015).

Мысал. Интегралды есептеу керек: $\int_L \bar{z}dz$, мұнда L арқылы $y = x^2$ параболасының $O\left(0,0\right)$ және $A\left(1,1\right)$ нүктелерінің арасындағы бөлігі белгіленген.

▼ Интегралдау қисығын $L:\ \begin{cases} x = x, \\ y = x^2, \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$ (мұнда x – параметр) түрінде жазуға болатындықтан:

$$\int_L \bar{z}dz = \int_L \left(x - iy\right)\left(dx + idy\right) = \int_0^1 \left(x - ix^2\right)\left(dx + i2xdx\right) =$$

$$= \int_0^1 \left(x - ix^2\right)\left(1 + i2x\right)dx = \int_0^1 (x + 2x^3 + ix^2)dx = \left.\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2} + i\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = 1 + i\frac{1}{3}.$$

шығады. ▲

Комплекс айнымалды функциялардың интегралдарының қасиеттері.

Егер $L-$ құрақты тегіс қисығы $L_1, L_2, ..., L_n -$ бағытталған тегіс бөліктерден құралса, онда анықтама бойынша келесі теңдік орындалады:

$$\int_L f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{L_k} f(z)dz. \qquad (4)$$

1) Қисықсызықты интегралдардың қасиеттеріне сүйеніп, келесі теңдікті алуға болады: $\int_L f(z)dz = -\int_{L_-} f(z)dz,$ мұнда L_- арқылы L қисығымен беттесетін, бірақ бағыты L қисығының бағытына қарама-қарсы қисық белгіленген.

2) $\int_L \left[A \cdot f(z) + B \cdot g(z)\right]dz = A\int_L f(z)dz + B\int_L g(z)dz,$

$A, B -$ тұрақты сандар.

3) Егер $z \in L$ нүктелері үшін $\left|f(z)\right| \le M$ орындалса, онда

$\left|\int_L f(z)dz\right| \le Ml,$ мұндағы $l-$ L қисығының ұзындығы.

▼ Шынында да, жай интегралдардың қасиеттері бойынша

$$\left|\int_L f(z)dz\right| \le \left|\int_\alpha^\beta f\left[z(t)\right]z'(t)dt\right| \le \int_\alpha^\beta \left|f\left[z(t)\right]\right|\left|z'(t)\right|dt \le$$

$$\le \int_\alpha^\beta M\left|z'(t)\right|dt = M\int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = Ml. \quad ▲$$

1-мысал. Егер $L-$ центрі z_0 нүктесінде, бағыты сағат тіліне қарсы бағытталған шеңбер болса, онда

$$\int_L \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i. \tag{5}$$

▼ Радиусін ρ деп белгілеп, аталған шеңбердің параметрлік теңдеуін жазайық: $L:\begin{cases} x-x_0 = \rho\cdot\cos t, \\ y-y_0 = \rho\cdot\sin t, \quad 0\le t<2\pi, \end{cases}$ немесе $L:(x-x_0)+i(y-y_0)=\rho(\cos t+i\sin t),\ \ 0\le t<2\pi.$ Бұл теңдікті келесі түрде жазуға болады: $L:\ z-z_0=\rho e^{it},\quad 0\le t<2\pi.$

Олай болса, $\int_L \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi}\frac{\rho i e^{it}dt}{\rho i e^{it}} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$ ▲

2-мысал. Егер L центрі z_0 нүктесінде, бағыты сағат тіліне қарсы бағытталған шеңбер болса, онда $n\ne -1$ бүтін сандары үшін келесі теңдік орындалады:

$$\int_L (z-z_0)^n\,dz = 0. \tag{6}$$

▼ $\int_L (z-z_0)^n\,dz = \int_0^{2\pi}\rho^{n+1} i e^{i(n+1)t}dt = i\rho^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}dt =$

$= i\rho^{n+1}\left.\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\right|_0^{2\pi} = 0,$ өйткені кез келген бүтін n саны үшін $e^{i2(n+1)\pi}=1.$ ▲

1-теорема (Коши). Егер $f(z)$ бір байламды D аймағында аналитикалық функция болса, онда $f(z)$ функциясының D аймағында жатқан кез келген тұйық Γ контур бойынша интегралы нөлге тең: $\int_L f(z)dz = 0.$

▼ Теоерема шарты бойынша $f(z)=u+iv$ функциясының нақты және жорамал бөліктері үзіліссіз дифференциалданады және олар үшін Коши-Риман шарттары орындалады:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{7}$$

Бұл теңдіктерден $vdx+udy$ және $udx-vdy$ қандай да бір функциялардың толық дифференциалдары болатыны шығады (Айдос Е.Ж. «Жоғары математика-3», «Бастау», 2015, § 10.3-теореманы қараңыз). Олай болса, бұл өрнектердің тұйық контур бойынша қисықсызықты интегралдары нөлге тең (бұл да сонда, § 11.9 қараңыз): $\int_{\Gamma} f(z)dz=\int_{\Gamma}(udx-vdy)+i\int_{\Gamma}(vdx+udy)=0.$ ▲

Мысалы, z жазықтығында z^n $(n=0,1,2,...)$, e^z, a^z $(a>0)$, $\sin z$, $\cos z$, $\mathrm{s}hz$, $\mathrm{c}hz$ аналитикалық функциялар болғандықтан, теорема бойынша олардың кез келген тұйық құрақты-тегіс Γ контур бойынша интегралдары нөлге тең:
$\int_{\Gamma} z^n dz=0,\ \int_{\Gamma} e^z dz=0,\ ....$

Коши теоремасынан келесі тұжырымдардар шығады:

1-салдар. Егер $f(z)$ бір байламды D аймағында аналитикалық функция, ал $\Gamma\subset D$ – бастапқы және соңғы нүктелері сәйкес z_1 және z_2 болатын құрақты-тегіс қисық болса, онда $\int_{\Gamma} f(z)dz$ интегралы Г қисығының пішініне емес, оның бастапқы және соңғы нүктелеріне ғана тәуелді:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz=\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz.$$

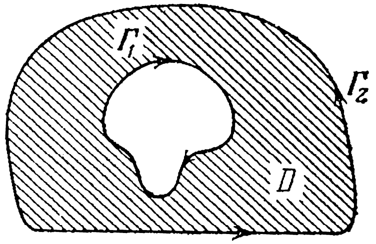
2-салдар. Егер $f(z)$ бір байламды D аймағында аналитикалық функция, ал $f(z)$ оның осы аймақтағы қандай да бір алғашқы функциясы болса, онда кез келген $z_1, z_2\in D$ нүктелері үшін

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = f(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = f(z_2) - f(z_1). \qquad (8)$$

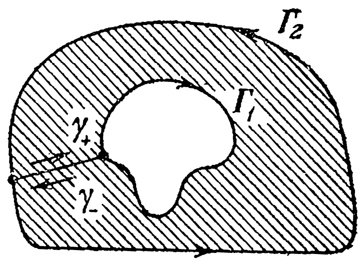
Мысалы, $\int_1^2 z^2 dz = \frac{z^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}.$

2-теорема. D аймағы Γ контурымен шектелсін. Ал Γ оң бағытталған (Γ контурымен айналғанда, D аймағы сол жақта қалады) құрақты-тегіс күрделі контур болсын. Онда $\bar{D} = D \cup \Gamma$ тұйық аймақта аналитикалық $f(z)$ функцияның Γ контур бойынша интегралы нөлге тең: $\int_\Gamma f(z)dz = 0.$

▼ 6-суретте D екібайланысты аймақ оң бағытталған құрақты-тегіс $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ контурмен шектелген.



6-сурет



7-сурет

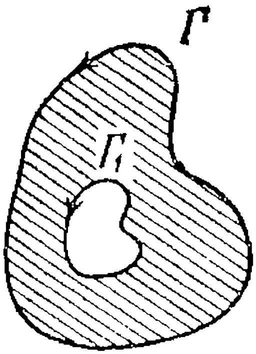
Γ_1 мен Γ_2 контурларын, 7-суретте көрсетілгендей, тегіс γ бөлікпен қосамыз. γ-ны қарама-қарсы екі тәсілмен бағыттаймыз: γ_+, γ_- . Нәтижесінде бағытталған $\Gamma_2 + \gamma_+ + \Gamma_1 + \gamma_-$ контурмен шектелген ***бірбайланысты*** жаңа D_1 аймағын аламыз. 1-теорема бойынша $\int\limits_{\Gamma_2+\gamma_+ +\Gamma_1+\gamma_-} f(z)\,dz = 0.$ Мұнда

$$\int\limits_{\gamma_+ + \gamma_-} f(z)\, dz = \int\limits_{\gamma_-} f(z)\, dz + \int\limits_{\gamma_+} f(z)\, dz = 0$$ болатынын ескерсек,

$$\int\limits_{\Gamma} f(z) dz = \int\limits_{\Gamma_1} f(z)\, dz + \int\limits_{\Gamma_2} f(z)\, dz = 0. \quad \blacktriangle$$

Салдар. Егер екі байланысты D аймағын шектейтін Γ мен Γ_1 контурлардың екеуінің де бағыттары сағат тіліне қарсы болса (8-сурет), онда 2-теорема шартын қанағаттандыратын $f(z)$ функциясы үшін келесі теңдік орындалады:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz = \int\limits_{\Gamma_1} f(z)\, dz. \tag{9}$$



8-сурет

(9) теңдіктен (5) және (6) теңдіктердегі центрі z_0 нүктесі болатын L ***шеңбердің орнына*** ішінде z_0 нүкте жатқан, сағат тіліне қарсы бағытталған, ***кез келген тұйық құрақты-тегіс L' контурды*** алуға болатынын көреміз:

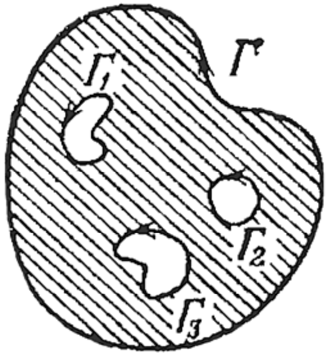
$$\int\limits_{L'} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i, \tag{$5'$}$$

$$\int\limits_{L'} \left(z - z_0\right)^n dz = 0. \tag{$6'$}$$

Ескерту. Салдардағы шарттарды қанағаттандыратын көп байламды D аймағын шектейтін контурлар $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$ болса (9-сурет), онда келесі теңдік орындалады:

$$\int_{\Gamma} f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_k} f(z)\, dz. \qquad (9')$$

Назарыңызға! Бұдан кейін тұйық құрақты-тегіс үзіліссіз контур деп жатпастан, ықшамдап «контур» дейміз.



9-сурет

§ 5. Коши формуласы. Коши интегралы тектес интеграл

$f(z)$ бір байламды тұйық $\overline{D} = D \cup L$ аймағында аналитикалық функция болсын, мұндағы L – аймақтың оң, яғни сағат тіліне қарсы бағытталған, құрақты-тегіс шекарасы (10-сурет).

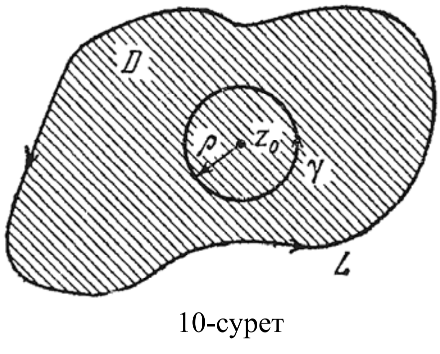
Онда **Коши формуласы** орын алады:

$$f\left(z_0\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f\left(z\right) dz}{z - z_0}, \tag{1}$$

мұндағы z_0 – L контурдың ішіндегі кез келген нүкте.

$\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_L \frac{f\left(z\right) dz}{z - z_0}$ **Коши интегралы** деп аталады.

Бұл формула аналитикалық функцияның D аймағының L шекарасында анықталуы оның D аймағының кез келген ішкі нүктелеріндегі мәнін табуға мүмкіндік беретінін көрсетеді.



10-сурет

▼ $\varphi\left(z\right) = \dfrac{f\left(z\right) - f\left(z\right)}{z - z_0}$ функциясы – $\overline{D} = D \cup L$ аймағының $z = z_0$ нүктесінен басқа нүктелерінде аналитикалық функция. $z = z_0$ нүктесін центр етіп алып, кез келген $\rho > 0$ радиуспен оң бағытталған $\gamma \subset D$ шеңбер жүргіземіз (10-суретті қараңыз).

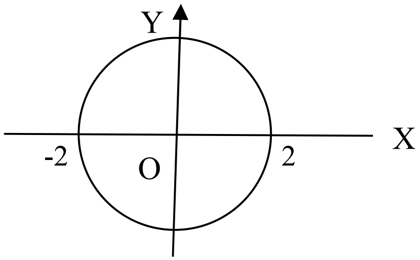
Онда §5 (9) теңдік бойынша $\int\limits_{L}\varphi(z)\,dz=\int\limits_{\gamma}\varphi(z)\,dz$ аламыз.

Мұндағы $\int\limits_{\gamma}\varphi(z)\,dz=\int\limits_{|z-z_0|=\rho}\varphi(z)\,dz$ интегралы ρ-ға тәуелді емес. $\varphi(z)=\dfrac{f(z)-f(z)}{z-z_0}$ теңдігінен $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)=f'(z_0)$ шығады.

Егер $\varphi(z)$ функциясын $z=z_0$ нүктесінде $\varphi(z_0)=f'(z_0)$ деп анықтасақ, онда ол $\bar{D}$ тұйық аймақта үзіліссіз болады, сондықтан оның модулі шенелген $|\varphi(z)|\le M \quad \forall z\in\bar{D}$. Шенелген функцияға § 4 3-қасиетті қолданып, $\left|\int\limits_{\gamma}\varphi(z)\,dz\right|\le M\cdot 2\pi\rho$ аламыз. Жоғарыда айтқандай, $\rho>0$ санын кез келген етіп алуға болады, ал $\int\limits_{\gamma}\varphi(z)\,dz$ интегралы ρ-ға тәуелді емес болғандықтан, соңғы теңсіздіктен $\int\limits_{\gamma}\varphi(z)\,dz=0,$ ал бұдан $\int\limits_{\gamma}\varphi(z)\,dz=\int\limits_{L}\varphi(z)\,dz=$ $=\int\limits_{L}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz=0$ аламыз. Мұндағы соңғы теңдіктен, § 4 ($5'$) теңдікті ескеріп, $\int\limits_{L}\dfrac{f(z)dz}{z-z_0}=\int\limits_{L}\dfrac{f(z_0)dz}{z-z_0}=f(z_0)\int\limits_{L}\dfrac{dz}{z-z_0}=$ $=2\pi i\cdot f(z_0)$, яғни (1) теңдікті аламыз. ▲

Назарыңызға! Егер z_0 нүктесі L контурдың сыртында жатса, онда $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ функциясы $\bar{D}$ тұйық аймақта аналитикалық функция болатындықтан, Коши интегралы нөлге тең: $\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\dfrac{f(z)dz}{z-z_0}=0.$

Мысал. Есептеу керек: $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2+4z+3}dz$, мұндағы контур оң бағытталған (11-сурет).



11-сурет

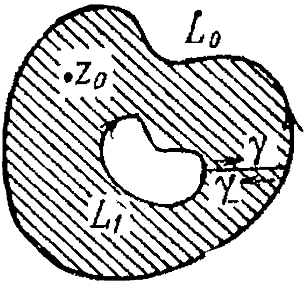
▼ Интеграл астындағы функциядан көрсетілген аймақта аналитикалық болатын функцияны бөліп алып, берілген интегралды Коши интегралына келтіреміз:

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2+4z+3}dz = \int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{(z+3)(z+1)}dz = \int\limits_{|z|=2} \frac{\frac{\sin z}{z+3}}{z+1}dz = 2\pi i \cdot \left.\frac{\sin z}{z+3}\right|_{z=-1} =$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{-\sin 1}{2} = -\sin 1 \cdot \pi i.$$ ▲

Коши формуласы көп байламды аймақ үшін де орындалатынын көрсетейік.

▼ Мысалы, D – оң бағытталған L шекарасы бар екі байланысты аймақ болсын, ал L сәйкес бағытталған екі L_0 және L_1 тұйық контурлардан құралсын: $L = L_0 + L_1$ (12-сурет).



12-сурет

z_0 аймақтың кез келген нүктесі болсын. L_0 және L_1 контурларды z_0 нүктесі арқылы өтпейтін, L_1-ден L_0-ге қарай бағытталған, құрақты-тегіс γ қисығымен жалғаймыз. Сонымен бірге γ қисығымен беттесетін, бірақ оған қарама-қарсы бағытталған γ_- енгіземіз. Егер D аймағынан γ-ны алып тастасақ, онда оның қалған бөлігі D_* бір байламды аймақ болады, ал оның шекарасы – оң бағытталған $L' = L_0 + \gamma_- + L_1 + \gamma = L + \gamma_- + \gamma$ контуры.

$f(z)$ функциясы $\overline{D}_*$ тұйық аймақта аналитикалық функция және $z_0 \in D_*$ болғандықтан, бірбайламды аймақ үшін Коши теоремасын пайдаланып6

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L'} \frac{f(z)dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_L \frac{f(z)dz}{z - z_0} + \int_\gamma \frac{f(z)dz}{z - z_0} + \int_{\gamma_-} \frac{f(z)dz}{z - z_0}\right) =$$

$= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)dz}{z - z_0}$ аламыз, өйткені $\int_\gamma \frac{f(z)dz}{z - z_0} + \int_{\gamma_-} \frac{f(z)dz}{z - z_0} = 0.$ ▲

Енді Коши интегралы тектес интегралды қарастырайық.

Егер L – кез келген бағытталған құрақты-тегіс қисық (оның тұйық болуы міндетті емес), $\varphi(z)-$осы L қисықта анықталған үзіліссіз функция және нүкте $\zeta \notin L$ болса, онда ***Коши интегралы тектес интеграл*** деп келесі өрнекті айтады:

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(z)\,dz}{z - \zeta}. \qquad (2)$$

Бұл өрнек L қисығынан тыс жатқан нүктелерде анықталған $F(z_0)$ функциясын көрсетеді.

Теорема. Коши интегралы тектес интеграл барлық $\zeta \notin L$ нүктелерде аналитикалық $F(\zeta)$ функция болады. Бұл функцияның *n* ретті туындысы келесі формула бойынша есептеледі:

$$F^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(z)\,dz}{(z - \zeta)^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots . \qquad (3)$$

▼ Дәлелдеуін, мысалы, [1] кітаптан қарауға болады. ▲

Теоремадан келесі маңызды тұжырым шығады.

Егер $w = f(z)$ *D аймағында аналитикалық функция болса, онда оның осы аймақта кез келген n ретті туындысы бар.*

▼ Егер $\zeta -$ D аймағындағы кез келген нүкте, $\sigma -$ центрі ζ нүктесі болатын, D аймағында орналасқан дөңгелек, ал γ оның сағат тіліне қарама-қарсы бағытталған шекарасы (шеңбер) болса, онда келесі Коши формуласын жаза аламыз:

$f(\zeta) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \dfrac{f(z)\,dz}{z - \zeta}.$ Бұл $f(\zeta)$ функциясының Коши интегралы тектес интеграл арқылы өрнектелгенін көрсетеді ($L = \gamma$, $\varphi(z) = f(z)$). Онда жоғарыдағы теорема бойынша $f(z)$ функциясы ақырсыз рет дифференциалданады және

$$f^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z - \zeta)^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots . \qquad (4)$$ ▲

Аталған тұжырымнан комплекс айнымалды аналитикалық функция мен дифференциалданатын нақты айнымалды функцияның ерекшеліктерін айқын көреміз (нақты айнымалды функцияның бірінші ретті туындысы бар болуынан оның жоғарғы ретті туындыларының бар болуы шықпайды).

(4) формуладан кейбір интегралдарды есептеуге қолайлы формуланы аламыз:

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{(z-\zeta)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(\zeta), \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{5}$$

Мысал. Есептеу керек: $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{dz}{\left(z^2-1\right)^2}$.

▼ Интеграл астындағы функцияны (5) интеграл астындағы функция түріне келтіреміз: $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{dz}{\left(z^2-1\right)^2} = \int_{|z-1|=1} \frac{\frac{1}{(z+1)^2}}{(z-1)^2} dz =$

$= \Big|$ (5) формуланың $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)^2}$, $n = 1$, $\zeta = 1$ жағдайы $\Big| =$

$$= \frac{2\pi i}{1!} \cdot \left(\frac{1}{(z+1)^2} \right)' \Bigg|_{z=1} = 2\pi i \cdot \frac{-2}{(z+1)^3} \Bigg|_{z=1} = = \frac{-4\pi i}{8} = \frac{-\pi i}{2}.$$ ▲

§ 6. Комплекс мүшелі қатарлар туралы қысқаша мәліметтер

Келесі қатарды қарастырамыз:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + iy_n. \qquad (1)$$

Егер $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ (мұнда $S_n = z_1 + z_2 + ... + z_n$) ақырлы шегі бар болса, онда (1) қатар ***жинақты***, ал $S = x + iy$ саны оның ***қосындысы*** деп аталады: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n = S.$

Егер $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ қатарлары жинақты болса, тек сонда ғана (1) қатар жинақты болады және $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = x,\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n = y.$

Егер

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| \qquad (2)$$

қатары жинақты болса, онда (1) ***қатар абсалют жинақты*** деп аталады. (2) қатар мүшелері теріс емес нақты сандар қатары болғандықтан, оған қатарлардың жинақтылығының барлық белгілерін қолдануға болады.

Абсалют жинақты қатар жинақталады. Шынында да, (2) қатардың жинақтылығының Коши белгісі бойынша, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \varepsilon > |z_{n+1}| + |z_{n+2}| + |z_{n+p}|,\quad \forall p,\ n > N,$ ал бұдан $\varepsilon > |z_{n+1}| + |z_{n+2}| + |z_{n+p}| > |z_{n+2} + z_{n+1} + ... + z_{n+p}|, \forall p,\ n > N$ аламыз. Алынған тұжырым, Коши белгісі бойынша, (1) қатардың жинақтылығын көрсетеді.

Комплекс жазықтықтағы E жиынында анықталған келесі функциялық қатарды қарастырайық:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z), \qquad z \in E. \tag{3}$$

Бұл қатардың *n*-ші дербес қосындысы $S_n(z)$, ал қосындысы $S(z)$ болсын. Егер $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon): \ \left|S_n(z) - S(z)\right| < \varepsilon$ $\forall n > N \ \ \forall z \in E$ орындалса, онда (3) функциялық қатар $S(z)$ функциясына *E* жиынында ***бірқалыпты жнақталады*** дейді.

Нақты мүшелі қатарлар сияқты, мұнда да ***Вейерштрасс белгісі*** орын алады: егер $\forall z \in E \ \ \left|u_n(z)\right| \le c_n, \ \ n = 0,1,2,...$ және $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ сандық қатары жинақты болса, онда (3) функциялық қатар ***E жиынында бірқалыпты және абсолют жинақты.***

Функциялық қатардың мүшелері қандай да бір қисық бойында үзіліссіз, ал қатар осы қисық бойында бірқалыпты жинақты болса, онда: 1) қатардың қосындысы осы қисық бойында үзіліссіз болады; 2) қатарды осы қисық бойынша мүшелеп интегралдауға болады және мүшелеп интегралданған қатар осы қисық бойында бірқалыпты жинақталады.

Теорема (Вейерштрасс). Егер бір байламды *D* аймақта $u_n(z), \ \ n = 0,1,2,...$ аналитикалық функциялар болып, осы аймақта (3) функциялық қатар бірқалыпты жинақты болса, онда оның қосындысы да *D* аймақта аналитикалық функция болады. Сонымен бірге *D* аймақтың шекарасында $u_n(z), \ \ n = 0,1,2,...$ үзіліссіз болса, онда (3) функциялық қатарды ақырсыз рет мүшелеп дифференциалдауға болады.

Коэффициенттері комплекс сандар болатын дәрежелік қатар берілсін:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{4}$$

Дәрежелік қатарлар теориясында ***негізгі теорема*** деп аталатын келесі тұжырымның маңызы үлкен:

Теорема. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – дәрежелік қатары $|z| < R$ – ашық дөңгелекте абсолют жинақты, ал $|z| > R$ аймағында жинақсыз болатын $0 \le R \le +\infty$ саны табылады.

R дәрежелік қатардың ***жинақталу радиусы*** деп аталады және оны табу формуласы нақты мүшелі дәрежелік қатарлардың жинақталу радиусының формуласындай:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{немесе} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

(егер аталған шектер жоқ болса, онда олардың орнына жоғарғы шек алынады).

Дәрежелік қатарлар теориясы, әдетте, Абель теоремасынан бастау алады.

Теорема (Абель). $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – дәрежелік қатар $|z| \le q < R$ тұйық дөңгелекте ***абсолют*** және ***бірқалыпты*** жинақты.

▼ q дәрежелік қатар жинақталатын ашық дөңгелекте жатқан нақты сан болғандықтан, алдыңғы теорема бойынша, (4) дәрежелік қатар q нүктесінде абсолют жинақты:

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n q^n| < \infty.$ Сонымен бірге Абель теоремасының шарты бойынша $|a_n z^n| \le |a_n q^n|$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, ал бұл теңсіздіктің оң жағы z-ке тәуелсіз және олардан құралған қатар жинақты болғандықтан, Вейерштасс белгісі бойынша (4) дәрежелік қатар $|z| \le q < R$ тұйық дөңгелекте ***абсолют*** және ***бірқалыпты*** жинақты. ▲

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ - дәрежелік қатар $|z| \le q < R$ тұйық дөңгелекте бірқалыпты жинақталатындықтан ($q -$ кез келген сан: $q < R$), қатардың $f(z)$– қосындысы $|z|<R$ ашық дөңгелекте үзіліссіз функция болады. Бұл функцияның $f^{(n)}(z)$, яғни реті кез келген туындысын (4) қатарды осы дөңгелекте мүшелеп дифференциалдау арқылы алуға болады. Мүшелеп дифференциалдап (немесе мүшелеп интегралдап) алынған дәрежелік қатарлардың жинақталу радиусы берілген (4) дәрежелік қатардың жинақталу радиусына тең. Олай болса, дәрежелік қатардың қосындысы $|z|<R$ ашық дөңгелекте *аналитикалық функция* болады.

Ескерту. (4) дәрежелік қатардың жинақталу жиыны – центрі 0 нүктесі, ал радиусі R-ге тең дөңгелек болса, келесі дәрежелік қатардың:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z-z_0\right)^n \tag{5}$$

жинақталу жиыны – центрі z_0 нүктесі, ал радиусі R-ге тең дөңгелек: $|z-z_0|<R$ (дөңгелек шеңберінің бойындағы нүктелер қарастырылмайды). Бұл дәрежелік қатарды $z-z_0=\zeta$ айнымал ауыстыруы арқылы (4) дәрежелік қатар

түріне келтіруге болады: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$.

§ 7. Тейлор қатары

(*Тейлор Брук – (1685-1731) ағылшын математигі*)

Жинақталу радиусы $R>0$ тең дәрежелік қатарды қарастырайық:

$$S(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(z-z_0\right)^n, \qquad \left|z-z_0\right|<R. \tag{1}$$

Дәрежелік қатарды (жинақталу радиусын сақтай отырып) ақырсыз рет мүшелеп дифференциалдауға болатынын ескеріп, $S^{(k)}(z)=a_k\cdot k! \ +a_{k+1}\left(k+1\right)\cdot\ldots\cdot 2\cdot\left(z-z_0\right)+$

$+a_{k+2}\left(k+2\right)\cdot\ldots 3\cdot\left(z-z_0\right)^2+\ldots$ аламыз. Бұдан $z=z_0$ үшін

$S^{(k)}(z_0)=a_k\cdot k!,$ ал бұдан $a_k=\dfrac{S^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k=0,1`,2,\ldots$ аламыз.

Демек, дәрежелік қатар өзінің қосындысының Тейлор қатары екен: $S(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{S^{(n)}(z_0)}{n!}\left(z-z_0\right)^n, \qquad \left|z-z_0\right|<R.$

Егер §5 (4) формуланы: $f^{(n)}\left(\zeta\right)=\dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma}\dfrac{f\left(z\right)dz}{\left(z-\zeta\right)^{n+1}}, \quad n=1,2,\ldots$.

z_0 нүктесі үшін аналитикалық $S(z)$ функциясына арнап жазсақ: $S^{(n)}\left(z_0\right)=\dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma}\dfrac{S\left(z\right)dz}{\left(z-z_0\right)^{n+1}}, \quad n=1,2,\ldots.$ (мұндағы $\gamma-$ дәрежелік қатардың жинақталу аймағында жатқан, сағат тіліне қарсы бағытталған, z_0 нүктесін қамтитын кез келген контур). Ендеше:

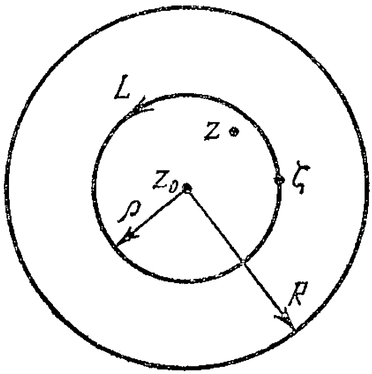
$$a_k=\frac{S^{(k)}(z_0)}{k!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{S\left(z\right)dz}{\left(z-z_0\right)^{k+1}}, \quad k=1,2,\ldots . \tag{2}$$

Теорема. $|z-z_0|<R$ дөңгелекте аналитикалық $f(z)$ функциясы $(z-z_0)$ айырымының дәрежелері бойынша (осы функцияның өзіне жинақталатын) Тейлор қатарына жіктеледі:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(z-z_0\right)^k,\quad a_k=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f\left(z\right)dz}{\left(z-z_0\right)^{k+1}},\quad k=1,2,\dots \tag{3}$$

(3) *теңдік функцияның z_0 нүкте маңайында Тейлор қатарына жіктелуі деп аталады.*

▼ $|z-z_0|<R$ дөңгелектің ішінен кез келген z нүктесін алып, осы нүкте ішінде қалатындай етіп, центрі z_0, радиусы $\rho<R$ тең, оң бағытталған L шеңберін сызамыз (13-сурет).



13-сурет

Онда $f(z)$ функциясы L контурында және оның ішінде аналитикалық функция болатындықтан, Коши теоремасы бойынша $f\left(z\right)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L\frac{f\left(\zeta\right)d\zeta}{\zeta-z}$ теңдігін жаза аламыз. Интеграл астындағы $\dfrac{1}{\zeta-z}$ бөлшегін келесі түрде жазуға болады:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}. \qquad (4)$$

Мұндағы $\zeta \in L$, ал z нүктесі L шеңбердің ішінде жататындықтан, $\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \frac{|z - z_0|}{\rho} < 1$. Олай болса, $\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$ өрнегін геометриялық прогрессияның қосындысы ретінде алуға болады: $\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = 1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^2 + \dots$. Бұл өрнекті (4) теңдікке қойып, келесі қатарды аламыз:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} + \frac{z - z_0}{(\zeta - z_0)^2} + \frac{\left(z - z_0\right)^2}{\left(\zeta - z_0\right)^3} + \dots \qquad (5)$$

Жоғарыда, $\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right|$ өрнегінің бірден кіші болатынын көрдік және ол $\zeta \in L$ нүктесіне тәуелді емес. Сондықтан (5) қатар кез келген $\zeta \in L$ және тұрақты z үшін бірқалыпты жинақты болады. (5) теңдікті $\frac{f(\zeta)}{2\pi i}$ бөлшегіне көбейтіп алып (одан қатардың бірқалыпты жинақтылығы өзгермейді), L қисығы бойынша интегралдасақ,

$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z_0} + \frac{z - z_0}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)d\zeta}{\left(\zeta - z_0\right)^2} + \dots$ теңдігі шығады. Мұнда $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)dz}{\left(z - z_0\right)^{k+1}}, \quad k = 1, 2, \dots$ деп белгілеу арқылы алынған $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(z - z_0\right)^k$ дәрежелік қатар

$\left|z - z_0\right| < R$ дөңгелекте аналитикалық $f(z)$ функциясының Тейлор қатары болады. ▲

Нақты айнымалды функциялар сияқты (3) формулалардан элементар функциялардың z дәрежесі бойынша Тейлор қатарына жіктелулерін жазуға болады:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot z^n = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots , \qquad |z| < +\infty; \qquad \textbf{(А)}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \cdot z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots , \ |z| < +\infty; \quad \textbf{(Ә)}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \cdot z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^8}{8!} + \dots , \qquad |z| < +\infty; \qquad \textbf{(Б)}$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \cdot z^n = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots , \quad |z| < 1; \quad \textbf{(В)}$$

Бұл – логарифмнің бас мәнінің z дәрежесі бойынша Тейлор қатарына жіктелуі. Ал егер көпмәнді $L\mathrm{n}(1+z)$ функциясының басқа мәндері үшін Тейлор қатарын алу керек болса, онда бұл қатарға $2n\pi i$, $n = \pm 1, \ \pm 2, \dots$ сандарын қосу керек:

$$L\mathrm{n}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \cdot z^n + 2n\pi i; \qquad \textbf{(Г)}$$

$$(1+z)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!} \cdot z^n =$$

$$= 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \dots , \quad |z| < 1; \qquad \textbf{(Ғ)}$$

Егер мұнда, мысалы, $\alpha = -1$ болса, онда

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\ldots+(-1)^n z^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n, \qquad |z|<1; \qquad \textbf{(Д)}$$

Назар аударыңыз! **(Д)** теңдігінің сол жағындағы функция – бірінші мүшесі 1, ал еселігі $-z$ тең ақырсыз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы.

1-*мысал.* $f(z)=\dfrac{4z}{z^2-2z-3}$ функциясын $z_0=0$ нүктенің маңайында Тейлор қатарына жіктеу керек.

▼ Бөлшекті қарапайым бөлшектердің қосындысына келтіреміз: $\dfrac{4z}{z^2-2z-3}=\dfrac{1}{z+1}+3\cdot\dfrac{1}{z-3}$. Бірінші, $\dfrac{1}{z+1}$ бөлшектің жіктелуі **(Д)** болғандықтан, екінші, $3\cdot\dfrac{1}{z-3}$ бөлшегін Тейлор қатарына жіктесек болғаны. Ол үшін бұл бөлшекті **(Д)** теңдігінің сол жағындағы функция түріне келтіріп алып, содан соң z орнына $-\dfrac{z}{3}$ өрнегін қоямыз:

$$3\cdot\frac{1}{z-3}=-3\cdot\frac{1}{3-z}=-\frac{1}{1+\left(-\dfrac{z}{3}\right)}=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(-\frac{z}{3}\right)^n=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n}\frac{z^n}{3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}.$$

Олай болса, $\dfrac{4z}{z^2-2z-3}=\dfrac{1}{z+1}+3\cdot\dfrac{1}{z-3}=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n-\frac{1}{3^n}\right]z^n.$$

Берілген функцияның $z=-1$ мен $z=3$ ерекше нүктелерінің $z_0=0$ нүктесіне жақын орналасқаны $z=-1$ болғандықтан, алынған қатардың жинақталу дөңгелігі $|z|<1$ болады. ▲

2-*мысал.* $f(z)=\dfrac{1}{1-2z}$ функциясын $z-2$ айырымының дәрежесі бойынша Тейлор қатарына жіктеу керек.

▼ Берілген функцияны **(Д)** теңдігінің сол жағындағы функция түріне келтіреміз:

$$\frac{1}{1-2z}=\frac{1}{1-2\left(z-2+2\right)}=\frac{1}{-3+2\left(z-2\right)}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}\left(z-2\right)}.$$

Мұнда **(Д)** жіктеліміндегі z орнында $-\dfrac{2}{3}\left(z-2\right)$ тұрғандықтан,

$$\frac{1}{1-2z}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}\left(z-2\right)}=\frac{1}{-3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\left[-\frac{2}{3}\left(z-2\right)\right]^{n}=$$

$$=\frac{1}{-3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{2n}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\left(z-2\right)^{n}=\frac{1}{-3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\left(z-2\right)^{n}.$$

Бұл қатар $\left|-\dfrac{2}{3}\left(z-2\right)\right|<1,$ немесе $\left|z-2\right|<\dfrac{3}{2}$ шарты орындалса, жинақты болады, яғни қатардың жинақталу радиусы $R=\dfrac{3}{2}$ тең. ▲

§ 8. Лоран қатары

(Пьер Лоран (1813-1854) – француз математигі)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(z - z_0\right)^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \frac{1}{\left(z - z_0\right)^k} \qquad (1)$$

түріндегі қатардан $\dfrac{1}{z - z_0} = \zeta$ айнымал ауыстыруы арқылы келесі дәрежелік қатарды аламыз: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^k$. Алынған дәрежелік қатар $|\zeta| < R$ ($R-$ жинақталу радиусы) дөңгелекте абсолют жинақты, ал $|\zeta| \le q < R$ ($q-$ кез келген сан) тұйық дөңгелекте бірқалыпты жинақты болғандықтан, (1) қатар $\left|\dfrac{1}{z - z_0}\right| < R$ немесе $\left|z - z_0\right| > \dfrac{1}{R}$ нүктелерде абсолют жинақты да, ал $\left|\dfrac{1}{z - z_0}\right| \le q < R$ немесе $\left|z - z_0\right| \ge \dfrac{1}{q} > \dfrac{1}{R}$ нүктелерінде бірқалыпты жинақты болады.

Енді

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left(z - z_0\right)^n \qquad (2)$$

түріндегі қатарды қарастырамыз. Бұл қатар келесі екі қатардың:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z - z_0\right)^n \qquad (3)$$

және

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n \left(z - z_0\right)^n = \left|n = -m\right| = \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} \left(z - z_0\right)^{-m} \qquad (4)$$

қосындысы ретінде алынады, сонымен бірге (3) және (4) қатарлар жинақты болса, тек сонда ғана (2) қатар жинақты. Сондықтан (3) қатар $|z-z_0|<R$ дөңгелекте, ал (4) қатар $|z-z_0|>r$ жиынында жинақты болатындықтан, (2) қатар $r<|z-z_0|<R, \quad r<R,$ сақинада жинақты болады.

Осы сияқты, $r<q_1\le|z-z_0|\le q_2<R, \quad r<R,$ тұйық сақинада (2) қатар бірқалыпты жинақты болады.

Назар аударыңыз! Егер мұнда $r>R$ болса, онда (2) қатар жинақты болатын нүкте жоқ.

Енді $f(z)$ ***функциясының*** $r<|z-z_0|<R$ ***сақинада Лорандық жіктелуі*** немесе $f(z)$ ***функциясының*** $(z-z_0)$ ***дәрежесі бойынша Лоран қатары*** деп аталатын қатарды қарастырайық (төмендегі (5), (6) қараңыз).

Теорема. Берілген $r<|z-z_0|<R$ (мұнда $0\le r<R\le\infty$) сақинада аналитикалық болатын кез келген $f(z)$ функцияны осы сақинада жинақталатын

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\left(z-z_0\right)^n, \tag{5}$$

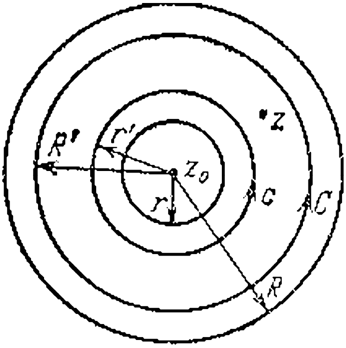
мұнда

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\left(\zeta-z_0\right)^{n+1}}, \quad n=0,\pm1,\pm2,... \tag{6}$$

(γ – сағат тіліне қарама-қарсы бағытталған, кез келген $|\zeta-z_0|=\rho, \ r<\rho<R$ шеңбері) түріндегі қатармен бірмәнді өрнектеуге болады.

▼ Сағат тіліне қарсы бағытталған радиустары r' және R' тен, $r<r'<R'<R$ болатын *c* және *C* шеңберлерін саламыз (14-сурет).

Теорема шарты бойынша, $f(z)$ функциясы *c* және *C* шеңберлерінің арасындағы сақинада және осы шеңберлерде аналитикалық функция болады. Сондықтан күрделі контурларға арналған Коши теоремасы бойынша келесі теңдік орындалады:



14-сурет

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_-}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}\quad \text{немесе}$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}, \tag{7}$$

мұндағы z нүкте c және C шеңберлерінің арасында жатыр. Бірінші интегралда ζ нүктесі C шеңберінің нүктесі болғандықтан, $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|=\frac{|z-z_0|}{R'}<1,$ олай болса,

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)\left[1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right]}=\frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}, \tag{8}$$

және бұның оң жағындағы қатар барлық $\zeta\in C$ нүктелерінде бірқалыпты жинақты ($z-$ бекітілген нүкте) болады. Ал екінші интегралда ζ нүкте c шеңберінің нүктесі болғандықтан, $\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|=\frac{r'}{|z-z_0|}<1,$ олай болса,

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{-1}{(z-z_0)\left[1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right]}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}, \tag{9}$$

және бұның оң жағындағы қатар барлық $\zeta \in c$ нүктелерінде бірқалыпты жинақты (z – бекітілген нүкте) болады. Осы (8) бен (9) қатарларды (7)-ге қойып, одан соң мүшелеп интегралдап,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_c f(\zeta)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}d\zeta=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\cdot(z-z_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{-n}}\cdot(z-z_0)^{-n-1}=$$

$$=\left|n=k-1\right|=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\cdot(z-z_0)^n+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{-k+1}}\cdot(z-z_0)^{-k}$$

аламыз. Мұндағы $\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$ кез келген n үшін сақинада аналитикалық функция болғандықтан, Коши теоремасы бойынша, C мен c контурларының орнына сағат тіліне қарама-қарсы бағытталған кез келген $\gamma:|\zeta-z_0|=\rho,\ r<\rho<R$ шеңберді алуға болады. Сондықтан соңғы теңдіктен (5) шығады және c_n коэффициенттер (6) формуламен есептеледі, яғни олар жалғыз, бұдан басқа түрі жоқ. ▲

Лоран қатарының бірінші $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ бөлігі $|z-z_0|<R$ дөңгелекте аналитикалық $f_1(z)$ функциясына жинақталады. Ол **Лоран қатарының дұрыс бөлігі** деп аталады.

Лоран қатарының екінші $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ бөлігі $|z-z_0|>r$ нүктелерінде аналитикалық $f_2(z)$ функциясына жинақталады. Ол **Лоран қатарының басты бөлігі** деп аталады. Ал $r<|z-z_0|<R$ сақинасының ішінде $f_1(z)$ және $f_2(z)$ функцияларының екеуі де,

олай болса, $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$ функциясы да аналитикалық функция болады.

Ескерту. Қандай да бір аналитикалық функцияны Лоран қатарына жіктеу үшін, көп жағдайларда c_n, $n=0,\pm1,\pm2,...$ коэффициенттерді (6) формула емес, жасанды әдістер арқылы тікелей алуға болады. Оны мысалдар арқылы көрсетейік.

1-*мысал.* Функцияны z дәрежесі бойынша ($z_0=0$)

Лоран қатарына жіктеу керек: $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$.

▼ Функцияны қарапайым бөлшектер қосындысына жіктейміз: $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}=\dfrac{1}{z+2}+\dfrac{1}{z-1}$. Функцияның үш «сақина ішінде»: 1) $|z|<1$; 2) $1<|z|<2$; 3) $|z|>2$ аналитикалық функция болатынын ескеріп, осы үш жағдайды қарастырамыз.

1) $|z|<1$ болсын. Онда $\left|\dfrac{z}{2}\right|<\dfrac{1}{2}<1$ орындалатындықтан, **§ 7-дегі (Д)** формуласы бойынша

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n = =\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n$$ аламыз. Бұл

қатардың жинақталу аймағы $\left|\dfrac{z}{2}\right|<1,$ яғни $|z|<2$;

Тағы да **§ 7. (Д)** формула бойынша $\dfrac{1}{z-1}=-\dfrac{1}{1-z}= =-\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$.

Бұл қатардың жинақталу аймағы, әрине, $|z|<1$. Сонымен, қарапайым бөлшектердің екеуі де $|z|<1$ шеңбер ішінде жинақталады. Берілген функция $|z|<1$ шеңбер ішінде – аналитикалық функция болатындықтан, ол Тейлор қатарына жіктеледі:

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-1\right)z^n.$$

2) $1<|z|<2$ болсын. Бұл нүктелер үшін $\dfrac{1}{z+2}$ бөлшегінің жіктелуі сақталады: $\dfrac{1}{z+2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n,\quad |z|<2;$ Ал $1<|z|<2$ қос теңсіздігінің сол жағы $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$ теңсіздігіне парапар екенін ескеріп, екінші қарапайым бөлшекті ақырсыз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысына келтіреміз:

$\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{z}}=\dfrac{1}{z}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{z}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{n+1}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{z^n}.$ Бұл қатардың жинақталу жиыны $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$ немесе $|z|>1,$ яғни $|z|=1$ шеңберінің сыртқы нүктелері. Сонымен, $1<|z|<2$ сақинада

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}.$$

Мұндағы бірінші қосылғыш – Лоран қатарының **дұрыс бөлігі,** ал екінші қосылғыш – оның **бас бөлігі.**

3) $|z|>2$ болсын. Бұл нүктелер жиыны $|z|>1$ нүктелер жиынында жатқандықтан, $\dfrac{1}{z-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{z^n},\quad |z|>1$ сақталады. Бірінші қарапайым бөлшекті **§7. (Д)** теңдігінің сол жағындағы функция түріне келтіріп алып, осы формуланы пайдаланамыз:

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{2}{z}}=\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^n\frac{1}{z^{n+1}}=$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-1\right)^{n-1} 2^{n-1} \frac{1}{z^n}.$$

Сонымен, $|z| > 2$ нүктелері үшін

$$f(z) = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-1\right)^{n-1} 2^{n-1} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(-1\right)^{n-1} 2^{n-1} + 1\right) \frac{1}{z^n}.$$

Мұнда Лоран қатарының дұрыс бөлігі жоқ. Себебі, $|z| > 2$ нүктелерінде $f(z) = \dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$ – аналитикалық функция және $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{2z+1}{z^2+z-2} = 0.$ Ал $c_n z^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ мүшелерден тұратын Лоран қатарының дұрыс бөлігі бұл шартты қанағаттандырмайды. Сондықтан $c_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Назар аударыңыз! Лоран қатарына жіктелу жалғыз түрде болатындықтан, үш жағдайда да алынған қатарлардағы коэффициенттер сәйкес (6) формулалармен анықталатын c_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ сандарға тең. ▲

§ 9. Оқшауланған ерекше нүктелердің жіктелуі. Шегерімдер.

Анықтама. Егер z_0 нүктеде $f\left(z\right)$ – аналитикалық емес функция болса, онда ол $f\left(z\right)$ функциясының ***ерекше нүктесі*** деп аталады. Функция ерекше нүктеде көбінесе анықталмаған болады.

Анықтама. Егер z_0 ерекше нүктенің тесік $0<\left|z-z_0\right|<R$ (R – қандай да бір оң сан) маңайында $f\left(z\right)$ функциясының туындылары бар болса, онда ол $f\left(z\right)$ функциясының ***оқшауланған ерекше нүктесі*** деп аталады.

Айталық, z_0 нүктесі $f\left(z\right)$ функциясының ***оқшауланған*** ерекше нүктесі болсын. Онда тесік $0<\left|z-z_0\right|<R$ маңайда $f\left(z\right)$ функциясын Лоран қатарына жіктеуге болады:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\left(z-z_0\right)^n=f_1\left(z\right)+f_2\left(z\right), \tag{1}$$

мұндағы $f_1\left(z\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\left(z-z_0\right)^n$ – Лоран қатарының дұрыс бөлігі, ал

$f_2\left(z\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_{-n}\left(z-z_0\right)^{-n}$ – Лоран қатарының бас бөлігі.

Анықтама. Егер (1) жіктелімде Лоран қатарының бас бөлігі қатыспаса, яғни, $c_n=0,\quad n=-1,-2,-3,...$ болса, онда z_0 функцияның ***жөнделетін ерекше нүктесі*** деп аталады.

Ендеше,

$$f(z)=f_1\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(z-z_0\right)^n, \tag{2}$$

мұндағы z_0 функцияның жөнделетін ерекше нүктесі.

Бұл атаудың мәнісі мынада. Дәрежелік (2) қатардың жинақталу радиусы R тең болғандықтан, бұл қатардың $f_1(z)$ қосындысы $|z-z_0|<R$ дөңгелектің барлық ішкі нүктелерінде анықталған (z_0 нүктеде $f_1(z_0)=c_0$) және үзіліссіз дифференциалданады, яғни $f_1(z)$ – аналитикалық функция. Сондықтан егер $f(z_0)=f_1(z_0)=c_0$ деп алсақ, онда $f(z)$ осы дөңгелекте аналитикалық функция болады (ерекше z_0 нүкте жөнделді). Олай болса, $|z-z_0|<R$ дөңгелектегі z_0 – жөнделетін ерекше нүкте ішінде жататын кез келген L- тұйық контур үшін келесі теңдік орындалады:

$$\int_L f(z)dz=0. \tag{3}$$

Дәлелдеусіз келесі тұжырымды келтіреміз (дәлелдемесін, мысалы, [2] қарауға болады).

Теорема. $f(z)$ функциясы үшін $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ ақырлы шегі бар болса, және тек сонда ғана z_0 жөнделетін ерекше нүкте болады.

Мысалы, $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ функциясы үшін $z_0=0$ – жөнделетін ерекше нүкте, өйткені $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1.$

Анықтама. Егер (1) жіктелімде Лоран қатарының бас бөлігінің мүшелерінің саны ақырлы болса, яғни барлық $n>m$ нөмірлері үшін $c_{-n}=0,\quad n=m+1,\ m+2,\dots$ онда z_0 функцияның ***m-ші ретті*** (m еселі) ***полюсі*** деп аталады.

Ендеше,

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{m}c_{-n}(z-z_0)^{-n}, \tag{4}$$

мұндағы z_0 – функцияның m-ші ретті (немесе m еселі) полюсі.

Бірінші ретті полюсті ($m=1$) ***жай полюс*** деп атайды.

Егер $\left|z-z_0\right|<R$ дөңгелектегі L тұйық контурдың ішінде z_0 – полюс жататын болса, онда

$$\int_L f(z)dz = 2\pi i\cdot c_{-1}. \tag{5}$$

▼ $$\int_L f(z)dz = \int_L f_1(z)dz + \sum_{n=1}^{m}\int_L c_{-n}\left(z-z_0\right)^{-n}dz = 0 + 2\pi i\cdot c_{-1},$$

өйткені § 4, 1-ескертудегі ($5'$) және ($6'$) теңдіктер бойынша

$\int_L \left(z-z_0\right)^{-1}dz = 2\pi i, \quad \int_L \left(z-z_0\right)^{-n}dz = 0, \; n=2,3,\ldots .$ ▲

Сонымен бірге, функцияның z_0 полюстегі шегін табайық:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} f_1(z) + \lim_{z\to z_0}\sum_{n=1}^{m} c_{-n}\left(z-z_0\right)^{-n} =$$

$$= c_0 + \lim_{z\to z_0}\frac{\sum_{n=1}^{m} c_{-n}\left(z-z_0\right)^{m-n}}{\left(z-z_0\right)^{m}} = \infty.$$

Жалпы алғанда, келесі тұжырым дұрыс.

$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ ***орындалса, және тек сонда ғана*** z_0 ***нүктесі*** $f(z)$ ***функциясының полюсі болады.***

Енді бізге қажетті «функцияның нөлі» ұғымының анықтамасы мен оған парапар тұжырымды келтіреміз, ал оған арналғаан мысалдар төменде қарастырылады.

1) *Егер* z_0 *нүктесінде* $f(z)$*- аналитикалық функция және* $f(z_0)=0, f'(z_0)=0,\ldots, f^{(n-1)}(z_0)=0, \; f^{(n)}(z_0)\neq 0$ *шарттары орындалса, онда* z_0 *– осы функцияның* n *-ші ретті (*n *еселі) нөлі деп аталады.*

2) Е*гер* z_0 *нүктеде аналитикалық* $f(z)$ *функциясын осы нүктенің аймағында* $f(z)=\left(z-z_0\right)^n \varphi(z)$, $\varphi(z)$ *– берілген* z_0 *нүктесінде аналитикалық функция және* $\varphi(z_0)\neq 0$, *түрінде өрнектеуге болса, және тек сонда ғана* z_0 *– осы* $f(z)$ *функциясының* n *-ші ретті (* n *еселі) нөлі болады.*

Көп жағдайларда берілген функция үшін жөнделетін ерекше нүкте мен полюсті анықтауға болатын келесі **(А)** тұжырымды пайдаланған жөн.

(А)-тұжырымы. z_0 ***нүктесінің тесік маңайында анықталған*** $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ ***функциясының құрамындағы*** $\varphi(z)$, $\psi(z)$ ***– осы нүктенің (тесік емес) маңайында аналитикалық функциялар болсын. Сонымен бірге*** z_0 ***нүктесі*** $\varphi(z)$ ***функциясының k-ші ретті, ал*** $\psi(z)$ ***функциясының l-ші ретті нөлі болсын. Онда, егер*** $l>k$ ***болса,*** z_0 ***нүктесі*** $f(z)$ ***функциясының*** "$l-k$" ***-ші ретті полюсі, ал егер*** $l\leq k$ ***болса, ол жөнделетін ерекше нүкте болады.***

Бұл тұжырымның келесі салдары да пайдалы.

Салдар. *Егер* $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\left(z-z_0\right)^n}$ *өрнегіндегі* $\varphi(z)$ *функциясы* z_0 *нүктесінде аналитикалық және* $\varphi(z_0)\neq 0$ *болса, онда* z_0 *нүктесі –* $f(z)$ *функциясының* n *-ші ретті полюсі.*

Мысалдар. **1)** $f(z)=\dfrac{\cos z}{\left(z+1\right)^2\left(z-1\right)}$ функциясының екі ерекше нүктесі: $z_1=-1$, $z_2=1$ бар. Бірінші нүкте үшін келесі түрлендіруді жасаймыз: $f(z)=\dfrac{\dfrac{\cos z}{z-1}}{(z+1)^2}$, мұнда $\varphi(z)=\dfrac{\cos z}{z-1}$ бірінші $z_1=-1$ нүктеде аналитикалық функция және $\varphi(-1)=\dfrac{\cos 1}{-1-1}\neq 0.$ Олай болса, салдар бойынша, $z_1=-1$ – берілген функцияның 2-ші ретті полюсі.

Екінші ерекше нүкте үшін $f(z)=\dfrac{\dfrac{\cos z}{(z+1)^2}}{z-1}$, мұнда $\varphi(z)=\dfrac{\cos z}{(z+1)^2}$ функциясы екінші $z_2=1$ нүктеде аналитикалық және $\varphi(1)=\dfrac{\cos 1}{(1+1)^2}\neq 0.$ Олай болса, салдар бойынша, $z_2=1$ – берілген функцияның жай полюсі.

2) $f(z)=\dfrac{e^z-1-z-\dfrac{z^2}{2}}{\sin z-z}$ функциясының $z_0=0$ ерекше нүктесінің сипатын анықтайық. Мұнда $\varphi(z)=e^z-1-z-\dfrac{z^2}{2}$ функциясы үшін $\varphi'(0)=e^z-1-z\big|_{z=0}=0,$ $\varphi''(0)=e^z-1\big|_{z=0}=0,$ $\varphi'''(0)=e^z\big|_{z=0}=1\neq 0$ орындалатындықтан, анықтама бойынша, $z_0=0$ нүктесі – $\varphi(z)=e^z-1-z-\dfrac{z^2}{2}$ функциясының $k=3$-ші ретті нөлі. Осы сияқты, $\psi(z)=\sin z-z$ функциясы үшін

$\psi'(0)=\cos z - z\big|_{z=0}=0,\ \ \psi''(0)=-\sin z-1\big|_{z=0}=0,$

$\psi'''(0)=-\cos z\big|_{z=0}\neq 0$ орындалатындықтан, $z_0=0$ нүктесі $\psi(z)=\sin z - z$ функциясының $l=3$ -ші ретті нөлі. Олай болса, $k=l=3$ болғандықтан, (А)-тұжырымы бойынша, $z_0=0$ – берілген функцияның жөнделетін ерекше нүктесі.

Анықтама. Егер (1) жіктелімде Лоран қатарының бас бөлігі мүшелерінің саны ақырсыз, яғни бас бөлігінің $c_{-n}\neq 0$ коэффициенттерінің саны ақырсыз болса, онда z_0 функцияның ***елеулі ерекше нүктесі*** деп аталады.

Ендеше,

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n}, \qquad (6)$$

мұндағы $f_2(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ қатарының нөлге тең емес c_{-n} коэффициенттерінің саны ақырсыз.

Егер $|z-z_0|<R$ дөңгелектегі L тұйық контурдың ішінде z_0– елеулі ерекше нүкте жататын болса, онда да

$$\int_L f(z)dz=2\pi i\cdot c_{-1}. \qquad (7)$$

▼ $\int\limits_L f(z)dz=\int\limits_L f_1(z)dz+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\gamma}c_{-n}(z-z_0)^{-n}dz,$ мұндағы екінші қатарды мүшелеп интегралдауға болатын себебі мынада: § 4 тегі 1-ескерту бойынша, L тұйық контур бойынша берілген интегралды $|z-z_0|<R$ дөңгелекте жататын, центрі z_0 нүктеде болатын, сағат тіліне қарсы бағытталған, кез келген γ шеңбері бойынша интегралға ауыстыруға болады. Онда γ шеңберінде (6) қатарлары бірқалыпты жинақты. Олай болса, оларды мүшелеп интегралдауға болады. Бұдан кейін $\int\limits_{\gamma}(z-z_0)^{-1}dz=2\pi i,$

$\int\limits_{\gamma}\left(z-z_0\right)^{-n}dz=0,\ \ n=2,3,...$ теңдіктерін пайдаланып, (7) теңдікке келеміз. ▲

Елеулі z_0 ерекше нүктедегі функцияның ақырлы да, ақырсыз да шегі жоқ. Бұл тұжырым Сохоцкий теоремасынан шығады (Ю.В.Сохоцкий (1842-1929) – орыс математигі). Оған біз тоқталмаймыз. Мысалы, $f(z)=e^{\frac{1}{z}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n}$ функциясы үшін $z_0=0$ – елеулі ерекше нүкте. Өйткені $\lim\limits_{z\to 0-}e^{\frac{1}{z}}= \ =\lim\limits_{z\to 0-}\frac{1}{e^{-\frac{1}{z}}}=0,$ $\lim\limits_{z\to 0+}e^{\frac{1}{z}}=\infty,$ яғни $z_0=0$ нүктеде функцияның шегі жоқ.

Шегерімдер. $f(z)$ функциясының оқшауланған ерекше нүктесі z_0, яғни, $f(z)$ осы нүктенің тесілген қандай да бір $0<\left|z-z_0\right|<R$ маңайында аналитикалық функция болсын. Келесі интегралды f ***функциясының*** z_0 ***нүктедегі шегерімі*** деп атайды және оны $\mathop{\mathrm{Res}}\limits_{z=z_0} f(z)$ арқылы белгілейді:

$$\mathop{\mathrm{Res}}\limits_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}f(z)\,dz, \tag{8}$$

мұндағы L – ішінде z_0 нүктесі жатқан, сағат тіліне қарсы бағытталған, $\left|z-z_0\right|<R$ дөңгелегіндегі тұйық контур. Жоғарыдағы үш жағдайда да алынған (3), (5), (7) теңдіктерден, егер f функциясының z_0 нүктедегі Лоран қатары $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n\left(z-z_0\right)^n$ болса, онда келесі теңдіктің орындалатынын көреміз:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}. \qquad (9)$$

Соңғы теңдік, егер функцияның $\left(z - z_0\right)$ айырымы бойынша Лоран қатарына жіктелуі белгілі болса, онда z_0 нүктедегі шегерімнің оңай табылатынын көрсетеді. Мысалы, егер z_0 жөнделетін ерекше нүкте болса, онда $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = 0.$

Егер z_0 елеулі ерекше нүкте болса, онда функцияны Лоран қатарына жіктеуден басқа жол жоқ. Мысалы, $f(z) = z^4 \sin\dfrac{1}{z}$ функциясының $z_0 = 0$ ерекше нүктесіндегі шегерімін табу үшін, функцияны z дәрежесі бойынша Лоран қатарына жіктейміз:

$$f(z) = z^4 \sin\frac{1}{z} = z^4\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z^5} - \frac{1}{7!}\cdot\frac{1}{z^7} + \ldots\right) =$$

$$= z^3 - \frac{1}{3!}\cdot z + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z} - \frac{1}{7!}\cdot\frac{1}{z^3} + \ldots .$$

Мұнда Лоран қатарының басты бөлігі мүшелерінің саны ақырсыз, демек, $z_0 = 0$ – елеулі ерекше нүкте. Бұл жіктелуден $\operatorname*{Res}_{z=z_0} z^4 \sin\dfrac{1}{z} = c_{-1} = \dfrac{1}{5!}$ тең екенін көреміз.

Ал z_0 полюс болған жағдайда шегерімді табудың бірнеше тәсілі бар, соларды қарастырайық.

Сонымен, z_0 m-ші ретті полюс болсын, яғни $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n + \sum\limits_{n=1}^{m} c_{-n} \left(z - z_0\right)^{-n}, \quad c_{-m} \neq 0.$ Бұл теңдіктің екі жағын $\left(z - z_0\right)^m$ өрнегіне көбейтеміз:

$$f(z)\cdot\left(z - z_0\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^{n+m} + c_{-m} + c_{-m+1}\left(z - z_0\right) + \ldots +$$

$$+ c_{-1}\left(z - z_0\right)^{m-1}.$$

Алынған теңдікті $\left(m - 1\right)$ рет дифференциалдасақ, теңдіктің оң жағындағы бос мүше $(m-1)!\ \cdot c_{-1}$ тең болады да,

$(m-1)!\ \cdot c_{-1} = \lim\limits_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)^m\right]^{(m-1)}$, ал бұдан

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\cdot\lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)^m\right]^{(m-1)} \tag{10}$$

формуласын аламыз.

Ал, егер функция $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $\varphi(z_0)\neq 0$, $\psi(z_0)=0$, $\psi'(z_0)\neq 0$ түрінде берілсе, яғни $z=z_0$ жай полюс болса, онда

$$c_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=z_0}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \tag{11}$$

Шынында да, (10) формуланы $m=1$ үшін қолдансақ,

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi(z_0)}.$$

1-мысал. Функцияның ерекше нүктедегі шегерімін табу керек: $f(z)=\dfrac{1+\sin z}{(z-\pi)^6}$.

▼ Жоғарыдағы салдар бойынша, $z_0=\pi$ нүктесі – функцияның 6-ретті полюсі. Шегерімді табу үшін (10) формуланы пайдаланамыз:

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi}\frac{1+\sin z}{(z-\pi|)^6} = \frac{1}{5!}\cdot\lim_{z\to\pi}\left[\frac{1+\sin z}{(z-\pi)^6}\cdot(z-\pi)^6\right]^{(5)} = \frac{1}{5!}\cdot\lim_{z\to\pi}(1+\sin z)^{(5)} =$$

$$=\frac{1}{120}\cdot\lim_{z\to\pi}\cos z = -\frac{1}{120}.$$ ▲

2-мысал. Функцияның $z_0 = \dfrac{\pi}{2}$ нүктедегі шегерімін табу керек: $f(z) = \dfrac{e^z}{\cos z}$.

▼ Мұнда $\varphi(z)\big|_{z=\frac{\pi}{2}} = e^z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}} \neq 0,\ \psi(z)\big|_{z=\frac{\pi}{2}} = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0,$ $\psi'(z)\big|_{z=\frac{\pi}{2}} = -\sin\dfrac{\pi}{2} = -1 \neq 0$ орындалатындықтан, (11) формуланы пайдаланамыз:

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{2}} \frac{e^z}{\cos z} = \frac{e^z}{(\cos z)'}\Bigg|_{z=\frac{\pi}{2}} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\sin\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}}.$$ ▲

§ 10. Ақырсыз ерекше нүктедегі шегерім. Шегерімдер туралы теорема

Егер $f(z)$ функциясы

$$|z| > r, \quad 0 \le r < \infty, \tag{1}$$

теңсіздігін қанағаттандыратын нүктелерде аналитикалық болса, онда, § 8 теоремаға сүйеніп ($z_0 = 0,\ R = \infty$), оны z дәрежесі бойынша, осы нүктелерде жинақталатын Лоран қатарына жіктеуге болады:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n . \tag{2}$$

(1) теңсіздікті қанағаттандыратын нүктелер жиынын, яғни $|z| \le r$ дөңгелегінің сыртын ***ақырсыз*** $z = \infty$ ***нүктенің маңайы*** деп атайды.

Анықтама. $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{L_-} f\left(z\right)dz$, *мұндағы* L_- *сағат тілі бойынша бағытталған,* $|z| > r$ *жиынында (* $f(z)$ *- аналитикалық болатын) жататын, кез келген тұйық контур,* түріндегі интегралды $f(z)$ ***функциясының ақырсыз нүктедегі шегерімі*** деп аталады: $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L f(z)\,dz,$

L_- контурда бірқалыпты жинақталатын (2) қатарды мүшелеп интегралдап, $\displaystyle\int_{L_-} z^{-1}dz = 2\pi i,$ $\quad \displaystyle\int_{L_-} z^n dz = 0, \quad n \ne -1,$ теңдіктерін ескерсек, $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{L_-} f\left(z\right)dz = -c_{-1}$ аламыз.

Сонымен,

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}. \tag{3}$$

1-мысал. $f(z)=\dfrac{z^2}{\left(z^2+1\right)\left(z-2\right)}$ функциясының ақырсыз нүктедегі шегерімін табу үшін, **§7 (Д)** жіктелуін пайдаланамыз:

$$f(z)=\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)\left(z-2\right)}=\frac{z^2}{z^3\left(1+\frac{1}{z^2}\right)\left(1-\frac{2}{z}\right)}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{1}{z^{2n}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}=$$

$$=\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}-...\right)\left(1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+...\right)=\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+... .$$

Мұндағы $c_{-1}=1$ тең болғандықтан, $\operatorname*{Res}_{z=\infty}\dfrac{z^2}{(z^2+1)(z-2)}=-1.$

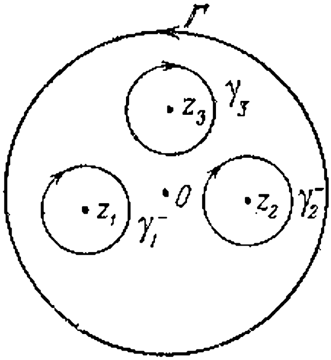
Теорема. Егер $f(z)$ кеңейтілген комплекс жазықтығының $z_1,z_2,...,z_n$ нүктелерінен басқа нүктелерде аналитикалық функция болса, онда

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}f(z)+\operatorname*{Res}_{z=\infty}f(z)=0. \tag{4}$$

▼ Центрлері $z_1,z_2,...,z_n$ нүктелері болатын, сағат тілімен бағыттас, өзара қиылыспайтын $\gamma_1^-,\gamma_2^-,...,\gamma_n^-$ шеңберлерін саламыз. Сонымен бірге центрі 0 нүктесі болатын, $\gamma_1^-,\gamma_2^-,...,\gamma_n^-$ шеңберлерінің барлығы ішінде қалатын, сағат тіліне қарсы бағытталған Γ шеңберін саламыз (15-сурет).

Күрделі контуры $\gamma_1^-+\gamma_2^-+...+\gamma_n^-+\Gamma$ болатын аймақтың ішінде және осы күрделі контурдың өзінде $f(z)$ – аналитикалық функция, ал күрделі контур бойымен айналғанда аймақ сол жақта қалады. Олай болса, күрделі контурға арналған Коши теоремасы бойынша: $\int\limits_{\gamma_1^-}f\left(z\right)dz+...+\int\limits_{\gamma_n^-}f\left(z\right)dz+\int\limits_{\Gamma}f\left(z\right)dz=0.$ Бұл теңдікті $\dfrac{1}{2\pi i}$ санына көбейтіп, (4) теңдікке келеміз. ▲

(4) теңдіктен шегерімдер туралы негізгі теорема деп аталатын келесі тұжырымды аламыз.



15-сурет

Салдар. Егер $f(z)$ комплекс жазықтығының $z_1, z_2, ..., z_n$ нүктелерінен басқа нүктелерде аналитикалық функция болса, ал Г осы нүктелер ішінде қалатын, сағат тіліне қарсы бағытталған контур болса, онда

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \qquad (5)$$

2-мысал. Интегралды есептеу керек: $\displaystyle\int_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}dz.$

▼ $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}$ функциясының үш ерекше нүктесі бар: $z_1 = 0,\ z_2 = i,\ z_3 = -i.$ Бұлардың ішінде $z_3 = -i$ нүкте $|z-i| = \dfrac{3}{2}$ шеңберінің сыртында, өйткені: $|-i-i| = |-2i| = 2 > \dfrac{3}{2}.$ Ал қалған екеуі осы шеңбердің ішінде жататындықтан, $z_1 = 0,\ \ z_2 = i$ нүктелердегі функцияның шегерімдерін табамыз.

$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=0,$ өйткені, $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}$ жұп функция болғандықтан, оның z дәрежесі бойынша Лоран қатарында z-тің тек жұп дәрежелері ғана қатысады. Ал $z_2=i-$ функцияның жай полюсі, өйткені

$$f(z)=\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{(z+i)(z-i)}=\frac{\dfrac{e^{\frac{1}{z^2}}}{(z+i)}}{z-i}, \quad \text{және} \quad \varphi(i)=\left.\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{(z+i)}\right|_{z=i}=\frac{e^{-1}}{2i}\neq 0,$$

$\psi(i)=z-i\big|_{z=i}=0,\ \ \psi'(i)=1\neq 0$ мұнда (**§ 9. (A)** тұжырымының салдарын қараңыз). Олай болса, **§ 9-дағы** (11) формула бойынша $\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)=\dfrac{e^{e^{\frac{1}{z^2}}}}{(z+i)(z-i)}=\dfrac{e^{-1}}{2i}$. Енді берілген интегралды табу үшін (5) формуланы пайдаланамыз:

$$\int\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}}\frac{e^{e^{\frac{1}{z^2}}}}{z^2+1}dz=2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)\right)=2\pi i\left(0+\frac{e^{-1}}{2i}\right)=\pi e^{-1}. \quad \blacktriangle$$

(4) теңдіктің маңызын келесі мысалдан аңғаруға болады.

3-мысал. Интегралды есептеу керек: $\displaystyle\int\limits_{|z|=2}\frac{1}{1+z^4}dz.$

$\blacktriangledown$ $1+z^4=0$ теңдеуінің түбірлері – $f(z)=\dfrac{1}{1+z^4}$ функциясының полюстері және олардың барлығы $|z|=2$ шеңберінің ішінде болғандықтан, (5) теңдіктен $\displaystyle\int\limits_{|z|=2}\frac{1}{1+z^4}dz=2\pi i\sum_{k=1}^{4}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$ аламыз.

Ал (4) теңдік бойынша $\sum_{z=1}^{4} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$. Енді $f(z)=\dfrac{1}{1+z^4}$ функциясының ақырсыз нүктедегі шегерімін табу үшін оны Лоран қатарына жіктейміз:

$$f(z)=\frac{1}{1+z^4}=\frac{1}{z^4}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{z^4}}=\frac{1}{z^4}\cdot\left(1-\frac{1}{z^4}+\ldots\right)=\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^8}+\ldots\cdot$$

Мұнда $c_{-1}=0$ болғандықтан, $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=0.$ Сонымен,

$\int\limits_{|z|=2}\dfrac{1}{1+z^4}dz=2\pi i\,(-\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z))=0.$ ▲

§ 11. Интегралдарды шегерім арқылы есептеу

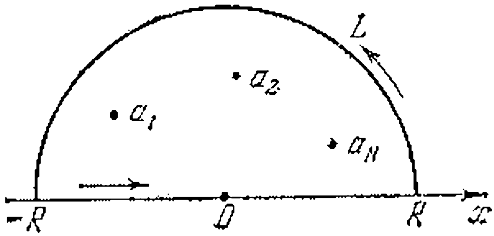
Егер $f(z)$ функциясы жоғарғы жарты жазықтықта жатқан $a_1, a_2, ..., a_N$ ерекше нүктелерден басқа, $\operatorname{Im} z \geq 0$ нүктелерде аналитикалық болса, онда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx$ түріндегі интегралдарды есептеу әдістерін көрсетуге болады.

1-теорема. $f(z)$ функциясы жоғарыда аталған шарттарды қанағаттандырсын және $|z| \geq R$, R – жеткілікті үлкен сан, нүктелерінде $|f(z)| \leq \dfrac{M}{|z|^m}$, $m \geq 1+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ болсын. Онда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z). \tag{1}$$

▼ Сағат тіліне қарсы бағытталған, радиусы R, центрі координат басы болатын L жарты шеңбер жүргіземіз (16-сурет).
§ 10-дағы (5) формула бойынша

$$\int\limits_{-R}^{+R} f(x)dx + \int\limits_{L} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z). \tag{2}$$



16-сурет

Теорема шартын пайдалансақ,

$$\left|\int_L f(z)dz\right| \le M\int_L \frac{1}{|z|^m}dz = \left|L:|z|=R\right| = \frac{M}{R^m}\int_L dz = \frac{M}{R^m}\cdot\pi R =$$

$$= \frac{M}{R^{m-1}}\cdot\pi \to 0,\ R\to\infty \text{ (мұндағы } m-1\ge\varepsilon,\quad \varepsilon>0\text{).}$$

Осы жағдайды ескеріп, (2) теңдікте $R\to\infty$ ұмтылдырып, шекке өтсек, (1) аламыз. ▲

1-мысал. Интегралды есептеу керек: $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx.$

▼ Интеграл астындағы функция жұп болғандықтан: $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx.$ Жоғарғы жарты жазықтықтың $z=i$ нүктесінен басқа нүктелерінде ($\operatorname{Im} z=0$ нүктелерінде де) $f(z)=\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2}$ – аналитикалық функция. Бұл функция үшін $z=i$ – екінші ретті полюс болғандықтан

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to i}\left[\frac{z^2}{(z-i)^2(z+i)^2}\cdot(z-i)^2\right]' = \lim_{z\to i}\left[\frac{z^2}{(z+i)^2}\right]' =$$

$= \lim\limits_{z\to i}\frac{2iz}{\left(z+i\right)^3} = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}.$ Енді (1) теңдікті пайдаланамыз:

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \pi i\cdot\left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{4}. \ ▲$$

Енді $f(z)$ – жоғарғы жарты жазықтықта жатқан $a_1, a_2, ..., a_N$ ерекше нүктелерден басқа, $\operatorname{Im} z\ge 0$ нүктелерде аналитикалық функция болса, онда $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx$ түріндегі интегралды есептеу әдісін қарастырайық. Келесі теореманың дәлелдеуін, мысалы, [1] қарауға болады.

2-теорема. Егер $f(z)$ жоғарыда аталған шартты қанағаттандырса және $\arg z = \varphi$ нүктелеріне қатысты бірқалыпты $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$ болса, онда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{N}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)e^{ix}. \qquad (3)$$

Ескерту. Егер интеграл белгісінің астында $\sin x$ немесе $\cos x$ көбейткіші бар болса, онда оларды e^{iz} көбейткішіне ауыстыру көбінесе ыңғайлы. Ал $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx$ интегралының мәні табылған соң, оның нақты немесе жорамал бөлігі іздеген нәтижені береді:

$$\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)cosxdx;$$

$$\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin xdx.$$

2-мысал. Интегралдарды есептеу керек:

а) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{cos\alpha x}{a^2+x^2}dx,\quad \alpha>0,\ a>0;$ б) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx;$ в) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{1+x^2}dx;$

▼ а) Ескертуге сәйкес $\dfrac{e^{i\alpha z}}{a^2+z^2}$ функциясын қарастырамыз. Бұл $z = ai,\ a>0,$ нүктесінен басқа, $\operatorname{Im} z \ge 0$ нүктелерде аналитикалық функция. Сонымен бірге $z\to\infty$ ұмтылғанда, $\arg z = \varphi$ нүктелеріне қатысты $f(z) = \dfrac{1}{a^2+z^2} \ \to\ 0.$

Сондықтан 2-теоремаға сәйкес

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{a^2+x^2}dx = 2\pi i \operatorname{Res}\limits_{z=ai} \frac{e^{i\alpha z}}{a^2+z^2} = 2\pi i \frac{e^{i\alpha ai}}{2ai} = \frac{\pi}{a}e^{-\alpha a}$. Бұның нақты бөлігі $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos\alpha x}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{a}e^{-\alpha a}$ немесе $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{cos\alpha x}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-\alpha a}$.

б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^2}dx =$

$$= \frac{1}{2} arctgx\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}e^{-2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}e^{-2};$$

в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{1+x^2}dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\sin^2 x}{1+x^2}dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx - \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx =$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2}\right) = \frac{\pi}{4}\left(1+e^{-2}\right). \quad \blacktriangle$$

Шегерімдер теориясын келесі түрдегі интегралдарды есептеуге қолдануға болады:

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx, \tag{4}$$

мұнда $R(u,v) -$ аргументтеріне қатысты рационал және $u^2+v^2=1$ шеңберінде ерекше нүктелері жоқ функция.

Егер $z=e^{ix}$ деп алсақ, онда x нүктесі 0-ден 2π-ге дейін мәндер қабылдағанда, z нүктесі $|z|=1$ шеңберін оң бағытпен бір рет айналады, сонымен бірге келесі теңдіктер орын алады:

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \quad \sin x = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right), \quad dx = \frac{dz}{iz}. \tag{5}$$

Бұл айнымал ауыстыруы шегерімдер арқылы есептеуге болатын комплекс аргументті функцияның тұйық контур бойынша интегралына әкеледі:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx = \int_{|z|=1} R\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]\frac{dz}{iz}. \qquad (6)$$

3-мысал. Интегралды есептеу керек: $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\cos x}dx.$

▼ $z = e^{ix}$ айнымал ауыстыруы арқылы (6) формуланы пайдаланамыз: $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\cos x}dx = \int_{|z|=1} \frac{1}{5+4\cdot\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz} =$

$= \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{2z^2+5z+2}dz.$ Интеграл астындағы функцияның ерекше нүктелері: $z_1 = -2,\ z_2 = -\frac{1}{2}.$ Бұлардың екіншісі ғана $|z| = 1$ шеңберінің ішінде болғандықтан, $\frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{2z^2+5z+2}dz =$

$$= 2\pi \operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}} \frac{1}{2z^2+5z+2} = \pi \operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}} \frac{1}{(z+2)\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2\pi}{3}.$$ ▲

II тарау.

Амалдық қисап негіздері және оның қолданылуы

§ 1. Лаплас түрлендіруі

Біз мұнда Лаплас түрлендіруінің анықтамасын және оның негізгі қасиеттерін қарастырамыз. Лаплас түрлендіруі қасиеттерінің математиканың маңызды бөлімі болып саналатын дифференциалдық теңдеулерді шешуде, электротехниканың маңызды бөлімі – электр тізбегінің өтпелі процесін үйренуде және де басқа салаларда рөлі үлкен. Лаплас түрлендіруін қолданудың негізгі идеясы мынада: *түпнұсқа* деп аталатын $f(t)$ функция мен оның *L кескіні* деп аталатын $F(p)$ функция арасында сәйкестік орнатылады (олардың анықтамалары төменде) және түпнұсқаларға жасалатын белгілі амалдарға, олардың L кескініне жасалатын қандай да бір амалдар сәйкес келеді. Бастысы – бұл соңғы амалдар түпнұсқаларға жасалатын амалдарға қарағанда анағұрлым жеңіл. Сондықтан L кескіндер өрісінде бастапқы есептің шешімін алады да, алынған L кескіннен кері қарай, түпнұсқаға өтеді. Енді жоғарыда аталған ұғымдардың анықтамаларына көшейік.

Анықтама. Нақты айнымалды $f(t)$ функцияның ***Лаплас түрлендіруі*** деп

$$F(p)=\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \qquad (1)$$

формуласымен анықталған комплекс айнымалды $F(p)$ функцияны айтады.

Теңдіктің оң жағындағы, $p=a+ib$ комплекс параметрге тәуелді меншіксіз интегралды ***Лаплас интегралы*** деп атайды.

(1) меншіксіз интеграл жинақты болу үшін және ол қандай да бір $F(p)$ функцияны нақты анықтау үшін қажет, $f(t)$ функцияға қатысты келесі шарттар орындалады деп ұйғарамыз:

1) $t<0$ болса $f(t)=0$, $t\geq 0$ болса $f(t)$– құрақты-үзіліссіз (ол не үзіліссіз, немесе оның тек бірінші текті үзіліс нүктелері болады және әрбір ақырлы аралықта ондай үзіліс нүктелердің саны – ақырлы);

2) t айнымал өскенде, $f(t)$ функцияның модулі өсуі мүмкін, бірақ оның өсуі қандай да бір көрсеткіштік функциядан жылдам емес, яғни

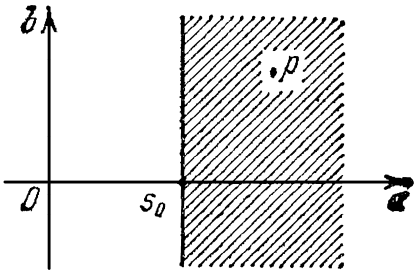
$$\left|f(t)\right| \le M \cdot e^{s_0 t}, \quad M,\ s_0 \text{ - тұрақтылар.} \qquad (2)$$

Аталған екі шартты қанағаттандыратын кез келген $f(t)$ функцияны – ***түпнұсқа*** (оригинал), ал (1) формуламен анықталған $F(p)$ функцияны оның ***Лаплас кескіні*** немесе ***L кескіні*** деп атайды да, келесі символдардың бірімен белгілейді:

$$F(p) = L\left(f(t); p\right), \qquad f(t) \doteqdot F(p), \qquad f(t) \leftrightarrow F(p).$$

Берілген түпнұсқаның L кескінін табу және, керісінше, белгілі L кескіні бойынша түпнұсқасын табу процесін ***амалдық қисап*** дейді.

1-теорема. Егер $f(t)$ түпнұсқа болса, онда Лаплас интегралы $a = \operatorname{Re} p > s_0$ шартын қанағаттандыратын барлық комплекс $p = a + ib$ нүктелерде абсолют жинақты және осы $a = \operatorname{Re} p > s_0$ жарты жазықтықта $F(p)$ функциясының туындылары бар, яғни $F(p)$ аналитикалық функция болады (17-сурет).



17-сурет

Біз мұнда $f(t)$ функцияның ***өсу көрсеткіші*** деп аталатын 2) шарттағы s_0 санының маңызын көрсету үшін ғана теореманың бірінші жартысының дәлелдеуін көрсетеміз. Теореманың толық дәлелдеуін, мысалы, [1]-[2] кітаптардан қарауға болады.

Сонымен, (2) шарт бойынша, $\left|f(t)e^{-pt}\right| = \left|f(t)\right|\left|e^{-pt}\right| =$
$= \left|f(t)\right| e^{-at} \le M \cdot e^{s_0 t} e^{-at} = M \cdot e^{(s_0 - a)t}$ болатынынын ескерсек,

$$\int_0^{+\infty} \left|f(t)e^{-pt}\right| dt \le M \cdot \int_0^{+\infty} e^{(s_0-a)t} dt = M \cdot \left. \frac{e^{(s_0-a)t}}{s_0 - a} \right|_0^{+\infty} = \frac{M}{a - s_0}$$ аламыз

(мұнда $s_0 - a < 0$, сондықтан $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{(s_0-a)t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{e^{-(s_0-a)t}} = 0$). ▲

Енді түпнұсқаның жалғыз болатыны туралы теореманы (дәлелдеусіз) келтіреміз.

2-теорема. Егер $f(t)$ және $g(t)$ түпнұсқалардың екеуінің де L кескіні $F(p)$ болса, онда олар өзара тепе-тең: $f(t) \equiv g(t)$.

Ескерту. Бұдан кейін, қандай да бір функция $f(t)$ түрінде берілсе, онда оны келесі түрдегі функция деп қабылдау керек: $f_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ f(t), & t \ge 0. \end{cases}$ Мысалы, ***бірлік функция*** немесе ***Хевисайд функциясы*** (О.Хевисайд (1850-1925) – ағылшын инженері) деп аталатын $\sigma_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \ge 0 \end{cases}$ функция $\sigma_0(t) = 1$ деп жазылатын болады. Хевисайд функциясын пайдаланып жазсақ: $f_1(t) = \sigma_0(t)\sin t$, $f_2(t) = \sigma_0(t)\cos t$, $f_3(t) = \sigma_0(t)e^t$, және т.с.с. болар еді, бірақ жазуды қасқарту мақсатында олар $f_1(t) = \sin t$, $f_2(t) = \cos t$, $f_3(t) = e^t$, және т.с.с. түрлерде жазылатын болады.

§ 2. Қарапайым функциялардың L кескіні. L кескіннің қасиеттері

Анықтама бойынша, $\sigma_0(t)=1$ және $f(t)=\cos t$ функцияларының L кескінін табайық:

$$L(\sigma_0(t);p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{p},\ \text{яғни,}$$

$$\sigma_0(t)=1 \risingdotseq \frac{1}{p}. \qquad (1)$$

$$L(\cos t;p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}\cos t dt=e^{-pt}\sin t\Big|_0^{+\infty}+p\int_0^{+\infty} e^{-pt}\sin t dt=$$

$$=p\int_0^{+\infty} e^{-pt}\sin t dt=p\left[-e^{-pt}\cos t\Big|_0^{+\infty}-p\int_0^{+\infty} e^{-pt}\cos t dt\right]=$$

$=p-p^2L(\cos t;p)$. Бұдан $L(\cos t;p)=\dfrac{p}{1+p^2}$, $p>0$, яғни,

$$\cos t \risingdotseq \frac{p}{1+p^2},\quad p>0. \qquad (2)$$

Мұндағы екінші мен үшінші теңдіктердің арасындағы өрнек: $p\cdot\int_0^{+\infty} e^{-pt}\sin t dt=p\cdot L(\sin t;p)$ екенін ескерсек, $L(\sin t;p)=\dfrac{1}{1+p^2}$, $p>0$ аламыз, яғни

$$\sin t \risingdotseq \frac{1}{1+p^2},\quad p>0. \qquad (3)$$

1-теорема (ұқсастық). Егер $f(t) \risingdotseq F(p)$, онда

$$f(\alpha t)\risingdotseq\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right),\quad \alpha>0,\ \operatorname{Re}p>\max\{s_0,\alpha s_0\}. \qquad (4)$$

$$\blacktriangledown \quad f(\alpha t) \risingdotseq \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(\alpha t)dt = \left| \alpha t = u,\ dt = \frac{du}{\alpha} \right| =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{\alpha}u} f(u)du = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \quad \blacktriangle$$

Сонымен, түпнұсқаның аргументін α санына көбейту оның кескіні мен кескіннің аргументін α санына бөлуге әкеледі екен. Мысалы,

$$\cos \alpha t \risingdotseq \frac{1}{\alpha} \frac{\frac{p}{\alpha}}{1 + \frac{p^2}{\alpha^2}} = \frac{p}{p^2 + \alpha^2}; \tag{5}$$

$$\sin \alpha t \risingdotseq \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1 + \frac{p^2}{\alpha^2}} = \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}; \tag{6}$$

Меншіксіз интегралдың сызықтық қасиетінен шығатын L кескіннің қасиеті:

2-теорема (сызықтық қасиет). Келесі теңдік орындалады:

$$L\left[A \cdot f(t) + B \cdot g(t);\ p\right] = A \cdot L\left[f(t); p\right] + B \cdot L\left[g(t); p\right],$$

$\operatorname{Re} p > \max\{s, \overline{s}\}$, мұндағы s пен $\overline{s}$, сәйкес $f(t)$ және $g(t)$ функцияларының өсу көрсеткіштері, ал A, B – сандар.

1-*мысал.*

$$3 - 4\sin 5t = 3 \cdot 1 - 4\sin 5t \risingdotseq 3 \cdot \frac{1}{p} - 4 \cdot \frac{5}{p^2 + 5^2} = \frac{3}{p} - \frac{20}{p^2 + 25};$$

2-*мысал.* L кескіннің түпнұсқасын табу керек:

$$F(p) = \frac{7}{p} - \frac{2}{p^2 + 5}.$$

$\blacktriangledown$ (1), (6) формулаларды және сызықтық қасиетті пайдаланамыз: $\dfrac{7}{p} - \dfrac{2}{p^2 + 5} = 7 \cdot \dfrac{1}{p} - \dfrac{2}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{p^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2} \quad \risingdotseq$

$$\risingdotseq \ 7\cdot 1-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot \sin\sqrt{5}t. \qquad \blacktriangle$$

Берілген $f(t)$ функция мен $e^{-\alpha t}$ көрсеткіштік функцияның көбейтіндісі: $e^{-\alpha t}f(t)$ – экспонентке (көрсеткіштік заңға) сәйкес жылдамдықпен бәсеңдейтін (өшетін) функция деп аталады және олар іс-тәжірибеде жиі қолданылады. Келесі теорема осындай функциялардың L кескінін табуға арналған.

3-теорема (кескіннің ығысуы).

$$L\left[f(t)\cdot e^{-\alpha t};\, p\right]=L\left[f(t);\, p+\alpha\right],\ \operatorname{Re}\left(p+\alpha\right)>s_0.$$

(Өз бетіңізше көз жеткізіңіз).

Мысалы, келесі функциялардың L кескінін табу керек болсын:

а) $e^{-\alpha t}$; ә) $e^{-\alpha t}\cos\beta t$; б) $e^{-\alpha t}\sin\beta t$; в) $\mathrm{c}h\alpha t$; г) $sh\alpha t$.

▼ а) (1) формуланы және 3-Теореманы пайдаланамыз:

$$L\left(e^{-\alpha t};\, p\right)=L\left(e^{-\alpha t}\cdot\sigma_0(t);\, p\right)=L\left(\sigma_0(t);\, p+\alpha\right)=\frac{1}{p+\alpha},\ \text{яғни,}$$

$$e^{-\alpha t} \ \risingdotseq\ \frac{1}{p+\alpha}. \tag{7}$$

ә) (5) формуланы және 3-теореманы пайдаланамыз:

$$L\left[e^{-\alpha t}\cos\beta t;\, p\right]=\frac{p+\alpha}{\left(p+\alpha\right)^2+\beta^2},\ \text{яғни,}$$

$$e^{-\alpha t}\cos\beta t \ \risingdotseq\ \frac{p+\alpha}{\left(p+\alpha\right)^2+\beta^2}; \tag{8}$$

б) (6) формуланы және 3-теореманы пайдаланамыз:

$$L\left[e^{-\alpha t}\sin\beta t;\, p\right]=\frac{\beta}{\left(p+\alpha\right)^2+\beta^2},\ \text{яғни,}$$

$$e^{-\alpha t}\sin\beta t \ \risingdotseq\ \frac{\beta}{\left(p+\alpha\right)^2+\beta^2}; \tag{9}$$

в) 2-теореманы және (7) формуланы пайдаланамыз:

$$L\left[\mathrm{c}h\alpha t;\ p\right]=L\left[\frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2};\ p\right]=\frac{1}{2}L\left[e^{\alpha t};\ p\right]-\frac{1}{2}L\left[e^{-\alpha t};\ p\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{p-\alpha}+\frac{1}{2}\frac{1}{p+\alpha}=\frac{p}{p^2-\alpha^2},\text{ яғни,}$$

$$\mathrm{c}h\alpha t \risingdotseq \frac{p}{p^2-\alpha^2}; \tag{10}$$

г) Осы сияқты,

$$sh\alpha t \risingdotseq \frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}. \tag{11}$$

▲

3-*мысал.* Функцияның L кескінін табу керек:

$$f(t)=cht\cdot\sin t.$$

▼ 3-теореманы және (9) формуланы пайдаланамыз:

$$cht\cdot\sin t=\left(\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{-t}\right)\cdot\sin t=\frac{1}{2}e^t\cdot\sin t+\frac{1}{2}e^{-t}\cdot\sin t \risingdotseq$$

$$\risingdotseq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p-1)^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p+1)^2+1}=\frac{p^2+2}{p^2+4};$$ ▲

Егер $F(p)$ кескіннің $f(t)$ түпнұсқасы белгілі болса, онда 3-теорема бойынша $F(p-\alpha)$ кескіннің түпнұсқасын таба аламыз.

4-*мысал.* Берілген L кескінге сәйкес түпнұсқаны табу

керек: $F(p)=\dfrac{1}{p^2-4p-3}.$

▼ Берілген бөлшекті қажетті түрге келтіреміз:

$$\frac{1}{p^2-4p-3}=\frac{1}{(p-2)^2-7}=\frac{1}{\sqrt{7}}\frac{\sqrt{7}}{(p-2)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}.$$ Енді 2 мен 3 теоремаларды және $\dfrac{1}{\sqrt{7}}\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{p^2-\left(\sqrt{7}\right)^2} \risingdotseq \dfrac{1}{\sqrt{7}}\cdot sh\sqrt{7}t$ сәйкестігін ((11) – формула) пайдаланамыз:

$$F(p)=\frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{(p-2)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}\ \fallingdotseq\ \frac{1}{\sqrt{7}}\,e^{2t}sh\sqrt{7}t. \qquad \blacktriangle$$

4-теорема (*кескінді дифференциалдау*).

Егер $F(p)=L\big(f(t);p\big)$, онда

$$\left(-1\right)^n F^{(n)}(p)=L\Big(t^n f(t);\ p\Big).$$

$\blacktriangledown$ Біз мұнда (1) интегралды мүшелеп, интегралдау амалын қолданамыз (бұл амалдың заңды екенін, мысалы, [1], § 2.15, 2-теоремадан қараңыз). Сонымен, $\mathrm{Re}\,p>s_0$ (s_0 - $f(t)$ функциясының өсу көрсеткіші) орындалатын нүктелер үшін (§ 1, 1-теореманы қараңыз)

$$F'(p)=-\int_0^{+\infty} t\cdot f(t)e^{-pt}dt, \qquad F''(p)=\int_0^{+\infty} t^2\cdot f(t)e^{-pt}dt, \quad \dots \quad ,$$

$$\left(-1\right)^n F^{(n)}(p)=\int_0^{+\infty} t^n f(t)e^{-pt}dt=L\Big(t^n f(t);\ p\Big). \qquad \blacktriangle$$

Назар аударыңыз! Кескінді дифференциалдау түпнұсқаны $-t$ -ға көбейтуге әкеледі.

Мысалы, $\frac{1}{p}\fallingdotseq 1$ сәйкестігі белгілі. Онда, 4-теорема бойынша,

$\left(\frac{1}{p}\right)'=-\frac{1}{p^2}\ \fallingdotseq\ \left(-t\right)\cdot 1=-t,$ яғни, $t\ \risingdotseq\ \frac{1}{p^2}$. Алынған кескінді дифференциалдауды жалғастыра отырып, келесі сәйкестікті аламыз:

$$t^n\ \risingdotseq\ \frac{n!}{p^{n+1}},\quad n=1,2,\dots\,. \tag{12}$$

Ескерту. Егер n бүтін емес болса, онда $t^n\ \risingdotseq\ \frac{\Gamma\left(n+1\right)}{p^{n+1}}$,

мұндағы $\Gamma\left(n+1\right)=\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt=L\Big(t^n;1\Big)$.

5-мысал. Түпнұсқаның кескінін табу керек:

$$f(t)=3t^3e^{-t}+t^2+1.$$

▼ 4-теореманы, сызықтық қасиетті, $e^{-t} \risingdotseq \dfrac{1}{p+1}$ сәйкестігін және (12) формуланы пайдаланамыз:

$$3t^3e^{-t}+t^2+1 \risingdotseq 3\left(-1\right)^3\left(\frac{1}{p+1}\right)''' + \frac{2!}{p^{2+1}}+\frac{1}{p}, \text{ яғни,}$$

$$3t^3e^{-t}+t^2+1 \risingdotseq \frac{18}{\left(p+1\right)^4}+\frac{2}{p^3}+\frac{1}{p}. \qquad ▲$$

Ескерту. Келесі тұжырымда, $f(t) \risingdotseq F(p)$ сәйкестігіндегі түпнұсқа және оның туындыларының $t=0$ нүктедегі мәндері: $f\left(0\right), f'\left(0\right),..., f^{(n)}\left(0\right)$ деп, $t=0$ нүктедегі олардың оң жақ шектерін: $f\left(0+0\right), f'\left(0+0\right),\dots, f^{(n)}\left(0+0\right)$ аламыз.

5-теорема (*түпнұсқаны дифференциалдау*). Егер $\left[0;+\infty\right)$ аралығында $f\left(t\right), f'\left(t\right),..., f^{(n-1)}\left(t\right)$ – үзіліссіз, ал $f^{(n)}\left(t\right)$ құрақ-үзіліссіз болып, олардың барлығының өсу көрсеткіштері s_0 болса, онда жазықтықтағы $\operatorname{Re}p>s_0$ нүктелер үшін келесі сәйкестік орындалады:

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\dots-f^{(n-1)}\left(0\right). \qquad (13)$$

▲ Алдымен $f'\left(t\right)$ туындының кескінін табайық:

$$L\left[f'(t);p\right]=\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt=f(t)e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}+p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

Теоремадағы $\operatorname{Re}p>s_0$ шартына сәйкес $\left|f(t)e^{-pt}\right|\le Me^{-\left(\operatorname{Re}p-s_0\right)t}\to 0,$ $t\to+\infty$ болатынын ескеріп, соңғы теңдіктен $L\left[f'(t);p\right]=-f(0)+p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt=pF\left(p\right)-f(0)$ аламыз, яғни $f(t)\risingdotseq F(p)$ болса, онда $f'(t) \risingdotseq pF\left(p\right)-f(0).$ Теоереманы қайталап қолдансақ:

$$f''(t) \risingdotseq p\left[pF\left(p\right)-f(0)\right]-f'\left(0\right)=p^2F\left(p\right)-pf(0)-f'\left(0\right).$$

Осылай келесі туындыларға да теореманы қолдана отырып, (13) формуланы алуға болады. ▼

Егер (13) формулада $f\left(0\right)=f'\left(0\right)=...=f^{(n-1)}\left(0\right)=0$ болса, онда

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p). \tag{14}$$

Мысалы, $f(t)=\sin^2 t$ түпнұсқаның кескінін табайық.

▼ Айталық, ол кескін $F(p)$ болсын, яғни $f(t)=\sin^2 t \risingdotseq$ $\risingdotseq F(p)$. Онда, 5-теорема бойынша, $f'(t)=\left(\sin^2 t\right)'=\sin 2t \risingdotseq$ $pF\left(p\right)-f(0)$. Мұнда $f(0)=0$ және $\sin 2t \risingdotseq \dfrac{2}{p^2+4}$ ((6) формула) болатынын ескерсек, онда $\dfrac{2}{p^2+4}=pF\left(p\right)$, немесе $F\left(p\right)=\dfrac{2}{p\left(p^2+4\right)}$ аламыз, яғни $\sin^2 t \risingdotseq \dfrac{2}{p\left(p^2+4\right)}$. ▲

6-теорема (*түпнұсқаны интегралдау*). Егер $f(t) \risingdotseq F(p)$,

онда $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \risingdotseq \dfrac{F(p)}{p}$.

▼ $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$ функциясын $g(t)$ арқылы $g(t)=\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$ белгілесек, онда $g'(t)=f(t)$, $g(0)=0$. Енді $g(t)$ функциясының кескінін $G(p)$ деп белгілеп: $g(t) \risingdotseq G(p)$, оған түпнұсқаны дифференциалдау теоремасын (5-теорема) қолдансақ, $g'(t)=f(t)$ $\risingdotseq pG(p)-g(0)=pG(p)$, ал бұдан

$f(t) \risingdotseq F(p)$ сәйкестігін ескеріп $G(p)=\dfrac{F(p)}{p}$, яғни

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$$ аламыз. ▲

Мысалы, $\sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$ сәйкестігінен (6) теореманы пайдалансақ, $\dfrac{1}{p\left(p^2+1\right)} \risingdotseq \int_0^t \sin\tau d\tau = \cos\tau\Big|_0^t = \cos t - 1,$ яғни $\cos t - 1 \risingdotseq \dfrac{1}{p\left(p^2+1\right)}$ сәйкестігін аламыз.

Дәлелдеусіз кескінді интегралдау теоремасын береміз (оның дәлелдеуін, мысалы, [1] қарауға болады).

7-теорема (*кескінді интегралдау*). Егер $\int_p^{+\infty} F(z)dz$ интегралы жинақты болса, онда

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^{+\infty} F(z)dz,$$

яғни кескінді p-дан $+\infty$-қа дейін интегралдау түпнұсқаны оның аргументіне бөлуге әкеледі.

Мысалы, $\sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$ сәйкестігінен (7) теореманы пайдалансақ, $\int_p^{+\infty} \dfrac{1}{z^2+1}dz = arctgz\Big|_p^{+\infty} = \dfrac{\pi}{2} - arctgp = arcctgp,$ болатындықтан, $\dfrac{\sin t}{t} \risingdotseq arcctg\ p$ сәйкестігін аламыз.

(7) теореманы пайдаланып, кейбір меншіксіз интегралдарды жеңіл есептеуге болады. Айталық, $\int_0^{+\infty} \dfrac{f(t)}{t}dt$ меншіксіз интегралы жинақты және $f(t) \risingdotseq F(p)$ болсын. Онда

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} F(p) dp. \qquad (15)$$

Мысалы, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ меншіксіз интегралды есептеу керек болса,

онда $\sin t \doteqdot \frac{1}{p^2+1}$ сәйкестігінен (15) теңдікті пайдаланып,

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{p^2+1} dp = arctgp\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ аламыз.

Келесі, *кешігу теоремасы* деп аталатын тұжырымды әрбір бөлікте әртүрлі аналитикалық өрнектермен берілген функцияның кескінін табу үшін пайдалануға ыңғайлы.

8-теорема (*түпнұсқаның кешігуі*). Егер $f(t) \doteqdot F(p)$, онда кез келген теріс емес $t_0 \geq 0$ үшін

$$f(t-t_0) \doteqdot e^{-pt_0} F(p). \qquad (16)$$

▼ $L\left[f(t-t_0); p\right] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t-t_0) dt =$

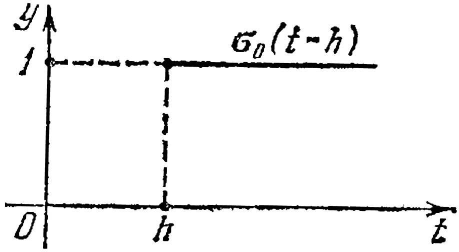
$$= \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t-t_0) dt + \int_{t_0}^{+\infty} e^{-pt} f(t-t_0) dt = \left| f(t-t_0) = 0,\ t < t_0 \right| =$$

$$= \int_{t_0}^{+\infty} e^{-pt} f(t-t_0) dt = \left| t - t_0 = u,\ dt = du \right| = \int_0^{+\infty} e^{-p(u+t_0)} f(u) du = e^{-pt_0} F(p).$$

▲

Мысалы, **а)** $\sigma_0(t) = 1 \doteqdot \frac{1}{p}$ сәйкестігінен, 8-теорема бойынша, $\sigma_0(t-h) \doteqdot e^{-ph} \frac{1}{p}$ сәйкестігі шығады (18-сурет).

б) $t^2 \sigma_0(t) \doteqdot \frac{2}{p^3}$ сәйкестігінен, 8-теорема бойынша, $(t-1)^2 \sigma_0(t-1) \doteqdot e^{-ph} \frac{2}{p^3}$ сәйкестігі шығады.



18-сурет

Назар аударыңыз! Мұндағы $\left(t-1\right)^2\sigma_0(t-1)=0,\ \ t<1$. Егер $\left(t-1\right)^2\sigma_0(t)$ болса, онда сызықтық қасиет бойынша, $\left(t-1\right)^2\sigma_0(t)=\left(t^2-t+1\right)\sigma_0(t)\ \risingdotseq\ \dfrac{2}{p^3}-\dfrac{2}{p^2}+\dfrac{1}{p}$ шығар еді.

Анықтама. Екі $f(t)$ және $g(t)$ функцияның ***үйірткісі*** деп, $\int\limits_0^t f(\tau)g\left(t-\tau\right)d\tau$ интегралын айтады және оны $f*g$ арқылы белгілейді:

$$f*g=\int\limits_0^t f(\tau)g\left(t-\tau\right)d\tau. \qquad (17)$$

Бұл интеграл t айнымалға тәуелді функция (t интеграл астындағы өрнекке де кіреді). Үйірткі амалы – коммутативті: $f*g=g*f$. Бұған $t-\tau=u$ айнымал ауыстыруын жасай отырып көз жеткізуіңізге болады. Мысалы, $f(t)=e^t$, ал $g(t)=t$ болса, онда

$$f*g=\int\limits_0^t e^t\left(t-\tau\right)d\tau=t\left(e^t-1\right)-\left(te^t-e^t+1\right)=e^t-t-1.$$

9-теорема (*кескіндерді көбейту*). Егер $f(t)\risingdotseq F(p)$, $g(t)\risingdotseq G\left(p\right)$ болса ($s_0\left(f\right)=s_0\left(g\right)$) , онда

$$f*g\ \risingdotseq\ F(p)\cdot G\left(p\right). \qquad (18)$$

▼ $f*g \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty}\left[\int\limits_0^t f(\tau)g\left(t-\tau\right)d\tau\right]e^{-pt}dt = /$ интегралдау ретін өзгертеміз, содан соң ішкі интегралда $t-\tau=t_1$ айнымал ауыстыруын жасаймыз / =

$$= \int\limits_0^{+\infty} d\tau \int\limits_\tau^{+\infty} f(\tau)g\left(t-\tau\right)e^{-pt}dt = \left|t-\tau=t_1, dt=dt_1\right| =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} d\tau \int\limits_0^{+\infty} f(\tau)g\left(t_1\right)e^{-p\left(\tau+t_1\right)}dt_1 = \int\limits_0^{+\infty} f(\tau)e^{-p\tau}d\tau \cdot \int\limits_0^{+\infty} g\left(t_1\right)e^{-pt_1}dt_1 =$$

$$= F\left(p\right)\cdot G\left(p\right).$$ ▲

Мысалы, $e^t * cht \risingdotseq \dfrac{1}{p-1}\cdot\dfrac{p}{p^2-1} = \dfrac{p}{\left(p-1\right)^2\left(p+1\right)}.$

Салдар. Егер $f(t) \risingdotseq F(p)$, $g(t) \risingdotseq G\left(p\right)$ болса, онда Дюамель ((1797-1872) – француз математигі) формуласы орындалады:

$$pF(p)\cdot G\left(p\right) \fallingdotseq f(t)g\left(0\right) + \int\limits_0^t f(\tau)g'\left(t-\tau\right)d\tau. \qquad (19)$$

▼ $pF(p)\cdot G\left(p\right) = \left[pG(p) - g\left(0\right)\right]F\left(p\right) + g\left(0\right)F\left(p\right)$ – теңдігінің оң жағының бірінші қосылғышы $g'(t)$ түпнұсқа мен $f(t)$ түпнұсқаның сәйкес кескіндерінің көбейтіндісі болғандықтан, 9-теорема бойынша,

$pF(p)\cdot G\left(p\right) \fallingdotseq g'(t) * f(t) + g\left(0\right)f(t)$ аламыз. Мұндағы үйірткіні ашып жазсақ (үйірткінің коммутативтік қасиетіне сүйеніп), (19) формулаға келеміз. ▲

Енді берілген кескіні бойынша оның түпнұсқасын табуға арналған теоремаларды келтіреміз.

10-теорема. Кеңейтілген комплекс жазықтықта $F(p)$ – аналитикалық функция және $F(\infty)=0$ болсын. Егер $F(p)$ функциясының ∞ нүкте маңайындағы Лоран қатары $F(p) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{c_k}{p^k}$

болса, онда оның түпнұсқасын келесі формула арқылы табуға болады:

$$f\left(t\right)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{n+1}\dfrac{t^n}{n!}, & t>0.\end{cases} \tag{19}$$

▼ Шынында да,

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{n+1}}{n!}\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{n+1}}{p^{n+1}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{p^k}.$$

Түпнұсқаның жалғыз болу теоремасы бойынша теоерма дәлелденді.

▲

Мысалы, $F(p)=\sin\dfrac{1}{p}$ функциясының түпнұсқасын табу керек.

▼ $F(p)=\sin\dfrac{1}{p}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(-1\right)^{k+1}\dfrac{1}{\left(2k-1\right)!\,p^{2k-1}}$ теңдігінен 10-теорема шарты орындалатынын көреміз. Олай болса,

$$f\left(t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{1}{\left(2n+1\right)!}\frac{t^{2n}}{\left(2n\right)!}. \quad ▲$$

Келесі теоремаларды дәлелдеусіз келтіреміз.

11-теорема. $F(p)$ полюстері $p_1, p_2, ..., p_m$ болатын, бөлшек-рационал функция болсын. Онда

$$F(p) \fallingdotseq f\left(t\right)=\sum_{k=1}^{m}\text{Ø}\underset{p=p_k}{\text{åã}}\left[F\left(p\right)e^{pt}\right]. \tag{20}$$

Ал, егер $p_1, p_2, ..., p_m$ – жай полюстер және $F(p)=\dfrac{A\left(p\right)}{B\left(p\right)}$, мұнда $A\left(p\right)$, $B\left(p\right)$ – ортақ түбірлері жоқ көпмүшеліктер болса, онда

$$F(p) \fallingdotseq f\left(t\right)=\sum_{k=1}^{m}\frac{A\left(p_k\right)}{B'\left(p_k\right)}e^{p_k t}. \qquad (21)$$

Мысалы, $F(p)=\dfrac{1}{\left(p-1\right)\left(p^2+1\right)}$ функциясының түпнұсқасын табу керек.

▼ Мұнда $p=1,\ p=\pm i$ – функцияның жай полюстері болғандықтан, $A\left(p\right)=1,\ B\left(p\right)=\left(p-1\right)\left(p^2+1\right),\quad B'\left(p\right)=3p^2-2p+1$ екенін ескерсек, (21) формула бойынша,

$f\left(t\right)=\dfrac{e^t}{2}-\dfrac{e^{it}}{2\left(1+i\right)}+\dfrac{e^{-it}}{2\left(i-1\right)}=\dfrac{1}{2}\left(e^t-\cos t-\sin t\right)$ аламыз. ▲

Тақырыптың соңында Меллин ((1854-1933) фин математигі) формуласын келтірейік.

12-теорема. Егер $\operatorname{Re} p>s_0$ нүктелерінде $F(p)$– аналитикалық функция, $\left|p\right|\to\infty$ ұмтылғанда, $\arg p$-ға қатысты $F(p)$ бірқалыпты $F(p)\to 0$ нөлге ұмтылса және $\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty}\left|F\left(p\right)\right|dy<M$ болса, онда

$$F(p) \fallingdotseq f\left(t\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty}e^{pt}F\left(p\right)dp,\quad x>s_0.$$

Енді қолдануға ыңғайлы болуы үшін, жоғарыда алынған элементар функциялардың L кескіндерін және олардың қасиеттерін ықшамдап, бір жерге топтап жазамыз.

1) $\sigma_0(t)=1 \risingdotseq \dfrac{1}{p}.$

2) $\cos\alpha t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+\alpha^2};$

3) $\sin\alpha t \risingdotseq \dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2};$

4) $e^{-\alpha t} \risingdotseq \dfrac{1}{p+\alpha}.$

5) $e^{-\alpha t}\cos\beta t \risingdotseq \dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2};$

6) $e^{-\alpha t}\sin\beta t \risingdotseq \dfrac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2};$

7) $\mathrm{c}h\alpha t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2-\alpha^2};$

8) $sh\alpha t \risingdotseq \dfrac{\alpha}{p^2-\alpha^2}.$

9) $t^n \risingdotseq \dfrac{n!}{p^{n+1}}, \quad n=1,2,\dots .$

10) *Сызықтық қасиет*:

$$L\left[A\cdot f(t)+B\cdot g(t);\ p\right]=A\cdot L\left[f(t);p\right]+B\cdot L\left[g(t);p\right],$$

11) *Кескіннің ығысуы*:

$$L\left[f(t)\cdot e^{-\alpha t};\ p\right]=L\left[f(t);\ p+\alpha\right],\ \ \mathrm{Re}\left(p+\alpha\right)>s_0.$$

12) *Кескінді дифференциалдау*: $\left(-1\right)^n F^{(n)}(p) \fallingdotseq t^n f(t).$

13) *Түпнұсқаны дифференциалдау*:

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\dots-f^{(n-1)}\left(0\right),$$

ал, егер $f\left(0\right)=f'\left(0\right)=\dots=f^{(n-1)}\left(0\right)=0$ болса, онда

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p).$$

14) *Түпнұсқаны интегралдау*: $\displaystyle\int_0^t f(\tau)d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}.$

15) *Кескінді интегралдау*: $\dfrac{f(t)}{t} \risingdotseq \displaystyle\int_{p}^{+\infty} F(z)dz,$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt = \int_{0}^{+\infty} F(p)dp.$$

16) *Түпнұсқаның кешігуі*: $f(t-t_0) \risingdotseq e^{-pt_0}F(p),\ t_0 \geq 0.$

17) *Кескіндерді көбейту*: $f * g \risingdotseq F(p)\cdot G\left(p\right).$

18) *Дюамель формуласы*:

$$pF(p)\cdot G\left(p\right) \fallingdotseq f(t)g\left(0\right) + \int_{0}^{t} f(\tau)g'\left(t-\tau\right)d\tau.$$

19) Егер $F(p) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{p^k}$ болса, онда: $f\left(t\right) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}\frac{t^n}{n!}, & t > 0. \end{cases}$

20) Егер $F(p)$ полюстері $p_1, p_2, ..., p_m$ болатын, бөлшек-рационал функция болса, онда $f\left(t\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \underset{p=p_k}{\text{Ø åã}}\left[F\left(p\right)e^{pt}\right].$

Ал, егер $p_1, p_2, ..., p_m$ – жай полюстер және $F(p) = \dfrac{A\left(p\right)}{B\left(p\right)},$

болса, онда $f\left(t\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{A\left(p_k\right)}{B'\left(p_k\right)}e^{p_k t}.$

§ 3. Амалдық қисаптың дифференциалдық теңдеулерді шешуге қолданылуы

Сызықтық дифференциалдық теңдеулерді интегралдауда қолданылатын амалдық қисап әдісінің классикалық әдістерге қарағанда артықшылығы – амалдық қисап арқылы дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін тауып жатпастан, берілген алғашқы шарттарды қанағаттандыратын теңдеудің шешімін бірден алуға болады. Егер дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу қажеттігі туса, онда оны да амалдық әдіс арқылы істеуге болады. Түсінуге жеңіл болуы үшін, амалдық қисаптың *екінші ретті біртекті емес сызықтық дифференциалдық теңдеулерді* шешуге қолданылуын қарастырайық (кез келген *n* ретті біртекті емес сызықтық дифференциалдық теңдеулерді де осы сияқты шешуге болады).

Сонымен, келесі екінші ретті біртекті емес сызықтық дифференциалдық теңдеудің (мұнда $x = x(t)$, $\dot{x} = \dot{x}(t)$, $\ddot{x} = \ddot{x}(t)$, яғни функциялар мен оның туындыларының аргументтері – $t \geq 0$):

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2 x = f(t), \qquad (1)$$

берілген алғашқы шарттарды:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \qquad (2)$$

қанағаттандыратын дербес шешімін табу керек болсын.

▼ Айталық, (1) теңдеудің (2) шарттарды қанағаттандыратын дербес шешімі $x(t)$ болсын. Егер бұл функцияны (1) теңдеуге қойсақ, онда біз тепе-теңдік аламыз. Сондықтан (1) теңдеудің екі жағындағы функциялардың *L* кескіндері бірдей болады. Бұдан кейін $x(t)$ мен $f(t)$ функцияларының *L* кескіндерін сәйкес $X(p)$ және $F(p)$ арқылы белгілейміз. Содан соң түпнұсқаны дифференциалдау туралы теореманы: $\dot{x}(t) \risingdotseq pX(p) - x_0$,

$\ddot{x}(t) \risingdotseq p^2X(p) - px_0 - \dot{x}_0$ және сызықтық қасиетті пайдаланып, түпнұсқаларды байланыстырып тұрған (1) теңдеуден, $X(p)$ және $F(p)$ кескіндерді байланыстыратын, ***операторлық теңдеу*** деп аталатын теңдеуге өтеміз:

$$p^2X(p)-px_0-\dot{x}_0+a_1\left[pX(p)-x_0\right]+a_2X(p)=F(p). \qquad (3)$$

Бұл – $X(p)$ кескінге қатысты ***алгебралық теңдеу.*** Операторлық теңдеуді шешейік:

$X(p)\left(p^2+a_1p+a_2\right)=F(p)+px_0+\dot{x}_0+a_1x_0$, бұдан,

$$X(p)=\frac{F(p)}{p^2+a_1p+a_2}+\frac{px_0+\dot{x}_0+a_1x_0}{p^2+a_1p+a_2}. \qquad (4)$$

Енді табылған $X(p)$ кескіннен оның $x(t)$ түпнұсқасына өтсек, ол түпнұсқаның жалғыздығы туралы теорема бойынша, (1) мен (2) – Коши есебінің шешімі болады. ▲

Егер алғашқы шарттар: $x(0)=x_0=0,\quad \dot{x}(0)=\dot{x}_0=0$ болса, онда келесі формуланы аламыз:

$$X(p)=\frac{F(p)}{p^2+a_1p+a_2}. \qquad (5)$$

Ескерту: Егер (2) алғашқы шарттар берілмесе, онда x_0, $\dot{x}_0$ орындарына кез келген тұрақтыларды алып, (1) теңдеудің жалпы шешімін алуға болады.

1-мысал.Теңдеудің алғашқы шартты қанағаттандыратын дербес шешімін табу керек: $\ddot{x}+4x=2,\ x(0)=\dot{x}_0(0)=0.$

▼ (5) формуланы пайдаланайық**:** $2 \risingdotseq \dfrac{2}{p}$ болатындықтан,

$X(p)=\dfrac{2}{p\left(p^2+4\right)}$. Табылған кескінге сәйкес түпнұсқаны табу үшін бөлшекті ең қарапайым бөлшектердің қосындысына жіктейміз: $X(p)=\dfrac{2}{p\left(p^2+4\right)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{p}{p^2+4}\right)$. Бұдан

$x(t)=\dfrac{1}{2}\sigma_0(t)-\dfrac{1}{2}\cos 2t=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2t.$ ▲

Назар аударыңыз! Табылған шешім берілген теңдеуді $t<0$ үшін де қанағаттандырады. Мұндай жағдай, яғни табылған шешімнің берілген теңдеуді кез келген t үшін қанағаттандыратын жағдайы (әрине, теңдеудің оң жағы барлық t үшін анықталса) өте жиі болады.

2-мысал. Теңдеудің алғашқы шартты қанағаттандыратын дербес шешімін табу керек: $\ddot{x}-4\dot{x}+5x=0,\ \ x\left(0\right)=0,\ \ \dot{x}\left(0\right)=1.$

▼ Операторлақ теңдеуге өтеміз:
$p^2X\left(p\right)-1-4pX\left(p\right)+5X\left(p\right)=0.$ Алынған операторлық теңдеуді шешеміз: $X\left(p\right)=\dfrac{1}{p^2-4p+5}=\dfrac{1}{\left(p-2\right)^2+1}.$ Табылған кескіннің түпнұсқасын табамыз, ол үшін кескіннің ығысуы туралы теореманы (жоғарыда **11)** қараңыз) пайдаланамыз: $\sin t \fallingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$ болғандықтан, $x\left(t\right)=e^{2t}\sin t.$ ▲

Енді дифференциалдық теңдеулерді шешуде кескіндерді көбейту теоремасын (жоғарыда **17)**) және Дюамель интегралын (жоғарыда **18)**) қалай қолдануға болатынын көрсетейік. Біртекті емес сызықтық коэффициенттері тұрақты *n* ретті дифференциалдық теңдеуді қарастырамыз (мысалы, [3], § 10.7 қараңыз):

$$x^{(n)}\left(t\right)+a_1x^{(n-1)}\left(t\right)+\ldots+a_{n-1}\dot{x}\left(t\right)+a_nx\left(t\right)=f(t),\ \ t\geq 0. \qquad (6)$$

Бұл теңдеудің сол жағындағы өрнекті

$$L_n\left[x\right]=x^{(n)}\left(t\right)+a_1x^{(n-1)}\left(t\right)+\ldots+a_{n-1}\dot{x}\left(t\right)+a_nx\left(t\right) \qquad (7)$$

арқылы белгілесек, (6) теңдеуді қысқаша жазуға болады:

$$L_n\left[x\right]=f(t),\ \ t\geq 0\,. \qquad (8)$$

$L_n\left[x\right]$ сызықтық *n* ретті дифференциалдық опратор деп аталады және ол келесі қасиеттерге ие ([3], § 10.7):

$$L_n\left[\sum_{i=0}^{n}C_ix_i\right]=\sum_{i=0}^{n}C_iL_n\left[x_i\right], \qquad (9)$$

яғни функциялардың сызықты комбинациясының операторы осы функциялардың операторларының сызықты комбинациясына тең (оператордың сызықтық деп аталуы да осыған байланысты).

Кескіндерді көбейту туралы теореманы қолданудың мағынасы – егер *оң жағы қандай да бір функция болатын* (8) теңдеудің шешімі белгілі болса, онда үйірткі көмегімен *кез келген оң жағы бар* осы теңдеудің шешімін алу мүмкіндігі. Әсіресе теңдеудің оң жағын $f(t)=1$ деп алу тиімді. Сонымен, теңдеудің сол жағы бұрынғыдай, бірақ оң жағы $f(t)=1$ тең дифференциалдық теңдеуді нөлдік алғы шарттармен бірге аламыз:

$$z^{(n)}(t)+a_1 z^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n-1}\dot{z}(t)+a_n z(t)=1, \tag{10}$$

$$z(0)=\ldots=z^{(n-1)}(0)=0. \tag{10′}$$

Ескерту. Дифференциалдық теңдеуді нөлдік алғашқы шарттармен: $z(0)=\ldots=z^{(n-1)}(0)=0$ бірге қарастыруға болады. Басқа жағдайларды, ізделінетін функция үшін қажетті айнымал ауыстыруын жасай отырып, нөлдік алғашқы шарттарға әрқашанда келтіруге болады (мысалы, ([3], § 7.3 қараңыз).

(6) мен (10) дифференциалдық теңдеулердің операторлық теңдеулеріне өтеміз:

$$p^n X+a_1 p^{n-1}X+\ldots+a_{n-1}pX+a_n X=F(p),$$

$$p^n Z+a_1 p^{n-1}Z+\ldots+a_{n-1}pZ+a_n Z=\frac{1}{p}.$$

Операторлық теңдеулерді шешеміз:

$$X(p)=\frac{F(p)}{Q_n(p)},\quad Z(p)=\frac{1}{pQ_n(p)}, \tag{11}$$

мұндағы $Q_n(p)=p^n+a_1 p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n$.

(11) теңдіктерден $X(p)=pF(p)Z(p)$ аламыз. Енді табылған кескінге сәйкес түпнұсқаны, яғни берілген (6) теңдеудің шешімін, Дюамель формуласы (жоғарыда **18)**) арқылы табуға болады ($z(0)=0$):

$$x(t)=f(t)\cdot z(0)+\int_0^t f(\tau)z'(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t f(\tau)z'(t-\tau)\,d\tau, \tag{12}$$

немесе үйірткінің коммутативтілігін пайдалансақ,

$$x(t) = z(t) \cdot f(0) + \int_0^t f'(\tau) \cdot z(t-\tau)\, d\tau. \qquad (13)$$

Назар аударыңыз! Дифференциалдық теңдеудің $x(t)$ шешімін алған кезде, теңдеудің оң жағының $F(p)$ кескінін білудің қажеті жоқ. Ал алынған формулалардың электротехникалық есептерді шешуде маңызы зор!

3-мысал. Нөлдік алғашқы шарттармен бірге берілген дифференциалдық теңдеудің шешімін табу керек: $\ddot{x} + x = e^{-t^2}$.

▼ Алдымен нөлдік алғашқы шарттармен бірге берілген $\ddot{x} + x = 1$ теңдеуді шешеміз. Оның операторлық теңдеуіне өтеміз: $Z(p)p^2 + Z(p) = \dfrac{1}{p}$. Операторлық теңдеудің шешімі: $Z(p) = \dfrac{1}{p(p^2+1)}$. Табылған L кескінге $z(t) = 1 - \cos t$ түпнұсқа сәйкес келеді. Енді (12) формуланы қолданып, $x(t) = \int_0^t e^{-\tau^2} \sin(t-\tau)\, d\tau$ аламыз. Бұл шешімді элементар функциялармен өрнектеуге болмайды, яғни $\int_0^t e^{-\tau^2} \sin(t-\tau)\, d\tau$ – элементар функция емес. ▲

§ 4. Дифференциалдық теңдеулер жүйесі

Дифференциалдық теңдеуді шешуге қолданған қисаптық әдісті ешбір өзгертпестен коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті немесе біртекті емес дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешуге қолдануға болады. Мысалдар қарастырайық.

1-мысал. Көрсетілген алғашқы шарттармен берілген дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешу керек:

$$\begin{cases} \dot{x} - 2x - 3y = 3e^{2t}, \\ \dot{y} + 3x - 2y = 0, \end{cases} \qquad x(0) = 0, \;\; y(0) = 1.$$

▼

Операторлық теңдеулер жүйесіне өтеміз: $x(t) \risingdotseq X(p)$,

$\dot{x}(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p), \quad y(t) \risingdotseq Y(p)$,

$\dot{y}(t) \risingdotseq pY(p) - y(0) = pY(p) - 1$ болатындықтан,

$$\begin{cases} pX - 2X - 3Y = \dfrac{3}{p-2}, \\ pY + 3X - 2Y = 0 \end{cases}$$

аламыз. Бұл жүйенің шешімі:

$X(p) = \dfrac{6}{(p-2)^2 + 9}, \qquad Y(p) = \dfrac{2(p-2)}{(p-2)^2 + 9} - \dfrac{1}{p-2}$. Табылған кескіндерге сәйкес түпнұсқалар, яғни есептің шешімі: $x(t) = 2e^{2t}\sin 3t, \;\; y(t) = 2e^{2t}\cos 3t - e^{2t}$. ▲

2-*мысал*. Көрсетілген алғашқы шарттармен берілген дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешу керек:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 3(y - x + z), \\ \ddot{y} = x - y, \\ \ddot{z} = -z, \end{cases}$$

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0, \;\; y(0) = 0, \;\; \dot{y}(0) = 1, \;\; z(0) = 1, \;\; \dot{z}(0) = 0.$$

▼

Операторлық теңдеулер жүйесіне өтеміз: $x(t) \risingdotseq X(p)$,

$\dot{x}(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p)$,

$\ddot{x}(t) \risingdotseq p^2 X(p) - px(0) - \dot{x}(0) = p^2 X(p)$,

$y(t) \risingdotseq Y(p)$, $\dot{y}(t) \risingdotseq pY(p) - y(0) = pY(p)$,

$\ddot{y}(t) \risingdotseq p^2 Y(p) - py(0) - \dot{y}(0) = p^2 Y(p) + 1$,

$z(t) \risingdotseq Z(p)$, $\quad \dot{z}(t) \risingdotseq pZ(p) - z(0) = pZ(p) + 1$,

$\ddot{z}(t) \risingdotseq p^2 Z(p) - pz(0) - \dot{z}(0) = p^2 Z(p) + p$ болатындықтан,

$$\begin{cases} p^2 X(p) = 3(Y - X + Z), \\ p^2 Y(p) + 1 = X - Y, \\ p^2 Z(p) - p = -Z \end{cases}$$ аламыз. Бұл жүйенің шешімі:

$X(p) = \dfrac{3(p-1)}{p^2(p^2+4)}$, $\qquad Y(p) = \dfrac{3(p-1)}{p^2(p^2+1)(p^2+4)} - \dfrac{1}{p^2+1}$,

$Z(p) = \dfrac{p}{p^2+1}$. Табылған кескіндерге сәйкес түпнұсқалар, яғни есептің шешімі: $x(t) = \dfrac{3}{4}(1-t) - \dfrac{3}{4}\cos 2t + \dfrac{3}{8}\sin 2t$,

$y(t) = \dfrac{3}{4}(1-t) + \dfrac{1}{4}\cos 2t - \dfrac{1}{8}\sin 2t - \cos t$, $z(t) = \cos t$. ▲

Комплекс айнымалды теориялар функциясына арналған есептер мен тапсырмалар

Комплекс жазықтықта төмендегі комплекс сандарға сәйкес нүктелерді салу керек:

1) $a)$ $z = 3$; $b)$ $z = -2$; $c)$ $z = -2i$; $d)$ $z = 3i$; $e)$ $z = 2 + i$; $f)$ $z = -2 + 3i$ $g)$ $z = -3 - 4i$; $k)$ $z = 3 - 2i$.

Берілген 2) – 5) сандарға мына амалдарды қолдану керек

$$z_1 + z_2;\ z_1 - z_2;\ z_1 z_2;\ \frac{z_1}{z_2}:$$

2) $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 1 + i$.

3) $z_1 = 17 - i$, $z_2 = 2 - i$.

4) $z_1 = 5 - 3i$, $z_2 = 7 + 2i$.

5) $z_1 = 4 - 5i$, $z_2 = 1 - 3i$.

Көрсетілген амалдарды орындау керек:

6) $(2 + 3i)(3 - 2i) + (2 - 3i)(3 + 2i)$.

7) $(5 - 2i)^2$.

8) $(1 + 2i)^2 - (1 - 2i)^2$.

9) $(3 + i)^3$.

10) $\dfrac{3 + i}{6 - 5i}$.

11) $\dfrac{3 - i}{4 + 5i}$.

12) $\dfrac{2 + 3i}{2 + i}$.

13) $\dfrac{(1 + i)(3 + i)}{3 - i} - \dfrac{(1 - i)(3 - i)}{3 + i}$.

14) $\dfrac{(1 + 2i)^2 - (1 - i)^3}{(3 + 2i)^3 - (2 + i)^2}$.

Келесі комплекс сандардың нақты және жорамал бөліктерін табу керек:

15) $\dfrac{1}{1-i}$.

16) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$.

17) $\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

18) $\left(\dfrac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$.

Келесі комплекс сандардың модульдері мен аргументтерін табу керек:

19) i.

20) -3.

21) $1+i^{123}$.

22) $3i$.

23) $1+i$.

24) $\sqrt{3}-i$.

25) $-1-i\sqrt{3}$.

26) $1-i\sqrt{3}$.

27) $-i\sqrt{2}$.

28) $3+4i$.

29) $-3-4i$.

30) $-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

31) $\dfrac{1-i}{1+i}$.

32) $-\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}$.

33) $(-4+3i)^3$.

34) $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}$.

35) $1+\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}$.

Теңдікті дәлелдеу керек:

36) $z+\bar{z}=2\operatorname{Re} z$.

37) $z-\bar{z}=2i\operatorname{Im} z$.

38) $\operatorname{Re} z=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$.

39) $\operatorname{Im} z=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$.

40) $\overline{(\bar{z})} = z$.

41) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

42) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$.

43) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

44) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

45) $|\bar{z}| = |z|$.

46) $\bar{z}z = |z|^2$.

Теңсіздікті қанағаттандыратын нүктелер жиынының геометриялық бейнесін көрсетіңіз:

47) $\operatorname{Re} z > 0$.

48) $\operatorname{Im} z \leqslant 1$.

49) $|\operatorname{Re} z| < 1$.

50) $|\operatorname{Im} z| < 1,\ 0 < \operatorname{Re} z < 1$.

51) $|z| \leqslant 1$.

52) $|z - i| > 1$.

53) $0 < |z + i| < 2$.

54) $1 < |z - 1| < 3$.

55) $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$.

56) $|\pi - \arg z| < \dfrac{\pi}{4}$.

Келесі теңдеулермен қандай сызықтар анықталады?

57) $\operatorname{Im} z^2 = 2$.

58) $\operatorname{Re} \bar{z}^2 = 1$.

59) $\operatorname{Im} \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2}$.

60) $\operatorname{Re} \dfrac{1}{z} = 1$.

61) $z^2 + \bar{z}^2 = 1$.

62) $|z| = \operatorname{Re} z + 1$.

Түбірлердің барлық мәндерін табу керек:

63) $\sqrt[3]{1}$.

64) $\sqrt[3]{i}$.

65) $\sqrt[4]{-i}$.

66) $\sqrt[4]{-4}$.

67) $\sqrt[6]{-27}$.

68) $\sqrt[3]{2 - 2i}$.

69) $\sqrt{1 + i}$.

70) $\sqrt{3 - 4i}$.

71) $\sqrt{-3 - 4i}$.

72) $\sqrt{2 + i2\sqrt{3}}$.

Есептеу керек:

73) $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^6$. 74) $(1-i)^7(1+i\sqrt{3})^3$.

75) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$. 76) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{20}$

Келесі теңдеулердің шешімдерін табу керек:

77) $z^2 = i$.

78) $z^2 = 3-4i$.

79) $z^3 = -1$.

80) $z^6 = 64$.

81) $z^7 + 1 = 0$.

82) $z^8 = 1+i$.

83) $z^2 - 2z + 2 = 0$.

84) $z^3 + 6z^2 + 12z + 10 - 2i = 0$.

85) $z^2 - (2+3i)z + 6i = 0$.

86) $z^2 + (3-4i)z - 12i = 0$.

87) $z^6 + 4z^3 + 8 = 0$.

Тізбектің шегі анықтамасы бойынша, дәлелдеу керек:

88) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n} + i\frac{n-1}{n}\right) = 1+i$.

89) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+ni}{1-ni}\right) = -1$.

90) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n = 0$.

Шекті табу керек:

91) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1} + i\frac{n}{n+1}\right)$.

92) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+i)^2}{2n^2 i}$.

93) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{n}\right)$.

94) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{z^n}{1+z^{2n}}$, $|z|<1$.

$$95)\ \lim_{n\to\infty}\frac{z^n}{1+z^{2n}},\ |z|>1.$$

Комплекс сандарды көрсеткіштік түрде жазу керек:

$$124)\ 1)\ z=-1,\ 2)\ z=i,\ 3)\ z=1-i,\ 4)\ z=\sqrt{3}-i.$$

Комплекс сандардың модульдерін
және аргументтерінің бас мәндерін табу керек:

$$125)\ 1)\ e^{3+2i},\ 2)\ e^{1-3i},\ 3)\ e^{2+5i},\ 4)\ e^{3-7i},\ 5)\ e^{i\varphi},\ |\varphi|<\pi,$$
$$6)\ e^{-i\varphi},\ |\varphi|<\pi.$$

e^z функциясының берілген нүктелердегі мәндерін табу керек:

$$126)\ 1)\ z=2\pi i,\ 2)\ z=\pi i,\ 3)\ z=\frac{\pi i}{2},\ 4)\ z=-\frac{\pi i}{2},\ 5)\ z=\frac{\pi i}{4}.$$

Теңдіктерді дәлелдеу керек:

$$127)\ |e^z|=e^{\operatorname{Re} z}.$$
$$128)\ e^{z+2\pi i}=e^z.$$
$$129)\ \cos(-z)=\cos z.$$
$$130)\ \sin(-z)=-\sin z.$$
$$131)\ \operatorname{ch}(-z)=\operatorname{ch} z.$$
$$132)\ \operatorname{sh}(-z)=-\operatorname{sh} z.$$
$$133)\ \cos^2 z+\sin^2 z=1.$$
$$134)\ \operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z=1.$$
$$135)\ \sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2.$$
$$136)\ \cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2.$$
$$137)\ \operatorname{ch}(z_1+z_2)=\operatorname{ch} z_1\operatorname{ch} z_2+\operatorname{sh} z_1\operatorname{sh} z_2.$$

138) $\operatorname{Re}\sin z = \sin x \operatorname{ch} y,\ \operatorname{Im}\sin z = \cos x \operatorname{sh} y.$
139) $\operatorname{Re}\cos z = \cos x \operatorname{ch} y,\ \operatorname{Im}\cos z = -\sin x \operatorname{sh} y.$
140) $\operatorname{Re}\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y,\ \operatorname{Im}\operatorname{sh} z = \operatorname{ch} x \sin y.$
141) $\operatorname{Re}\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y,\ \operatorname{Im}\operatorname{ch} z = \operatorname{sh} x \sin y.$

Келесі сандардың нақты және жорамал бөліктерін табу керек:

142) 1) $z = \cos(2+i)$, 2) $z = \sin 2i$, 3) $z = \operatorname{sh}(-2+i)$, 4) $z = \operatorname{ch} i$

Есептеу керек:

145) 1) $\operatorname{Ln} e$, 2) $\operatorname{Ln}(-1)$, 3) $\operatorname{Ln} i$, 4) $\operatorname{Ln}(3-4i)$, 5) $\operatorname{Ln}(-4+3i)$
6) $\operatorname{Ln}\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$, 7) $\operatorname{Ln}\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

146) 1) $i^{\sqrt{2}}$, 2) i^i, 3) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$, 4) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{1+i}$, 5) $(3-4i)^{1+i}$

147) 1) $\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1}{2}\right)$, 2) $\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1}{2}\right)$, 3) $\operatorname{Arccos}(2)$, 4) $\operatorname{Arcsin} i$.

Келесі теңдеулердің шешімін табу керек:

148) $\ln(z+i) = 0.$
149) $\ln(i-z) = 1.$
150) $e^{-z} + 1 = 0.$
151) $e^z + i = 0.$
152) $\sin z = \dfrac{4i}{3}.$
153) $\sin z = \dfrac{5}{3}.$
154) $\cos z = \dfrac{3i}{4}.$
155) $\cos z = \dfrac{3+i}{4}.$
156) $\operatorname{tg} z = \dfrac{5i}{3}.$
157) $\operatorname{ctg} z = -\dfrac{3i}{5}.$

Функциялардың дифференциалданатын нүктелерін табу керек:

160) 1) $\operatorname{Re} \bar{z}$, 2) x^2y^2, 3) $|z|^2$, 4) $x^2 + iy^2$, 5) $z \operatorname{Re} z$, 6) $2xy - i(x^2 - y^2)$.

Көрсеткіштік функцияның туындысын пайдаланып, теңдіктерді дәлелдеу керек:

161) $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$. 162) $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$.
163) $(\sin z)' = \cos z$. 164) $(\cos z)' = -\sin z$.

Функциялардың дифференциалданатын нүктелерін табу керек және олардың туындыларын табу керек:

166) $e^{\operatorname{ch} z}$.
167) $\sin(2e^z)$.
168) $\sin z \operatorname{ch} z - i \cos z \operatorname{sh} z$.
169) ze^{-z}.
170) $\dfrac{e^z}{z}$.
171) $\dfrac{z \cos z}{1 + z^2}$.
172) $\operatorname{tg} z$.
173) $\operatorname{ctg} z$.
174) $\dfrac{e^z + 1}{e^z - 1}$.
175) $\dfrac{1}{\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} z}$.
176) $(e^z - e^{-z})^2$.
177) $\dfrac{\cos z}{\cos z - \sin z}$.

Функциялар үшін Коши-Риман шарттарының орындалатынын тексеріңіз:

178) 1) z^n, 2) e^z, 3) $\cos z$, 4) $\operatorname{Ln} z$.

Берілген $u(x, y)$ – нақты немесе $v(x, y)$ – жорамал бөлігі мен $f(z_0)$ мәні бойынша z_0 нүктесінің маңайында аналитикалық функцияны табу керек:

183) $u = \dfrac{x}{x^2+y^2},\ f(\pi) = \dfrac{1}{\pi}.$

184) $v = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\ f(1) = 0.$

185) $u = 3x^2 - 4xy - 3y^2,\ f(i) = -3 - 2i.$

186) $v = 2y(5x-3),\ f\left(\dfrac{1}{5}\right) = -1.$

187) $v = \sin y \operatorname{ch}(x+1),\ f\left(-1 + \dfrac{\pi}{2}i\right) = i.$

188) $u = \dfrac{2y}{(x+1)^2+y^2},\ f(i) = i.$

Интегралдарды есептеу керек:

190) $\int\limits_0^1 (1+it)^2 dt.$

191) $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{1+it} dt.$

192) $\int\limits_0^1 \dfrac{1+it}{1-it} dt.$

193) $\int\limits_0^\pi e^{-it} dt.$

194) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i3t} dt.$

Интегралдарды есептеу керек:

$$\int\limits_\Gamma \operatorname{Re} z dz,\ \int\limits_\Gamma \operatorname{Im} z dz,$$

мұндағы:

195) $\Gamma -$ $2+i$ нүктесінің радиус-векторы;

196) $\Gamma -$ жоғарғы жарты шеңбер (жол $z=1$ нүктесінен басталады;

197) $\Gamma -$ сағат тіліне қарсы бағытталған $|z\text{-}2| = 3$ шеңбері;

201) $\int_{\Gamma} |z|\bar{z}dz,$

$\Gamma-$ $|z|=1$ жоғарғы жарты шеңбер мен $-1 \le \operatorname{Re} z \le 1, \quad \operatorname{Im} z = 0$ кесіндісінен құралған тұйық контур;

202) $\int_{\Gamma} \bar{z}dz,$ мұндағы $\Gamma-$ түзудің $z_1 = 0,\ z_2 = 1+i$ нүктелерін қосатын кесінді;

203) $\int_{\Gamma} \frac{1}{z-i}dz,$ мұнда $\Gamma-$ $|z-i|=1$ оң жақ жарты шеңбер мен $z_1 = 2i,\ z_2 = 3i$ нүктелерін қосатын кесіндіден құралған сызық;

204) $\int_{\Gamma} \operatorname{Re}(\sin z) coszdz,$ мұндағы $\Gamma-$басы $z = \frac{\pi}{4} - i$ нүктесі болатын және $|z| \le 1,\ \operatorname{Re} z = \frac{\pi}{4}$ шарттарын қанағаттандыратын сызық.

Интегралдарды есептеу керек (*шеңберлер – сағат тіліне қарама қарсы бағытталған*):

210) $\displaystyle\int\limits_{|z-2i|=2} \frac{1}{z^2+9}dz.$

211) $\displaystyle\int\limits_{|z+i|=3} \frac{1}{z^2+9}dz.$

212) $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{1}{z^2+9}dz.$

213) $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=2} \frac{z}{z^4-1}dz.$

214) $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=2} \frac{1}{z^2+z+1}dz.$

215) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{z}dz.$

216) $\displaystyle\int\limits_{|z-3|=2} \frac{\cos z}{z^2-4}dz.$

217) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z-\frac{\pi}{4}}dz.$

218) $\displaystyle\int\limits_{|z-3|=\frac{5}{2}} \frac{\sin\frac{1}{z}}{z-2}dz.$

219) $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{\cos\pi z+3\sin\pi z}{(z^2-4)(z+i)}dz.$

220) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1} \frac{z^2e^z}{z^2-1}dz.$

221) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=1} \frac{\operatorname{ch} z^2}{i-z}dz.$

222) $\displaystyle\int\limits_{|z-2i|=2} \frac{\operatorname{sh} z}{z^2+1}dz.$

223) $\displaystyle\int\limits_{|z-2i|=2} \frac{\operatorname{tg} z}{z^2+\pi^2}dz.$

224) $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=1} \frac{1}{(1+z)(z-1)^3}dz.$

225) $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=1} \frac{e^z}{(2-z)^2}dz.$

226) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}dz.$

227) $\displaystyle\int\limits_{|z-1-i|=2} \frac{\cos z}{(z-i)^3}dz.$

228) $\displaystyle\int\limits_{|z+i|=3} \frac{\sin z}{z+i}dz.$

229) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1}dz.$

230) $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}dz.$

231) $\displaystyle\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz.$

232) $\displaystyle\int\limits_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz.$

233) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz.$

Дәрежелік қатарлардың жинақталу аймағын табу керек:

234) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n(z-i)^n$.

236) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{3^n n^3}$.

235) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z+i}{in}\right)^n$.

237) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{z+i}{1-i}\right)^n$.

Дәрежелік қатарлардың жинақталу радиусін табу керек:

238) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$.

242) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n z^n$

239) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(in)^n}{n!} z^n$.

240) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3+i^n)^n z^n$.

241) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! e^{-n^2} z^n$.

243) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+2^n) z^n$.

244) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3+(-1)^n)^n (z-1+i)^n$.

Функцияларды z дәрежесі бойынша Тейлор қатарына жіктеу керек:

265) $\cos^2 \frac{iz}{2}$.   266) $\operatorname{ch}^2 \frac{z}{2}$.   267) $\frac{iz}{z^2+i}$.   268) $\frac{2z-5}{z^2-5z+6}$.

269) $\frac{z}{(z^2+1)(z^2-4)}$.   270) $\frac{z}{z^2+2z+2}$.

Функцияларды Тейлор қатарына жіктеу керек:

271) e^z, $\quad (2z-1)$ – дәрежесі бойынша;

272) $\sin z$, $\quad \left(z+\dfrac{\pi}{3}\right)$ – дәрежесі бойынша;

273) $\cos(3z-1)$, $\quad (z+1)$ – дәрежесі бойынша;

274) $\dfrac{1}{7z+3}$, $\quad (z+2)$ – дәрежесі бойынша;

275) $\dfrac{1}{z^2+1}$, $\quad (z-1)$ – дәрежесі бойынша.

Келесі қатарлардың жинақталу аймақтарын табу керек:

276) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^n}{(z-i)^n}$.

277) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n+n^3}{(z+2i)^n}$.

278) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3n^2+1}\left(\dfrac{4+3i}{z+1}\right)^n$.

279) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{z}{3}\right)^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{z}\right)^n$.

280) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{z}{2}\right)^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3}{z}\right)^n$.

281) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n-n^2}{(z+2)^n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z+2)^n}{(n+i)^n}$

282) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{i\,\mathrm{sh}\,n}{(z-i)^n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-i)^n}{n^2}$.

283) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z-2i)^{-n}}{n!} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-2i)^n}{n^2+1}$.

284) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{(z+3i)^n}{n^4+3}$.

285) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^{-n} \operatorname{ch} \frac{i}{n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\ln in}\right)^{n}$.

286) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^{n}(1 + i\frac{\pi n}{2})}{(z-i)^{n}} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin in}{7^{n} n^{2}} (z-i)^{n}$.

287) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2-i)^{-n}}{(2+(-1)^{n})^{n}}$.

288) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1+i)^{-n}}{5^{n}(2+(-1)^{n})^{n}} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1+i)^{n}(2+(-1)^{n})^{n}}{5^{n}}$.

Келесі функцияларды $z = z_0$ нүктесінің маңайында Лоран қатарына жіктеу керек:

289) $z^4 \sin^2 \frac{1}{z}$, $z_0 = 0$.

290) $\cos \frac{i}{z} + \frac{z}{z-1}$, $z_0 = 0$.

291) $\frac{1}{(z+2)z}$, $z_0 = -2$.

292) $\frac{1}{(z-3)^2 z}$, $z_0 = 1$.

293) $z \cos \frac{1}{2z+1}$, $z_0 = -\frac{1}{2}$.

294) $\sin \frac{z}{z-1}$, $z_0 = 1$.

Келесі функцияларды $z = \infty$ нүктесінің маңайында Лоран қатарына жіктеу керек:

295) $\frac{z}{2z+5}$.

296) $\frac{3z}{z^2-1}$.

297) $z^2 e^{\frac{1}{z}}$.

298) $\frac{z}{z^2+2z+2}$.

Келесі функцияларды көрсетілген сақинада $z - z_0$ дәрежесі бойынша Лоран қатарына жіктеу керек:

299) $\frac{1}{z(z-3)^2}, \ (z_0 = 1, \ 1 < |z-1| < 2).$

300) $\frac{1}{z^2(z^2-9)}, \ (z_0 = 1, \ 1 < |z-1| < 2).$

301) $\frac{z+i}{z^2}, \ (z_0 = i, \ 0 < |z| < 2).$

302) $\frac{z^2-1}{z^2+1}, \ (z_0 = 1, \ 0 < |z| < 3).$

303) $\frac{1}{z(z-1)(z-2)}, \ (z_0 = 0, \ 1 < |z| < 2).$

304) $\frac{2z}{z^2-2i}, \ (z_0 = 1, \ 0 < |z| < 2).$

305) $\frac{z^3}{(z+1)(z-2)}, \ (z_0 = -1, \ 0 < |z+1| < 3).$

306) $\frac{1}{(z^2-1)(z^2+4)}, \ (z_0 = 0, \ 2 < |z| < 10).$

307) $z^3 e^{\frac{1}{z}}, \ (z_0 = 0, \ 0 < |z| < \infty).$

308) $z^2 \sin \pi \frac{z+1}{z}, \ (z_0 = 0, \ 0 < |z| < \infty).$

309) $z^3 \cos \frac{1}{z-2}, \ (z_0 = 2, \ 0 < |z-2| < \infty).$

310) $\frac{e^z}{z(1-z)}, \ (z_0 = 0, \ 0 < |z| < \infty).$

311) $\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z(1+z)}, \ (z_0 = 1, \ 1 < |z-1| < 2).$

$z = z_0$ - келесі функциялар үшін жөнделетін ерекше нүкте болатынын дәлелдеу керек:

312) $\dfrac{z^2-1}{z-1}, \ (z_0 = 1).$

313) $\dfrac{\sin z}{z}, \ (z_0 = 0).$

314) $\dfrac{z}{\operatorname{tg} z}, \ (z_0 = 0).$

315) $\dfrac{1-\cos z}{z^2}, \ (z_0 = 0).$

316) $\operatorname{ctg} z - \dfrac{1}{z}, \ (z_0 = 0).$

317) $\dfrac{1}{e^z-1} - \dfrac{1}{\sin z}, \ (z_0 = 0).$

318) $\dfrac{z^2-1}{z^3+1}, \ (z_0 = \infty).$

$z = z_0$ - келесі функциялар үшін полюс болатынын дәлелдеу керек:

319) $\dfrac{1}{z}, \ (z_0 = 0).$

320) $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}, \ (z_0 = i).$

321) $\dfrac{z^2+1}{z+1}, \ (z_0 = \infty).$

322) $\dfrac{z}{1-\cos z}, \ (z_0 = 0).$

323) $\dfrac{z}{(e^z-1)^2}, \ (z_0 = 0).$

324) $\operatorname{ctg} \dfrac{\pi}{z}, \ (z_0 = \infty).$

325) $\dfrac{z}{e^z+1}, \ (z_0 = \pi i).$

326) $\operatorname{tg} \pi z, \ (z_0 = \dfrac{1}{2}).$

$z = z_0$ - келесі функциялар үшін елеулі ерекше нүкте болатынын дәлелдеу керек:

327) $e^z, \ (z_0 = \infty).$

328) $e^{-z^2}, \ (z_0 = \infty).$

329) $\sin \dfrac{\pi}{z^2}, \ (z_0 = 0).$

330) $z^2 \cos \dfrac{\pi}{z}, \ (z_0 = 0).$

331) $\cos \dfrac{z}{z+1}, \ (z_0 = -1).$

Келесі функциялардың барлық оқшауланған ерекше нүктелерді тауып, олардың түрлерін анықтау керек:

332) $\frac{1}{z^3}e^{iz}$.

333) $\operatorname{tg}\frac{1}{z}$.

334) $\frac{z^2}{\cos z - 1}$.

335) $\frac{z^4+1}{z^4-1}$.

336) $z\cos\frac{1}{z} - z$.

Есептеу керек:

337) $\operatorname*{Res}\limits_{z=0}\frac{\sin z}{z^2}$.

338) $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} e^{\frac{1}{z}}$.

339) $\operatorname*{Res}\limits_{z=1}\frac{e^z}{(z-1)^2}$.

340) $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} z^2\sin\frac{\pi}{z}$.

341) $\operatorname*{Res}\limits_{z=0}\sin z\cdot\sin\frac{1}{z}$.

342) $\operatorname*{Res}\limits_{z=\frac{\pi}{4}} z^2\frac{\cos z}{z-\frac{\pi}{4}}$.

343) $\operatorname*{Res}\limits_{z=-1}\sin\frac{z}{z+1}$.

Келесі функциялардың барлық ақырлы ерекше нүктелердегі шегерімдерін табу керек:

344) $\frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$.

345) $\frac{z^2}{(z+1)^3}$.

346) $\frac{\cos z}{(z-2)^2}$.

347) $\frac{\sin \pi z}{(z-3)^3}$.

348) $\operatorname{tg} z$.

349) $\operatorname{cth} z$.

350) $\operatorname{cth}^2 \pi z$.

351) $\frac{1}{e^z+1}$.

352) $\frac{\operatorname{ch} z}{(z^2+1)(z-3)}$.

Келесі функциялардың ақырсыз нүктедегі шегерімдерін табу керек:

353) $\dfrac{z^4+1}{z^6-1}$.

354) $\cos\dfrac{\pi(z+2)}{2z}$.

355) $\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}$.

356) $\dfrac{\cos^2\frac{\pi}{z}}{z+1}$.

Интегралды есептеу керек: $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz,$ мұндағы Γ - берілген G аймағының оң бағытталған шеарасы:

358) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\frac{z^2}{\sin^3 z\cos z}dz,\ G:|z|>1.$

359) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\frac{e^z}{(z-\pi i)^2}dz,\ G:|z|>4.$

360) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\frac{\cos z}{z^3}dz,\ G:|z|<1.$

361) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\left(\sin\frac{1}{z^2}+e^{z^2}\cos z\right)dz,\ G:|z|<1.$

362) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{1+z}dz,\ G:|z|<2.$

363) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\frac{z}{e^{z^2}-1}dz,\ G:|z|>4.$

364) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\frac{z^3}{e^{z^2}-1}dz,\ G:|z|<4.$

365) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}z^2\sin\frac{1}{z}dz,\ G:|z|>1.$

366) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\frac{\cos\frac{z}{2}}{z^2-4}dz,\ G:|z-3|+|z+3|<10.$

Жауаптары

Комплекс айнымалды теориялар функциясы

2) $4-i,\ 2-3i,\ 5+i,\ \frac{1}{2}-i\frac{5}{2}.$ **3)** $19-2i,\ 15,\ 33-19i,\ 7+3i.$ **4)** $12-i,\ -2-5i,\ 41-11i,\ \frac{29}{53}-i\frac{31}{53}.$ **5)** $5-8i,\ 3-2i,\ -11-17i,\ \frac{19}{10}+i\frac{7}{10}.$ **6)** $24.$ **7)** $21-20i.$ **8)** $8i.$ **9)** $18+26i.$ **10)** $\frac{13}{61}+i\frac{21}{61}.$ **11)** $\frac{7}{41}-i\frac{19}{41}.$ **12)** $\frac{7}{5}+i\frac{4}{5}.$ **13)** $i\frac{14}{5}.$ **14)** $\frac{44}{318}-i\frac{5}{318}.$ **15)** $\operatorname{Re} z=\frac{1}{2},\ \operatorname{Im} z=\frac{1}{2}.$ **16)** $\operatorname{Re} z=0,\ \operatorname{Im} z=1.$ **17)** $\operatorname{Re} z=-1,\ \operatorname{Im} z=0.$ **18)** $\operatorname{Re} z=-2,\ \operatorname{Im} z=\frac{3}{2}.$ **19)** $|z|=1,\ \arg z=\frac{\pi}{2}.$ **20)** $|z|=3,\ \arg z=\pi.$ **21)** $|z|=\sqrt{2},\ \arg z=-\frac{\pi}{4}.$ **22)** $|z|=3,\ \arg z=\frac{\pi}{2}.$ **23)** $|z|=\sqrt{2},\ \arg z=\frac{\pi}{4}.$ **24)** $|z|=2,\ \arg z=-\frac{\pi}{6}.$ **25)** $|z|=2,\ \arg z=-\frac{2\pi}{3}.$ **26)** $|z|=2,\ \arg z=-\frac{\pi}{3}.$

27) $|z|=\sqrt{2},\ \arg z=-\frac{\pi}{2}.$ **28)** $|z|=5,\ \arg z=arctg\frac{4}{5}.$ **29)** $|z|=5,$ $\arg z=arctg\frac{4}{5}-\pi.$ **30)** $|z|=1,\ \arg z=\frac{2\pi}{3}.$ **31)** $|z|=1,\ \arg z=-\frac{\pi}{2}.$

32) $|z|=1,\ \arg z=\frac{6\pi}{7}.$ **33)** $|z|=125,\ \arg z=-\frac{\pi}{2}.$

34) $|z|=\frac{1}{4},\ \arg z=0.$ **35)** $|z|=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4},\ \arg z=\frac{\pi}{14}.$

47) Жорамал өстің оң жағында жатқан, жартыжазықтық (өстің нүктелері жатпайды). **48)** $z=i$ нүкте арқылы өтетін горизанталь түзудің астында орналасқан, жарты жазықтық. **49)** Жорамал өске дейінгі қашықтығы бірден кіші нүктелерден тұратын, жолақ. **50)** Төбелері $-i,\ 1-i,\ 1+i,\ i$ нүктелерде болатын тік төртбұрыш (оның қабырғалары жатпайды). **51)** Центрі $z=0$ радиусі 1-ге тең дөңгелек (оның шеңбері де жатады). **52)** Центрі $z=i$ радиусі 1-ге тең дөңгелек және оның шеңбері алынып тасталған жазықтық. **53)** Центрі $z=-i$ радиусі 2-ге тең дөңгелек (оның шеңбері жатпайды). **54)** Центрі ортақ $z=1$ радиустері 1 және 3 тең шеңберлердің арасындағы сақина (шеңберлердің нүктелері жатпайды). **55)** Төбесі $z=0$ нүктесі болатын, шамасы $\frac{\pi}{4}$ тең, бірінші ширектегі бұрыш. **56)** Төбесі $z=0$ нүктесі болатын, нақты өстің теріс бөлігіне симметриялы, шамасы $\frac{\pi}{2}$ тең бұрыш. **57**) $xy=1$ гиперболасы. **58**) $x^2-y^2=1$ гиперболасы. **59**) $x^2+(y+1)^2=1$ шеңбері.

60) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$ шеңбері. **61**) $2\left(x^2-y^2\right)=1$ гиперболасы.

62) $y^2=2x+1$ параболасы. **63**) $z_1=1,\ z_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$

64) $z_1=-i,\ z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2},\ z_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}.$ **65**) $z_1=\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8},$

$z_2=-\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8},\ z_3=\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8},\ z_4=-\sin\frac{\pi}{8}-i\cos\frac{\pi}{8}.$

66) $z_1=1+i,\ z_2=1-i,\ z_3=-1-i,\ z_4=-1+i.$

67) $z_1=i\sqrt{3},\ z_2=-i\sqrt{3},\ z_3=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_4=-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_5=\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_6=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$

68)$z_1=-1-i,\ z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right),\ z_3=\sqrt{2}\left(-\sin\frac{\pi}{12}+i\cos\frac{\pi}{12}\right).$

69)$z_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right),\ z_2=\sqrt[4]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}\right).$ **70**) $z_1=2-i,\ z_2=-2+i.$

71) $z_1=1-2i,\ z_2=-1-2i.$ **72)** $z_1=\sqrt{3}+i,\ z_2=-\sqrt{3}-i.$ **73)** $2^{10}.$
74) $-2^6(1+i).$ **75)** 1. **76)** $2^9(1+i\sqrt{3}).$ **77)** $z_1=\frac{1+i}{\sqrt{2}},\ z_2=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}.$
78) $z_1=2-i,\ z_2=-2+i.$ **79)** $z_1=1,\ z_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$
80) $z_k=2\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^k,\ k=0,1,2,3,4,5.$ **81)** $z_k=e^{\frac{2k+1}{7}\pi i},\ k=0,1,2,3,4,5,6.$

82)$z_k=\sqrt[16]{2}e^{\frac{\pi i}{4}\left(k+\frac{1}{8}\right)},\ k=0,1,2,3,4,5,6,7.$ **83**) $z_1=1+i,\ z_2=1-i.$

84)$z_1=-1+i,\ z_2=-2+\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right),\ z_3=-2+\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{12}-i\cos\frac{\pi}{12}\right).$

85) $z_1=2,\ z_2=3i.$ **86**) $z_1=4i,\ z_2=-3.$ **87**) $z_1=1+i,\ z_2=1-i,$

$z_3=-2+\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right),\ z_4=-2+\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right),$

$z_5=-2+\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{12}+i\cos\frac{\pi}{12}\right),\ z_6=-2+\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{12}-i\cos\frac{\pi}{12}\right).$ **91**) $\frac{1}{2}+i.$

92) $-\frac{i}{2}.$ **93)** $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}.$ **94)** 0. **95)** 0.

124) 1)$e^{i\pi}$, 2)$e^{\frac{i\pi}{2}}$, 3)$\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$, 4)$2e^{-\frac{i\pi}{6}}$. **125)** 1)$|z|=e^3, \arg z = 2$, 2)$|z|=e, \arg z=-3$, 3)$|z|=e^2, \arg z = 5-2\pi$, 4)$|z|=e^3, \arg z=-7+2\pi$, 5)$|z|=1, \arg z=\varphi$, 6)$|z|=1, \arg z=-\varphi$.

126) 1)1, 2)-1, 3)$-i$, 4)$-i$, 5)$\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

142) 1) $\operatorname{Re} z=\cos 2\cdot ch1$, $\operatorname{Im} z=-\sin 2\cdot sh1$, 2) $\operatorname{Re} z=0, \operatorname{Im} z=sh2$,

3) $\operatorname{Re} z=-\cos 1\cdot sh2$, $\operatorname{Im} z=\sin 1\cdot ch2$, 4) $\operatorname{Re} z=\cos 1'$, $\operatorname{Im} z=0$,

5) $\operatorname{Re} z=-\dfrac{\sin 4}{2\left(\cos^2 2+sh^2 1\right)}$, $\operatorname{Im} z=-\dfrac{sh2}{2\left(\cos^2 2+sh^2 1\right)}$.

145) 1)$1+i2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, 2)$i(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, 3)$i(4k+1)\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$, 4) $\ln 5+i(-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+2\pi k)$, $k\in\mathbb{Z}$, 5) $\ln 5+$ $+i\left(-arctg\dfrac{3}{4}+\pi\left(2k+1\right)\right), k\in Z$, 6)$i\left(\dfrac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k\in Z$, 7)$i\left(-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k\in Z$.

146) 1) $\cos 2\sqrt{2}k\pi+i\sin 2\sqrt{2}k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, 2)$e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}$, $k\in\mathbb{Z}$, 3)$\frac{1-i}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}(8k+1)}$, 4)$\frac{\sqrt{3}+i}{2}e^{\frac{\pi}{6}(12k-1)}$, $k\in\mathbb{Z}$, 5)$5(\cos(\ln 5-\operatorname{arctg}\frac{4}{3})+i\sin(\ln 5-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}))$, 6)$e^{\frac{\pi}{3}+2\pi k}(\cos\ln 2+i\sin\ln 2)$, $k\in\mathbb{Z}$. **147)** 1)$(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, 2)$\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $-\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, 3)$2\pi k+i\ln(2+\sqrt{3})$, $2\pi k-i\ln(2+\sqrt{3})$, 4)$\pi k+i(-1)^k\ln(1+\sqrt{2})$, $k\in\mathbb{Z}$, 5) $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+(2k+1)\frac{\pi}{2}+i\frac{\ln 5}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$

148) $z=1-i$. **149)** $z=-e+i$. **150)** $z=(2k+1)\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$. **151)** $z=\frac{\pi}{2}(4k-1)i$, $k\in\mathbb{Z}$. **152)** $z=i(-1)^k\ln 3+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

153) $z=i\ln 3+\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $z=-i\ln 3+\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in Z$.

154) $z=-i\ln 2+\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $z=i\ln 3-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in Z$.

155) $z=-\dfrac{i}{2}\ln 2+\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$, $z=\dfrac{i}{2}\ln 2-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$, $k\in Z$.

156) $z=i\ln 2+\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **157)** $z=i\ln 2+\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

158) 1)$x^2-y^2=3$ гиперболасы. 2)$xy=\dfrac{5}{2}$ гиперболасы.

159) 1)$u^2+\upsilon^2=\dfrac{u}{3}$ шеңбері. 2)$u^2+\upsilon^2=-\dfrac{\upsilon}{5}$ шеңбері. 3)$|w|=\dfrac{1}{R}$ шеңбері. 4)$u+\upsilon=0$ түзуі. 5) $3\left(u^2+\upsilon^2\right)-4u+1=0$ шеңбері. 6) $\arg w=-\alpha$. 7)$u=\dfrac{1}{2}$ түзуі. **160)** 1) Ешбір жерде. 2) Нақты және жорамал өстерде.

3) $z=0$ нүктеде. 4) $\operatorname{Re} z=\operatorname{Im} z$ түзуінде. 5) $z=0$ нүктеде. 6) Барлық жерде. **166)** $\operatorname{sh} z e^{\operatorname{ch} z}$.

167) $2e^z\cos(2e^z)$. **168)** $(1-i)\cos z\operatorname{ch} z+(1+i)\sin z\operatorname{sh} z$. **169)** $(1-z)e^{-z}$.

170) $\frac{e^z}{z}-\frac{e^z}{z^2}$, $z\neq 0$. **171)** $\frac{(1+z^2)(\cos z-z\sin z)-2z^2\cos z}{(1+z^2)^2}$, $z\neq i$, $z\neq -i$. **172)** $\frac{1}{\cos^2 z}$.

173) $-\frac{1}{\sin^2 z}$. **174)** $\frac{2e^z}{(e^z-1)^2}$. **175)** $\cos 2z$. **176)** $-2\frac{e^z+e^{-z}}{(e^z-e^{-z})^3}$. **177)** $\frac{1}{(\cos z-\sin z)^2}$.

183) $\frac{1}{z}$. **184)** $\ln z$. **185)** $z^2(3+2i)$. **186)** $5z^2-6z$. **187)** $\operatorname{sh}(z+1)$.

188) $\frac{z-1}{z+1}$. **190)** $\frac{2}{3}+i$. **191)** $\frac{\pi}{4}-\frac{i\ln 2}{2}$. **192)** $\frac{\pi}{2}-1+i\ln 2$.

193) $-2i$. **194)** 0. **195)** $J_1=2+i$, $J_2=1+\frac{1}{2}i$. **196)** $J_1=\frac{i\pi}{2}$, $J_2=-\frac{\pi}{2}$

197) $J_1=9\pi i$, $J_2=-9\pi$.

210) $\frac{\pi}{3}$. **211)** $-\frac{\pi}{3}$. **212)** 0. **213)** $\frac{\pi i}{2}$. **214)** 0. **215)** 0.

216) $\frac{\cos 2\pi i}{2}$. **217)** $\frac{\pi i}{8}$. **218)** $2\pi i\sin\frac{1}{2}$. **219)** $-\frac{2\pi}{5}(3\operatorname{sh}\pi+i(\operatorname{ch}\pi-1))$.

220) $e\pi i$. **221)** $-2\pi i\operatorname{ch}1$. **222)** $\pi i\sin 1$. **223)** $i\operatorname{th}\pi$. **224)** $-\frac{\pi i}{4}$.

225) $2e^2\pi i$. **226)** $-\frac{\pi^2 i}{2}$. **227)** $-\pi i\operatorname{ch}1$. **228)** $2\pi\operatorname{sh}1$. **229)** $2\pi i\operatorname{sh}1$.

230) 0. **231)** $2\pi i$. **232)** $\pi i(2-e)$. **233)** $-\pi i e$.

234) $z=i$ нүктеде жинақталады. **235)** $|z|<\infty$ жазықтықта жинақталады. **236)** $|z|\le 3$ дөңгелегінде жинақталады. **237)** $|z+i|<\sqrt{2}$ дөңгелегінің ішінде жинақталады. **238)** $R=4$.

239) $R=\frac{1}{e}$. **240)** $R=\frac{1}{4}$. **241)** $R=\infty$. **242)** $R=\frac{1}{2}$. **243)** $R=\frac{1}{2}$

244) $R=\frac{1}{4}$.

265) $1+\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$. **266)** $\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\frac{1}{2}$, $R=\infty$.

267) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} i^n z^{2n+1}$, $R=1$.

268) $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(3^{-n-1}+2^{-n-1})z^n$, $R=2$.

269) $\frac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}((-1)^{n+1}-2^{-2(n+1)})z^{2n+1}$, $R=1$.

270) $\frac{1}{2i}\sum\limits_{n=1}^{\infty}((-1-i)^{-n}-(i-1)^{-n})z^n$, $R=\sqrt{2}$.

271) $e^{\frac{1}{2}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2z-1)^n}{2^n n!}$, $R=\infty$. **272)** $\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+\frac{\pi}{3})^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+\frac{\pi}{3})^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$.

273) $\sin 4\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}(z+1)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cos 4\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n}(z+1)^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$.

274) $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{7^n(z+2)^n}{11^{n+1}}$, $R=\frac{11}{7}$. **275)** $\frac{1}{2i}\sum\limits_{n=1}^{\infty}((-1-i)^{-n}-(i-1)^{-n})(z-1)^{n-1}$, $R=\sqrt{2}$.
276) $|z-i|>2$. **277)** $|z+2i|>3$. **278)** $|z+2i|>3$. **279)** $2<|z|<3$.
280) жинақты емес. **281)** $2<|z+2|<\infty$. **282)** жинақты емес.

283) $0<|z-2i|\leqslant 1$. **284)** $|z+3i|=1$. **285)** $1<|z|<\infty$.
286) $\frac{e^2+1}{2e}<|z-i|<\frac{7}{e}$. **287)** $|z-2-i|>1$. **288)** $\frac{1}{5}<|z+1+i|<\frac{5}{3}$.
290) $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^{2n}(2n)!}+1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}z^n$, $0<|z|<1$.

291) $-\frac{1}{2(z+2)}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{2^{n+2}}$, $0<|z+2|<2$. **292)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{9}((-1)^n+\frac{3n+5}{2^{n+2}})$, $|z-1|<1$.

293) $z+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z+\frac{1}{2})^n}$, $a_{-2k+1}=\frac{(-1)^k}{2^{2k}(2k)!}$, $a_{-2k}=-\frac{1}{2}a_{-2k+1}$, $0<|z+\frac{1}{2}|<\infty$.
294) $\sin 1\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^{2n}(2n)!}+\cos 1\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^{2n+1}(2n+1)!}$, $0<|z-1|<\infty$.
295) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n5^n}{2^{n+1}z^n}$, $|z|>\frac{5}{2}$. **296)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3}{z^{2n+1}}$, $|z|>1$. **297)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^{n-2}}$, $0<|z|<\infty$.
298) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1-i)^n-(1+i)^n}{2i}\frac{1}{z^n}$, $|z|>\sqrt{2}$. **299)** $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{n-1}}{9}(z-1)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3n+5}{9(2^{n+2})}(z-1)^n$. **300)** $\sum\limits_{n=-\infty}^{-2}\frac{(-1)^n(n+1)}{9}(z-1)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}-2^{n+1}}{27(2^{2n+3})}(z-1)^n$.
301) $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}(n+1)i^{n+2}(z-i)^n$. **302)** $\sum\limits_{n=-\infty}^{0}(-1)^{n+1}2^{-\frac{n}{2}+1}\sin\frac{\pi n}{4}(z-1)^{n-1}$.
303) $-\sum\limits_{n=-\infty}^{-2}z^n-\frac{1}{2z}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{-n-2}z^n$. **304)** $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}i^{-n-1}(z-1)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2+i)^{n+1}}(z-1)^n$.
305) $\frac{1}{3(z+1)}-\frac{8}{9}+\frac{19(z+1)}{27}-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{8}{3^{n+2}}(z+1)^n$. **306)** $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}\frac{1+(-1)^n4^{-n-1}}{5}z^{2n}$.
307) $z^3+z^2+\frac{1}{2}z+\frac{1}{6}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{-n}}{(n+3)!}$. **308)** $-\pi z+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{-2n+1}$.
309) $(z-2)^3+6(z-2)^2+\frac{23}{2}(z-2)+5+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{48n^2+72n+23}{(2n+2)!}(z-2)^{-2n+1}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}2(-1)^n\frac{16n^2+24n+5}{(2n+2)!}(z-2)^{2n}$. **310)** $-\sum\limits_{n=-\infty}^{-2}ez^n+(1-e)z^{-1}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{p=n+2}^{\infty}\frac{1}{p!}\right)z^n$.
311) $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n-1}\frac{(z-1)^n}{e}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{p=0}^{n}\frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}(n-p)!}+\sum\limits_{p=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}}{(p)!}\right)(z-1)^n$.

332) $z=0-$ үшінші ретті полюс, $z=\infty-$ елеулі ерекше нүкте. **333)** $z=0-$ ерекше нүкте, бірақ оқшауланбаған, $z=\infty-$ бірінші ретті нөл. **334)** $z=0-$ жөнделетін ерекше нүкте, $z_k=2\pi k,\ k\in Z-$ екінші ретті полюс, $z=\infty-$ ерекше нүкте, бірақ оқшауланбаған, ол z_k полюстерінің шектік нүктесі. **335)** $z_1=1,\ z_1=-1,\ z_1=i,\ z_1=-i-$ бірінші ретті полюстер, $z=\infty-$ жөнделетін ерекше нүкте. **336)** $z=0-$ елеулі ерекше нүкте, $z=\infty-$ бірінші ретті нөл. **337)** 1. **338)** -1. **339)** e. **340)** $\frac{\pi^3}{6}$. **341)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
342) 0. **343)** $\cos 1$. **344)** $\operatorname*{res}_{i} f(z)=\frac{1}{4},\ \operatorname*{res}_{-i} f(z)=\frac{1}{4},\ \operatorname*{res}_{1} f(z)=-\frac{1}{2}$.
345) $\operatorname*{res}_{-1} f(z)=1$. **346)** $\operatorname*{res}_{2} f(z)=-\sin 2$. **347)** $\operatorname*{res}_{3} f(z)=0$.
348) $\operatorname*{res}_{z_k} f(z)=-1,\ z_k=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$. **349)** $\operatorname*{res}_{z_k} f(z)=1,\ z_k=i\pi k,\ k\in Z$.
350) $\operatorname*{res}_{z_k} f(z)=0,\ z_k=ik,\ k\in Z$. **351)** $\operatorname*{res}_{z_k} f(z)=-1,\ z_k=i(2k+1)\pi,\ k\in Z$.
352) $\operatorname*{res}_{3} f(z)=\frac{\operatorname{ch}3}{10},\ \operatorname*{res}_{i} f(z)=-\frac{\cos 1}{20}(1-3i),\ \operatorname*{res}_{-i} f(z)=-\frac{\cos 1}{20}(1+3i)$. **353)** 0.
354) π. **355)** 0. **356)** -1. **358)** $-2\pi i$. **359)** $2\pi i$. **360)** $-\pi i$.
361) 0. **362)** $\frac{-2\pi i}{3}$. **363)** $-6\pi i$. **364)** 0. **365)** $\frac{\pi i}{3}$. **366)** 0.

Амалдық қисап бөліміне арналған

есептер мен тапсырмалар

1. Көрсетілген функциялардың қайсысы тұпнұсқа-функция болатынын тексеріңіз:

а) $f(t)=b^t\eta(t),\ b>0, b\neq 1$; б) $f(t)=e^{(2+4i)t}\eta(t)$;

в) $f(t)=\dfrac{1}{t-3}\eta(t)$; г) $f(t)=t^2\eta(t)$;

д) $f(t)=\mathrm{ch}(3-i)t\eta(t)$; е) $f(t)=\mathrm{tg}\,t\eta(t)$;

ж) $f(t)=t^t\eta(t)$; з) $f(t)=e^{-t}\cos t\eta(t)$;

и) $f(t)=e^{t^2}\eta(t)$; к) $f(t)=e^{-t^2}\eta(t)$;

Анықтама бойынша келесі фунциялардың L-кескінін табу керек:

2. $f(t)=t$.

3. $f(t)=te^t$.

4. $f(t)=\sin 3t$.

5. $f(t)=t^\alpha\ (\alpha>-1)$.

Фунциялардың L-кескінін табу керек:

6. $f(t)=(1+t)$. 7. $f(t)=\sin t-\cos t$. 8. $f(t)=t+\dfrac{1}{2}e^{-t}$.

Ұқсастық теоремасын пайдаланып, келесі фунциялардың L-кескінін табу керек:

9. $f(t)=e^{\alpha t}$.

10. $f(t)=\sin 4t$.

11. $f(t)=\cos\omega t$.

12. $f(t)=\mathrm{sh}\,3t$.

Сызықтық және ұқсастық теоремаларды пайдаланып, келесі фунциялардың L-кескінін табу керек:

14. $f(t)=\sin^2 t$.

15. $f(t)=\sin mt\cos nt$.

16. $f(t)=\cos^3 t$.

17. $f(t)=\sin mt\sin nt$.

18. $f(t)=\sin^4 t$.

19. $f(t)=\cos mt\cos nt$.

Түпнұсқаны дифференциалдау туралы теореманы пайдаланып, келесі фунциялардың L-кескінін табу керек:

20. $f(t)=\cos^2 t$.

21. $f(t)=\sin^3 t$.

22. $f(t)=t\sin\omega t$.

23. $f(t)=\cos^4 t$.

24. $f(t)=t\cos\omega t$.

25. $f(t)=te^t$.

Фунциялардың L-кескінін табу керек:

26. $f(t)=t^2\cos t$.

27. $f(t)=t\left(e^t+\operatorname{ch} t\right)$.

28. $f(t)=(t+1)\sin 2t$.

29. $f(t)=t\operatorname{sh} 3t$.

30. $f(t)=\int_0^t \sin\tau d\tau$.

31. $f(t)=\int_0^t (\tau+1)\cos\omega\tau d\tau$.

32. $f(t)=\int_0^t \tau\operatorname{sh} 2\tau d\tau$.

33. $f(t)=\int_0^t \cos^2\omega\tau d\tau$.

34. $f(t)=\int_0^t \operatorname{ch}\omega\tau d\tau$.

35. $f(t)=\int_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$.

36. $\dfrac{e^t-1}{t}$. 37. $\dfrac{1-e^{-t}}{t}$. 38. $\dfrac{\sin^2 t}{t}$. 39. $\dfrac{1-\cos t}{t}$

40. $\dfrac{\cos t-\cos 2t}{t}$. 41. $\dfrac{e^t-1-t}{t}$. 42. $\dfrac{e^t-e^{-t}}{t}$.

Интегралдарды есептеу керек:

43. $\int\limits_0^\infty \dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt \ \ (a>0,\ b>0)$.

44. $\int\limits_0^\infty \dfrac{e^{-\alpha t}\sin at}{t}dt \ \ (\alpha>0,\ a>0)$.

45. $\int\limits_0^\infty \dfrac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{t}\sin mtdt \ \ (\alpha>0,\ \beta>0,\ m>0)$.

46. $\int\limits_0^\infty \dfrac{Ae^{-\alpha t}+Be^{-\beta t}+Ce^{-\gamma t}+De^{-\delta t}}{t}dt,$

$(A+B+C+D=0,\ \alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0,\ \delta>0)$.

47. $\int\limits_0^\infty \dfrac{\cos at-\cos bt}{t}dt, \ (a>0,\ b>0)$.

48. $\int\limits_0^\infty \dfrac{\sin at\sin bt}{t}dt, \ (a>0,\ b>0)$.

Фунциялардың L-кескінін табу керек:

49. $e^{2t}\sin t$. 50. $e^t\cos nt$. 51. $e^{-t}t^3$. 52. $e^t\,\mathrm{sh}\,t$.

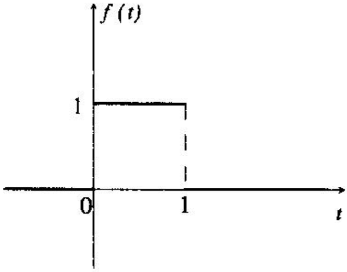
53. $te^t\cos t$. 54. $e^{3t}\sin^2 t$. 55. $e^{-\alpha t}\cos^2\beta t$.

56. $\sin(t-b)\eta(t-b)$.

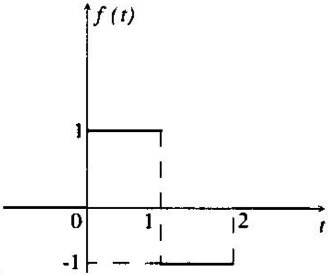
57. $\cos^2(t-b)\eta(t-b)$.

58. $e^{t-2}\eta(t-2)$.

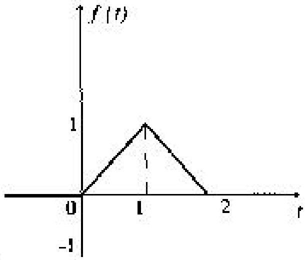
Сызбасы бойынша берілген функциялардың *L*-кескінін табу керек:



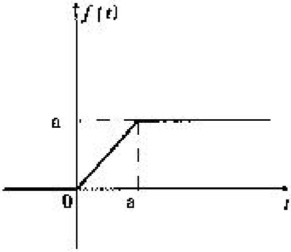
59.



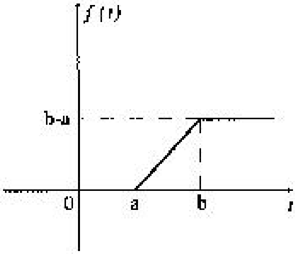
60 .



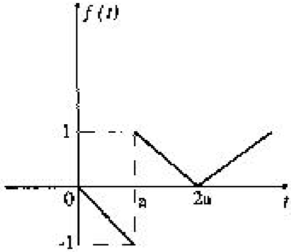
61.



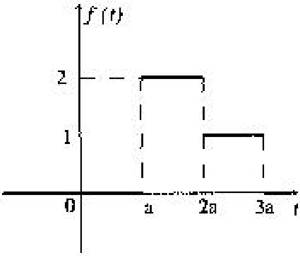
62.



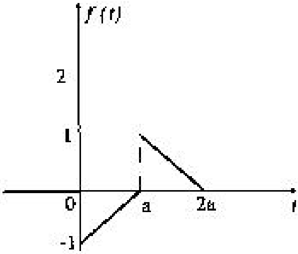
63.



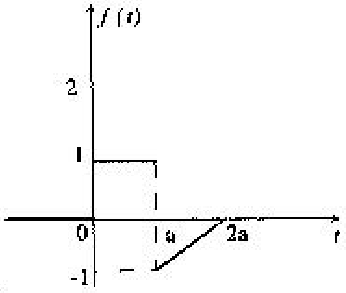
64.

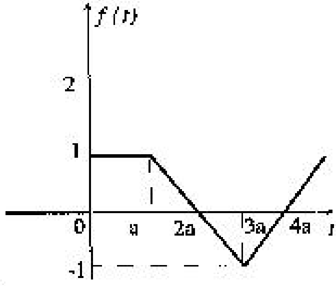


65.



66.

67. 

68. 

Фунциялардың L-кескінін табу керек:

69. $\int_0^t e^{t-\tau}\sin\tau d\tau.$

70. $\int_0^t \cos(t-\tau)e^{2\tau}d\tau.$

71. $\int_0^t (t-\tau)^2 \operatorname{ch}\tau d\tau.$

72. $\int_0^t (t-\tau)^n f(\tau)d\tau.$

73. $\int_0^t e^{2(\tau-t)}\tau^2 d\tau.$

Берілген L-кескіннің түпнұсқаларын тауып,
олардың сызбасын салу керек:

74. $F(p)=\dfrac{2e^{-p}}{p^3}.$

75. $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{p^2}.$

76. $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{p-1}.$

77. $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{p+3}.$

Берілген L-кескіннің түпнұсқаларын табу керек:

78. $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+5}$.

79. $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+3}$.

80. $F(p)=\dfrac{p}{(p+1)^2}$.

81. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)^2}$.

82. $F(p)=\dfrac{1}{p+2p^2+p^3}$.

83. $F(p)=\dfrac{1}{7-p+p^2}$.

84. $F(p)=\dfrac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}$.

85. $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$.

86. $F(p)=\dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$.

87. $F(p)=\dfrac{n!}{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n)}$.

88. $F(p)=\dfrac{1}{p^4+2p^3+3p^2+2p+1}$.

89. $F(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$.

90. $F(p)=\dfrac{p}{p^3+1}$.

91. $F(p)=\dfrac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}$.

92. $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$.

93. $F(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^3-2p^2+2p-1}$.

94. $F(p)=\dfrac{3p^2}{(p^3-1)^3}$.

95. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2-2p+5}+\dfrac{pe^{-2p}}{p^2+9}$.

96. $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{(p+1)^2}$.

97. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p(p-1)}$.

98. $F(p)=\dfrac{1}{p^2+1}\left(e^{-2p}+2e^{-3p}+3e^{-4p}\right)$.

99. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2-1}+\dfrac{pe^{-2p}}{p^2-4}$.

100. $F(p)=\dfrac{e^{-\frac{p}{2}}}{p(p+1)(p+4)}$.

101. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2}+\dfrac{2e^{-2p}}{p^3}+\dfrac{6e^{-3p}}{p^4}$.

102. $F(p)=\dfrac{e^{-\frac{p}{3}}}{p(p^2+1)}$.

Алғашқы шарттарымен берілген дифференциалдық теңдеулерді шешу керек:

112. $x' + x = e^{-t}, \quad x(0) = 1.$

113. $x' - x = 1, \quad x(0) = -1.$

114. $x' + 2x = \sin t, \quad x(0) = 0.$

115. $x'' = 1, \quad x(0) = 0, \ x'(0) = 1.$

116. $x'' + x' = 1, \quad x(0) = 0, \ x(0) = 1.$

117. $x'' + x = 0, \quad x(0) = 1, \ x'(0) = 0.$

118. $x'' + 3x' = e^{t}, \quad x(0) = 0, \ x'(0) = -1.$

119. $x'' - 2x' = e^{2t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

120. $x'' + 2x' = t\sin t, \quad x(0) = 0, \ x'(0) = 0.$

121. $x'' + 2x' + x = \sin t, \quad x(0) = 0, \ x'(0) = -1.$

122. $x''' - x'' = \sin t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

123. $x' + x = e^{-t}, \quad x(0) = 1.$

124. $x''' + x' = t, \quad x(0) = 0, \ x'(0) = -1, \ x''(0) = 0.$

125. $x'' - 2x' + x = e^{t}, \quad x(0) = 0, \ x'(0) = 1.$

126. $x''' + 2x'' + 5x' = 0, \quad x(0) = -1, \ x'(0) = 2, \ x''(0) = 0.$

127. $x'' - 2x' + 2x = 1, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

128. $x'' + x' = \cos t, \quad x(0) = 2, \ x'(0) = 0.$

129. $x'' + 2x' + x = t^2, \quad x(0) = 1, \ x'(0) = 0.$

130. $x''' + x'' = \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 1, \ x''(0) = 0.$

131. $x'' + x = \cos t, \quad x(0) = -1, \ x'(0) = 1.$

132. $x''' + x'' = t, \quad x(0) = -3,\ x'(0) = 1,\ x''(0) = 0.$

133. $x'' + 2x' + 5x = 3, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 0.$

134. $x^{IV} + x'' = \cos t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = -1,\ x''(0) = x'''(0) = 0.$

135. $x'' + 2x' + 2x = 1, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

136. $x'' + x = 1, \quad x(0) = -1,\ x'(0) = 0.$

137. $x'' + 4x = t, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 0.$

138. $x'' - 2x' + 5x = 1 - t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

139. $x''' + x = 0, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = -1,\ x''(0) = 2.$

140. $x''' + x'' = \cos t, \quad x(0) = -2,\ x'(0) = x''(0) = 0.$

141. $x''' + x' = e^t, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 2,\ x''(0) = 0.$

142. $x^{IV} - x'' = 1, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0.$

143. $x'' + x' = \cos t, \quad x(0) = 2,\ x'(0) = 0.$

144. $x'' - x = te^t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

145. $x''' + x'' = \cos t, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = -2,\ x''(0) = 0.$

146. $x'' + 2x' + x = t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

147. $x'' - x' + x = e^{-t}, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 1.$

148. $x'' - x = \sin t, \quad x(0) = -1,\ x'(0) = 0.$

149. $x''' + x = e^t, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 2,\ x''(0) = 0.$

150. $x'' + x = 2\sin t, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = -1.$

151. $x'' - 2x' + x = t - \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

152. $x'' + 2x' + x = 2\cos^2 t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

153. $x'' + 4x = 2\cos t \cos 3t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

154. $x'' + x = te^t + 4\sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

155. $x'' - x' = te^t, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 0.$

156. $x'' + 4x = f(t),\ x(0) = x'(0) = 0,\ f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1, \\ 2 - t, & 1 < t < 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$

157. $x'' + x' = f(t),\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0,\ f(t) = \begin{cases} b, & 0 < t < a, \\ 2b, & a < t < \infty. \end{cases}$

158. $x'' + 9x = f(t),\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1,\ f(t) = \begin{cases} t - 1, & 1 < t < 2; \\ 3 - t, & 2 < t < 3; \\ 0, & t > 3. \end{cases}$

159. $x'' - 2x' + x = f(t),\ x(0) = x'(0) = 0,\ f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < a, \\ 0, & a < t < 2a, \\ 1, & 2a < t < 3a, \\ 0, & t > 3a. \end{cases}$

160. $x'' + x = 0;\ x(\pi) = 1,\ x'(\pi) = 0.$

161. $x'' + x' = 2t;\ x(1) = 1,\ x'(1) = -1.$

162. $x'' - x' = -2t;\ x(2) = 8,\ x'(2) = 6.$

163. $x'' + x = -2\sin t;\ x\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0,\ x'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1.$

164. $x'' + 2x' + x = 2e^{1-t};\ x(1) = 1,\ x'(1) = -1.$

Дюамель формуласын пайдаланып, алғашқы шарттарымен берілген дифференциалдық теңдеулерді шешу керек:

165. $x'' - x' = \dfrac{e^{2t}}{\left(1 + e^t\right)^2}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

166. $x'' + 2x' + x = \dfrac{e^{-t}}{1 + t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

167. $x'' - x' = \dfrac{e^{2t}}{2+e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

168. $x'' - x' = \dfrac{1}{1+e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

169. $x'' + x' = \dfrac{1}{2+\cos t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

170. $x'' + x' = \dfrac{1}{4+\operatorname{tg}^2 t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

171. $x'' + x = \dfrac{1}{1+\cos^2 t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

172. $x'' + x = \dfrac{1}{1+\sin^2 t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

173. $x'' - x = \operatorname{th} t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

174. $x''' + x' = \dfrac{1}{2+\sin t}, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

Дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешу керек:

175. $\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' + x = 0, \ x(0) = 1, \quad y(0) = -1. \end{cases}$

176. $\begin{cases} x + x' = y + e^t, \\ y + y' = x + e^t, \ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$

177. $\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t', \\ x'' + 2y' + x = 0, \ x(0) = x'(0) = y(0) = 1. \end{cases}$

178. $\begin{cases} x'' - 3x' + 2x + y' - y = 0, \\ -x' + x + y'' - 5y' + 4y = 0, \ x(0) = x'(0) = y'(0) = 0, \ y(0) = 1. \end{cases}$

179. $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = 2x + 2y, \ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$

180. $\begin{cases} x' - y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \;\; x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

181. $\begin{cases} x' = -x + y + z + e^t, \\ y' = x - y + z + e^{3t}, \;\; x(0) = y(0) = z(0) = 0. \\ z' = x + y + z + 4, \end{cases}$

182. $\begin{cases} x' = -y - z, \\ y' = -x - z, \;\; x(0) = -1, \;\; y(0) = 0, \; z(0) = 1. \\ z' = -x - y, \end{cases}$

183. $\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = 3x + z, \;\; x(0) = 0, \;\; y(0) = 1, \; z(0) = 1. \\ z' = 3x + y, \end{cases}$

184. $\begin{cases} x' = 2x - y + z, \\ y' = x + z, \qquad x(0) = 1, \;\; y(0) = 1, \;\; z(0) = 0. \\ z' = -3x + y - 2z, \end{cases}$

Лаплас түрлендіруін пайдаланып интегралдарды есептеу керек:

185. $\int\limits_0^\infty e^{-2x} \cos(6x)dx.$ 186. $\int\limits_0^\infty y^5 e^{-2y} dy$

187. $\int\limits_0^\infty e^{-2x} \sin(3x)\cos(2x)dx.$ 188. $\int\limits_0^\infty \frac{x - \sin x}{x^3} dx.$

189. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{15}}{(x+2)^{19}} dx.$ 190. $J(t) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin(tx)}{x^2 + a^2} dx.$

191. $J(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^\infty \left(\operatorname{ch}(at) - 1\right) e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau.$ 192. $J(t) = \int\limits_0^t (t - \tau)^5 \tau^7 d\tau.$

193. $J(t) = \int_0^t \tau \cos(t-\tau) e^{-\tau} d\tau.$ 194. $\int_0^\infty \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} dx.$

Интегралдық теңдеулерді шешу керек:

195. $\varphi(x) = \sin x + \int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt.$

196. $\varphi(x) = x + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 \varphi(t)\,dt.$

197. $\varphi(x) = x + \int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)\,dt.$

198. $\varphi(x) = \cos x + \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt.$

199. $\varphi(x) = 1 + x + \int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt.$

200. $\varphi(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x (x-t)\,e^{-(t-x)}\varphi(t)\,dt.$

201. $\varphi(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 \varphi(t)\,dt.$

202. $\varphi(x) = x + 2\int_0^x \left[(x-t) - \sin(x-t)\right]\varphi(t)\,dt.$

203. $\varphi(x) = \sin x + 2\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt.$

204. $\varphi(x) = 1 - 2x - 4x^2 + \int_0^x \left[3 + 6(x-t) - 4(x-t)^2\right]\varphi(t)\,dt.$

205. $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x \sin 2(x-t)\varphi(t)\,dt.$

206. $\varphi(x) = e^x - 2\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt.$

207. $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{6}\int_0^x (x-t)^3 \varphi(t)\,dt.$

208. $\varphi(x) = x - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\varphi(t)\,dt.$

209. $\varphi(x) = \operatorname{sh} x + \int_0^x \operatorname{ch}(x-t)\varphi(t)\,dt.$

210. $\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt = x.$

211. $\int_0^x J_0(x-t)\varphi(t)\,dt = \sin x.$

212. $\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt = \sin x.$

213. $\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt = \sin x.$

214. $\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt = x + x^2.$

215. $\int_0^x e^{2(x-t)}\varphi(t)\,dt = x^2 e^x.$

216. $\int_0^x \operatorname{ch}(x-t)\varphi(t)\,dt = \operatorname{sh} x.$

217. $\int_0^x \operatorname{ch}(x-t)\varphi(t)\,dt = x.$

Амалдық қисап

Жауаптары

1. а) ия; б) ия; в) жоқ; г) ия; д) ия; е) жоқ; ж) жоқ; з) ия;
2. и) жоқ); к) ия; л) ия; м) ия.

2. $\dfrac{1}{p^2}$. 3. $\dfrac{1}{(p-1)^2}$. 4. $\dfrac{3}{p^2+9}$. 5. $\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$. 6. $\dfrac{p+1}{p^2}$.

7. $\dfrac{1-p}{p^2+1}$. 8. $\dfrac{p^2+2p+2}{2p^2(p+1)}$. 9. $\dfrac{1}{p-a}$. 10. $\dfrac{4}{p^2+16}$. 11. $\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$

12. $\dfrac{3}{p^2-9}$. 13. $aF(pa)$. 14. $\dfrac{2}{p(p^2+4)}$.

15. $\dfrac{m(p^2+m^2-n^2)}{(p^2+m^2+n^2)^2-4m^2n^2}$. 16. $\dfrac{p^3+7p}{(p^2+9)(p^2+1)}$.

17. $\dfrac{2mnp}{(p^2+m^2-n^2)^2-4m^2n^2}$. 18. $\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{3}{p}+\dfrac{p}{p^2+16}-\dfrac{4p}{p^2+1}\right)$.

19. $\dfrac{p(p^2+m^2+n^2)}{(p^2+m^2+n^2)^2-4m^2n^2}$. 20. $\dfrac{p^2+2}{p(p^2+4)}$.

21. $\dfrac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}$. 22. $\dfrac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$.

23. $\dfrac{p^4+16p^2+24}{p(p^2+4)(p^2+16)}$. 24. $\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$. 25. $\dfrac{1}{(p-1)^2}$.

26. $\dfrac{2p^3-6p}{(p^2+1)^3}$. 27. $\dfrac{2(p^2+p+1)}{(p^2-1)^2}$. 28. $\dfrac{2p^2+4p+8}{(p^2+4)^2}$.

29. $\dfrac{6p}{(p^2-1)^2}$. 30. $\dfrac{1}{p(p^2+1)}$. 31. $\dfrac{p^3+p^2+p\omega^2-\omega^2}{p(p^2+\omega^2)^2}$.

32. $\dfrac{4}{\left(p^2-4\right)^2}$. 33. $\dfrac{p^2+2\omega^2}{p^2\left(p^2+4\omega^2\right)}$. 34. $\dfrac{1}{p^2-\omega^2}$. 35. $\dfrac{2}{p\left(p+1\right)^3}$.

36. $\ln\dfrac{p}{p-1}$. 37. $\ln\dfrac{p+1}{p}$. 38. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{p^2+4}}{p}$. 39. $\ln\dfrac{\sqrt{p^2+1}}{p}$.

40. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p^2+4}{p^2+1}$. 41. $\ln\dfrac{p}{p-1}-\dfrac{1}{p}$. 42. $\ln\dfrac{p+1}{p-1}$. 43. $\ln\dfrac{b}{a}$.

44. $\operatorname{arctg}\dfrac{a}{\alpha}$. 45. $\operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{m}-\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha}{m}$. 46. $A\ln\dfrac{\delta}{\alpha}+B\ln\dfrac{\delta}{\beta}+C\ln\dfrac{\delta}{\gamma}$.

47. $\ln\dfrac{b}{a}$. 48. $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{a+b}{a-b}\right|$. 49. $\dfrac{1}{\left(p-2\right)^2+1}$. 50. $\dfrac{p-m}{\left(p-m\right)^2+n^2}$.

51. $\dfrac{3!}{\left(p+1\right)^4}$. 52. $\dfrac{1}{\left(p-1\right)^2-1}$. 53. $\dfrac{p^2-2p}{\left(p^2-2p+2\right)^2}$.

54. $\dfrac{1}{2\left(p-3\right)}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p-3}{\left(p-3\right)^2+4}$.

55. $\dfrac{1}{2\left(p+\alpha\right)}+\dfrac{p+\alpha}{2\left[\left(p+\alpha\right)^2+4\beta^2\right]}$. 56. $\dfrac{e^{-bp}}{p^2+1}$.

57. $\dfrac{e^{-bp}}{2p}+\dfrac{pe^{-bp}}{2(p^2+4)}$. 58. $\dfrac{e^{-2p}}{p-1}$. 59. $\dfrac{1-e^{-p}}{p}$.

60. $\dfrac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p}$. 61. $\dfrac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p^2}$. 62. $\dfrac{1-e^{-ap}}{p^2}$.

63. $\dfrac{e^{-ap}-e^{-bp}}{p^2}$. 64. $F(p)=\dfrac{1}{ap^2}\left(2e^{-2ap}-1\right)+\dfrac{2}{p}e^{-ap}$.

65. $F(p)=\dfrac{e^{-ap}}{p}(2-e^{-ap}-e^{-2ap})$.

66. $F(p) = -\frac{1}{p} + \frac{1}{ap^2} + \frac{ap-2}{ap^2} e^{-ap} + \frac{1}{ap^2} e^{-2ap}$.

67. $F(p) = \frac{1}{p} + \frac{1-2ap}{ap^2} e^{-ap} - \frac{1}{ap^2} e^{-2ap}$.

68. $F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{ap^2} e^{-ap} + \frac{2}{ap^2} e^{-3ap}$. 69. $\frac{1}{(p-1)(p^2+1)}$

70. $\frac{p}{(p-2)(p^2+1)}$. 71. $\frac{2}{p^2(p^2-1)}$.

72. $\frac{n!F(p)}{p^{n+1}}$. 73. $\frac{2}{p^3(p+2)}$. 74. $(t-1)^2 \eta(t-1)$.

75. $(t-2)\eta(t-2)$. 76. $e^{t-2}\eta(t-2)$. 77. $e^{-3(t-3)}\eta(t-3)$.

78. $e^{-2t} \sin t$. 79. $\frac{1}{2}\left(e^{-t} - e^{-3}\right)$. 80. $(1-t)e^{-t}$.

81. $\frac{1}{2} t \sin t$. 82. $1 - e^{-t} - te^{-t}$. 83. $\frac{2\sqrt{3}}{9} e^{\frac{t}{2}} \sin \frac{3\sqrt{3}}{2} t$.

84. $\frac{t^2}{2} + 2e^{-t} \sin t$. 85. $t - \sin t$.

86. $\frac{1}{6} e^{2t} - \frac{1}{15} e^{-t} - \frac{1}{10} \cos 2t - \frac{1}{5} \sin 2t$.

87. $1 - ne^{-t} + \frac{1}{2} n(n-1) e^{-2t} - \ldots + (-1)^n e^{-nt}$.

88. $\frac{2}{3} e^{-t/2} \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t - t \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \right]$.

89. $e^{-t}\left(1-t^2\right)$. 90. $\frac{1}{3} e^{t/2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) - \frac{1}{3} e^{-t}$

91. $\frac{3}{5} + \frac{e^{-2t}}{5}(4\sin t - 3\cos t)$. 92. $\frac{1}{9}\left(e^{-2t} - e^t + 3te^t\right)$.

93. $2e^{t}+e^{t/2}\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

94. $\frac{1}{3}te^{t}-\frac{1}{3}te^{-t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

95. $\frac{1}{2}e^{t-1}\sin 2(t-1)\eta(t-1)+\cos 3(t-2)\eta(t-2)$.

96. $(t-3)e^{-(t-3)}\eta(t-3)$. 97. $e^{t-1}\eta(t-1)-\eta(t-1)$.

98. $\sin(t-2)\eta(t-2)+2\sin(t-3)\eta(t-3)+3\sin(t-4)\eta(t-4)$.

99. $\operatorname{sh}(t-1)\eta(t-1)+\operatorname{ch}2(t-2)\eta(t-2)$.

100. $$\frac{1}{3}\eta\left(t-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{5}e^{-\left(t-\frac{1}{2}\right)}\eta\left(t-\frac{1}{2}\right)-$$
$$-\frac{1}{20}\cos 2\left(t-\frac{1}{2}\right)\eta\left(t-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{10}\sin 2\left(t-\frac{1}{2}\right)\eta\left(t-\frac{1}{2}\right).$$

101. $(t-1)\eta(t-1)+(t-2)^{2}\eta(t-2)+(t-3)^{3}\eta(t-3)$.

102. $\eta\left(t-\frac{1}{3}\right)-\cos\left(t-\frac{1}{3}\right)\eta\left(t-\frac{1}{3}\right)$.

103. $1-\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$. 104. $\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}}\doteqdot 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-\frac{a^{2}}{4t}}-a\operatorname{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$.

105. $\left(t+\frac{\alpha^{2}}{2}\right)\operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)-\alpha\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-\frac{\alpha^{2}}{4t}}$.

106. $ae^{hx+a^{2}h^{2}t}\operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}+ah\sqrt{t}\right)$.

107. $\frac{1}{a}\operatorname{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)-\frac{e^{a(at+\alpha)}}{a}\operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}\right)$.

108. $\Phi(p)F\left(\sqrt{p}\right)=\dfrac{1}{p-1}\risingdotseq e^{t}$. 109. $I(t)=e^{-t}$.

110. $I(t)=2te^{t}$. 111. $I(t)=2te^{-t}$. 112. $x(t)=(t+1)e^{-t}$.

113. $x(t)=-1$. 114. $x(t)=\dfrac{e^{-2t}-\cos t+2\sin t}{5}$.

115. $x(t)=t+\dfrac{1}{2}t^{2}$. 116. $x(t)=t$. 117. $x(t)=\cos t$.

118. $x(t)=\dfrac{1}{4}e^{t}+\dfrac{5}{12}e^{-3t}-\dfrac{2}{3}$. 119. $x(t)=\dfrac{1}{4}\left(1-e^{2t}+2te^{2t}\right)$.

120. $x(t)=\dfrac{2}{25}e^{-2t}-\dfrac{2}{25}\cos t+\dfrac{14}{25}\sin t-\dfrac{1}{5}t\sin t-\dfrac{2}{5}t\cos t$.

121. $x(t)=\dfrac{1}{4}\left(e^{-t}-te^{-t}-\cos t\right)$.

122. $x(t)=\dfrac{1}{2}e^{t}-t-1+\dfrac{1}{2}(\cos t+\sin t)$.

123. $x(t)=\dfrac{1}{2}t^{2}-1+\cos t-\sin t$. 124. $x(t)=t-\sin t$.

125. $x(t)=\dfrac{1}{2}t^{2}e^{t}+te^{t}$. 126. $x(t)=\dfrac{3}{5}e^{-t}\sin 2t-\dfrac{4}{5}e^{-t}\cos 2t-\dfrac{1}{5}$.

127. $x(t)=\dfrac{1}{2}\left(1-e^{t}\cos t+e^{t}\sin t\right)$.

128. $x(t)=2+\dfrac{1}{2}\left(e^{-t}-\cos t+\sin t\right)$.

129. $x(t)=t^{2}-4t+6-5e^{-t}-te^{-t}$.

130. $x(t)=2t+\dfrac{1}{2}\left(e^{t}+\cos t-\sin t\right)$.

131. $x(t)=\dfrac{1}{2}t\sin t-\cos t+\sin t$.

132. $x(t)=\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}t^2+2t-4+e^t$.

133. $x(t)=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}e^{-t}\cos 2t+\frac{1}{5}e^{-t}\sin 2t$.

134. $x(t)=\frac{1}{2}(\cos t+\operatorname{ch} t)-t-1$.

135. $x(t)=\frac{1}{2}\left(1-e^t\cos t-e^{-t}\sin t\right)$.

136. $x(t)=1-\cos t$. 137. $x(t)=\frac{1}{4}t+\cos 2t-\frac{1}{8}\sin 2t$.

138. $x(t)=\frac{3}{25}-\frac{t}{5}-\frac{3}{25}e^t\cos 2t+\frac{4}{25}e^t\sin 2t$.

139. $x(t)=e^{-t}-e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$.

140. $x(t)=-1-\frac{1}{2}\left(\sin t+\cos t+e^{-t}\right)$.

141. $x(t)=\frac{1}{2}e^t+\frac{3}{2}\sin t+\frac{1}{2}\cos t-1$.

142. $x(t)=\operatorname{ch} t-\frac{1}{2}t^2-1$. 143. $x(t)=2+\frac{1}{2}\left(e^t+\sin t-\cos t\right)$.

144. $x(t)=e^t\left(1-t+\frac{1}{2}t^2\right)-1$. 145. $x(t)=-\frac{3}{2}\sin t-\frac{1}{2}t\cos t$.

146. $x(t)=2e^{-t}+te^{-t}+t-2$.

147. $x(t)=\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-3\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

148. $x(t)=-\frac{1}{4}e^t-\frac{3}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\sin t$.

149. $x(t)=\frac{1}{2}e^{t}-\frac{5}{6}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$

150. $x(t)=\cos t-t\cos t.$ 151. $x(t)=2+t-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}te^{t}-\frac{3}{2}e^{t}.$

152. $x(t)=1-\frac{22}{25}e^{-t}-\frac{6}{5}te^{-t}-\frac{3}{25}\cos 2t+\frac{4}{25}\sin 2t.$

153. $x(t)=\frac{t}{4}\sin 2t+\frac{1}{12}(\cos 2t-\cos 4t).$

154. $x(t)=\frac{1}{2}(t-1)e^{t}+\frac{1}{2}\cos t+2\sin t-2t\cos t.$

155. $x(t)=e^{t}\left(\frac{t^2}{2}-t+1\right).$

156.
$$x(t)=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\eta(t)-\left[(t-1)-\frac{1}{2}\sin 2(t-1)\right]\times$$
$$\times\eta(t-1)+\frac{1}{2}\left[(t-2)-\frac{1}{2}\sin 2(t-2)\right]\eta(t-2).$$

157. $x(t)=\left[b+(1-b)\cos t\right]\eta(t)+\left[b-b\cos(t-a)\right]\eta(t-a).$

158.
$$x(t)=\frac{1}{3}\sin 3t\eta(t)+\frac{1}{9}\left[(t-1)-\frac{1}{3}\sin 3(t-1)\right]\eta(t-1)-$$
$$-\frac{2}{9}\left[(t-2)-\frac{1}{3}\sin 3(t-2)\right]\eta(t-2)+$$
$$+\frac{1}{9}\left[(t-3)-\frac{1}{3}\sin 3(t-3)\right]\eta(t-3).$$

159. $x(t)=\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\left[1-e^{t-ka}+e^{t-ka}(t-ka)\right]\eta(t-ka).$

160. $x(t)=-\cos t.$ 161. $x(t)=(t-1)^2+e^{1-t}.$ 162. $x(t)=t^2+2t.$

163. $x(t)=\left(t-1-\dfrac{\pi}{2}\right)\cos t.$ 164. $x(t)=\left(t^2-2t+2\right)e^{1-t}.$

165. $x(t)=\dfrac{1}{2}(e^t-1)-\ln\dfrac{1+e^t}{2}.$

166. $x(t)=e^{-t}\left[(t+1)\ln(t+1)-t\right].$

167. $x(t)=(e^t+2)\ln\dfrac{e^t+2}{3}-e^t+1.$

168. $x(t)=e^t-1-(t+\ln 2)(e^t+1)+(e^t+1)\ln(e^t+1).$

169. $x(t)=\sin t\left(t-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{tg\dfrac{t}{2}}{\sqrt{3}}\right)+\cos t\ln(2+\cos t)-\ln 3\cos t.$

170. $$x(t)=\frac{1}{3}-\frac{9-\pi\sqrt{3}}{27}\cos t+\frac{\sqrt{3}}{36}\sin t\ln\left|\frac{\sqrt{3}\sin t-2}{\sqrt{3}\sin t+2}\right|-$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{9}\cos t\operatorname{arctg}(\sqrt{3}\cos t).$$

171. $x(t)=\cos t\ \operatorname{arctg}(\cos t)-\dfrac{\pi}{4}\cos t-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\sin t\cdot\ln\left|\dfrac{\sin t-\sqrt{2}}{\sin t+\sqrt{2}}\right|.$

172. $$x(t)=\sin t\operatorname{arctg}(\sin t)+$$
$$+\cos t\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\cos t}{\sqrt{2}-\cos t}\right|-\ln(3+2\sqrt{2})\right\}.$$

173. $x(t)=-\operatorname{sh} t+2\operatorname{ch} t\left(\operatorname{arctg} e^t-\dfrac{\pi}{4}\right).$

$$x(t) = \ln 2\cos t - \cos t\ln(2+\sin t) - t\sin t +$$

174. $$+\frac{2}{\sqrt{3}}(2\sin t+1)\left(\operatorname{arctg}\frac{2tg\frac{t}{2}+1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6}\right).$$

175. $x(t) = e^t$, $y(t) = -e^t$. 176. $x(t) = e^t$, $y(t) = e^t$.

177. $x(t) = 2(1-e^{-t}-te^{-t})$, $y(t) = 2-t-2e^{-t}-2te^{-t}$.

178. $x(t) = \frac{1}{4}(e^t - e^{3t} + 2te^{3t})$, $y(t) = \frac{1}{4}(5e^t - e^{3t} - 2te^{3t})$.

179. $x(t) = e^t(\cos t - 2\sin t)$, $y(t) = e^t(\cos t + 3\sin t)$.

180. $x(t) = e^t - \frac{11}{34}e^{4t} - \frac{3}{17}\cos t + \frac{5}{17}\sin t - \frac{1}{2,}$,

$$y(t) = -\frac{2}{3}e^t + \frac{22}{51}e^{4t} + \frac{4}{17}\cos t - \frac{1}{17}\sin t.$$

181. $x(t) = -\frac{1}{15}e^{-2t} + \frac{13}{12}e^{-t} - 2 + \frac{1}{6}e^t + \frac{2}{3}e^{2t} + \frac{3}{20}e^{3t}$,

$$y(t) = \frac{1}{15}e^{-2t} + \frac{13}{12}e^{-t} - 2 - \frac{1}{6}e^t + \frac{2}{3}e^{2t} + \frac{7}{20}e^{3t},$$

$$z(t) = -\frac{13}{12}e^{-t} - \frac{1}{2}e^t + \frac{4}{3}e^{2t} + \frac{1}{4}e^{3t}.$$

182. $x(t) = -e^t$, $y(t) = 0$, $z(t) = e^t$.

183. $x(t) = \frac{3e^{-2t}}{4(2+a)} + \frac{(11-4a)e^{2t}}{4(2-a)} + \frac{3e^{at}}{a^2-4}$,

$$y(t) = -\frac{e^{-2t}}{4(2+a)} + \frac{(11-4a)e^{2t}}{4(2-a)} + \frac{(a+1)e^{at}}{a^2-4}.$$

184. $x(t) = 2-e^{-t}$, $y(t) = 2-e^{-t}$, $z(t) = 2e^{-t}-2$.

185. $\frac{1}{20}$. 186. $\frac{45}{4}$. 187. $\frac{27}{145}$. 188. $\ln\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$. 189. $-\frac{15!}{18!}\frac{1}{4}$.

190. $\frac{1}{p^2-a^2}\ln\sqrt{\frac{a^2+x^2}{p^2+x^2}}$. 191. $\operatorname{sh}\frac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t}$. 192. $\frac{t^{13}}{10296}$.

193. $-\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{2}te^{-t}$. 194. $\ln\sqrt{\frac{x^2+a^2}{x^2+b^2}}$.

195. $\varphi(x)=\frac{1}{2}\operatorname{sh}x+\frac{1}{2}\sin x$.

196. $\varphi(x)=\frac{1}{3}\left(e^x-e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}+\sqrt{3}e^{-x/2}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$.

197. $\varphi(x)=x+\frac{1}{6}x^3$. 198. $\varphi(x)=\frac{2}{5}e^{2x}+\frac{3}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x$.

199. $\varphi(x)=2+x-e^{\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$.

200. $\varphi(x)=-\frac{1}{16}-\frac{1}{8}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{16}e^{\frac{x}{2}}-\frac{1}{12}x^3$.

201. $\varphi(x)=\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{1}{6}e^x+\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$.

202. $\varphi(x)=\frac{1}{3}\left(e^x-e^{-x}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sqrt{2}x\right)$. 203. $\varphi(x)=xe^x$.

204. $\varphi(x)=e^x$. 205. $\varphi(x)=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\cos\sqrt{3}x$.

206. $\varphi(x)=\operatorname{ch}x-xe^{-x}$. 207. $\varphi(x)=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}x+\cos x)$.

208. $\varphi(x)=x-\frac{1}{6}x^3$. 209. $\varphi(x)=\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{5}}{2}x$.

210. $\varphi(x)=1-x$. 211. $\varphi(x)=\sin x$. 212. $\varphi(x)\equiv 1$.

213. $\varphi(x)=e^{-x}$. 214. $\varphi(x)=1+2x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$.

215. $\varphi(x)=2xe^x-x^2e^x$. 216. $\varphi(x)\equiv 1$.

217. $\varphi(x)=1-\frac{x^2}{2}$.

218. $u(x,t)=u_0\left(1-\mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right)=\frac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x/(2a\sqrt{t})}^{\infty}e^{-u^2}du$.

219. $u(x,t)=u_0\mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)=\frac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{x/(2a\sqrt{t})}e^{-u^2}du$.

220. $u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int\limits_{x/a}^{\infty}\varphi(\tau-x/a)e^{-\tau^2/4t}d\tau$,

мұнда $\varphi(\tau-x/a)\eta(\tau-x/a)\doteqdot pF(p^2)e^{-p\frac{x}{a}}$, **ал** $F(p)$ **берілген** $f(t)$ **функциясының** ***L*-кескіні.**

221. $u(x,t)=2qa\sqrt{\frac{t}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right)-qx\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$.

222. $u(x,t)=u_0\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)-$
$-u_0\exp\left(\alpha^2a^2t+\alpha x\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}+\alpha a\sqrt{t}\right)$.

223.
$u(x,t)=\frac{u_0}{2}\left(\exp\left(-\sqrt{H}\frac{x}{a}\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}-\sqrt{Ht}\right)+\exp\left(\sqrt{H}\frac{x}{a}\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}+\sqrt{Ht}\right)\right)$.

224.
$u(x,t)=\frac{qa}{2}\left(\exp\left(-\sqrt{H}\frac{x}{a}\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}-\sqrt{Ht}\right)+\exp\left(\sqrt{H}\frac{x}{a}\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}+\sqrt{Ht}\right)\right)$.

Типтік есептерді шығару үлгілері

1-есеп. Түбірдің барлық мәндерін табу керек:

$$\sqrt[3]{-27i}\,.$$

Шешуі. $z=-27\,i$ комплекс санының модулі $|z|=27$, аргументінің бас мәні $\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$. Бұл мәндерді және $n=3$ санын $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}(\cos\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+2\pi k}{n})$, $k=0,1,\cdots,n-1$ формуласына қойсақ, $\sqrt[3]{-27i}=\sqrt[3]{27}(\cos\dfrac{-\pi/2+2\pi k}{3}+i\sin\dfrac{-\pi/2+2\pi k}{3})$, $k=0,1,2$ аламыз. Бұдан $k=0,1,2$ мәндеріне сәйкес, $k=0$ үшін $\omega_0=3(\cos(-\dfrac{\pi}{6})+i\sin(-\dfrac{\pi}{6}))=3(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-i\dfrac{1}{2})=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-i\dfrac{3}{2}$, $k=1$ үшін $\omega_1=3(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2})=3(0+i)=3i$, $k=2$ үшін $\omega_2=3(\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\sin\dfrac{7\pi}{6})=3(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-i\dfrac{1}{2})=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-i\dfrac{3}{2}$ аламыз.

Жауабы: $\sqrt[3]{-27i}=\{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-i\dfrac{3}{2};\ 3i;\ -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-i\dfrac{3}{2}\}$.

2-есеп. Алгебралық түрде жазу керек: $ch(3+\dfrac{\pi i}{4})$.

Шешуі. $chz=\dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2}$ және $e^{x+iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y)$ формулаларын пайдаланамыз:

$$ch(3+\frac{\pi}{4}i)=\frac{1}{2}(e^{3+\frac{\pi}{4}i}+e^{-3-\frac{\pi}{4}i})=\frac{1}{2}(e^{3}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\sin\frac{\pi}{4})+e^{-3}(\cos(-\frac{\pi}{4})+$$

$$+i\sin(-\frac{\pi}{4})) =$$

$$=\frac{1}{2}(e^{3}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})+e^{-3}(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}))=\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}(e^{3}+e^{-3})+i\frac{\sqrt{2}}{2}(e^{3}-e^{-3}))=$$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}ch3+i\frac{\sqrt{2}}{2}sh3.$ *Жауабы:* $ch(3+\frac{\pi i}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}ch3+i\frac{\sqrt{2}}{2}sh3\cdot$

2-есепті келесі тәсілмен де шығаруға болады:

$$ch(3+\frac{\pi i}{4}) = ch3\cdot ch\frac{\pi i}{4}+sh3\cdot sh\frac{\pi i}{4} = ch3\cdot\cos\frac{\pi}{4}+sh3\cdot(i\sin\frac{\pi}{4}) =$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}ch3+i\frac{\sqrt{2}}{2}sh3.$$

3-есеп. Алгебралық түрде жазу керек: $(-12+5i)^{-i}$.

Шешуі. $z^{b}=e^{b\ln z}$ $z^{b}=e^{e\ln z}$; $\ln z=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k)$, $k\in z$ және $e^{x+iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y)$. теңдіктерін пайдаланамыз. Мұнда $|-12+5i|=\sqrt{(-12)^{2}+5^{2}}=\sqrt{169}=13$ және $\arg(-12+5i)=\pi-arctg\frac{5}{12}$, болғандықтан,

$\ln(-12+5i)=\ln 13+i(\pi-arctg\frac{5}{12}+2\pi k)$, $k\in z.$ Олай болса,

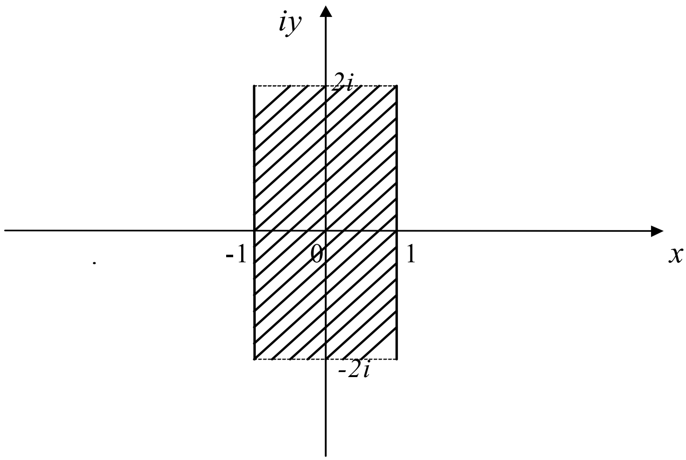
$$(-12+5i)^{-i}=e^{-i\ln(-12+5i)}=e^{-i\ln 13}-i^{2}(\pi-arctg\frac{5}{12}+2\pi k)=$$

$$=e^{\pi+2\pi k-arc\frac{5}{12}-i\ln 13}=e^{\pi+2\pi k-arctg\frac{5}{12}}(\cos\ln 13-i\sin\ln 13).$$

Жауабы: $(-12+5i)^{-i}=e^{\pi+2\pi k-arctg\frac{5}{12}}(\cos\ln 13-i\sin\ln 13)$, $k\in z$.

4-есеп. $|\mathrm{Re}\, z| \leq 1,\ |\mathrm{Im}\, z| < 2$ теңсіздіктерімен берілген аймақты салу керек.

Шешуі. $\mathrm{Re}\, z = x,\quad \mathrm{Im}\, z = y,$ екенін ескерсек, онда берілген теңсіздіктер келесі түрде жазылады: $-1 \leq x \leq 1,\quad -2 < y < 2.$ Бұл теңсіздіктер комплекс жазықтықта тік төртбұрышты анықтайды (төмендегі сурет).



Мұнда аймақта жататын шекара сызықтары тұтас, ал жатпайтын шекара сызықтары үзік сызықпен көрсетілген.

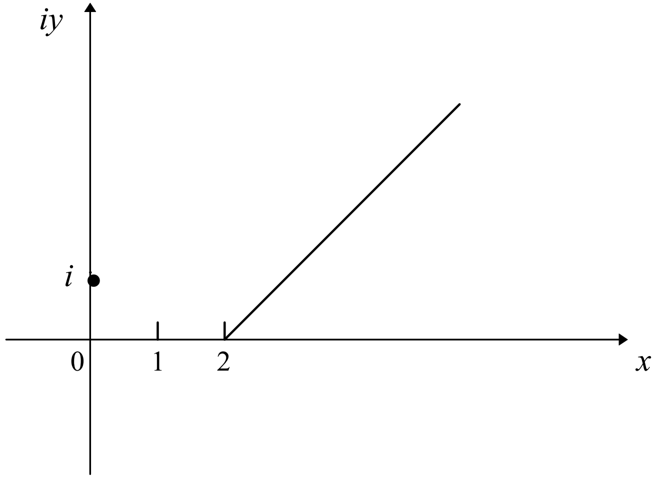
5-есеп. $z = t^2 - 2t + 3 + i(t^2 - 2t + 1),\quad t \in R,$ теңдеуімен берілген қисықты анықтау керек.

Шешуі. $z = x + iy$ саны мен $z = t^2 - 2t + 3 + i(t^2 - 2t + 1)$ комплекс сандарының теңдігінен

$\begin{cases} x = t^2 - 2t + 3, \\ y = t^2 - 2t + 1 \end{cases}$ жүйесін аламыз. Бұл жүйеден x пен y арасындағы байланысты табамыз:

$$\begin{cases} x = (x-1)^2 + 2, \\ y = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = (x-1)^2, \\ y = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2, \\ x \geq 2. \end{cases}$$

Мұндағы y теріс емес екенін ескерсек, алынған теңдеу oxy жазықтығында $y = x - 2, \quad y \in [0, +\infty)$, $x \in [2, +\infty)$ жарты түзуін беретінін көреміз (төмендегі сурет).



6-есеп. Берілген жорамал $v(x, y) = 2xy + x$ бөлігі және $f(0) = 0$ мәні бойынша $z_0 = 0$ нүктесінің маңайында аналитикалық $f(z)$ функциясын табу керек.

Шешуі. Алдымен $v(x, y) = 2xy + x$ функциясының $z_0 = 0$ нүктесінің маңайында аналитикалық функция екенін тексерейік: $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$, 0+0=0, яғни $v(x, y) = 2xy + x$ функциясы Лаплас теңдеуін комплекс жазықтықтың кез келген нүктесінде қанағаттандырады, демек, ол – осы көрсетілген жазықтықта гармоникалық функция.

Енді жорамал бөлігі $v(x, y) = 2xy + x$ болатын аналитикалық функцияны табайық. Оған арналған келесі екі тәсілді көрсетеміз.

1-тәсіл. *Коши-Риман шарттарын*: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}; \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ *пайдаланамыз*. Бірінші теңдік бойынша, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=2x=\dfrac{\partial u}{\partial x}$ аламыз. Бұдан $u=\int 2xdx+c(y)=x^2+c(y)$ аламыз. Мұндағы $c(y)$ белгісізін табу үшін u функциясын Коши-Риман шарттарының екінші теңдігіне қоямыз:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(x^2+c(y)\right)'_y=c'(y), \text{ ал } \frac{\partial v}{\partial x}=\left(2xy+x\right)'_x=2x+1$$

екенін ескеріп екінші шарттан $c'(y)=-2y-1$ аламыз. Бұдан $c(y)=\int(-2y-1)dy=-y^2-y+c$, демек,

$u=x^2+c(y)=x^2-y^2-y+c$. Сонымен,

$$f(z)=u+iv=x^2-y^2-y+c+i(2xy+x)=$$

$$=x^2+2xiy+(iy)^2+i(x+iy)+c=z^2+iz+c.$$

Мұндағы c тұрақтысының мәнін $f(0)=0$ шартынан табамыз: $0+c+i\cdot 0=0 \Rightarrow c=0$.

Жауабы: $f(z)=x^2-y^2-y+i(2xy+x)$.

2-тәсіл: z_0 нүктесінің маңайында аналитикалық $f(z)$ функциясын табу үшін келесі екі формуланың бірін пайдалануға болады:

$$f(z)=2u\left(\frac{z+\overline{z}_0}{2},\frac{z-\overline{z}_0}{2i}\right)-\overline{C}_0, \qquad \text{(a)}$$

$$f(z)=2iv\left(\frac{z+\overline{z}_0}{2},\frac{z-\overline{z}_0}{2i}\right)+\overline{C}_0. \qquad \text{(á)}$$

Мұндағы $\overline{C}_0$ – $f(z_0)$ санына түйіндес сан.

Біздің мысалымызда $v(x,y)=2xy+x$, $z_0=0$, $\overline{C}=0$. Жоғарыдағы формулалардың екіншісін пайдаланамыз:

$$f(z)=2i\left(2\cdot\frac{z+0}{2}\cdot\frac{z-0}{2i}+\frac{z+0}{2}\right)+0=z^2+iz\,.$$

Жауабы: $y(z)=z^2+iz$.

7-есеп. Комплекс айнымалды функцияның интегралын берілген қисық бойынша есептеу керек:

$$\int_L z|z|dz\,; \qquad L:\{|z|=1,\operatorname{Im}z\geq 0\}\,.$$

Шешуі. L қисығы – центрі 0 нүктесі, радиусі 1 болатын, жоғарыдағы жарты жазықтықта жататын жарты шеңбер:

L: $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \end{cases}$ $t\in[0,\pi]$. Олай болса,

$L:\ z(t)=x(t)+iy(t)=\cos t+i\sin t,\quad z'(t)=-\sin t+i\cos t.$

Енді $\int\limits_L \alpha(z)dz=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\alpha(z(t))z'(t)dt$ формуласын пайдаланып есептейміз:

$$\int_L z|z|dz=\int_0^{\pi}(\cos t+i\sin t)\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}\cdot(-\sin t+i\cos t)dt=$$

$$=\int_0^{\pi}(-\cos t\sin t+i\cos^2 t-i\sin^2 t-\cos t\sin t)dt=$$

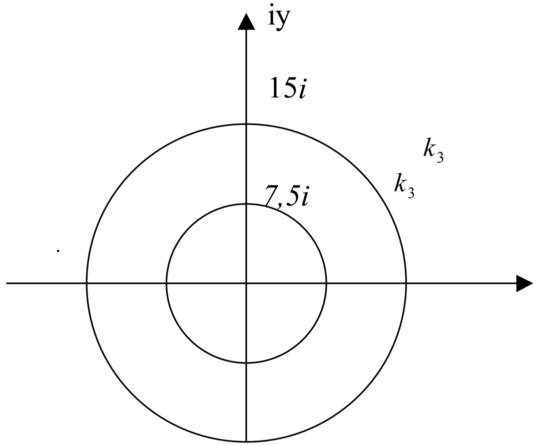
$$=\int_0^{\pi}(-\sin 2t+i\cos 2t)dt=\left(\frac{\cos 2t}{2}+i\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\left(\frac{\cos 2\pi}{2}+i\frac{\sin 2\pi}{2}\right)-$$

$-\left(\dfrac{\cos 0}{2}+i\dfrac{\sin 0}{2}\right)=0$ аламыз. Жауабы: $\int\limits_L z|z|dz=0$.

Ескерту. Берілген интегралды $z=e^{it}$ айнымал ауыстыруы арқылы да есептеуге болады.

8-есеп. $\omega=\dfrac{15z+450}{225z+15z^2-2z^3}$ функциясының Лоран қатарына z дәрежесі бойынша жіктелуін табу керек.

Шешуі: Берілген функцияның ерекше нүктелері $2z^3 - 15z^2 - 225z = 0$ немесе $z(2z^2 - 15z - 225) = 0$ теңдеуінің түбірлері. Бұдан $z_0 = 0$ және $2z^2 - 15z - 225z = 0$; $D = 15^2 + 2 \cdot 4 \cdot 225 = 2025;$ $z_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{2025}}{4} \Rightarrow z_1 = 15,$ $z_2 = -7.5$ аламыз. Сондықтан берілген функция центрі 0 нүктесіндегі келесі үш сақинада аналитикалық функция болады: $k_1 = \{z : 0 < |z| < 7.5\}$, $k_2 = \{z : 7.5 < |7| < 15\}$, $k_3 = \{z : 15 < |z|\}$ (төмендегі суретті қараңыз).



Берілген функцияны осы сақиналардың әрқайсысында Лоран қатарына жіктейік. Ол үшін функцияны қарапайым функциялар қосындысына жіктейік.

$$2z^3 - 15z^2 - 225z = 2z(z-15)(z+7,5) = z(z-15)(2z+15),$$

$$\omega = \frac{-15z - 450}{2z^3 - 15z^2 - 225z} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-15} + \frac{C}{(2z+15)} \Rightarrow 15z - 450 =$$

$$= A(z-15)(2z+15) + Bz(2z+15) + Cz(z-15).$$

Мұнда $z_0 = 0$ деп алсақ, $-450 = A(-15)(15) \Rightarrow A = 2,$

$z_1 = 15$ деп алсақ, $\quad -15\cdot 15 - 450 = B\cdot 15\cdot 45 \Rightarrow B = -1$,

$z_2 = -7.5$ деп алсақ, $+15\cdot 7.5 - 450 = C(-7.5)(-22.5) \Rightarrow C = -2$

аламыз. Сонымен, $\omega = \dfrac{2}{z} - \dfrac{1}{z-15} - \dfrac{z}{2z+15}$.

1. $z \in \mathrm{k}_1 = \{z:\ 0 < |z| < 7{,}5\}$ нүктелері үшін берілген функцияны жіктейік. Ол үшін геометриялық прогрессияның жіктелуін: $\dfrac{a_1}{1-q} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots \quad (|q| < 1)$. пайдаланамыз:

$$-\frac{1}{z-15} = \frac{1}{15-z} = \frac{1}{15(1-z/15)} = \left| |z| < 7{,}5 \ \Rightarrow \ \left|\frac{z}{15}\right| < 1 \right| =$$

$$= \frac{1}{15} + \frac{z}{15\cdot 15} + \frac{1}{15}\left(\frac{z}{15}\right)^2 + \ \ldots \ = \ \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{15^{n+1}}.$$

$$\frac{-2}{2z+15} = \frac{-1}{z+7.5} = \frac{-1}{7.5(1-(-\frac{z}{7.5}))} = \left| \left|\frac{z}{7{,}5}\right| < 1 \right| =$$

$$= \left\| \frac{-z}{7.5} \right| < 1 \right| = \frac{-1}{7.5} + \frac{-1}{7.5}\left(-\frac{z}{7.5}\right) + \frac{-1}{7.5}\left(-\frac{z}{7.5}\right)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{(7.5)^{n+1}}.$$

Сонымен, $\mathrm{k}_1 = \{z:\ 0 < |z| < 7{,}5\}$ сақинада

$$\omega = \frac{2}{z} - \frac{1}{z-15} - \frac{2}{2z+15} = \frac{2}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{15^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{(7.5)^{n+1}}$$ алдық.

2. $z \in K_2 = \{z: 7.5 < |z| < 15\}$. нүктелерін қарастырайық. Мұнда $\left|\dfrac{z}{15}\right| < 1$ болатындықтан, $\dfrac{-1}{z-15}$ бөлшегінің қатарға жіктелуі алдыңғы жағдайға келеді.

K_2 жиынында үшінші бөлшекті қатарға жіктейік:

$$\frac{-1}{2z+15}=\frac{-2}{2z(1+\frac{15}{2z})}=\frac{-1}{z\left(1-\left(-\frac{15}{2z}\right)\right)}=$$

$$=\left\|-\frac{15}{2z}\right|<1\right|=-\frac{1}{z}+\frac{-1}{z}\left(-\frac{15}{2z}\right)+\frac{-1}{z}\left(\frac{-15}{2z}\right)^2+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 15^{n-1}}{2^{n-1}z^n} \ .$$

Сондықтан $z\in K_2=\{z:7.5<|z|<15\}$ сақинасындағы нүктелер үшін

$$\omega=\frac{2}{z}-\frac{1}{z-15}-\frac{2}{2z+15}=\frac{2}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{15^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 15^{n-1}}{2^{n-1}z^n}.$$

3. $z\in K_3=\{t:|z|>15\}$ болсын. $|z|>15$ болғандықтан, $\left|\frac{15}{z}\right|<1$ шығады. Демек,

$$-\frac{1}{z-15}=\frac{-1}{z(1-15/z)}=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\cdot\frac{15}{z}-\frac{1}{z}\left(\frac{15}{z}\right)^2-\cdots=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{15^{n-1}}{z^n}$$

.

$\left|-\frac{15}{2z}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{15}{z}\right|<\left|\frac{15}{z}\right|<1$ болатындықтан, K_3 сақинасында, яғни $z\in K_3=\{t:|z|>15\}$ нүктелері үшін $\frac{-2}{2z+15}$ бөлшегінің қатарға жіктелуі алдыңғы жағдайға келеді:

$$\omega=\frac{2}{z}-\frac{1}{z-15}-\frac{2}{2z+15}=\frac{2}{z}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{15^{n-1}}{z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 15^{n-1}}{2^{n-1}z^n}.$$

Жауабы:

1. $k_1=\{z\ :\ 0<z<7,5\}$ жиынында,

$$\omega=\frac{2}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{15^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}}{(7.5)^{n+1}}\right)z^n;$$

2. $z \in K_2 = \{z : 7{,}5 < |z| < 15\}$ жиынында,

$$\omega = \frac{2}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{15^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n1} 15^{n-1}}{2^{n-1} z^n}.;$$

3. $z \in K_3 = \{t : |z| > 15\}$ жиынында,

$$\omega = \frac{2}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-15^{n-1} + \frac{(-1)^n 15^{n-1}}{2^{n-1}} \right) \frac{1}{z^n}.$$

9-*есеп.* $\omega = \dfrac{2z}{z^2 - 4}$ функциясының $z - z_0$ айырымының дәрежесі бойынша Лоран қатарына жіктеу керек. Мұнда $z_0 = 3 - 2i$ тең.

Шешуі. Функцияның ерекше нүктелері $z^2 - 4 = 0$ теңдеуінің түбірлері, яғни $z_1 = 2,\quad z_2 = -2.$ Ол нүктелерден z_0 нүктесіне дейінгі қашықтық

$$R_1 = |z_1 - z_0| = |2 - 3 + 2i| = |-1 + 2i| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

$$R_2 = |z_2 - z_0| = |-2 - 3 + 2i| = |-5 + 2i| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

тең. Сондықтан берілген функция центрі $z_0 = 3 - 2i$, радиустері R_1 мен R_2 болатын келесі үш сақинада:

$$K_1 = \{z : |k| < |z - 3 + 2i| < \sqrt{5}\},$$

$$K_2 = \{z : \sqrt{5} < |z - 3 + 2i| < \sqrt{29}\},$$

$$K_3 = \{z : \sqrt{29} < |z - 3 + 2i|\}$$

аналитикалық функция.

Берілген функцияны қарапайым функциялардың қосындысына келтірейік:

$$\omega = \frac{2z}{z^2 - 4} = \frac{2z}{(z-2)(z+2)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z+2} \Rightarrow$$

$2z = A(z+2) + B(z-2):$ $\qquad z = 2 \Rightarrow 4 = 4A \Rightarrow A = 1.$

$z = -2 \Rightarrow -4 = -4B \Rightarrow B = 1.$

Олай болса, $\omega = \dfrac{2z}{z^2-4} = \dfrac{1}{z-2} + \dfrac{1}{z+2}$.

1. $K_1 = \{z : |k| < |z-3+2i| < \sqrt{5}\}$ жиынындағы нүктелер үшін $\dfrac{1}{z-2} = \dfrac{1}{(z-3+2i)+(1-2i)} = \dfrac{1}{1-2i} \cdot \dfrac{1}{1-\left(\dfrac{z-3+2i}{-1+2i}\right)} =$

$$= \left| \; \left|\frac{z-3+2i}{-1+2i}\right| < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 \right| = \frac{1}{1-2i} + \frac{1}{1-2i} \cdot \frac{z-3+2i}{(-1+2i)} +$$

$$\frac{1}{1-2i} \cdot \left(\frac{z-3+2i}{-1+2i}\right)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(z-3+2i)^n}{(1-2i)^{n+1}};$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{(-z+2i)+(5-2i)} = \frac{1}{5-2i} \cdot \frac{1}{1-\left(\dfrac{z-3+2i}{-5+2i}\right)} =$$

$$= \left| \; \left|\frac{z-3+2i}{-5+2i}\right| < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{29}} < 1 \right| = \frac{1}{5-2i} + \frac{1}{5-2i}\left(\frac{z-3+2i}{-5+2i}\right) +$$

$$+ \frac{1}{5-2i}\left(\frac{z-3+2i}{-5+2i}\right)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(z-3+2i)^n}{(5-2i)^{n+1}}$$

аламыз. Демек, $K_1 = \{z : |k| < |z-3+2i| < \sqrt{5}\}$ жиынындағы нүктелер үшін

$$\omega = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(z-3+2i)^n}{(-1+2i)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(z-3+2i)^n}{(5-2i)^{n+1}} .$$

2. $K_2 = \{z : \sqrt{5} < |z-3+2i| < \sqrt{29}\}$, яғни $z \in k_2$ нүктелері үшін

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-3+2i)+(1-2i)} = \frac{1}{(z-3+2i)} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{-1+2i}{z-3+2i}} =$$

$$=\left\|\left|\frac{-1+2i}{z-3+2i}\right|<\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=1\right\|=\frac{1}{z-3+2i}+\frac{1}{z-3+2i}\cdot\left(\frac{-1+2i}{z-3+2i}\right)+$$

$$+\frac{1}{z-3+2i}\cdot\left(\frac{-1+2i}{z-3+2i}\right)^2+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1+2i)^{n-1}}{(z-3\_2i)^n}.$$

$K_2=\{z:\sqrt{5}<|z-3+2i|<\sqrt{29}\}$ сақинасының нүктелерінде $\left|\frac{z-3=2i}{-5+2i}\right|<\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{29}}=1$ орындалатындықтан, $\frac{1}{z+2}$ бөлшегінің жіктелуі алдыңғы жағдайдағыдай. Ендеше, $K_2=\{z:\sqrt{5}<|z-3+2i|<\sqrt{29}\}$ жиынында

$$\omega=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z+2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1+2i)^{n-1}}{(z-3+2i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-3+2i)^n}{(5-2i)^{n+1}}\ .$$

3. $K_3=\{z:\sqrt{29}<|z-3+2i|\}$ нүктелерінде $\left|\frac{-1+2i}{z-3+2i}\right|<\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{29}}<1$ орындалатындықтан, $\frac{1}{z-2}$ бөлшегінің жіктелуі 2 п.-дей болады.

Екінші бөлшекті қатарға жіктейік:

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{(z-3+2i)+(5-2i)}=\frac{1}{z-3+2i}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{-5+2i}{z-3+2i}\right)}=$$

$$=\left\|\left|\frac{-5+2i}{z-3+2i}\right|<\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{29}}=1\right\|=\frac{1}{z-3+2i}+\frac{1}{z-3+2i}\cdot\left(\frac{-5+2i}{z-3+2i}\right)+$$

$$+\frac{1}{z-3+2i}\cdot\left(\frac{-5+2i}{z-3+2i}\right)^2+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5+2i)^{n-1}}{(z-3+2i)^n}.$$

Демек, $K_3=\{z:\sqrt{29}<|z-3+2i|\}$ жиынында

$$\omega=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z+2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1+2i)^{n-1}}{(z-3+2i)^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5+2i)^{n-1}}{(z-3+2i)^n}\cdot$$

Жауабы:

1. $$\omega=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{-1}{1-2i}\right)^{n+1}+\left(\frac{-1}{5-2i}\right)^{n+1}\right)(z-3+2i)^n,$$

$$K_1=\{z:|k|<|z-3+2i|<\sqrt{5}\};$$

2. $$\omega=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1+2i)^{n-1}}{(z-3+2i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{5-2i}\right)^{n+1}(z-3+2i)^n,$$

$$K_2=\{z:\sqrt{5}<|z-3+2i|<\sqrt{29}\};$$

3. $$\omega=\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1+2i)^{n-1}+(-5+2i)^{n-1}\right)\frac{1}{(z-3+2i)^n},$$

$$K_3=\{z:\sqrt{29}<|z-3+2i|\}.$$

10-*есеп.* $\omega=z\sin\dfrac{\pi z}{z-a}$ функциясын $z_0=a$ нүктесінің маңайында Лоран қатарына жіктеу керек.

Шешуі: $z-a$ айырымын t арқылы белгілесек, $z=t+a$ болады да:

$$\omega=(t+a)\sin\frac{\pi(t+a)}{t}=(t+a)\sin\left(\pi+\frac{a}{t}\right)=-(t+a)\sin\frac{a}{t}=-t\sin\frac{a}{t}-a\sin\frac{a}{t}$$

аламыз.

$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ жіктелуін $x=\dfrac{a}{t}$, үшін жазсақ,

$$\omega=-t\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a^{2n+1}}{t^{2n+1}(2n+1)!}-a\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a^{2n+1}}{t^{2n+1}(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^{2n+1}}{t^{2n}(2n+1)!}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^{2n+2}}{t^{2n+1}(2n+1)!}$$ шығады. Енді мұнда $t=z-a$ ауыстыруын жасаса болғаны.

Жауабы: $\omega=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}a^{2n+1}}{(z-a)^{2n}(2n+1)!}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}a^{2n+2}}{(z-a)^{2n+1}(2n+1)!}$.

11-*есеп.* $\omega=\dfrac{e^{z^5}-1}{e^z-1-z}$ функциясының $z=0$ ерекше нүктесінің түрін анықтау керек.

Шешуі: $\omega=e^z$ функциясының Маклорен қатарына жіктелу формуласын: $e^z=1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+\ ...$

Пайдаланамыз. Мұндағы z орнына z^5қойсақ $e^{z^5}=1+z^5+\dfrac{z^{10}}{2!}+\cdots,$ және бұл қатар $z=0$ нүктесінің маңайында жинақты. Сондықтан

$$\omega=\frac{e^{z^5}-1}{e^z-1-z}=\frac{-1+1+z^5+\dfrac{z^{10}}{2!}+\cdots}{-1-z+1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+\cdots}=$$

$$=\frac{z^5+\dfrac{z^{10}}{2!}+\cdots}{\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+\cdots}=\frac{z^5\left(1+\dfrac{z^5}{2!}+\cdots\right)}{z^2\left(\dfrac{1}{2!}+\dfrac{z}{3!}+\cdots\right)}=z^3\cdot h(z)$$

Мұнда $h(z)=\dfrac{1+\dfrac{z^5}{2!}+\cdots}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{z}{3!}+\cdots}$ арқылы $z=0$ нүктесінің маңайында аналитикалық функция белгіленген (екі аналитикалық функцияның қатынасы және бөлімі нөлге тең емес).

$$\lim_{z\to0}\frac{e^{z^5}-1}{e^z-1-z}=\lim_{z\to0}z^3\cdot h(z)=0<\infty$$

Болғандықтан, $z_0=0$ – жөнделетін ерекше нүкте.

12-*есеп.* $\omega = \dfrac{\sin \pi z}{z^4 - 1} \; e^{\frac{1}{z}}$ функциясының оқшауланған ерекше нүктелерін тауып, олардың түрлерін анықтау керек.

Шешуі: Берілген функция $z_1 = 0$ нүктесінде және $z^4 - 1 = 0$ теңдеуінің түбірлерінде анықталмаған.

$$z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i)$$

жіктелуін тағы да $z_2 = 1,\; z_3 = -1,\; z_4 = i,\; z_5 = -i$ төрт ерекше нүкте аламыз. Осы нүктелердің түрлерін анықтайық.

1. $z_1 = 0$ нүктесінде берілген функцияның шегі жоқ екенін көрсету үшін $z = x + 0i$ нөлге ұмтылсын ($y = 0$):

$$\lim_{x \to 0-} \frac{\sin \pi x}{x^4 - 1} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0-} \frac{\sin \pi x}{x^4 - 1} \cdot \lim_{x \to 0-} e^{\frac{1}{x}} = (0 \cdot e^{-\infty}) = 0;$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin \pi x}{x^4 - 1} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^4 - 1} \cdot \lim_{x \to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{(\sin \pi x)^{-1}} =$$

$$= -\lim_{x \to 0+} \frac{e^{1/x}}{(\sin \pi x)^{-1}} - 1 = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \left| \textit{Лопиталь}\ \text{ережесі} \right| =$$

$$= -\lim_{x \to 0+} \frac{e^{1/x} \left(-\dfrac{1}{x^2} \right)}{-(\sin \pi x)^{-2} \cdot \cos \pi x \cdot \pi} = -\lim_{x \to 0+} e^{1/x} \cdot \lim_{x \to 0+} \cdot \frac{\sin^2 \pi x}{x^2} \cdot \lim_{x \to 0+} \frac{1}{\cos \pi x \cdot \pi} =$$

$$= \left(\infty \cdot \pi^2 \cdot \frac{1}{\pi} \right) = \infty.$$

Функцияның оң және сол жақ шектері өзара тең емес, яғни $z_1 = 0$ нүктеде функцияның шегі жоқ, демек, $z_1 = 0$ – елеулі ерекше нүкте.

2) $z_2 = 1$ нүктесін зерттейік.

$$\lim_{z\to 1}\frac{\sin \pi z}{z^4-1}e^{1/z}=\lim_{z\to 1}e^{1/z}\cdot\lim_{z\to 1}\frac{\sin\pi z}{z^4-1}=e\cdot\lim_{z\to 1}\frac{(\sin\pi z)'}{(z^4-4)'}=$$

$$=e\lim_{z\to 1}\frac{\pi\cos\pi z}{4z^3}=\frac{\pi e}{4}.$$

Олай болса, $z_2=1$ – жөнделетін ерекше нүкте.

3. $z_3=-1$ нүктесін де осы сияқты зерттеуге болады:

$$\lim_{z\to -1}\frac{\sin \pi z}{z^4-1}e^{1/z}=\lim_{z\to -1}e^{1/z}\cdot\lim_{z\to -1}\frac{\sin\pi z}{z^4-1}=$$

$$=e^{-1}\cdot\lim_{z\to -1}\frac{(\sin\pi z)'}{(z^4-4)'}=e^{-1}\lim_{z\to -1}\frac{\pi\cos\pi z}{4z^3}=\frac{\pi e^{-1}}{4},$$

яғни $z_3=-1$ – жөнделетін ерекше нүкте.

4. $z_4=i$ нүктесін зерттейік.

$$\lim_{z\to i}\frac{\sin\pi z\cdot e^{1/z}}{z^4-1}=\left(\frac{\sin\pi i\cdot e^{-i}}{0}\right)=\infty,$$

олай болса, $z_4=i$ нүктесі – полюс. Оның ретін анықтау үшін функцияны келесі түрде жазайық: $\omega=\dfrac{x(z)}{\mu(z)}=\dfrac{\sin\pi z\cdot e^{1/z}}{z^4-1}$,

мұнда $\lambda(i)=\sin\pi i e^{-i}\neq 0$, $\mu(i)=i^4-1=0$, $\mu'(z)=4z^3$,

$\mu'(i)=4i^3\neq 0$ орындалады, демек, $z_4=i$ – 1-ші ретті полюс.

4. $z_5=-i$ жағдайы алдыңғы сияқты, мұнда да

$\lambda(-i)=\sin(-\pi i)e^{i}\neq 0$ $\mu(-i)=(-i)^4-1=0$, $\mu'(-i)=-4i^3\neq 0$,

орындалады, олай болса, $z_5=-i$ – 1-ші ретті полюс..

Жауабы:

$z_1=0$ – елеулі ерекше нүкте;

$z_{2,3}=\pm 1$ – жөнделетін ерекше нүктелер;

$z_{4,5}=\pm i$ – 1-ші ретті полюстер.

13-есеп. Интегралды есептеу керек:

$$\oint_{|z-1|=2} \frac{z^2+1}{(z^2+4)\sin\frac{z}{3}}dz \cdot$$

Шешуі: Интеграл астындағы функцияның ерекше нүктелерін табамыз, ол үшін бөлшектің бөлімін нөлге теңестіреміз:

$(z^2+4)\sin z/3 = 0$, бұдан $z^2+4=0$ немесе $z_{1,2} = 2i$, ал $\sin z/3 = 0$ болса $z/3 = \pi k,\ z_k = 3\pi k,\ k \in Z$.

$|1-(\pm 2i)| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} > 2$, яғни $z_n = \pm 2i$ нүктелері интегралдау контурының сыртында жатыр, сондықтан оларды қарастырмаймыз, ал $z_k = 3\pi k,\ k \in Z$ нүктелер жиынындағы $z_0 = 0$ нүктесі ғана $|z-1| = 2$ контурының ішінде жатыр.

$z_0 = 0$ нүктесінің түрін анықтайық.

Интеграл астындағы функция $f(z) = \dfrac{\lambda(z)}{\mu(z)}$, $\lambda(z) = z^2+1$, $\mu(z) = (z^2+4)\sin\dfrac{z}{3}$ түрінде берілген және $\lambda(z_0) \neq 0,\ \mu(z_0) = 0$, $\mu'(z_0) \neq 0$ орындалады, шынында да,

$\lambda(z) = z^2+1$ үшін $\lambda(0) = 1 \neq 0$;

$\mu(z) = (z^2+4)\sin\dfrac{z}{3}$, үшін $\mu(0) = 0$,

ал $\mu'(z) = 2z\sin\dfrac{z}{3} + (z^2+4)\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{z}{3}$, үшін

$\mu'(0) = 0 + 4\cdot\dfrac{1}{3}\cdot 1 = \dfrac{4}{3} \neq 0$. Сондықтан $z_0 = 0$ – жай (1-ші ретті) полюс. Олай болса, $\underset{я}{шег}\left(\dfrac{z^2+1}{(z^2+4)\sin\frac{z}{3}}\right) = \dfrac{\lambda(0)}{\mu'(0)} = \dfrac{1}{\frac{4}{3}} = \dfrac{3}{4}.$

Кошидің шегерім туралы негізгі теоремасына сәйкес

$$\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{z^2+1}{(z^2+4)\sin\frac{z}{3}}dz = 2\pi i \cdot \underset{я=0}{шег}\left(\frac{z^2+1}{(z^2+4)\sin\frac{я}{3}}\right) = 2\pi i\frac{3}{4} = \frac{3}{2}\pi i. \cdot$$

Жауабы: $\frac{3}{2}\pi i$.

14-*есеп.* Интегралды есептеу керек: $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2 e^{\frac{1}{z^2}} - 1}{z}dz.$

Шешуі: Интеграл астындағы функцияның жалғыз ерекше нүктесі $z_0 = 0$ бар және ол $|z| = 1$ контурының ішінде жатыр. Функцияны $z_0 = 0$ нүктесінің маңайында Лоран қатарына жіктей отырып, осы нүктедегі оның шегерімін табамыз.

$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots$ түріндегі Маклорен қатарын $t = \frac{1}{z^2}$ үшін жазсақ, $e^{\frac{1}{z^2}} = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4 \cdot 2!} + \frac{1}{z^6 \cdot 3!} + \cdots$ аламыз. Олай болса,

$$\frac{z^2 e^{\frac{1}{z^2}} - 1}{z} = \frac{z^2\left(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4 \cdot 2!} + \frac{1}{z^6 \cdot 3!} + \cdots\right) - 1}{Z} =$$

$$= \frac{\left(z^2 + 1 + \frac{1}{z^2 \cdot 2!} + \frac{1}{z^4 \cdot 3!} + \cdots\right) - 1}{z} = z + \frac{1}{2! \cdot z^3} + \frac{1}{3! \cdot z^5} + \cdots \quad .$$

$\underset{z=s_0}{шег} f(z) = c_{-1}$ екені белгілі, ал бізде $\frac{1}{z}$ дәрежесінің коэффициенті c_{-1} нөлге тең, демек, $\underset{z=s_0}{шег}\left(\frac{z^2 e^{1/z^2} - 1}{z}\right) = 0.$

Олай болса, $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2 e^{1/z^2} - 1}{z} dz = 2\pi i \cdot \underset{z=s_0}{шег} f(z) = 0.$

Жауабы: 0.

15-*есеп.* Интегралды есептеу керек:

$$\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{2z} - \cos 9z}{z \sin \pi i z} dz .$$

Шешуі: $shiz = i\sin z$ теңдігін пайдалана отырып, берілген интегралда келесі түрде жазамыз:

$$\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{2z} - \cos 9z}{iz \sin \pi z} dz.$$

Интеграл астындағы функцияның ерекше нүктелері $z \cdot \sin \pi z = 0$ теңдеуінен табылады: $z = 0,$ $\pi z = \pi k,$ $k \in Z,$ немесе $z = k,$ $k \in Z.$

$|z| = 0,5$ шеңберінің ішінде $z_0 = 0$ нүктесі ғана жатыр. Оның түрін анықтайық. Интеграл астындағы функция

$f(z) = \dfrac{\lambda(z)}{\mu(z)} = \dfrac{e^{2z} - \cos 9z}{i \sin \pi z}$ түрінде жазылған және

$\lambda(0) = e^0 - \cos 0 = 0,$ $\lambda'(z) = 2e^{2z} + 9\sin 9z,$ $\lambda'(0) = 2 \cdot e^0 - \sin 0 = 2 \neq 0$, яғни $z_0 = 0$ нүктесі $\lambda(z)$ функцияның 1-ші ретті нөлі;

$$\mu(0) = 0, \ \mu'(z) = i\sin z + i\pi z \cos \pi z, \quad \mu'(0) = 0 .$$

$\mu''(z) = i\pi \cos \pi z + i\pi \cos \pi z - i\pi^2 z \sin z,$ $\mu''(0) = zi\pi \neq 0$, яғни

$z_0 = 0$ нүктесі $\mu(z)$ функциясының 2-ші ретті нөлі.

Олай болса, $z_0 = 0$ нүктесі функцияның $2 - 1 = 1$ ретті полюсі. Шегерімді $\underset{z=s_0}{шег} f(z) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)$ формуласы бойынша іздейміз:

$$\underset{z=s_0}{шег}\, f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{e^{2z}-\cos 9z}{iz\sin \pi z}\cdot z=\lim_{z\to 0}\frac{e^{2z}=\cos 9z}{i\sin z}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{(e^{2z}-\cos 9z)'}{(i\sin \pi z)'}=\lim_{z\to 0}\frac{2e^{2z}+9\sin 9z}{i\pi\cos \pi z}=\frac{2}{i\pi}\ .$$

Шегерім туралы негізгі теорема бойынша

$$\oint\limits_{|z|=0,5} f(z)dz=2\pi i\,\underset{z=s_0}{шег}\, f(z)=2\pi i\,\frac{2}{i\pi}=4.$$

Жауабы: 4.

16-*есеп.* Интегралды есептеу керек:

$$\oint\limits_{|z+2i|=3}\left(\frac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}}+1}+\frac{6\,ch\dfrac{\pi iz}{2-2i}}{(z-2+2i)^2(z-4-2i)}\right)dz\ .$$

Шешуі: **1)** Бірінші бөлшектің ерекше нүктелерін келесі теңдеуден табамыз: $e^{\frac{\pi z}{2}}+1=0$, $e^{\frac{\pi z}{2}}=-1$, $\frac{\pi z}{2}=Ln(-1)$.

Бұдан $|-1|=1,\ \arg(-1)=\pi$ болғандықтан,

$$\frac{\pi z}{2}=\ln 1+i(\pi+2\pi k);\quad \pi z=2i(\pi+2\pi k);\quad z=i(2+4k),\ k\in Z$$

аламыз. Бұл нүктелердің $|z+2i|=3$ контурының ішінде жататыны тек $z_0=-2i$ нүктесі ($k=-1$ болса). Бұл нүктенің түрін анықтайық:

$$f_1(z)=\frac{\lambda_1(z)}{\mu_1(z)}=\frac{\pi}{e^{\pi\frac{z}{2}}+1},\quad \lambda_1(-2i)=\pi\neq 0,$$

$$\mu_1(-2i)=e^{-\pi i}+1=0,\quad \mu_1'(z)=\frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi z}{2}},$$

$\mu'(-2i)=\frac{\pi}{2}e^{-\pi i}=-\frac{\pi}{2}\neq 0$, олай болса, $z_0=-2i$ – нүктесі 1-ші ретті полюс. Бұл нүктедегі шегерімді $\underset{z=s_0}{шег} f(z) = \dfrac{\lambda_1(z_0)}{\mu_1'\ (z_0)}$ формуласын қолданып табамыз: $\underset{z=s_0}{шег} f_1(z) = \dfrac{\pi}{-\pi/2} = -2.$ Сонымен, бірінші бөлшектің интегралы $\displaystyle\oint\limits_{|z+2i|=3} \frac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}}+1}dz = 2\pi i(-2) = -4\pi i$ тең.

2) Екінші $f_2(z) = \dfrac{6ch\dfrac{\pi iz}{2-2i}}{(z-2+2i)^2(z-4-2i)}$ бөлшектің ерекше нүктелерін $(z-2+2i)^2(z-4-2i) = 0$ теңдеуінен табамыз. Бұдан $z_1 = 2-2i,$ $z_2 = 4+2i.$ Екінші нүкте үшін $|-2i-(4+2i)| = |-4-4i| = \sqrt{32} > 3$ орындалады, яғни $4+2i$ нүктесі $|z+2i| = 3$ контурының сыртында, ал $z_1 = 2-2i$ нүктесі бұл контурдың ішінде жататынын көру қиын емес. Осы нүктенің түрін анықтайық.

$$f_2(z) = \frac{6\cos\dfrac{\pi z}{2-2i}}{(z-2+2i)^2(z-4-2i)} = \frac{\dfrac{6\cos\dfrac{\pi z}{2-2i}}{z-4-2i}}{\left[z-(2-2i)\right]^2},$$ және

мұнда

$\varphi(z) = \dfrac{6\cos\dfrac{\pi z}{2-2i}}{z-4-2i}$ функциясы үшін

$\varphi(2-2i) = \dfrac{-6}{2-2i-4-2i} = \dfrac{6}{2+4i} \neq 0$, сонымен бірге ол $-$ 2-2i нүктесінің маңайында аналитикалық функция. Сондықтан белгілі критерий бойынша 2-2i нүктесі $-$ 2-ші ретті полюс.

2-2i нүктесіндегі шегерімді табу үшін

$\underset{z=z_1}{шег} f_2(z) = \lim\limits_{z\to z_1}(f(z)(z-z_1)^2)'$ формуласын пайдаланамыз:

$$\underset{z=2-2i}{\text{шег}}\, f_2(z) = \lim_{z\to 2-2i}\left(\frac{6\cos\dfrac{\pi z}{2-2i}}{(z-2+2i)^2(z-4+2i)}(z-2+2i)^2\right)' =$$

$$= \lim_{z\to 2-2i}\left(\frac{6\cos\dfrac{\pi z}{2-2i}}{(z-4-2i)}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to 2-2i}\frac{-\dfrac{6\pi}{2-2i}\sin\dfrac{\pi z}{2-2i-}\cdot(z-4-2i)-6\cos\dfrac{\pi z}{2-2i}\cdot 1}{(z-4-2i)^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{-6\pi}{2-2i}\sin\pi\cdot(2-2i-4-2i)-6\cos\pi}{(2-2i-4-2i)^2} = \frac{6}{(-2-4i)^2} =$$

$$= \frac{6}{4+16i-16} = \frac{3}{-6+8i} = \frac{3(-6-8i)}{(-6+8i)(-6-8i)} = \frac{-18-24i}{36+64} =$$

$= -0{,}18-0{,}24i.$ Сондықтан

$$\oint\limits_{|z+2i|=3} f_2(z)dz = 2\pi i\,\underset{z=2-2i}{\text{шег}} f_2(z) = 2\pi i(-0{,}18-0{,}24i) = \pi(0{,}48-0{,}36i).$$

Сонымен, $\oint\limits_{|z+2i|=3}(f_1(z)+f_2(z))dz = \oint\limits_{|z+2i|=3} f_1(z)dz + \oint\limits_{|z+2i|=3} f_2(z)dz =$

$= -4\pi i + \pi(0{,}48-0{,}36i) = \pi(0{,}48-4{,}36i).$

Жауабы: $0{,}48\pi - 4{,}36\pi i$.

17-*есеп.* Интегралды есептеу керек: $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dt}{4\sqrt{2}\sin t+6}.$

Шешуі: $z = e^{it}$ айнымал ауыстыруын жасайық. Онда $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{zi}$.

Сондықтан

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{2}\sin t + 6} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\left(4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)+6\right)iz} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{2\sqrt{2}z^2 + 6iz - 2\sqrt{2}}.$$

Енді $f(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}z^2 + 6iz - 2\sqrt{2}} = \frac{\lambda(z)}{\mu(z)}$ функциясының ерекше нүктелерін $2\sqrt{2}z^2 + 6iz - 2\sqrt{2} = 0$ теңдеуінен табамыз:

$$z_{1,2} = \frac{-3i \pm \sqrt{(3i)^2 + 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} = \frac{-3i \pm \sqrt{-9+8}}{2\sqrt{2}} = \frac{-3i \pm i}{2\sqrt{2}}.$$

$|z_1| = \left|\frac{-2i}{2\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1,$ àë $|z_2| = \left|\frac{-4i}{2\sqrt{2}}\right| = \sqrt{2} > 1,$ демек, $|z| = 1$ контурының ішінде $z_1 = \frac{-2i}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}i$ нүктесі жатыр. Оның түрін анықтайық. $\lambda(-\frac{\sqrt{2}}{2}i) = 1 \neq 0$, $\mu\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 0,$ өйткені z_1 – бөлшек бөлімінің түбірі. Сонымен бірге $\mu'(z) = 4\sqrt{2}z + 6i$,

$\mu'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -4\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}i + 6i = 2i \neq 0.$ Олай болса, $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}i$ – 1-ші ретті полюс. Бұл нүктедегі шегерім

$\underset{z_1}{шег}\, f(z) = \frac{\lambda(z_1)}{\mu'(z_1)} = \frac{1}{2i}$ тең. Олай болса,

$$\oint_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i res_{z_1} f(z) = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi \cdot$$ *Жауабы:* π .

18-*есеп.* Интегралды есептеу керек:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5} + \sqrt{2}\cos t)^2} .$$

Шешуі: Алдыңғы есептің шешу әдісін пайдаланамыз: $z = e^{it}$ деп алайық. Онда

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5} + \sqrt{2}\cos t)^2} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\left(\sqrt{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)^2 iz} =$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{zdz}{i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}z^2 + \sqrt{5}z + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} .$$

$$f(z) = \frac{\lambda(z)}{\mu(z)} = \frac{z}{i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}z^2 + \sqrt{5}z + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$ функциясының

ерекше нүктелерін $\frac{\sqrt{2}}{2}z^2 + \sqrt{5}z + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ теңдеуінен табамыз: $z_{1,2} = \frac{-\sqrt{5} \pm \sqrt{5-2}}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{5} \pm \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Мұнда $\left|\frac{-\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right| > 1$ және $\left|\frac{-\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right| < 1$ болғандықтан, $|z| < 1$ контурының ішінде

$z_1 = \dfrac{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ерекше нүктесі ғана жатады.

$\lambda(z_1) = \dfrac{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \neq 0$, ал $\mu(z)$ үшін $\mu(z_i) = \mu'(z_i) = 0$ және $\mu''(z_1) \neq 0$ болады. Шынында да,

$$\mu'(z) = i2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}z^2 + \sqrt{5}z + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sqrt{2}z + \sqrt{5}\right).$$

$$\mu''(z) = i2(\sqrt{2}z + \sqrt{5})^2 + i2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}z^2 + \sqrt{5}z + \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Бұл функцияның z_1 нүктедегі мәні

$$\mu''(z_1) = i2\left(\sqrt{2}\,\frac{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \sqrt{5}\right)^2 = 6i \neq 0.$$ Олай болса, z_1 нүктесі – $f(z)$ функциясының 2-ші ретті полюсі.

$\mu(z)$ -ті көбейткіштерге жіктеп алайық:

$$\mu(z) = i\frac{\sqrt{2}}{2}(z-z_1)^2(z-z_2)^2 = i\frac{\sqrt{2}}{2}\left(z - \frac{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(z + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

z_1 нүктесіндегі шегерімді келесі формула арқылы табамыз:

$$\underset{z_1}{\text{шег}}\, f(z) = \lim_{z \to z_1}\left(f(z)(z-z_1)^2\right)'.$$

$$\underset{z_1}{\text{шег}} f(z) = \lim_{z \to \frac{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{Z}{i\frac{\sqrt{2}}{2}\left(z - \frac{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2\left(z + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2}\left(z - \frac{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2\right)' =$$

$$=\lim_{z\to(-\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}z}{i(z+(\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2})^2}\right)'=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{i}\lim_{z\to(-\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2}}\frac{(z+(\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2})^2-z\cdot 2(z+(\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2})}{(z+(\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2})^4}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{i}\frac{((-\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2}+(\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2})^2-(-\sqrt{5}+\sqrt{3})\sqrt{2}((-\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2}+(\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2})}{((-\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2}+(\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2})^4}=$$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{i}\dfrac{6+(\sqrt{5}-\sqrt{3})\cdot 2\sqrt{3}}{36}=\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{15}}{i\cdot 18}=\dfrac{\sqrt{30}}{18i}.$ Сонымен,

$$\oint_{|z|=1} f(z)dz=2\pi i\,\underset{z_1}{шег}\,f(z)=2\pi i\frac{\sqrt{30}}{18i}=\frac{\sqrt{30}}{9}\pi.. \quad \textit{Жауабы:}\ \frac{\sqrt{30}}{9}\pi\,.$$

19-*есеп*. Интегралды есептеу керек:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+16)}.$$

Шешуі: $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^2(z^2+16)}$ функциясының жоғарғы жарты жазықтықта жатқан ерекше нүктелерін табайық. Ол үшін $(z^2+1)^2=0$ және $z^2+16=0$ теңдеулерін шешіп, жоғарғы жарты жазықтықта жатқан ерекше нүктелерді: $z_1=i,\ \ z_2=4i$ аламыз. Енді $f(z)$ функциясының осы нүктелердегі шегірімдерін табамыз.

1) $z_1=i.$ $f(z)$ функциясын келесі түрде жазайық:

$$f(z)=\frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2(z^2+16)}=\frac{(z+i)^{-2}(z^2+16)^{-1}}{(z-i)^2}=\frac{\lambda_1(z)}{\mu_1(z)},$$

мұнда, $\lambda_1(i)\neq 0$ және $\mu_1(z)$ функциясы үшін i – екінші ретті нөл (түбір), сондықтан $z_1=i$ нүктесі $f(z)$ функциясының 2-ші ретті полюсі. Одан әрі

$$\underset{i}{шег}\, f(z) = \lim_{z\to i}\left(f(z)(z-i^2\right)' = \lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z+i)^2(z^2+16)}\right)' =$$

$$= -\lim_{z\to i}\frac{2(z+i)(z^2+16)+(z+i)^2\cdot 2z}{(z+i)^4(z^2+16)^2} = -\frac{4i(-1+16)-8i}{16(-1+16)^2} =$$

$$= -\frac{52i}{16\cdot 225} = -\frac{13}{900}i.$$

2) $z_2 = 4i.$ $f(z)$ функциясын келесі түрде жазайық:

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2(z+4i)(z-4i)} = \frac{(z+1)^{-2}(z+4i)^{-1}}{(z-4i)} = \frac{\lambda_2(z)}{\mu_2(z)}\cdot$$

Мұнда $\lambda_2(4i)\neq 0,$ ал $\mu_2(z)$ үшін $4i-$ бірінші ретті нөл. Демек, $z_2 = 4i$ нүктесі – $f(z)$ функциясының 1-ші ретті полюсі. Одан әрі

$$\underset{4i}{шег}\, f(z) = \lim_{z\to 4i} f(z)(z-4i) = \lim_{z\to 4i}\frac{1}{(z^2+1)^2(z+4i)} =$$

$$= \frac{1}{(-16+1)^2\cdot 8i} = \frac{-i}{1800}.$$

$f(z)$ функциясының нақты өсте жатқан ерекше нүктелері жоқ болғпндықтан және бөлшектің бөлімінің дәрежесі алымынан 6-ға артық болғандықтан,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2(x^2+16)} = 2\pi i(\underset{i}{шег}\, f(z) + \underset{4i}{шег}\, f(z)) =$$

$$= 2\pi i\left(\frac{-13i}{900} - \frac{i}{1800}\right) = \pi\left(\frac{13}{450}+\frac{1}{900}\right) = \pi\frac{27}{900} = \pi\frac{3}{100}.$$ *Жауабы:* 0.03π.

20-*есеп.* Интегралды есептеу керек:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{(x^2+1)^2} dx \cdot$$

Шешуі: $f(z) = \dfrac{e^{3iz} - e^{2iz}}{(z^2+1)^2}$ функциясының $\operatorname{Im} z > 0$ жарты жазықтықтағы ерекше нүктелерін және осы нүктелердегі шегерімдерін табамыз. $(z^2+1)^2 = 0$ теңдеуінен $z_{1,2} = \pm i$ аламыз, жоғары жарты жазықтықта $z_1 = i$ ерекше нүкте жатыр. $f(z)$ функциясын келесі түрде жазамыз

$$f(z) = \frac{e^{3iz} - e^{2iz}}{(z^2+1)^2 (z-i)^2} = \frac{(e^{3iz} - e^{2iz})(z+i)^{-2}}{(z-i)^2} = \frac{\lambda(z)}{\mu(z)},$$

мұнда $\lambda(i) \neq 0$ және $z_1 = i$ нүктесі – $\mu(z)$ функциясының 2-ші ретті нөлі, яғни $z_1 = i$ нүктесі – $f(z)$ функциясының 2-ші ретті полюсі. Одан әрі

$$\underset{i}{шег}\ f(z) = \lim_{z \to i} (f(z)(z-i)^2)' = \lim_{z \to i} \left(\frac{e^{3iz} - e^{2iz}}{(z+i)^2} \right)' =$$

$$= \lim_{z \to i} \frac{(3ie^{3iz} - 2ie^{2iz})(z+i)^2 - (e^{3ix} - e^{2iz}) 2(z+i)}{(z+i)^4} =$$

$$= \lim_{z \to i} \frac{(3ie^{3iz} - 2ie^{2iz})(z+i) - 2e^{3iz} + 2e^{2iz}}{(z+)^3} =$$

$$= \frac{(3ie^{-3} - 2ie^{-2})2i - 2e^{-3} + 2e^{-2}}{-8i} = \frac{-6e^{-3} + 4e^{-2} - 2e^{-3} + 2e^{-2}}{-8i} =$$

$$= \frac{+4e^{-3} - 3e^{-2}}{4i}.$$

$R(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2}$ функциясы нақты өсте үзіліссіз және бөлшектің бөлімінің дәрежесі алымының дәрежесінен 4-ке артық болғандықтан,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{(x^2+1)^2} dx = R_0(2\pi i \cdot res_i f(z)) = \mathrm{Re}\, 2\pi i \frac{4e^{-3} - 3e^{-3}}{4i} =$$

$$= \frac{\pi}{2}(4e^{-3} - 3e^{-2}).$$ *Жауабы:* $\frac{\pi}{2}(4e^{-3} - 3e^{-2})$.

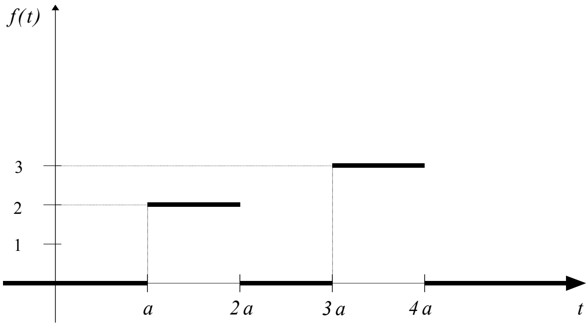
21-*есеп.* $f(t)$ түпнұсқаның берілген сызбасы арқылы оның кескінін табу керек:

Шешуі: Берілген функция мен оның туындылары

$\tau_1 = a,\ \tau_2 = 2a,\ \tau_3 = 3a,\ \tau_4 = 4a$ нүктелерінде үзілісті. Бұл

нүктелердегі функцияның секірмелері: $\alpha_1 = 2 - 0 = 2;$

$\alpha_2 = 0 - 2 = -2,\quad \alpha_3 = 3 - 0 = 3,\quad \alpha_4 = 0 - 3 = -3$ тең.



Туындының секірмелері: $\beta_k = 0,\quad k = 1,2,3,4,$ тең, өйткені $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$-ден басқа нүктелерде $f'(t) = 0$. Олай болса, $f(t)$-ның кескіні

$$F(p)=\sum_{k=1}^{4}e^{-p\tau k}\left(\frac{\alpha_k}{p}+\frac{\beta_k}{p^2}\right)=e^{-pa}\frac{2}{p}-e^{-2pa}\frac{2}{p}+e^{-3pa}\frac{3}{p}-e^{-4pa}\frac{3}{p}.$$

Жауабы: $\dfrac{2e^{-pa}-2e^{-2pa}+3e^{-3pa}-3e^{-4pa}}{p}$.

22-*есеп.* Берілген $F(p)=\dfrac{3p-2}{(p-1)(p^2-6p+10)}$ бейнесі бойынша оның түпнұсқасын табу керек.

Шешуі: Берілген функцияны қарапайым бөлшектердің қосындысына келтіреміз:

$$\frac{3p-2}{(p-1)(p^2-6p+10)}=\frac{A}{p-1}+\frac{Bp+C}{p^2-6p+10}.$$

$$3p-2=A(p^2-6p+10)+(Bp+C)(p-1),$$

$$p=1\Rightarrow 1=A(1-6+10);\ 1=5A,\ \ A=0{,}2.$$

A-ның мәнін орнына қойып, x-тің бірдей дәрежелерінің коэффициенттерін теңестіреміз:

$$3p-2=0{,}2p^2-1{,}2p+2+Bp^2-Bp+Cp,$$

$$-2=2-C$$
$$3=-1{,}2-B+C.$$

Бұдан $C=4,\ B=-0{,}2$.

Сондықтан $F(p)=\dfrac{0{,}2}{p-1}+\dfrac{-0{,}2p+4}{p^2-6p+10}$.

Екінші бөлшектің бөліміндегі өрнектен толық квадрат бөлеміз: $p^2-6p+10=p^2-6p+9+1=(p-3)^2+1$, содан соң $F(p)$ функциясын келесі түрде жазамыз:

$$F(p)=\frac{0{,}2}{p-1}+\frac{-0{,}2(p-3)-0{,}6+4}{(p-3)^2+1}=\frac{0{,}2}{p-1}-0{,}2\frac{p-3}{(p-3)^2+1}+\frac{3{,}6}{(p-3)^2+1}$$

Енді $e^{at}\leftrightarrow\dfrac{1}{p-a}$, $\quad e^{at}\cos\omega t\leftrightarrow\dfrac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$;

$e^{at}\sin\omega t\leftrightarrow\dfrac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$ сәйкестіктерін пайдалана отырып,

$F(p)\leftrightarrow 0{,}2e^{t}-0{,}2e^{3t}\cos t+3{,}6e^{3t}\sin t$ аламыз.

Жауабы: $0{,}2e^{t}=0{,}2e^{3t}\cos t+3{,}6e^{3t}\sin t.$

23-*есеп.* $y^4+4y'+4y=\dfrac{e^{-2t}}{(1+2t)^2}$ дифференциалдық теңдеуінің $y(0)=0,\quad y'(0)=0$ бастапқы шарттарын қанағаттандыратын шешімдерін табу керек.

Шешуі: $y_1''+4y_1'+4y_1=1$ түріндегі көмекші теңдеудің шешімін табамыз. y_1-дің кескінін $Y(p)$ арқылы белгілейміз, онда $y_1'\leftrightarrow pY(p),\quad y_1''\leftrightarrow p^2Y(p).$ Операторлық теңдеуге өтеміз және оны шешеміз: $p^2Y(p)+4pY(p)+4Y(p)=\dfrac{1}{p}$;

$Y(p)(p^2+4p+4)=\dfrac{1}{p}$; $\qquad Y(p)=\dfrac{1}{p(p+2)^2}$. Түпнұсқаны табу үшін, алынған бөлшекті қарапайым бөлшектердің қосындысына

келтіреміз: $1=A(p+2)^2+Bp(p+2)+Cp.$

$p=0$ болса, $1=4A,$ яғни $A=0{,}25$.

$p=-2$ болса, $1=-2C$, яғни $C=-0{,}5$.

Енді p^2 дәрежесінің коэффициенттерін теңестіреміз: $1=0{,}25p^2+p+1+Bp^2+2Bp-0{,}5p$.

$$p^2\Big|\,0=0{,}25+B\Rightarrow B=-0{,}25.$$

Сонымен, $Y(p)=\dfrac{0{,}25}{p}-\dfrac{0{,}25}{p+2}-\dfrac{0{,}5}{(p+2)^2}$.

Одан әрі $e^{at}\leftrightarrow\dfrac{1}{p-a}$, $te^{at}\leftrightarrow\dfrac{1}{(p-a)^2}$ сәйкестіктерін және сызықтық қасиетті пайдаланып, $Y(p)$ кескіннің түпнұсқасын табамыз: $y_1(t)=0{,}25-0{,}25e^{-2t}-0{,}5te^{-2t}$. Бастапқы теңдеудің $y(t)$ шешімін табу үшін Дюамель формуласын пайдаланамыз: $y(t)=\int\limits_0^t y_1'(t-\tau)f(\tau)d\tau$.

$$y_1'=0{,}5e^{-2t}-0{,}5e^{-2t}+te^{-2t}=te^{-2t},\ y_1'(t-\tau)=(t-\tau)e^{-2t+2\tau},$$

$$y(t)=\int_0^t(t-\tau)e^{-2t+2\tau}\frac{l^{-2\tau}}{(1+2\tau)^2}d\tau=e^{-2t}\int_0^t\frac{t-\tau}{(1+2\tau)^2}d\tau=$$

$$= -te^{-2t}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{(2\tau+1)}\Big|_0^t - e^{-2t}\int_0^t\left(\frac{\tau+\frac{1}{2}}{(1+2\tau)^2}-\frac{1/2}{(1+2\tau)^2}\right)d\tau =$$

$$= -\frac{t}{2}e^{-2t}\,\frac{1}{2t+1}+\frac{t}{2}-e^{-2t}\left(\frac{1}{2}\int_0^t\frac{d\tau}{(2\tau+1)}-\frac{1}{2}\int_0^t\frac{d\tau}{(2\tau+1)^2}\right)=$$

$$= -\frac{t}{2}\frac{e^{2t}}{2t+1}+\frac{te^{-2t}}{2}-\frac{e^{-2t}}{4}\left(\ln(2\tau+1)\Big|_0^t+\frac{1}{2\tau+1}\Big|_0^t\right)=$$

$$= -\frac{te^{-2t}}{2(2\tau+1)}+\frac{te^{-2t}}{2}-\frac{e^{-2t}\ln(2t+1)}{4}-\frac{e^{-2t}}{4(2t+1)}+\frac{e^{-2t}}{4}=$$

$$= e^{-2t}\left(\left(\frac{-2t}{4(2t+1)}-\frac{1}{4(2t+1)}\right)+\frac{1}{4}+\frac{t}{2}-\frac{\ln(2t+1)}{4}\right)=$$

$$= e^{-2t}\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{t}{2}-\frac{\ln(2t+1)}{4}\right)=e^{-2t}\left(\frac{t}{2}-\frac{\ln(2t+1)}{4}\right)$$

Жауабы: $y(t)=e^{-2t}\left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{\ln(2t+1)}{4}\right)$.

24-*есеп.* Амалдық әдіспен Коши есебін шешу керек:

$$y''-3y'+2y=2e^t\cos\frac{t}{2},\qquad y(0)=1, y'(0)=0\,.$$

Шешуі: $e^{\alpha t}\cos\omega t \leftrightarrow \dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$ сәйкестігін

Пайдалансақ, $2e^t\cos\dfrac{t}{2} \leftrightarrow 2\dfrac{p-1}{(p-1)^2+1/4}$ аламыз.

$y(t)$-ның кескінін $Y(p)$ арқылы белгілейміз. Онда $y'(t)\leftrightarrow pY(p)-y(0)=pY(0)-1,$

$$y''(t) \leftrightarrow p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - p \cdot$$

Операторлық теңдеуге өтеміз және оны шешеміз:

$$p^2Y(p) - p - 3PY(p) + 3 + 2Y(p) = 2\frac{p-1}{(p-1)^2 + \frac{1}{4}},’$$

$$Y(p)(p^2 - 3p + 2) = 2\frac{p-1}{(p-1)^2 + \frac{1}{4}} + p - 3,’$$

$$Y(p) = \frac{2(p-1)}{\left[(p-1)^2 + \frac{1}{4}\right](p-1)(p-2)} + \frac{p-3}{(p-1)(p-2)},$$

$$Y(p) = \frac{2}{\left[(p-1)^2 + \frac{1}{4}\right](p-2)} + \frac{p-3}{(p-1)(p-2)}.$$

Алынған әрбір бөлшекті қарапайым бөлшектердің қосындысына келтіреміз:

1) $$\frac{2}{\left[(p-1)^2 + \frac{1}{4}\right](p-2)} = \frac{Ap+B}{(p-1)^2 + \frac{1}{4}} + \frac{C}{p-2};$$

$$2 = (Ap+B)(p-2) + C\left[(p-1)^2 + \frac{1}{4}\right];$$

$p = 2$ áîëñà, $2 = C \cdot \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad C = 1{,}6.$

$$2 = Ap^2 - 2Ap + Bp - 2B + 1{,}6p^2 - 3{,}2p + 2$$

$$\begin{array}{l|l} p^0 & 2 = -2B + 2 \qquad\quad \Rightarrow B = 0 \\ p^1 & 0 = -2A + B - 3{,}2 \ \Rightarrow A = -1{,}6. \end{array}$$

Сонымен, $$\frac{2}{\left((p-1)^2+\frac{1}{4}\right)(p-2)}=\frac{-1{,}6p}{\left((p-1)^2+\frac{1}{4}\right)}+\frac{1{,}6}{p-2}.$$

2) $$\frac{p-3}{(p-1)(p-2)}=\frac{D}{p-1}+\frac{E}{p-2}; \qquad p-3=D(p-2)+E(p-1).$$

$p=2$ болса, $-1=E$.

$p=1$ болса, $-2=-D \Rightarrow D=2$.

Демек, $\frac{p-3}{(p-1)(p-2)}=\frac{2}{p-1}-\frac{1}{p-2}$. Ақырында,

$$Y(p)=\frac{-1{,}6p}{(p-1)^2+\frac{1}{4}}+\frac{1{,}6}{p-2}+\frac{2}{p-1}-\frac{1}{p-2}=\frac{-1{,}6p+1{,}6}{(p-1)^2+\frac{1}{4}}-\frac{1{,}6}{(p-1)^2+\frac{1}{4}}+$$

$$+\frac{0{,}6}{p-2}+\frac{2}{p-1}=-1{,}6\frac{p-1}{(p-1)^2+\frac{1}{4}}-3{,}2\frac{\frac{1}{2}}{(p-1)^2+\frac{1}{4}}+\frac{0{,}6}{p-2}+\frac{2}{p-1}.$$

Енді $\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}\leftrightarrow e^{at}\cos\omega t$, $\quad \frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}\leftrightarrow e^{at}\sin\omega t$,

$\frac{1}{p-a}\leftrightarrow e^{at}$ сәйкестіктерін және сызықтық қасиетті пайдаланып, түпнұсқаны табамыз:

$$y(t)=-1{,}6e^t\cos\frac{1}{2}t-3{,}2e^t\sin\frac{1}{2}t+0{,}6e^{2t}+2e^t.$$

Жауабы: $-1{,}6e^t\cos\frac{1}{2}t-3{,}2e^t\sin\frac{1}{2}t+0{,}6e^{2t}+2e^t.$

25-*есеп.* Массасы m материалдық нүктеге **v** жылдамдығына пропорционал $R=kv$ кедергі күш әсер етеді. Егер нүктенің бастапқы жылдамдығы v_0 болса, ол шектеусіз уақыт ішінде қанша қашықтыққа орын ауыстырады ($k = 10m.$,

$v_0 = 1$ м/сек.) ?

Шешуі: t уақыт кезеңіндегі нүктенің координатын $y(t)$ арқылы белгілейміз. $y(0)$ деп 0, ал $y'(0) = v_0 = 1$ деп аламыз. Нүктенің қозғалу заңын Ньютонның 2-ші заңынан $-R = m \cdot y''$ табамыз:

$$-kv = my''; \quad -10my' = my''.$$

Нәтижесінде Коши есебіне келеміз:

$$y'' + 10y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y''(0) = 1.$$

$y(t)$ -нің кескінін $Y(p)$ арқылы белгілейік. Онда

$$y' \leftrightarrow pY(p) - y(0) = pY(p);$$

$$y'' \leftrightarrow p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 1.$$

Бұдан келесі теңдеуді аламыз:

$$p^2Y(p) - 1 + 10pY(p) = 0; \qquad Y(p)(p^2 + 10p) = 1;$$

$$Y(p) = \frac{1}{p^2 + 10p}.$$

Бөлшекті қарапайым бөлшектердің қосындысына келтіреміз:

$$\frac{1}{p(p+10)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+10}; \qquad 1 = A(p+10) + Bp;$$

$$p = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = 10A \quad \Rightarrow \quad A = 0{,}1,$$

$$p = -10 \Rightarrow 1 = -10B \Rightarrow B = -0{,}1.$$

Сондықтан $Y(p)=\frac{0{,}1}{p}-\frac{0{,}1}{p+10}$.

Енді $\frac{1}{p-a}\leftrightarrow e^{at}$ сәйкестігін және сызықтық қасиетті пайдаланып, $y(t)=0{,}1-0{,}1e^{-10t}$ аламыз.

Шектеусіз уақыт ішіндегі нүктенің орын ауыстыру қашықтығы келесі шек арқылы табылады:

$\lim\limits_{t\to\infty} y(t)=\lim\limits_{t\to\infty}(0{,}1-0{,}1e^{-10t})=0{,}1\cdot$ *Жауабы:* $0{,}1$м.

26-есеп. Келесі дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешу керек: $\begin{cases}\dot{x}=-2x+y,\\ \dot{y}=3x;\end{cases}$ $x(0)=0,\quad y(0)=1$.

Шешуі: $x(t)$-нің кескінін $X(p)$ арқылы, ал $y(t)$-нің кескінін $Y(p)$ арқылы белгілесек, онда

$$\dot{x}(t)\leftrightarrow pX(p)-x(0)=pX(p).$$

$$\dot{y}(t)\leftrightarrow pY(p)-y(0)=pY(p)-1\,.$$

Нәтижесінде, $\begin{cases}pX=-2X+4\\ pY-1=3X\end{cases}$; $\begin{cases}(p+2)X-Y=0\\ -3X+pY=1\end{cases}$

жүйесін аламыз. Оны Крамер ережесі бойынша шешеміз:

$$\Delta=\begin{vmatrix}(p+2) & -1\\ -3 & p\end{vmatrix}=p(p+2)-3=p^2+2p-3;$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & p\end{vmatrix}=1;\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}(p+2) & 0\\ -3 & 1\end{vmatrix}=p+2;$$

$$X=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{1}{p^2+2p-3};\qquad Y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{p+2}{p^2+2p-3}\,.$$

Бұл бөлшектердің әрқайсысын қарапайым бөлшектердің қосындысына келтіреміз:

à) $X = \dfrac{1}{p^2+2p-3} = \dfrac{1}{(p-1)(p+3)} = \dfrac{A}{p-1} + \dfrac{B}{p+3}$;

$$1 = A(p+3) + B(p-1).$$

$$p = 1 \Rightarrow 1 = 4A \Rightarrow A = 0{,}25.$$

$$p = -3 \Rightarrow 1 = -4B \Rightarrow B = -0{,}25.$$

Сондықтан $X(p) = \dfrac{0{,}25}{p-1} - \dfrac{0{,}25}{p+3}$. Бұл кескіннің түпнұсқасы $X(p) \leftrightarrow x(t) = 0{,}25e^{t} - 0{,}25e^{-3t}$.

á) $Y = \dfrac{p+2}{p^2+2p-3} = \dfrac{p+2}{(p-1)(p+3)} = \dfrac{A}{p-1} + \dfrac{B}{p+3}$;

$$p + 2 = A(p+3) + B(p-1).$$

$$p = 1 \Rightarrow 3 = 4A \Rightarrow A = 0{,}75.$$

$$p = -3 \Rightarrow 1 = -4B \Rightarrow B = -0{,}25.$$

Сондықтан $Y(p) = \dfrac{0{,}75}{p-1} + \dfrac{0{,}25}{p+3}$. Бұл кескіннің түпнұсқасы $Y(p) \leftrightarrow y(t) = 0{,}75e^{t} + 0{,}25e^{-3t}$

Жауабы: $\begin{cases} x(t) = 0{,}25e^{t} - 0{,}25e^{-3t} \\ y(t) = 0{,}75e^{t} + 0{,}25e^{-3t} \end{cases}$.

ТИПТІК ЕСЕПТЕР

1-есеп. Түбірдің барлық мәндерін табу керек.

1.1. $\sqrt[4]{-1}$. **1.2.** $\sqrt[4]{\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$.

1.3. $\sqrt[3]{1}$. **1.4.** $\sqrt[3]{i}$.

1.5. $\sqrt[4]{1}$. **1.6.** $\sqrt[4]{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}}$.

1.7. $\sqrt[3]{-1}$. **1.8.** $\sqrt[3]{-i}$.

1.9. $\sqrt[4]{-16}$. **1.10.** $\sqrt[4]{\dfrac{1+i\sqrt{3}}{32}}$.

1.11. $\sqrt[3]{8}$. **1.12** $\sqrt[3]{8i}$.

1.13. $\sqrt[4]{16}$. **1.14.** $\sqrt[4]{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{32}}$

1.15. $\sqrt[3]{-8}$ **1.16.** $\sqrt[3]{-8i}$.

1.17. $\sqrt[4]{-1/16}$. **1.18.** $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$.

1.19. $\sqrt[3]{1/8}$. **1.20.** $\sqrt[3]{i/8}$.

1.21. $\sqrt[4]{1/16}$. **1.22.** $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$.

1.23. $\sqrt[3]{-1/8}$. **1.24.** $\sqrt[3]{-1/8}$.

1.25. $\sqrt[4]{-128+i128\sqrt{3}}$. **1.26.** $\sqrt[3]{27}$.

1.27. $\sqrt[4]{1/256}$ **.**

1.28. $\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}$ **.**

1.29. $\sqrt[3]{i/27}$ **.**

1.30. $\sqrt[4]{256}$ **.**

1.31. $\sqrt[3]{-i27}$ **.**

2-есеп. Алгебралық түрде жазу керек.

2.1. $\sin(\pi/4+2i)$.

2.2. $\cos(\pi/6+2i)$.

2.3. Ln 6.

2.4. $\mathrm{sh}(2+\pi i/4)$.

2.5. $\mathrm{ch}(2+\pi i/2)$.

2.6. $\ln(1+i)$.

2.7. $\sin(\pi/3+i)$.

2.8. $\cos(\pi/4+i)$.

2.9. $\ln(\sqrt{3}+i)$.

2.10. $\mathrm{sh}(1+\pi i/2)$.

2.11. $\mathrm{ch}(1-\pi i)$.

2.12. $\ln(1+\sqrt{3}\,i)$.

2.13. $\ln(-1+i)$.

2.14. $\cos(\pi/4-2i)$.

2.15. $\sin(\pi/2-5i)$.

2.16. $\mathrm{sh}(3+\pi i/4)$.

2.17. $\mathrm{ch}(1+\pi i/3)$.

2.18. $\ln(-1-i)$.

2.19. $\sin(\pi/6-3i)$.

2.20. $\cos(\pi/3-3i)$.

2.21. $\ln(1-i)$.

2.22. $\mathrm{sh}(1-\pi i/3)$.

2.23. $\mathrm{ch}(2-\pi i/6)$.

2.24. 1^{2i}.

2.25. $\sin(\pi/3-2i)$.

2.26. $\cos(\pi/6-i)$.

2.27. i^{3i}.

2.28. $\mathrm{sh}(2-\pi i)$.

2.29. $(-i)^{5i}$.

2.30. $(-1)^{4i}$.

2.31. $\mathrm{ch}(3+\pi i/4)$.

3-есеп. Алгебралық түрде жазу керек.

3.1. $(-1+i\sqrt{3})^{-3i}$.

3.2. arcsin 4.

3.3. arch(-2).

3.4. $\operatorname{arctg}\left(\frac{-2\sqrt{3}+3i}{3}\right)$.

3.5. $\operatorname{arcth}\left(\frac{3-4i}{5}\right)$.

3.6. $\operatorname{arcctg}\left(\frac{4+3i}{5}\right)$.

3.7. $\operatorname{arth}\left(\frac{3+i2\sqrt{3}}{3}\right)$.

3.8. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-i\right)$.

3.9. $\operatorname{sh}\left(1-\frac{\pi}{2}i\right)$.

3.10. $(-1-i)^{4i}$.

3.11. sin(π/4+i).

3.12. arch(3i).

3.13. $\operatorname{arctg}\left(\frac{3+4i}{5}\right)$.

3.14. $\operatorname{arch}\left(\frac{8+i3\sqrt{3}}{7}\right)$.

3.15. $\operatorname{arcth}\left(\frac{3\sqrt{3}-8i}{7}\right)$.

3.16. $\operatorname{arth}\left(\frac{4-3i}{5}\right)$.

3.17. $\operatorname{arctg}\left(\frac{-2\sqrt{3}+3i}{7}\right)$.

3.18. $\operatorname{arcth}\left(\frac{3-i2\sqrt{3}}{7}\right)$.

3.19. arcccos(-5).

3.20. arsh(-4i).

3.21. $(-\sqrt{3}+i)^{-6i}$.

3.22. $\omega=\sin\frac{i}{z}$, *мұндағы* $z=\frac{8+2\pi i}{\pi^2+16}$.

3.23. $\omega=e^{\frac{1}{z}}$, *мұндағы* $z=\frac{4+2\pi i}{\pi^2+4}$.

3.24. $\operatorname{arcctg}\left(\frac{2\sqrt{3}+3i}{7}\right)$.

3.25. $\operatorname{arth}\left(\frac{3+i2\sqrt{3}}{7}\right)$. **3.26.** $\operatorname{arcth}\left(\frac{4+3i}{5}\right)$.

3.27. ω=ch iz, *мұндағы* z=π/4+2i. **3.28.** $\operatorname{arctg}\left(\frac{3\sqrt{3}+8i}{7}\right)$.

3.29. arccos(-3i). **3.30.** $(4-3i)^{i}$.

3.31. $(-12+5i)^{-i}$.

4-есеп. Теңсіздікпен берілген аймақты сызу керек

4.1. $|z-1|\le 1$, $|z+1|>2$. **4.2**. $|z+i|\ge 1$, $|z|<2$.

4.3. $|z-i|\le 2$, $\operatorname{Re} z>1$. **4.4**. $|z+1|\ge 1$, $|z+i|<1$.

4.5. $|z+1|<1$, $|z-i|\le 1$. **4.6**. $|z+i|\le 2$, $|z-i|>2$.

4.7. $|z-1-i|\le 1$, $\operatorname{Im} z>1$, $\operatorname{Re} z\ge 1$.

4.8. $|z-1+i|\ge 1$, $\operatorname{Re} z<1$, $\operatorname{Im} z\le -1$.

4.9. $|z-2-i|\le 2$, $\operatorname{Re} z\ge 3$, $\operatorname{Im} z<1$.

4.10. $|z-1-i|\ge 1$, $0\le \operatorname{Re} z<2$, $0<\operatorname{Im} z\le 2$.

4.11 $|z+i|<2, \quad 0<\operatorname{Re} z\le 1.$

4.12 $|z-i|\le 1, \quad 0<\arg z<\pi/4.$

4.13 $|z-i|\le 2, \quad 0<\operatorname{Im} z<2.$

4.14 $|z+i|>1, \quad -\pi/4\le \arg z<0.$

4.15 $|z-1-i|<1, \quad |\arg z|\le \pi/4.$

4.16 $|z|<2, \quad -\pi/4\le \arg(z-1)\le \pi/4.$

4.17 $|z| \le 1, \quad \arg(z+i) > \pi/4.$

4.18 $1 < |z-i| \le 2, \quad \operatorname{Im} z \ge 0, \operatorname{Re} z < 1.$

4.19 $1 \le |z-i| < 2, \quad \operatorname{Re} z \le 0, \operatorname{Im} z > 1.$

4.20 $|z| < 2, \quad \operatorname{Re} z \ge 1, \arg z < \pi/4$

4.21 $|z| > 1 \quad -1 < \operatorname{Im} z \le 1, 0 < \operatorname{Re} z \le 2.$

4.22 $|z-1| > 1, \quad -1 \le \operatorname{Im} z < 0, 0 \le \operatorname{Re} z < 3.$

4.23 $|z+i| < 1, \quad -3\pi/4 \le \arg z \le -\pi/4.$

4.24 $|z-i| \le 1, \quad -\pi/2 < \arg(z-i) < \pi/4.$

4.25 $z\bar{z} < 2, \quad \operatorname{Re} z \le 1, \operatorname{Im} z > -1.$

4.26 $z\bar{z} \le 2, \quad \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z > -1.$

4.27 $1 < z\bar{z} < 2, \quad \operatorname{Re} z > 0, 0 \le \operatorname{Im} z \le 1.$

4.28 $|z-1| < 1, \quad \arg z \le \pi/4, \arg(z-1) > \pi/4.$

4.29 $|z-i| < 1, \quad \arg z \ge \pi/4, \arg(z+1-i) \le \pi/4.$

4.30 $|z-2-i| \ge 1, \quad 1 \le \operatorname{Re} z < 3, 0 < \operatorname{Im} z \le 3.$

4.31 $|\operatorname{Re} z| \le 1, \quad |\operatorname{Im} z| < 2.$

5-есеп. Қисықтың трін анықтау керек

5.1 $z = 3\sec t + i2tgt.$ **5.2** $z = 2\sec t - i3tgt.$

5.3 $z = -\sec t + i3tgt.$ **5.4** $z = 4tgt - i3\sec t.$

5.5 $z = 3tgt + i4\sec t.$ **5.6** $z = -4tgt - i2\sec t.$

5.7 $z = 3\cos ect + i3ctgt.$ **5.8** $z = 4\cos ect - i2ctgt.$

5.9 $z = ctgt - i2\cos ect.$ **5.10** $z = -ctgt + i3\cos ect.$

5.11 $z = 3ch2t + i2sh2t.$ **5.12** $z = 2ch3t - i3sh3t.$

5.13 $z = 5sh4t + i4ch4t.$ **5.14** $z = -4sh5t - i5ch5t.$

5.15 $z = \dfrac{2}{ch2t} + i4th2t.$ **5.16** $z = \dfrac{4}{ch4t} + i2th4t.$

5.17 $z = th5t + \dfrac{5i}{ch5t}.$ **5.18** $z = \dfrac{1}{sht} - icth t.$

5.19 $z = 2e^{it} + \dfrac{1}{2e^{it}}.$ **5.20** $z = 3e^{it} - \dfrac{1}{2e^{it}}.$

5.21 $z = -2e^{it} + \dfrac{1}{e^{it}}.$ **5.22** $z = 2e^{2it} - \dfrac{1}{e^{2it}}.$

5.23 $z = \dfrac{1+t}{1-t} + i\dfrac{2+t}{2-t}.$ **5.24** $z = \dfrac{t-1+it}{t(t-1)}.$

5.25 $z = \dfrac{1+i}{1-t} + i\dfrac{t}{1-t}(2-4i).$ **5.26** $z = \dfrac{2+t}{2-t} + i\dfrac{1+t}{1-t}.$

5.27 $z = t^2 + 4t + 20 - i(t^2 + 4t + 4).$

5.28 $z = t^2 + 2t + 5 + i(t^2 + 2t + 1).$

5.29 $z = 2t^2 + 2t + 1 - i(t^2 + t + 4).$

5.30 $z = t - 2 + i(t^2 - 4t + 5).$

5.31 $z = t^2 - 2t + 3 + i(t^2 - 2t + 1).$

6-есеп. Берілген нақты $u(x, y)$ немесе жорамал $v(x, y)$ бөлігі және $f(z_0)$ мәні бойынша z_0 нүктесінің маңайында аналитикалық $f(z)$ функциясын тұрғызу керек.

6.1 $u = x^2 - y^2 + x, f(0) = 0.$ **6.2** $u = x^3 - 3xy^2 + 1, f(0) = 1.$

6.3 $v = e^x(y\cos y + x\sin y), f(0) = 0.$

6.4 $u = x^2 - y^2 - 2y, f(0) = 0.$

6.5 $u = \dfrac{e^{2x} + 1}{e^x}\cos y, f(0) = 2.$ **6.6** $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2},\ f(1) = 1 + i.$

6.7 $v = e^{-y}\sin x + y, f(0) = 1.$ **6.8** $v = e^x\cos y, f(0) = 1 + i.$

6.9 $v = -\dfrac{y}{(x+1)^2 + y^2}, f(0) = 1.$

6.10 $v = y - \dfrac{y}{x^2 + y^2}, f(1) = 2.$

6.11 $u = e^{-y}\cos x, f(0) = 1.$ **6.12** $u = y - 2xy, f(0) = 0.$

6.13 $v = x^2 - y^2 + 2x + 1, f(0) = i.$

6.14 $u = x^2 - y^2 - 2x + 1, f(0) = 1.$

6.15 $v = 3x^2y - y^3 - y, f(0) = 0.$

6.16 $v = 2xy + y, f(0) = 0.$

6.17 $v = 3x^2y - y^3, f(0) = 1.$

6.18 $u = e^x(x\cos y - y\sin y), f(0) = 0.$

6.19 $v = 2xy + 2x, f(0) = 0.$

6.20 $u = 1 - \sin y \cdot e^x, f(0) = 1 + i.$

6.21 $v = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^x} \sin y, f(0) = 2.$

6.22 $v = 1 - \dfrac{y}{x^2 + y^2}, f(1) = 1 + i.$

6.23 $u = e^{-y} \cos x + x, f(0) = 1.$ **6.24** $v = e^{-y} \sin x, f(0) = 1.$

6.25 $u = \dfrac{x+1}{(x = 1)^2 + y^2}, f(0) = 1.$

6.26 $u = x/(x^2 + y^2) + x, f(1) = 2.$

6.27 $v = x^2 - y^2 - x, f(0) = 0.$ **6.28** $u = -2xy - 2y, f(0) = i.$

6.29 $v = 2xy - 2y, f(0) = 1.$

6.30 $u = x^3 - 3xy^2 - x, f(0) = 0.$

6.31 $v = 2xy + x, f(0) = 0.$

7-есеп. Комплек айнымалды функцияны берілген қисық бойынша интегралдау керек.

7.1 $\int\limits_{AB} \bar{z}^2 dz; \quad AB : \{y = x^2; z_A = 0, z_B = 1 + i\}.$

7.2 $\int\limits_{L} (z+1)e^z dz; \quad L : \{|z| = 1; \operatorname{Re} z \geq 0\}.$

7.3 $\int\limits_{AB} \operatorname{Im} z^3 dz; \; z_A = 0, z_B = 2 + 2i, \; AB -$ кесінді.

7.4 $\int\limits_{AB} (z^2 + 7z + 1) dz; \; z_A = 1, z_B = 1 - i, \quad AB -$ кесінді.

7.5 $\int\limits_{ABC} |z|dz;\ z_A = 0, z_B = -1+i, z_C = 1+i,\ ABC -$ сынық сызық.

7.6 $\int\limits_{AB} (12z^5 + 4z^3 + 1)dz;\ z_A = 1, z_B = i,\ AB -$ кесінді.

7.7 $\int\limits_{AB} \bar{z}^2 dz;\ z_A = 0, z_B = 1+i,\ AB -$ кесінді.

7.8 $\int\limits_{ABC} z^3 e^{z^4} dz;\ z_A = i, z_B = 1, z_C = 0,\ ABC -$ сынық сызық.

7.9 $\int\limits_{ABC} \operatorname{Re}\frac{\bar{z}}{z} dz; AB: \{|z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\},\ z_B = 1, z_C = 2,$

$BC -$ кесінді.

7.10 $\int\limits_{ABC} (z^2 + \cos z)dz;\ z_A = 0, z_B = 1, z_C = i,$

$ABC -$ сынық сызық.

7.11 $\int\limits_{L} \frac{\bar{z}}{z} dz;\ L:\ \{1 < |z| < 2, \operatorname{Re} z > 0\} -$ аймағының шекарасы.

7.12 $\int\limits_{ABC} (chz + \cos iz)dz;\ z_A = 0, z_B = -1, z_C = i,\ ABC -$ сынық сызық.

7.13 $\int\limits_{L} |z|\bar{z}dz; L: \{|z| = 4, \operatorname{Re} z \geq 0\}.$

7.14 $\int\limits_L (chz+z)dz; L:\{|z|=1, \operatorname{Im} z \le 0\}$.

7.15 $\int\limits_L |z| \operatorname{Re} z^2 dz; L:\{|z|=R, \operatorname{Im} z \ge 0\}$.

7.16 $\int\limits_{AB} (3z^2+2z)dz; AB:\{y=x^2; z_A=0, z_B=1+i\}$.

7.17 $\int\limits_L z \operatorname{Re} z^2 dz; L:\{|z|=R, \operatorname{Im} z \ge 0\}$.

7.18 $\int\limits_{ABC} (z^2+1)dz;\ z_A=0, z_B=-1+i, z_C=i,\ ABC-$ сынық сызық.

7.19 $\int\limits_{AB} e^{|z|^2} \operatorname{Im} z dz;\ z_A=1+i, z_B=0,\ AB-$ кесінді.

7.20 $\int\limits_L (\sin iz+z)dz; L:\{|z|=1, \operatorname{Re} z \ge 0\}$.

7.21 $\int\limits_{AB} z \operatorname{Re} z^2 dz;\ z_A=0, z_B=1+2i,\ AB-$ кесінді.

7.22 $\int\limits_{AB} (2z+1)dz; AB:\{y=x^3; z_A=0, z_B=1+i\}$.

7.23 $\int\limits_{ABC} z\bar{z}dz;\ AB:\{|z|=1, \operatorname{Re} z \ge 0, \operatorname{Im} z \ge 0\},\ z_B=1, z_C=0,$

$BC-$ кесінді.

7.24 $\int\limits_L (\cos iz + 3z^2)dz; L: \{|z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

7.25 $\int\limits_L |z| dz; L: \{|z| = \sqrt{2}, 3\pi/4 \leq \arg z \leq 5\pi/4\}$.

7.26 $\int\limits_{ABC} (z^9 + 1)dz;\ z_A = 0, z_B = 1 + i, z_C = i,$

$ABC -$ сынық сызық.

7.27 $\dfrac{1}{2i} \int\limits_{|z|=R} \bar{z} dz.$

7.28 $\int\limits_{ABC} (\sin z + z^5)dz;\ z_A = 0, z_B = 1, z_C = 2i,$

$ABC -$ сынық сызық.

7.29 $\int\limits_{AB} z \operatorname{Im} z^2 dz;\ \ z_A = 0, z_B = 1 + i,\ \ AB -$ кесінді.

7.30 $\int\limits_L (z^3 + \sin z)dz; L: \{|z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$.

7.31 $\int\limits_L z|z| dz; L: \{|z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

8-есеп. Берілген функцияның z дәрежесі бойынша барлық Лоран қатарларын табу керек.

8.1 $\dfrac{z-2}{2z^3 + z^2 - z}$.

8.2 $\dfrac{z-4}{z^4 + z^3 - 2z^2}$.

8.3 $\dfrac{3z-18}{2z^3+3z^2-9z}$.

8.4 $\dfrac{2z-16}{z^4+2z^3-8z^2}$.

8.5 $\dfrac{5z-50}{2z^3+5z^2-25z}$.

8.6 $\dfrac{3z-36}{z^4+3z^3-18z^2}$.

8.7 $\dfrac{7z-98}{2z^3+7z^2-49z}$.

8.8 $\dfrac{4z-64}{z^4+4z^3-32z^2}$.

8.9 $\dfrac{9z-162}{2z^3+9z^2-81z}$.

8.10 $\dfrac{5z-100}{z^4+5z^3-50z^2}$.

8.11 $\dfrac{11z-242}{2z^3+11z^2-121z}$.

8.12 $\dfrac{6z-144}{z^4+6z^3-72z^2}$.

8.13 $\dfrac{13z-338}{2z^3+12z^2-169z}$.

8.14 $\dfrac{7z-196}{z^4+7z^3-98z^2}$.

8.15 $\dfrac{15z-450}{2z^3+15z^2-225z}$.

8.16 $\dfrac{8z-256}{z^4+8z^3-128z^2}$.

8.17 $\dfrac{z+2}{z+z^2-2z^3}$.

8.18 $\dfrac{z+4}{2z^2+z^3-z^4}$.

8.19 $\dfrac{3z+18}{9z+3z^2-2z^3}$.

8.20 $\dfrac{2z+16}{8z^2+2z^3-z^4}$.

8.21 $\dfrac{5z+50}{25z+5z^2-2z^3}$.

8.22 $\dfrac{3z+36}{18z^2+3z^3-z^4}$.

8.23 $\dfrac{7z+98}{49z+7z^2-2z^3}$.

8.24 $\dfrac{4z+64}{32z^2+4z^3-z^4}$.

8.25 $\dfrac{9z+162}{81z+9z^2-2z^3}$.

8.26 $\dfrac{5z+100}{50z^2+5z^3-z^4}$.

8.27 $\dfrac{11z+242}{121z+11z^2-2z^3}$.

8.28 $\dfrac{6z+144}{72z^2+6z^3-z^4}$.

8.29 $\dfrac{13z+338}{169z+13z^2-2z^3}.$

8.30 $\dfrac{7z+196}{98z^2+7z^3-z^4}.$

8.31 $\dfrac{15z+450}{225z+15z^2-2z^3}.$

9-есеп. Берілген функцияның z-z_0 дәрежесі бойынша барлық Лоран қатарларын табу керек.

9.1 $\dfrac{z+1}{z(z-1)}, z_0=1+2i.$

9.2 $\dfrac{z+1}{z(z-1)}, z_0=2-3i.$

9.3 $\dfrac{z+1}{z(z-1)}, z_0=-3-2i.$

9.4 $\dfrac{z+1}{z(z-1)}, z_0=-2+i.$

9.5 $\dfrac{z-1}{z(z+1)}, z_0=1+3i.$

9.6 $\dfrac{z-1}{z(z+1)}, z_0=2-i.$

9.7 $\dfrac{z-1}{z(z+1)}, z_0=-1+2i.$

9.8 $\dfrac{z-1}{z(z+1)}, z_0=-2-3i.$

9.9 $\dfrac{z+3}{z^2-1}, z_0=2+i.$

9.10 $\dfrac{z+3}{z^2-1}, z_0=3-i.$

9.11 $\dfrac{z+3}{z^2-1}, z_0=-2+3i.$

9.12 $\dfrac{z+3}{z^2-1}, z_0=-2-2i.$

9.13 $\dfrac{z}{z^2+1}, z_0=2+i.$

9.14 $\dfrac{z}{z^2+1}, z_0=1-2i.$

9.15 $\dfrac{z}{z^2+1}, z_0=-3+i.$

9.16 $\dfrac{z}{z^2+1}, z_0=-3-2i.$

9.17 $4\cdot\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}, z_0=-2+2i.$

9.18 $4\cdot\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}, z_0=1-3i.$

9.19. $\dfrac{4(z+2)}{(z-1)(z+3)}$ **, z_0=-3-i.**

9.20. $\dfrac{4(z+2)}{(z-1)(z+3)}$, z_0=-2+1.

9.21. $\dfrac{4(z-2)}{(z+1)(z-3)}$ **, z_0=-1-2i.**

9.22. $\dfrac{4(z-2)}{(z+1)(z-3)}$, z_0=3+i.

9.23. $\dfrac{4(z-2)}{(z+1)(z-3)}$ **, z_0=2-2i.**

9.24. $\dfrac{4(z-2)}{(z+1)(z-3)}$, z_0=-2-i.

9.25. $\dfrac{2z}{z^2+4}$**, z_0=-1-3i.**

9.26. $\dfrac{2z}{z^2+4}$, z_0=-3+2i.

9.27. $\dfrac{2z}{z^2+4}$, z_0=2+3i.

9.28. $\dfrac{2z}{z^2+4}$, z_0=3+2i.

9.29. $\dfrac{2z}{z^2-4}$, z_0=-1+3i.

9.30. $\dfrac{2z}{z^2-4}$, z_0 =2+2i.

9.31. $\dfrac{2z}{z^2-4}$, z_0=3-2i.

10-есеп. Берілген функцияның z_0 дәрежесі бойынша барлық Лоран қатарларын табу керек.

10.1. $z\cos\dfrac{1}{z-2}$**,** z_0 =2.

10.2. $\sin\dfrac{z}{z-1}$, z_0=1.

10.3. $ze^{z/(z-5)}$, z_0=5.

10.4. $\sin\dfrac{2z-2}{z+2}$, z_0=-2.

10.5. $\cos\dfrac{3z}{z-i}$, z_0=i.

10.6. $\sin\dfrac{5z}{z-2i}$, z_0=2i.

10.7. $\sin\dfrac{3z-i}{3z+i}$, $z_0=-i/3$. **10.8**. $z\cos\dfrac{3z}{z-1}$, $z_0=1$.

10.9. $z\sin\dfrac{z}{z-1}$, $z_0=1$. **10.10.** $(z-3)\cos\dfrac{\pi(z-3)}{z}$, $z_0=0$.

10.11. $z^2\sin\pi\dfrac{z+1}{z}$, $z_0=0$. **10.12.** $z\cos\dfrac{z}{z+2i}$, $z_0=-2i$.

10.13. $\cos\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$, $z_0=2$. **10.14.** $\sin\dfrac{z+i}{z-i}$, $z_0=i$.

10.15. $\sin\dfrac{z}{z-3}$, $z_0=3$. **10.16**. $ze^{\frac{1}{z-2}}$, $z_0=2$.

10.17. $e^{\frac{z}{z-3}}$, $z_0=3$. **10.18**. $\sin\dfrac{2z}{z-4}$, $z_0=4$.

10.19. $\sin\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$, $z_0=2$. **10.20**. $e^{\frac{4z-2z^2}{(z-1)^2}}$, $z_0=1$.

10.21. $ze^{\frac{\pi}{(z-a)^2}}$, $z_0=a$. **10.22.** $ze^{\frac{\pi z}{z-\pi}}$, $z_0=\pi$.

10.23. $z\sin\pi\dfrac{z+2}{z}$, $z_0=0$. **10.24.** $z\cos\pi\dfrac{z+3}{z-1}$, $z_0=1$.

10.25. $z^2\sin\dfrac{z+3}{z}$, $z_0=0$. **10.26.** $z\sin\dfrac{z^2-2z}{(z-1)^2}$, $z_0=1$.

10.27. $z\cos\dfrac{z}{z-3}$, $z_0=3$. **10.28.** $z\sin\pi\dfrac{z-1}{z-2}$, $z_0=2$.

10.29. $z\cos\dfrac{z}{z-5}$, $z_0=5$. **10.30**. $ze^{\frac{z}{z-4}}$, $z_0=4$.

10.31. $z\sin\dfrac{\pi z}{z-a}$, $z_0=a$.

11-есеп. Берілген функцияның $z=0$ ерекше нүктесінің түрін анықтау керек.

11.1. $\dfrac{e^{9z}-1}{\sin z - z + z^3/6}$.

11.2. $z^3 e^{7/z^2}$.

11.3. $\dfrac{\sin 8z - 6z}{\cos z - 1 + z^2/2}$.

11.4. $\dfrac{\cos 7z - 1}{shz - z - z^3/6}$.

11.5. $\dfrac{sh6z - 6z}{chz - 1 - z^2/2}$.

11.6. $\dfrac{ch5z - 1}{e^z - 1 - z}$.

11.7. $z\sin\dfrac{6}{z^2}$.

11.8. $\dfrac{e^z - 1}{\sin z - z + z^3/6}$.

11.9. $\dfrac{\sin z^2 - z^2}{\cos z - 1 + z^2/2}$.

11.10. $\dfrac{\cos z^2 - 1}{shz - z - z^3/6}$.

11.11. $\dfrac{e^{5z}-1}{chz - 1 - z^2/2}$.

11.12. $\dfrac{\sin 4z - 4z}{e^z - 1 - z}$.

11.13. $z^4\cos\dfrac{5}{z^2}$.

11.14. $\dfrac{\cos 3z - 1}{\sin z - z + z^3/6}$.

11.15. $\dfrac{sh2z - 2z}{\cos z - 1 + z^2/2}$.

11.16. $\dfrac{ch2z - 1}{shz - z - z^3/6}$.

11.17. $\dfrac{e^{z^3}}{chz - 1 - z^2/2}$.

11.18. ze^{4/z^3} .

11.19. $\dfrac{\sin z^3 - z^3}{e^z - 1 - z}$.

11.20. $\dfrac{\cos z^3 - 1}{\sin z - z + z^3/6}$.

11.21. $\dfrac{e^{7z}-1}{\cos z-1+z^2/2}$.

11.22. $\dfrac{\sin 6z-6z}{shz-z-z^3/6}$.

11.23. $z\sin\dfrac{3}{z^3}$.

11.24. $\dfrac{\cos 5z-1}{chz-1-z^2/2}$.

11.25. $\dfrac{sh4z-4z}{e^z-1-z}$.

11.26. $\dfrac{ch3z-1}{\sin z-z+z^3/6}$.

11.27. $\dfrac{e^{z^4}-1}{\cos z-1+z^2/2}$.

11.28. $\dfrac{\sin z^4-z^4}{shz-z-z^3/6}$.

11.29. $z\cos\dfrac{2}{z^3}$.

11.30. $\dfrac{\cos z^4/2}{chz-1-z^2/2}$.

11.31. $(e^{z^5}-1)/(e^z-1-z)$.

12-есеп. Берілген функцияның ерекше нүктелерін тауып, олардың түрлерін анықтау керек.

12.1. $e^{1/2}/\sin(1/z)$.

12.2. $1/\cos z$.

12.3. $tg^2 z$.

12.4. $ztgze^{1/z}$.

12.5. $\dfrac{e^z-1}{z^3(z+1)^2}$.

12.6. $\dfrac{z^2+1}{(z-i)^2(z^2+4)}$.

12.7. $\dfrac{(z+\pi)\sin\frac{\pi}{2}z}{z\sin^2 z}$.

12.8. $tg\dfrac{1}{z}$.

12.9. $ctg\dfrac{1}{z}$.

12.10. $\dfrac{1}{e^z+1}$.

12.11. $ctg\pi z$.

12.12. $\dfrac{\sin \pi z}{(z-1)^3}$.

12.13. $\dfrac{1}{\sin z^2}$.

12.14. $\dfrac{\sin 3z - 3\sin z}{z(\sin z - z)}$.

12.15. $\dfrac{1}{e^2 - 1} - \dfrac{1}{z}$.

12.16. $\dfrac{e^z - 1}{\sin \pi z}$.

12.17. thz.

12.18. $\dfrac{\sin z}{z^3(1-\cos z)}$.

12.19. $\dfrac{e^{1/z}}{(e^z - 1)(1-z)^3}$.

12.20. $\dfrac{1}{z^2} + \sin\dfrac{1}{z^2}$.

12.21. $\dfrac{z^2}{(z^2-4)^2 \cos\dfrac{1}{z-2}}$.

12.22. $z^2 \sin\dfrac{1}{z}$.

12.23. $\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{2}z}{z^4 - 1}$

12.24. $\dfrac{\sin \pi z}{(z^3-1)^2}$.

12.25. $\dfrac{\sin^3 z}{z(1-\cos z)}$.

12.26. $ctg\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z}$.

12.27. $\dfrac{\sin 3z^2}{z(z^3+1)} e^{1/z}$.

12.28. $\dfrac{\cos \pi z}{(4z^2-1)(z^2+1)}$.

12.29. $\dfrac{\sin 3z}{z(1-\cos z)}$.

12.30. $\dfrac{2z - \sin 2z}{z^2(z^2+1)}$.

12.31. $\dfrac{\sin \pi z}{z^4 - 1} e^{1/z}$.

13-есеп. Интегралды есептеу керек.

13.1. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{dz}{z(z^2+1)}$.

13.2. $\oint\limits_{|z-1-i|=5/4} \frac{2dz}{z^2(z-1)}$.

13.3. $\oint\limits_{|z-i|=3/2} \frac{dz}{z(z^2+4)}$.

13.4. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{2+\sin z}{z(z+2i)}dz$.

13.5. $\oint\limits_{|z-3|=1/2} \frac{e^z dz}{\sin z}$.

13.6. $\oint\limits_{|z-3/2|=2} \frac{z(\sin z+2)}{\sin z}dz$.

13.7. $\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{ze^z dz}{\sin z}$.

13.8. $\oint\limits_{|z-3/2|=2} \frac{2z|z-1|dz}{\sin z}$.

13.9. $\oint\limits_{|z-1/4|=1/3} \frac{z(z+1)^2 dz}{\sin 2\pi z}$.

13.10. $\oint\limits_{|z-1/2|=1} \frac{iz(z-i)dz}{\sin \pi z}$.

13.11. $\oint\limits_{|z-3|=1} \frac{(\sin 3z+2)dz}{z^2(z-\pi)}$.

13.12. $\oint\limits_{|z-1/2|=1} \frac{(e^z+1)dz}{z(z-1)}$.

13.13. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{(e^{zi}+2)dz}{\sin 3zi}$.

13.14. $\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{(\cos^2 z+1)dz}{z^2-\pi^2}$.

13.15. $\oint\limits_{|z-1|=3/2} \frac{\ln(z+2)dz}{\sin z}$.

13.16. $\oint\limits_{|z-6|=1} \frac{(\sin^3 z+2)dz}{z^2-4\pi^2}$.

13.17. $\oint\limits_{|z+1|=1/2} \frac{(tgz+2)dz}{4z^2+\pi z}$.

13.18. $\oint\limits_{|z+3/2|=1} \frac{(\cos^2 z+3)dz}{2z^2+\pi z}$.

13.19. $\oint\limits_{|z+1|=2} \frac{(\sin^2 z+3)dz}{z^2+2\pi z}$.

13.20. $\oint\limits_{|z|-1/4} \frac{\ln(z+e)dz}{z\sin(z+\frac{\pi}{4})}$.

13.21. $\oint\limits_{|z|=\pi/2} \frac{(z^2+z+3)dz}{\sin z(\pi+z)}$. **13.22.** $\oint\limits_{|z|=1} \frac{(z^3-i)dz}{\sin 2z(z-\pi)}$.

13.23. $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{z(z+\pi)dz}{\sin 2z}$. **13.24.** $\oint\limits_{|z|=2} \frac{(z^2+\sin z+2)dz}{z^2+\pi z}$.

13.25. $\oint\limits_{|z-3/2|=1} \frac{z(z+\pi)dz}{\sin 3z(z-\pi)}$. **13.26.** $\oint\limits_{|z-3/2|=2} \frac{\sin z dz}{z(z-\pi)(z+\frac{\pi}{3})}$.

13.27. $\oint\limits_{|z-\pi|} \frac{(z^2+\pi)^2 dz}{i\sin z}$. **13.28.** $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin^2 z dz}{z\cos z}$.

13.29. $\oint\limits_{|z-\pi|=2} \frac{\cos^2 z dz}{z\sin z}$. **13.30.** $\oint\limits_{|z-3/2|=2} \frac{(z^3+\sin 2z)dz}{\sin\frac{z}{2}(z-\pi)}$.

13.31. $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{(z^2+1)dz}{(z^2+4)\sin\frac{z}{3}}$.

14-есеп. Интегралды есептеу керек.

14.1. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z^2-1}{z^3}dz$. **14.2.** $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{2-z^2+3z^3}{4z^3}dz$.

14.3. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^{1/z}+1}{z}dz$. **14.4.** $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z^3}{1-\cos z}dz$.

14.5. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{1-2z+3z^2+4z^3}{2z^2}dz$. **14.6.** $\oint\limits_{|z|=2} \frac{1-\cos z^2}{z^2}dz$.

14.7. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{3z^4 - 2z^3 + 5}{z^4} dz$.

14.8. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{1 - \sin \frac{1}{z}}{z} dz$.

14.9. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{e^{2z^2} - 1}{z^3} dz$.

14.10. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{3 - 2z + 4z^4}{z^3} dz$.

14.11. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z - \sin z}{2z^4} dz$.

14.12. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^3 - 3z^2 + 1}{2z^4} dz$.

14.13. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{4z^5 - 3z^3 + 1}{z^6} dz$.

14.14. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z} - z}{z^2} dz$.

14.15. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos iz - 1}{z^3} dz$.

14.16. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos iz - 1}{z^3} dz$.

14.17. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{1 - 2z^4 + 3z^5}{z^4} dz$.

14.18. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^2 + \cos z}{z^3} dz$.

14.19. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{z^5 - 3z^3 + 5z}{z^4} dz$.

14.20. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z - \sin z}{z^4} dz$.

14.21. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos z^2 - 1}{z^4} dz$.

14.22. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{2 + 3z^3 - 5z^4}{z^5} dz$.

14.23. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{ze^{\frac{1}{z}} - z - 1}{z^3} dz.$

4.24. $\oint\limits_{|z|=2} z^2 \sin \frac{i}{z^2} dz.$

14.25. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{z^4 + 2z^2 + 3}{2z^6} dz.$

14.26. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{iz} - 1}{z^3} dz.$

14.27. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{1-z^4+3z^6}{2z^3}dz.$ **14.28.** $\oint\limits_{|z|=2} z^3 \cos\frac{2i}{z}dz.$

14.29. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{e^z-\sin z}{z^2}dz.$ **14.30.** $\oint\limits_{|z|=3} \frac{2z^3+3z^2-2}{2z^5}dz.$

14.31. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2 e^{1/z^2}-1}{z}dz.$

15-есеп. Интегралды есептеу керек.

15.1. $\oint\limits_{|z|=0,2} \frac{3\pi z-\sin 3\pi z}{z^2-sh^2\pi^2 z}dz.$ **15.2.** $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos 3z-1+9z^2/2}{z^4 sh\frac{9}{4}z}dz.$

15.3. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{sh2\pi z-2\pi z}{z^2\sin^2\frac{\pi^2 z}{3}}dz.$ **15.4.** $\oint\limits_{|z|=2} \frac{ch3z-1-9z^2/2}{z^4\sin\frac{9z}{8}}dz.$

15.5. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{2z}-1-2z}{zsh^2 4iz}dz.$ **15.6.** $\oint\limits_{|z|=0,4} \frac{e^{4z}-\cos 7z}{zsh2\pi z}dz.$

15.7. $\oint\limits_{|z|=0,2} \frac{e^{8z}ch4z}{z\sin 4\pi z}dz.$ **15.8.** $\oint\limits_{|z|=0,1} \frac{chz-\cos 3z}{z^2\sin 5\pi z}dz.$

15.9. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{sh3z-\sin 3z}{z^3 sh2z}dz.$ **15.10.** $\oint\limits_{|z|=0,05} \frac{e^{4z}-1-\sin 4z}{z^3 sh16z}dz.$

15.11. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{6z-\sin 6z}{z^2 sh^2 2z}dz.$ **15.12.** $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos 4z-1+8z^2}{z^4 sh\frac{4z}{3}}dz.$

15.13. $$\oint\limits_{|z|=5}\frac{sh\pi z-\pi z}{z^2\sin^2\dfrac{\pi z}{6}}dz.$$

15.14. $$\oint\limits_{|z|=1}\frac{ch4z-8z^2-1}{z^4\sin\frac{8z}{3}}dz.$$

15.15. $$\oint\limits_{|z|=0,9}\frac{e^{3z}-1-3z}{sh^2\pi z}dz.$$

15.16. $$\oint\limits_{|z|=0,5}\frac{e^{6z}-\cos 8z}{zsh4z}dz.$$

15.17. $$\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^{7z}-ch5z}{z\sin 2iz}dz.$$

15.18. $$\oint\limits_{|z|=0,5}\frac{ch3z-\cos 4iz}{z^2\sin 5z}dz.$$

15.19. $$\oint\limits_{|z|=2}\frac{sh3z-\sin 3z}{z^3sh-iz}dz.$$

15.20. $$\oint\limits_{|z|=0,5}\frac{e^{5z}-1-\sin 5z}{z^2sh5z}dz.$$

15.21. $$\oint\limits_{|z|=2}\frac{\sin 3z-3z}{z^2sh^2iz}dz.$$

15.22. $$\oint\limits_{|z|=2}\frac{\cos 2z-1+2z^2}{z^4sh\frac{\pi z}{3}}dz.$$

15.23. $$\oint\limits_{|z|=5}\frac{sh2z-2z}{z^2\sin^2\frac{z}{3}}dz.$$

15.24. $$\oint\limits_{|z|=1}\frac{ch2z-1-2z^2}{z^4\sin\frac{2\pi z}{3}}dz.$$

15.25. $$\oint\limits_{|z|=0,4}\frac{e^{2z}-1-2z}{zsh^2 2\pi z}dz.$$

15.26. $$\oint\limits_{|z|=0,3}\frac{e^{4z}-1-\sin 4z}{z^2sh8iz}dz.$$

15.27. $$\oint\limits_{|z|=0,5}\frac{e^{5z}-ch6z}{z\sin \pi z}dz.$$

15.28. $$\oint\limits_{|z|=0,2}\frac{ch2z-\cos 2z}{z^2\sin 8z}dz.$$

15.29. $$\oint\limits_{|z|=4}\frac{shiz-\sin iz}{z^3sh\frac{z}{3}}dz.$$

15.30. $$\oint\limits_{|z|=0,3}\frac{e^{3z}-1-\sin 3z}{z^2sh3\pi z}dz.$$

15.31. $$\oint\limits_{|z|=0,5}\frac{e^{2z}-\cos 9z}{zsh\pi iz}dz.$$

16-есеп. Интегралды есептеу керек.

16.1. $$\oint\limits_{|z+i|=3}\left(\frac{4\sin\frac{\pi z}{4-2i}}{(z-2+i)^2(z-4+i)}+\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}\right)dz.$$

16.2. $$\oint\limits_{|z+6|=2}\left(ze^{\frac{1}{z+6}}+\frac{2\cos\pi z/5}{(z+5)^2(z+3)}\right)dz.$$

16.3. $$\oint\limits_{|z-i|=3}\left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}-i}-\frac{2sh\frac{\pi iz}{4+2i}}{(z-2-i)^2(z-4-i)}\right)dz.$$

16.4. $$\oint\limits_{|z+2|=2}\left(zch\frac{1}{z+2}-\frac{2\sin(\pi z/2)}{(z+1)^2(z-1)}\right)dz.$$

16.5. $$\oint\limits_{|z-2i|=2}\left(\frac{2\cos\frac{\pi z}{2+2i}}{(z-2-2i)^2(z-4-2i)}+\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}\right)dz.$$

16.6. $$\oint\limits_{|z+3|=2}\left(zsh\frac{i}{z+3}-\frac{4sh(\pi iz/4)}{(z+2)^2 z}\right)dz.$$

16.7. $$\oint\limits_{|z+5i|=2}\left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}+\frac{8ch\frac{\pi iz}{1-5i}}{(z-1+5i)^2(z-3+5i)}\right)dz.$$

16.8. $$\oint\limits_{|z+4|=2}\left(z\cos\frac{1}{z+4}+\frac{2\sin(\pi z/6)}{(z+3)^2(z+1)}\right)dz.$$

16.9. $$\oint\limits_{|z-7i|=2}\left(\frac{2\sin\frac{\pi iz}{2+14i}}{(z-1-7i)^2(z-3-7i)}+\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+i}\right)dz.$$

16.10. $$\oint\limits_{|z+5|=2}\left(z\sin\frac{1}{z+5}+\frac{2ch(\pi iz/4)}{(z+4)^2(z+2)}\right)dz.$$

16.11. $$\oint_{|z-3i|=2}\left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}+\frac{2\cos\frac{\pi z}{1+3i}}{(z-1-3i)^2(z-3-3i)}\right)dz.$$

16.12. $$\oint_{|z-1|=2}\left(ze^{\frac{2}{z-1}}+\frac{2\cos \pi z/2}{(z-2)^2(z-4)}\right)dz.$$

16.13. $$\oint_{|z+i|=2}\left(\frac{2\sin\frac{\pi z}{2-2i}}{(z-1+i)^2(z-3+i)}-\frac{3\pi i}{e^{\pi z/2}+i}\right)dz.$$

16.14. $$\oint_{|z-2|=2}\left(zch\frac{3}{z-2}+\frac{2\cos \pi z/3}{(z-3)^2(z-5)}\right)dz.$$

16.15. $$\oint_{|z+7i|=2}\left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i}-\frac{8ch\frac{\pi iz}{1-7i}}{(z-1+7i)^2(z-3+7i)}\right)dz.$$

16.16. $$\oint_{|z-3|=2}\left(zsh\frac{1}{z-3}-\frac{2\sin \pi z/8}{(z-4)^2(z-6)}\right)dz.$$

16.17. $$\oint_{|z+3i|=2}\left(\frac{4sh\frac{\pi iz}{2-6i}}{(z-1+3i)^2(z-3+3i)}-\frac{\pi}{e^{\pi z/2}-i}\right)dz.$$

16.18. $$\oint_{|z-4|=2}\left(z\cos\frac{1}{z-4}+\frac{10ch\pi iz/5}{(z-5)^2(z-7)}\right)dz.$$

16.19. $$\oint_{|z-5i|=2}\left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i}+\frac{2\cos\frac{\pi z}{1+5i}}{(z-1-5i)^2(z-3-5i)}\right)dz.$$

16.20. $$\oint_{|z-5|=2}\left(z\sin\frac{i}{z-5}+\frac{2sh\pi iz/12}{(z-6)^2(z-8)}\right)dz.$$

16.21. $$\oint\limits_{|z-i|=2}\left(\frac{4\sin\frac{\pi z}{2+2i}}{(z-1-i)^2(z-3i)}+\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i}\right)dz.$$

16.22. $$\oint\limits_{|z-6|=2}\left(ze^{\frac{1}{z-6}}-\frac{2ch\pi iz/5}{(z-5)^2(z-3)}\right)dz.$$

16.23. $$\oint\limits_{|z-6i|=2}\left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}-\frac{2ch\frac{\pi iz}{1+6i}}{(z-1-6i)^2(z-3-6i)}\right)dz.$$

16.24. $$\oint\limits_{|z-5|=2}\left(zch\frac{2}{z-5}+\frac{2\cos\pi z/4}{(z-4)^2(z-2)}\right)dz.$$

16.25. $$\oint\limits_{|z+6i|=2}\left(\frac{2sh\frac{\pi iz}{2-12i}}{(z-1+6i)^2(z-3+6i)}+\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+1}\right)dz.$$

16.26. $$\oint\limits_{|z-4|=2}\left(zsh\frac{1}{z-4}+\frac{2\sin\pi z/6}{(z-3)^2(z-1)}\right)dz.$$

16.27. $$\oint\limits_{|z+2i|=2}\left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}+\frac{4\cos\frac{\pi z}{1-2i}}{(z-1+2i)^2(z-3+2i)}\right)dz.$$

16.28. $$\oint\limits_{|z-3|=2}\left(z\cos\frac{1}{z-3}+\frac{4ch\pi iz/2}{z(z-2)^2}\right)dz.$$

16.29. $$\oint\limits_{|z-2i|=2}\left(\frac{2\sin\frac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)}-\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}\right)dz.$$

16.30. $$\oint\limits_{|z-2|=2}\left(z\sin\frac{i}{z-2}-\frac{2sh\pi iz/2}{(z-1)^2(z+1)}\right)dz.$$

16.31. $$\oint\limits_{|z+2i|=3}\left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}+\frac{6ch\,\frac{\pi iz}{2-2i}}{(z-2+2i)^2(z-4-2i)}\right)dz.$$

17-есеп. Интегралды есептеу керек.

17.1. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2+\sqrt{3}\sin t}.$$

17.2. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4+\sqrt{15}\sin t}.$$

17.3. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5+2\sqrt{6}\sin t}.$$

17.4. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{6+\sqrt{35}\sin t}.$$

17.5. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{7+4\sqrt{3}\sin t}.$$

17.6. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5-4\sin t}.$$

17.7. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5-3\sin t}.$$

17.8. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{8-3\sqrt{7}\sin t}.$$

17.9. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{9-4\sqrt{5}\sin t}.$$

17.10. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4-\sqrt{7}\sin t}.$$

17.11. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3-\sqrt{5}\sin t}.$$

17.12 $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3-\sqrt{5}\sin t}.$$

17.13. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4-2\sqrt{3}\sin t}.$$

17.14. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3-\sqrt{5}\sin t}$$

17.15. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{6-4\sqrt{2}\sin t}.$$

17.16. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3-\sqrt{5}\sin t}$$

17.17. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{3}\sin t-2}.$$

17.18. $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3-\sqrt{5}\sin t}$$

17.19. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{6}\sin t - 5}$.

17.20. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - \sqrt{5}\sin t}$

17.21. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{3}\sin t - 7}$.

17.22. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - \sqrt{5}\sin t}$

17.23. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3\sin t + 5}$.

17.24. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3\sqrt{7}\sin t + 8}$.

17.25. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{5}\sin t + 9}$.

17.26. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - \sqrt{5}\sin t}$

17.27. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{5}\sin t + 3}$.

17.28. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - \sqrt{5}\sin t}$

17.29. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{3}\sin t + 4}$.

17.30. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - \sqrt{5}\sin t}$

17.31. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{2}\sin t + 6}$.

18-есеп. Интегралды есептеу керек.

18.1. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(1 + \sqrt{10/11}\cos t)^2}$.

18.2. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(\sqrt{5} + \cos t)^2}$.

18.3. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(1 + \sqrt{6/7}\cos t)^2}$.

18.4. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(2\sqrt{3} + \sqrt{11}\cos t)^2}$.

18.5. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\cos t)^2}$. **18.6.** $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(4+\cos t)^2}$.

18.7. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(4+3\cos t)^2}$. **18.8.** $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(\sqrt{5}+\sqrt{3}\cos t)^2}$.

18.9. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(\sqrt{7}+2\cos t)^2}$ **18.10.** $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(4+\sqrt{7}\cos t)^2}$.

18.11. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(3+\sqrt{5}\cos t)^2}$. **18.12.** $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(3+2\sqrt{2}\cos t)^2}$.

18.13. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(2\sqrt{2}+\sqrt{7}\cos t)^2}$. **18.14.** $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(\sqrt{6}+\cos t)^2}$.

18.15. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(\sqrt{6}+\sqrt{5}\cos t)^2}$. **18.16.** $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(\sqrt{7}+\sqrt{5}\cos t)^2}$.

18.17. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(\sqrt{2}+\cos t)^2}$. **18.18.** $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(\sqrt{5}+2\cos t)^2}$.

18.19. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(3+\cos t)^2}$. **18.20.** $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(\sqrt{7}+\sqrt{2}\cos t)^2}$.

18.21. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(\sqrt{3}+\cos t)^2}$. **18.22.** $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(2+\sqrt{3}\cos t)^2}$.

18.23. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(\sqrt{13}+2\sqrt{3}\cos t)^2}$. **18.24.** $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(2+\cos t)^2}$.

18.25. $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(3+2\cos t)^2}$. **18.26.** $\int\limits_0^{2\Pi} \frac{dt}{(2+\cos t)^2}$.

18.27. $\int_0^{2\Pi} \frac{dt}{(\sqrt{10}+3\cos t)^2}$.

18.28. $\int_0^{2\Pi} \frac{dt}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}\cos t)^2}$.

18.29. $\int_0^{2\Pi} \frac{dt}{(\sqrt{7}+\sqrt{3}\cos t)^2}$.

18.30. $\int_0^{2\Pi} \frac{dt}{(\sqrt{7}+\cos t)^2}$.

18.31. $\int_0^{2\Pi} \frac{dt}{(\sqrt{5}+\sqrt{2}\cos t)^2}$.

19-есеп. Интегралды есептеу керек.

19.1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$.

19.2 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{(x^2+4)^2}dx$.

19.3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+1)^2}$.

19.4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+16)}$.

19.5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-x+1)^2}$.

19.6. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)^2}$.

19.7. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+10x^2+9}$.

19.8. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2(x^2+4)^2}$.

19.9. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+3)^2}$.

19.10. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2)(x^2+3)^2}$.

19.11. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+1)^2}$.

19.12. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2}dx$.

19.13. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+4x+13)^2}$.

19.14. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+5)^2}dx$.

19.15. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$.

19.16. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+5}{x^4+5x^2+6}dx$

19.17. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$.

19.18. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{(x^2-10x+29)^2}dx$.

19.19. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+5)^2}$.

19.20. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+7x^2+12}$.

19.21. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+4}{(x^2+9)^2}dx$.

19.22. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^5}$.

19.23. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2)^2(x^2+10)^2}$.

19.24. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-1}{(x^2+8x+17)^2}dx$.

19.25. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+10}{(x^2+4)^2}dx$.

19.26. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^4}$.

19.27. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+3)^2(x^2+15)^2}$.

19.28. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^4+7x^2+12}dx$.

19.29. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-10x+29)^2}$.

19.30. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+11)^2}dx$.

19.31. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+16)}$.

20-есеп. Интегралды есептеу керек.

20.1. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\sin 3x}{(x^2+4)^2}dx$.

20.2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\sin x}{(x^2+9)^2}dx$.

20.3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2} dx$.

20.4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{(x^2+1)^2} dx$.

20.5. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\cos x}{x^4+5x^2+6} dx$.

20.6. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x/2)}{(x^2+1)(x^2+9)} dx$.

20.7. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+3)\cos 2x}{x^4+3x^2+2} dx$.

20.8. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3-2)\cos(x/2)}{(x^2+1)^2} dx$.

20.9. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2-x)\sin x}{x^4+9x^2+20} dx$.

20.10. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+17} dx$.

20.11. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 2x - \sin x}{(x^2+4)^2} dx$.

20.12. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5x}{(x^2+1)^2(x^2+4)} dx$.

20.13. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4+5x^2+4} dx$.

20.14. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2} dx$.

20.15. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+1)^2} dx$.

20.16. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1/4)^2} dx$.

20.17. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^3} dx$.

20.18. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+16)(x^2+9)} dx$.

20.19. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2-2x+10} dx$.

20.20. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10} dx$.

20.21. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\sin(x/2)}{x^2-2x+10} dx$.

20.22. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2-x+1)^2} dx$.

20.23. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2-x+1)^2} dx$.

20.24. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+5x)\sin x}{x^4+10x^2+9} dx$.

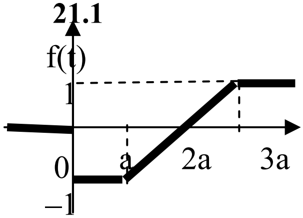
20.25. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x dx}{x^4 + 10x^2 + 9}.$ **20.26.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 + 1)\sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$

20.27. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x - \cos x}{(x^2 + 1)^2} dx.$ **20.28.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + x)\sin x}{x^4 + 13x^2 + 36} dx.$

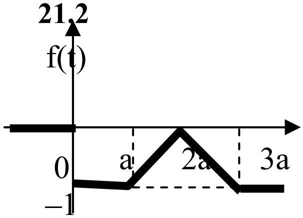
20.29. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + x)\cos x}{x^4 + 13x^2 + 36} dx.$ **20.30.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{(x^2 + 1)^2} dx.$

21-есеп. Түпнұсқаның берілген сызбасы бойынша *L* кескінін табу керек.

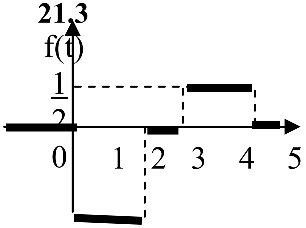
21.1



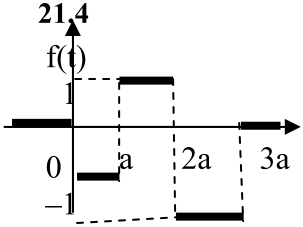
21.2



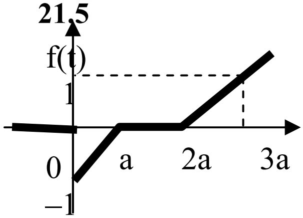
21.3



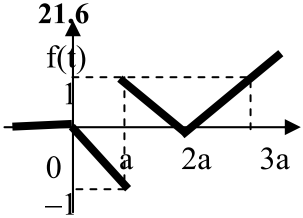
21.4



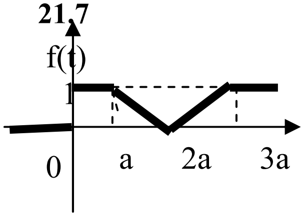
21.5



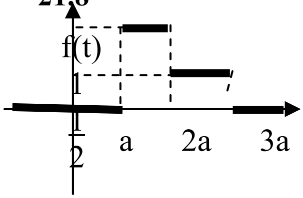
21.6



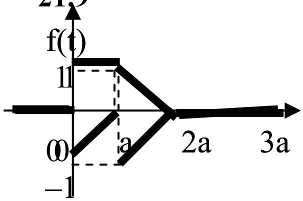
21.7



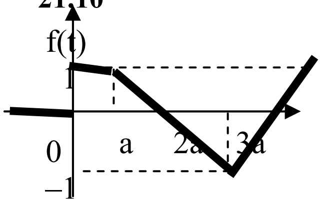
21.8



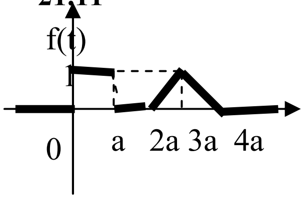
21.9



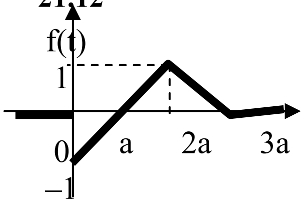
21.10



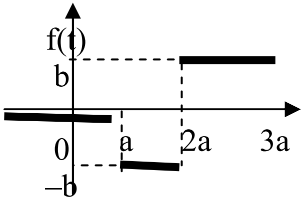
21.11



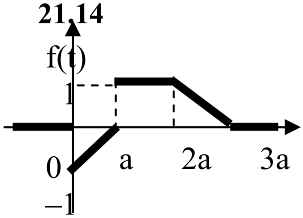
21.12



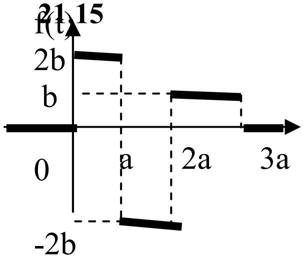
21.13



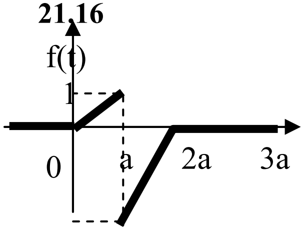
21.14



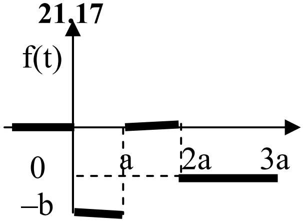
21.15



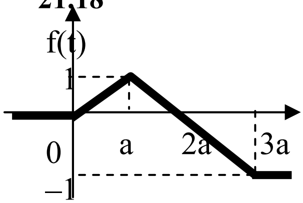
21.16



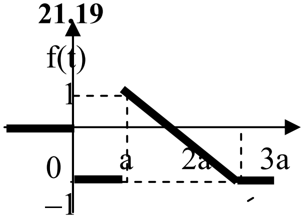
21.17



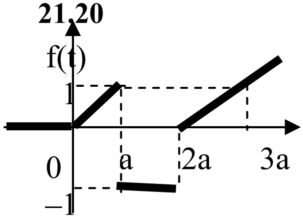
21.18



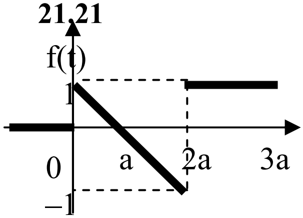
21.19



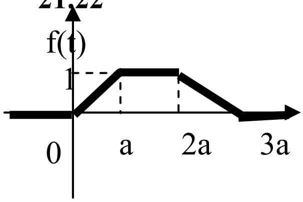
21.20



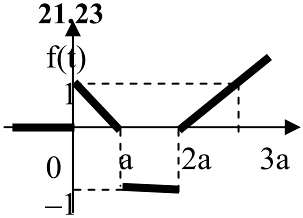
21.21



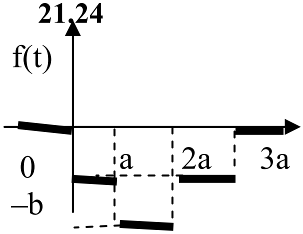
21.22



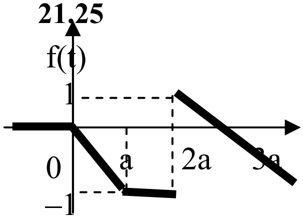
21.23



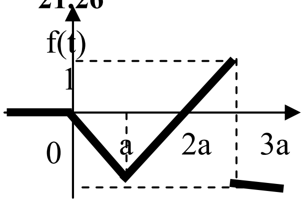
21.24



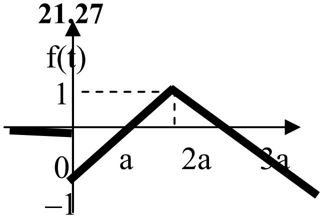
21.25



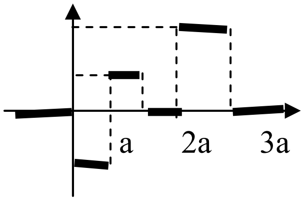
21.26



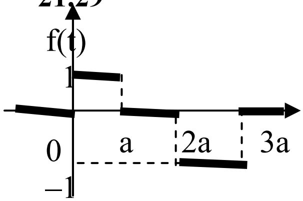
21.27



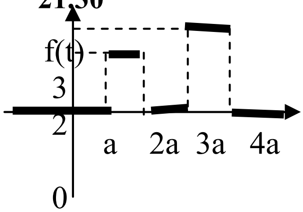
21.28



21.29



21.30



22-есеп. Берілген L-кескіні бойынша түпнұсқаны табу керек.

2.1. $\dfrac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}$. **22.2.** $\dfrac{p}{(p+1)(p^2+p+1)}$.

22.3. $\dfrac{2p}{(p^2+4p+8)^2}$. **22.4.** $\dfrac{1}{p(p^2+1)^2}$.

22.5. $\dfrac{p+3}{p^3+2p^2+3p}$.

22.6. $\dfrac{p}{(p+1)(p^2+4p+5)}$.

22.7. $\dfrac{6}{p^3-8}$.

22.8. $\dfrac{4}{p^3+8}$.

22.9. $\dfrac{1}{p^5+p^3}$.

22.10. $\dfrac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}$.

22.11. $\dfrac{p}{(p+1)(p^2+p+1)}$.

22.12. $\dfrac{2p}{(p^2+4p+8)^2}$.

22.13. $\dfrac{1}{p(p^2+1)^2}$.

22.14. $\dfrac{p+3}{p^3+2p^2+3p}$.

22.15. $\dfrac{p}{(p+1)(p^2+4p+5)}$.

22.16. $\dfrac{6}{p^3-8}$.

22.17. $\dfrac{4}{p^3+8}$.

22.18. $\dfrac{1}{p^5+p^3}$.

22.19. $\dfrac{p+4}{p^2+4p+5}$.

22.20. $\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$.

22.21. $\dfrac{p+5}{(p+1)(p^2-2p+5)}$.

22.22. $\dfrac{1}{p^3+p^2+p}$.

22.23. $\dfrac{p+5}{(p+1)(p^2+4p+5)}$.

22.24. $\dfrac{1}{p(p^3+1)}$.

22.25. $\dfrac{1}{p^3(p^2-4)}$.

22.26. $\dfrac{3p-2}{(p-1)(p^2-6p+10)}$.

22.27. $\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2-2)}$.

22.28. $\dfrac{1}{p^3-1}$.

22.29. $\dfrac{e^{-p/2}}{(p^2+1)(p^2+2)}$. **22.30.** $\dfrac{5p}{(p+2)(p^2-2p+2)}$.

22.31. $\dfrac{1}{(p-2)(p^2+2p+3)}$.

23-есеп. Дифференциалдық теңдеудің $y(0)=0, y'(0)=0$ алғашқы шартты қанағаттандыратын шешімін табу керек.

23.1. $y''-y=th\,t$. **23.2.** $y''-y'=\dfrac{1}{1+e^t}$.

23.3. $y''-2y'+y=\dfrac{e^t}{1+t^2}$. **23.4.** $y''-2y'+2y=2e^t\cos t$.

23.5. $y''-y=th^2\,t$. **23.6.** $y''-y=\dfrac{1}{ch\,t}$.

23.7. $y''-y'=\dfrac{e^t}{1+e^t}$. **23.8.** $y''-2y'+y=\dfrac{e^t}{t+1}$.

23.9. $y''+y'=\dfrac{e^{2t}}{3+e^t}$. **23.10.** $y''-2y'=\dfrac{e^t}{ch\,t}$.

23.11. $y''-y'=\dfrac{1}{1+ch\,t}$. **23.12.** $y''+y'=\dfrac{1}{1+e^t}$.

23.13. $y''-4y'+4y=\dfrac{2e^{2t}}{ch^2 2t}$. **23.14.** $y''-4y=\dfrac{1}{ch^3 2t}$.

23.15. $y''-y=\dfrac{1}{ch^2 t}$. **23.16.** $y''+y'=\dfrac{e^t}{1+e^t}$.

23.17. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-t}}{(t+1)^2}$. **23.18.** $2y'' - y' = \dfrac{e^{t}}{(1+e^{t/2})^2}$.

23.19. $y'' - y = \dfrac{1}{ch^3 t}$. **23.20.** $y'' - y' = \dfrac{e^{2t}}{(1+e^{t})^2}$.

23.21. $y'' + 2y' + y = \dfrac{te^{-t}}{t+1}$. **23.22.** $y'' - y' = \dfrac{e^{2t}}{2+e^{t}}$.

23.23. $y'' - y = \dfrac{sh\,t}{ch^2 t}$. **23.24.** $y'' + y' = \dfrac{e^{t}}{(1+e^{t})^2}$.

23.25. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-t}}{1+t^2}$. **23.26.** $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^{t}}{ch^2 t}$.

23.27. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-t}}{ch^2 t}$. **23.28.** $y'' - 4y = th^2 2t$.

23.29. $y'' + 2y' = \dfrac{1}{ch^2 t}$. **23.30.** $y'' + y' = \dfrac{1}{(1+e)^2}$.

23.31. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2t}}{(1+2t)^2}$.

24-есеп. Амалдық әдіспен Коши есебін шешу керек.

24.1. $y'' + y = 6e - t, \quad y(0) = 3, \;\; y'(0) = 1$.

24.2. $y'' - y' = t^2, \;\; y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1$.

24.3. $y'' + y' = t^2 + 2t, \quad y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1$.

24.4. $y'' - y = \cos 3t, \quad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 1$.

24.5. $y''+y'+y=7e2t, \quad y(0)=1, \ y'(0)=4.$

24.6. $y''+y'-2y=-2(t+1), \quad y(0)=1, \ y'(0)=1.$

24.7. $y''-9y=\sin t-\cos t, \quad y(0)=-3, \ y'(0)=2.$

24.8. $y''+2y'=2+et, \quad y(0)=1, \ y'(0)=2.$

24.9. $2y''-y'=\sin 3t, \quad y(0)=2, \ y'(0)=1.$

24.10. $y''+2y'=\sin t/2, \quad y(0)=-2, \ y'(0)=4.$

24.11. $y''+y'=sht, \quad y(0)=2, \ y'(0)=1.$

24.12. $y''+4y'+29y=e-2t, \quad y(0)=0, \ y'(0)=1.$

24.13. $y''-3y'+2y=et, \quad y(0)=1, \ y'(0)=0.$

24.14. $2y''+3y'+y=3et, \quad y(0)=0, \ y'(0)=1.$

24.15. $y''-2y'-3y=2t,$ $y(0)=1, y'(0)=1.$

24.16. $y''+4y=\sin 2t,$ $y(0)=0, y'(0)=1.$

24.17. $2y''+5y'=29\cos t,$ $y(0)=-1, y'(0)=0.$

24.18. $y''+y'+y=t^2+t,$ $y(0)=1, y'(0)=-3.$

24.19. $y''+4y=8\sin 2t,$ $y(0)=3, y'(0)=-1.$

24.20. $y''-y'-6y=2,$ $y(0)=1, y'(0)=0.$

24.21. $y''+4y=4e^{2t}+4t^2,$ $y(0)=1, y'(0)=2.$

24.22. $y''+4y'+4y=t^3e^{2t},$ $y(0)=1, y'(0)=2.$

24.23. $y''-3y''+2y=12e^{3t},$ $y(0)=2, y'(0)=6.$

24.24. $y''+4y=3\sin t+10\cos 3t,$ $y(0)=-2, y'(0)=3.$

24.25. $y'' + 2y' + 10y = 2e^{-t}\cos 3t,$
$y(0) = 5, y'(0) = 1.$

24.26. $y'' + 3y' - 10y = 47\cos 3t - \sin 3t,$
$y(0) = 3, y'(0) = -1.$

24.27 $y'' + y' - 2y = e^{-t},$
$y(0) = -1, y'(0) = 0.$

24.28. $y'' - 2y' = e^{t}(t^2 + t - 3),$
$y(0) = 2, y'(0) = 2.$

24.29. $y'' + y = 2\cos t,$
$y(0) = 0, y'(0) = 1.$

24.30. $y'' - y = 4\sin t + 5\cos 2t,$
$y(0) = -1, y'(0) = -2.$

24.31. $y'' - 3y' + 2y = 2e^{t}\cos\dfrac{t}{2},$
$y(0) = 1, y'(0) = 0.$

25-есеп.

1-8-нұсқалар

Массасы m тең нүкте x ығысуына пропорционал және қарама-қарсы бағытталған $F=-kx$ қалыптастырушы күші мен $R= r\upsilon$ кедергі күшінің әсерінен түзу сызық бойымен қозғалады. t=0 уақыт кезеңінде өзінің тепе-теңдік қалпынан x_0 қашықтықта және жылдамдығы υ_0 тең болды. $x=x$(t) қоғалыс заңдылығын табу керек.

25.1. k=m, r=2m, $x_{0=}$1 м, υ_0=0.

25.2 k=m, r=2m, x_0=1м, υ_0=м/с.

25.3 k=5m, r=2m, x_0=1м, υ_0=0.

25.4 k=5m, r=2m, x_0=1м, υ_0=1 м/с.

25.5 k=5m, r=4m, x_0=2 м, υ_0=1 м/с.

25.6 k=5m, r=4m, x_0=1 м, υ_0=0.

25.7 k=3m, r=2m, x_0=1м, υ_0=0.

25.8 k=3m, r=2m, x_0=1м, υ_0=1м/с.

9-16-нұсқалар

Массасы m тең нүкте координат бас нүктесінен жүрілген қашықтыққа пропорционал болатын $F=kx$ күш әсерінен түзу сызықпен қозғалады. Нүктеге ортаның υ жылдамдығына пропорционал $R=r\upsilon$ кедергі күші әсер етеді. t=0 кезінде нүктенің координат бас нүктесінен қашықтығы – $x_{0,}$ ал жылдамдығы – υ_0.

$x=x(t)$ – қозғалыс заңдылығын табу керек.

25.9. k=2m, r=m, x_0=1м, υ_0=0.

25.10. k=2m, r=m, x_0=1 м, υ_0=1м/с.

25.11. k=3m, r=2m, x_0=1 м, υ_0=1м/с.

25.12. k=3m, r=2m, x_0=1 м, υ_0=2 м/с.

25.13. k=4m, r=3m, x_0=2 м, υ_0=0.

25.14. k=4m, r=3m, x_0=1 м, υ_0=1м/с.

25.15. k=5m, r=4m, x_0=1 м, υ_0=1м/с.

25.16. k=5m, r=4m, x_0=1 м, υ_0=2м/с.

17-24-нұсқалар

Массасы m тең материалдық нүкте (координат басынан) x-қашықтығына пропорционал және координат басына қарай бағытталған $F=-kx$ қалыптастырушы күшінің және $f=A$cost ауытқушы күшінің әсерінен түзу сызықты тербеліс жасайды. Бастапқы уақытты $x(0)=x_0$, $\upsilon(0)=\upsilon_0$ деп алып, $x=x(t)$ – қозғалыс заңдылығын табу керек.

k=m, A=2m, x_0=0, υ_0=0.

25.17. k=m, A=m, x_0=0, υ_0=1 м/с.

25.18. k=m, A=2m, x_0=1м, υ_0=0.

25.19. k=m, A=m, x_0=1м, υ_0=0,5 м/с.

25.20. k=9m, A=8m, x_0=1м, υ_0=0.

25.21. k=9m, A=4m, x_0=0, υ_0=0.

25.22. k=9m, A=8m, x_0=0, υ_0=3 м/с.

25.23. k=9m, A=m, x_0=1/8 м, υ_0=3 м/с.

25-31-нұсқалар

Массасы m тең материалдық нүкте υ жылдамдығына пропорционал $R=k\upsilon$ кедергі күші әсер етеді. Егер нүктенің бастапқы жылдамдығы υ_0 болса, онда ол шектеусіз уақыт ішінде қанша қашықтыққа орын ауыстыралы?

25.24. k=$2m$, υ_0=10$м$/с. **25.26.** k=$\frac{m}{3}$, υ_0=5 м/с.

25.27. k=3m, υ_0=6 м/с. **25.28.** k=m, υ_0=7 м/с.

25.29. k=m/2, υ_0=6 м/с . **25.30.** k=0,1m, υ_0=1 м/с.

25.31. k=10m, υ_0=1 м/с.

26-есеп. Алғашқы шарттармен берілген дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешу керек.

26.1. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 2, \\ \dot{y} = x - y + 1; \end{cases}$ $x(0) = -1, y(0) = 2.$

26.2. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + 1, \\ \dot{y} = x + y; \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 2.$

26.3. $\begin{cases} \dot{x} = x + 4y, \\ \dot{y} = 2x - y + 9; \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 0.$

26.4. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 1, \\ \dot{y} = 4x - y; \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 1.$

26.5. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2; \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 1.$

26.6. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 5y + 1, \\ \dot{y} = x + 2y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 2.$

26.7. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = -5x - 3y + 2; \end{cases}$ $x(0) = 2,\ y(0) = 0.$

26.8. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - 4y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 3y; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 2.$

26.9. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 6y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 2; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

26.10. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y + 1, \\ \dot{y} = 4x - 2y; \end{cases}$ $x(0) = -1,\ y(0) = 0.$

26.11. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = 2x + y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 5.$

26.12. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y, \\ \dot{y} = -4x; \end{cases}$ $x(0) = 3,\ y(0) = 1.$

26.13. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 1, \\ \dot{y} = -\frac{3}{2}x + y; \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

26.14. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 5y + 2, \\ \dot{y} = 3x + y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 2.$

26.15. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = \frac{5}{2}x - y + 2; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

26.16. $\begin{cases} \dot{x} = 2y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 3; \end{cases}$ $x(0) = -1,\ y(0) = 0.$

26.17. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8y + 1, \\ \dot{y} = 3x + 4y; \end{cases}$ $x(0) = 2,\ y(0) = 1.$

26.18. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y + 2, \\ \dot{y} = 4y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

26.19. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 4x + y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

26.20. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + 1, \\ \dot{y} = -3x; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

26.21. $\begin{cases} \dot{x} = 3y + 2, \\ \dot{y} = x + 2y; \end{cases}$ $x(0) = -1,\ y(0) = 1.$

26.22. $\begin{cases} \dot{x} = x + 4y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 3y; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

26.23. $\begin{cases} \dot{x} = 2y, \\ \dot{y} = 2x + 3y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 2,\ y(0) = 1.$

26.24. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y + 2, \\ \dot{y} = 3x; \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

26.25. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 3, \\ \dot{y} = x + 2y; \end{cases}$ $x(0) = -1,\ y(0) = 0.$

26.26. $\begin{cases} \dot{x} = y + 3, \\ \dot{y} = x + 2; \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

26.27. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 3, \\ \dot{y} = x - y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

26.28. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + 2, \\ \dot{y} = x + y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

26.29. $\begin{cases} \dot{x} = 3y, \\ \dot{y} = 3x + 1; \end{cases}$ $x(0) = 2,\ y(0) = 0.$

26.30. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = x - y; \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

26.31. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = 3x; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

Бақылау жұмысына арналған тапсырмалар.

Комплекс айнымалды теориялар функциясы

1.

1. Комплекс санды алгебралық түрде жазу керек.

2. Берілген шартты қанағаттандыратын нүктелер жиынын комплекс жазықтықта бейнелеу керек.

3. Комплекс санды тригонометриялық және көрсеткіштік түрлерде жазу қажет.

4. Есептеу қажет.

5. Теңдеудің түбірлерін тауып, оларды комплекс жазықтықта көрсету керек.

1-нұсқа

1. $z=\dfrac{2}{i+1}-\dfrac{(1+i)(2-2i)}{(1-i)(1-2i)}$
2. $|z-1|\le|z+1|$
3. $z=1+2i$
4. $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{15}$
5. $z^2-(2+i)z+2i=0$

2-нұсқа

1. $z=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2-i\sqrt{3}}-\dfrac{(1+i)(\sqrt{3}+2i)}{7}$
2. $\operatorname{Re} z^2<1$
3. $z=\sqrt{3}+i$
4. $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{9}$
5. $z^2-(5+2i)z+5+5i=0$

3-нұсқа

1. $z=\dfrac{(1+i)(2+i)}{2-i}-\dfrac{(1-i)(2-i)}{2+i}$
2. $|1+z|<|2-z|$
3. $z=1+i\sqrt{3}$
4. $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{7}$
5. $z^4+1=0$

4-нұсқа

1. $z=\dfrac{1}{i+1}-\dfrac{(1-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+i)}$
2. $\dfrac{\pi}{4}\le\arg z\le\dfrac{3\pi}{4};\ \ 1\le\operatorname{Im} z\le 2$
3. $z=-1+i\sqrt{3}$
4. $\left(\dfrac{\sqrt{3}+3i}{1-i}\right)^{8}$
5. $z^3-zi=0$

5-нұсқа

1. $z=\dfrac{3}{1-i}-\dfrac{(1+i)(3+3i)}{(1+2i)(1-i)}$
2. $\dfrac{|z|^2-|z|+1}{2+|z|}<3$
3. $z=-1+2i$
4. $\left(\dfrac{\sqrt{3}-3i}{1+i}\right)^4$
5. $z^4+i=0$

6-нұсқа

1. $z=\dfrac{i-3}{3-2i}-\dfrac{i(1+2i)}{3+2i}$
2. $\operatorname{Re}(z-\dfrac{1}{z})=0$
3. $z=\sqrt{3}-i$
4. $\left(\dfrac{3-i}{-3+i}\right)^5$
5. $z^3+1=i$

7-нұсқа

1. $z=\dfrac{3-2i}{i-3}-\dfrac{(3+2i)i}{1+i}$
2. $\operatorname{Im}(z-i)\geq 2$
3. $z=-1-i\sqrt{3}$
4. $\left(\dfrac{\sqrt{3}+3i}{1+i}\right)^7$
5. $z^2-2\sqrt{3}i+2=0$

8-нұсқа

1. $z=\dfrac{i-1}{i+1}-\dfrac{(1-2i)(1-i)}{(1+i)(2-2i)}$
2. $1<|1+z|+|z-3|<2$
3. $z=1-2i$
4. $\left(\dfrac{2+i}{2-i}\right)^6$
5. $z^4-i=0$

9-нұсқа

1. $z=\dfrac{2+3i}{3-i}-\dfrac{3}{(3+i)(1-i)}$
2. $z\cdot\overline{z}+z+\overline{z}+i(z-\overline{z})=0$
3. $z=-\sqrt{3}+i$
4. $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2+2i}\right)^{10}$
5. $z^2+2\sqrt{3}i-2=0$

10-нұсқа

1. $z=\dfrac{1-i}{3}-\dfrac{(1-2i)(1+i)}{(1+2i)(1-i)}$
2. $\operatorname{Im}(z^2-\overline{z})=2-\operatorname{Im}\overline{z}$
3. $z=1-i\sqrt{3}$
4. $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^8$
5. $z^4-1=0$

11-нұсқа

1. $z=\dfrac{2+3i}{i-3}-\dfrac{2-3i}{(1-i)i}$
2. $|z-2|=\bar{z}$
3. $z=-1-2i$
4. $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^8$
5. $z^3-i=0$

12-нұсқа

1. $z=\dfrac{i-1}{2}-\dfrac{(1+i)(i+2)}{(1-i)^2}$
2. $\operatorname{Re}z+\operatorname{Im}z\geq -1$
3. $z=\sqrt{3}-i$
4. $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^7$
5. $z^2-\sqrt{3}i+3=0$

13-нұсқа

1. $z=\dfrac{i-1}{2+i}-\dfrac{(1+i)(2-i)}{(1-i)}$
2. $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|\leq 1$
3. $z=1-i$
4. $\left(\dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{10}$
5. $z^3+i=0$

14-нұсқа

1. $z=\dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{(1+i)(2i+2)}{(1-i)(2-2i)}$
2. $|z-1|<|z+i|$
3. $z=3+i\sqrt{3}$
4. $\left(\dfrac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^8$
5. $z^2+2i+2=0$

15-нұсқа

1. $z=\dfrac{(4+i)(3+i)}{3-i}-\dfrac{(4-i)(3-i)}{3+i}$
2. $2<|z-1+2i|<4$
3. $z=2-2i$
4. $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-3i}\right)^8$
5. $z^4+i=1$

16-нұсқа

1. $z=\dfrac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2i}+\dfrac{(1+i)i}{\sqrt{3}+2i}$
2. $-1<\operatorname{Re}z<5$, $0<\operatorname{Im}z<1$
3. $z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$
4. $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+3i}\right)^6$
5. $z^3+zi=0$

17-нұсқа

1. $z=\dfrac{i-i}{i+1}-\dfrac{(1+i)(1-2i)}{(1-i)(1+2i)}$

2. $|z-3|<\bar{z}$

3. $z=-2+i2\sqrt{3}$

4. $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}-3i}\right)^5$

5. $z^2-2\sqrt{3}i+2=0$

18-нұсқа

1. $z=\dfrac{3-i}{2+3i}-\dfrac{(3+i)(1-i)}{2i}$

2. $|z|>2+\operatorname{Im}z$

3. $z=-3-i\sqrt{3}$

4. $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+3i}\right)^{10}$

5. $z^3-i-1=0$

19-нұсқа

1. $z=\dfrac{3}{1+i}-\dfrac{(1-2i)(1+i)}{(1-i)(1+2i)}$

2. $4\le|z-1|+|z+1|\le 8$

3. $z=1+i$

4. $\left(\dfrac{-i}{2\sqrt{3}+2i}\right)^3$

5. $z^4-16=0$

20-нұсқа

1. $z=\dfrac{i-3}{2+3i}+\dfrac{i(1+i)}{2-3i}$

2. $|z-i|+|z+i|>4$

3. $z=-3+i\sqrt{3}$

4. $\left(\dfrac{i}{2\sqrt{3}-2i}\right)^5$

5. $z^2+\sqrt{3}i=3$

21-нұсқа

1. $z=\dfrac{1+i}{2}+\dfrac{(1+i)(2i+2)}{(1-i)i}$

2. $|z-4|<|1-4\bar{z}|$

3. $z=-2-2i$

4. $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{10}$

5. $z^2-2i+2=0$

22-нұсқа

1. $z=\dfrac{(1-i)(2+i)}{2-i}-\dfrac{(1+i)(2-i)}{(2+i)}$

2. $\dfrac{3}{4}<\operatorname{Im}z+|z|^2<\dfrac{7}{4}$

3. $z=2+2\sqrt{3i}$

4. $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^5$

5. $z^4+16=0$

23-нұсқа

1. $z=\frac{2}{i-2}-\frac{(1-i)^2}{1+i}$

2. $|z+i|<|z-i|$

3. $z=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

4. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^7$

5. $z^2-2\sqrt{3}i-2=0$

24-нұсқа

1. $z=\frac{1+i}{1-i}-\frac{(1-i)(2-2i)}{(1+i)(2+2i)}$

2. $1\le|z-1-i|<3$

3. $z=-1+i$

4. $\left(\frac{-\sqrt{3}-3i}{1-i}\right)^6$

5. $z^3-i=1$

25-нұсқа

1. $z=\frac{3+2i}{i+3}-\frac{(3-i)(i+1)}{i}$

2. $|z|>1-\operatorname{Re}z$

3. $z=3-i\sqrt{3}$

4. $\left(\frac{2+2\sqrt{3}i}{i}\right)^8$

5. $z^4+1=i$

(1-*бақылау жұмысындағы 5-тапсырманы келесі №1-20-тапсырмаға ауыстыруға болады*)

№ 1-20-теңдеуді шешу және оның түбірлерін комплекс жазықтықта бейнелеу керек

1. $z^5+\dfrac{i}{1-i}=0$;

2. $z^3+4=4\sqrt{3}i$;

3. $z^3+\dfrac{2}{1-i}=0$;

4. $z^4-\dfrac{2i}{1+\sqrt{3}i}=0$;

5. $z^5+\sqrt{3}i=3$;

6. $z^3+\dfrac{2}{\sqrt{3}-i}=0$;

7. $z^4+\dfrac{i}{1+i}=0$;

8. $z^5+\sqrt{3}i=1$;

9. $z^3+32\sqrt{3}i=32$;

10 $z^3+2\sqrt{3}i=2$;

11. $z^4+\dfrac{2i}{\sqrt{3}-i}=0$;

12. $z^3+\dfrac{2}{\sqrt{3}-i}=0$;

13. $z^5+\dfrac{i}{1+i}=0$;

14. $z^5-\sqrt{3}i=1$;

15. $z^3-4=4\sqrt{3}i$;

16. $z^4+32\sqrt{2}=32\sqrt{2}i$;

17. $z^3-\dfrac{2}{1-i}=0$;

18. $z^4+\dfrac{2i}{1-\sqrt{3}i}=0$;

19. $z^5+\sqrt{2}i=\sqrt{2}$;

20. $z^4+\dfrac{2i}{1+\sqrt{3}i}=0$.

2.

№21-40. Берілген $u(x;y)$ **(**$v(x;y)$) функциясы қандай да бір аналитикалық функцияның нақты **(**жорамал**)** бөлігі болатынын тексеру керек. Белгілі $u(x;y)$ – нақты немесе

$v(x;y)$ – жорамал бөлігі және $f(z_0)$ мәні бойынша z_0 нүктенің маңайында аналитикалық $f(z)$ функциясын тұрғызу керек.

21. $v = e^{-y}\sin x + y, \quad f(0)=1$;

22. $v = x^2 - y^2 + 2x + 1, \quad f(0) = i$;

23. $u = x^3 - 3xy^2 - x, \quad f(0) = 0$

24. $u = e^{-y}\cos x, \quad f(0)=1$;

25. $v = e^{-y}\sin x, \quad f(0)=1$;

26. $u = x^2 - y^2 - 2y, \quad f(0)=0$;

27. $v = 3x^2y - y^3 - y, \quad f(0)=0$;

28. $u = x^2 - y^2 - 2x + 1, \quad f(0)=1$;

29. $v = 3x^2y - y^3, \quad f(0)=1$;

30. $u = e^{-y}\cos x + x, \quad f(0)=1$;

31. $v = 2xy + x, \quad f(0)=0$;

32. $u = x^3 - 3xy^2 + 1, \quad f(0)=1$;

33. $u = -2xy - 2y, \quad f(0) = i$;

34. $v = e^x \cos y, \quad f(0) = 1 + i$;

35. $v = 2xy - 2y, \quad f(0)=1$;

36. $v = 2xy + y, \quad f(0)=0$;

37. $u = x^2 - y^2 + x, \quad f(0)=0$;

38. $v = 2xy + 2x, \quad f(0)=0$;

39. $u = y - 2xy, \quad f(0)=0$;

40. $v = x^2 - y^2 - x, \quad f(0)=0$.

№ 41-60. Берілген функцияны көрсетілген аймақта Лоран қатарына жіктеу керек:

41. $\dfrac{1}{(z-2)(z+3)}, \quad 2<|z|<3$;

42. $\dfrac{1}{z(z+1)}, \quad 1<|z|<+\infty$;

43. $\dfrac{2z+3}{z^2+3z+2}, \quad 1<|z|<2$;

44. $\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}, \quad |z|<1$;

45. $\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}, \quad 0<|z-2|<1$;

46. $\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}, \quad 2<|z|<+\infty$;

51. $\dfrac{1}{z^2-5z+6}, \quad 3<|z|<+\infty$;

52. $\dfrac{1}{z^2+2z-8}, \quad 2<|z+2|<4$;

53. $\dfrac{z^2-2z+3}{z^3-3z+2}, \quad |z|<1$;

54. $\dfrac{2z-4}{(z-3)(z-1)}, \quad 1<|z|<3$;

55. $\dfrac{2z-3}{(z-1)(z-2)}, \quad 0<|z-1|<1$;

56. $\dfrac{1}{z^2-5z+6}, \quad 2<|z|<3$;

47. $\dfrac{2z+2}{z^2-4z+3}$, $1<|z|<3$;

48. $\dfrac{2z+2}{z^2-4z+3}$, $|z|>3$;

49. $\dfrac{1}{z^2-7z+12}$, $3<|z|<4$;

50. $\dfrac{1}{z^2+z}$, $0<|z|<1$;

57. $\dfrac{1}{z^2-5z+6}$, $0<|z|<2$;

58. $\dfrac{z+3}{z^2-6z+5}$, $1<|z|<5$;

59. $\dfrac{z+3}{z^2-6z+5}$, $|z|>5$;

60. $\dfrac{1}{z^2-7z+12}$, $|z|>4$.

3.

1 Келесі функциялардың барлық ақырлы және ақырсыз нүктелердегі шегерімдерін табу керек. Ерекше нүктелердің сипатын беру қажет.

2. ∂D**-**тұйық контур бойынша интегралдардарды есептеу керек.

3. Меншіксіз интегралдарды есептеу қажет.

1-нұсқа

1. $\dfrac{1}{z^6(z-2)}$

2. $\int\limits_{\partial D} \sin\dfrac{1}{z-1}dz$, $D:|z-1|>1$

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{(x-1)e^{ix}}{x^2-2x+2}dx$;

б) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{d\varphi}{2+\sin\varphi}$

2-нұсқа

1. $\dfrac{\sin z}{(z^2+1)^2}$

2. $\int\limits_{\partial D} \exp\dfrac{1}{1-z}\dfrac{dz}{z}, D:|z-2|+|z+2|<6$

3. а) $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{x^4 dx}{(a+bx^2)^4}$, $a>0$, $b>0$;

б) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{\sin^2 x}{5+4\cos x}dx$

3-нұсқа

1. $\sin z \sin\frac{1}{z}$

2. $\int\limits_{\partial D} z\cos\frac{z}{z+1}dz$, $\quad D:|z|>2$

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+1}dx$;

б) $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{\sin^6 x+\cos^6 x}$

4-нұсқа

1. $\frac{\cos z}{\left(z^2+1\right)^2}$

2. $\int\limits_{\partial D}\frac{zdz}{e^{z^2}-1}$, $\quad D:|z|>4$

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+1)e^{-3ix}}{x^2-2x+5}dx$;

б) $\int\limits_0^{2\pi}\frac{2+\cos\varphi}{2-\sin\varphi}d\varphi$

5-нұсқа

1. $\frac{e^z}{(z-1)^2}$

2. $\int\limits_{\partial D}\sin\frac{z}{z+1}dz$, $\quad D:|z|>3$

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(x^3+5x\right)\sin x}{x^4+2x^2+2}dx$;

б) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$

6-нұсқа

1. $z^2\sin\frac{\pi}{z}$

2. $\int\limits_{\partial D} z\sin\frac{z+1}{z-1}dz$, $\quad D:|z|<2$

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(2x^3+13x\right)}{x^4+3x^2+4.5}\sin x dx$;

б) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{2+3x}dx$

7-нұсқа

1. $ze^{\frac{1}{z-1}}$

2. $\int\limits_{\partial D}\frac{z^2\sin^2\frac{1}{z}}{(z-1)(z-2)}dz$, $\quad D:|z|<3$

8-нұсқа

1. $\frac{e^{z^2}}{z^{2n+1}}$

2. $\int\limits_{\partial D}\frac{z^3}{z^4-1}dz$, $\quad D:|z|<2$

3. а) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos ax}{x^4+2x^2+2}dx$, $a>0$;

б) $\int\limits_{0}^{\pi}\operatorname{tg}(x+4i)dx$

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3\sin x}{x^4+4x^2+8}dx$;

б) $\int\limits_{0}^{2\pi}\operatorname{ctg}(x-1)dx$

9-нұсқа

1. $\frac{1+z^8}{z^4(z^4+1)}\cos z$

2. $\int\limits_{\partial D}\frac{z}{z+3}e^{\frac{1}{3z}}dz$, $D:|z|>4$

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx$;

б) $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\sin^2 xdx}{5+4\cos x}$

10-нұсқа

1. $\frac{1+z^8}{z^6(z+2)}$

2. $\int\limits_{\partial D}\frac{\sin z}{(z+1)^3}dz$, $D: x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{2}{3}}$

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{(x^2+a^2)^2}dx$, $a>0$;

б) $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{2\sin^2 x+3\cos^2 x}dx$

11-нұсқа

1. $\operatorname{ctg}\pi z$

2. $\int\limits_{\partial D}\frac{z^3dz}{e^{z^2}-1}$ $(D:|z|<4)$

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^6dx}{(x^4+a^4)^2}$ $a>0$;

б) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{(3\text{-}x)\sqrt{1-x^2}}$

12-нұсқа

1. $\operatorname{ctg}^2\pi z$

2. $\int\limits_{\partial D}\frac{e^{\pi z}}{2z-i}dz$ $\begin{pmatrix} D:|z|<1 \\ \operatorname{Im} z>0 \end{pmatrix}$

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+5ix-4)^2}$

б) $\int\limits_{0}^{\pi}\operatorname{tg}(x+8i)dx$

13-нұсқа

1. $\dfrac{1}{e^z-2}$

2. $\int\limits_{\partial D}\exp\dfrac{1}{1-z}\dfrac{dz}{z}$

$(D:|z-2|+|z+2|<6)$

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{e^{ix}dx}{x^2-2ix-1}$;

б) $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}dx}{9+8x}$

14-нұсқа

1. $\cos\pi\dfrac{z+2}{2z}$

2. $\int\limits_{\partial D}\dfrac{z^2dz}{e^{2\pi iz^3}-1}$ $\left(D:|z|<\sqrt[3]{\dfrac{7}{2}}\right)$

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2-2ix-1}$;

б) $\int\limits_{0}^{2\pi}\mathrm{ctg}(x-9)dx$

15-нұсқа

1. $\dfrac{1}{e^z+1}$

2. $\int\limits_{\partial D}z\cos\dfrac{z}{z+1}dz$ $(D:|z|>2)$

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{(x-3)e^{ix}dx}{x^2-6x+109}$;

б) $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{x^2}{(13+12x)\sqrt{1-x^2}}dx$

16-нұсқа

1. $\dfrac{1}{\sin\pi z}$

2. $\int\limits_{\partial D}\dfrac{\sin z dz}{(z^3-1)(z-i)}$ $(D:|z-1|<1)$

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2+2x+10}dx$;

б) $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{\cos^2\varphi d\varphi}{2-\sin^2\varphi}$

17-нұсқа

1. $ze^{\frac{1}{z-1}}$

2. $\int\limits_{\partial D} \frac{z}{e^{z^2}-1} \quad (D: |z| < 3)$

3. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^6 dx}{\left(x^4+2^4\right)^2};$

б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{dx}}{\sin^6 x + \cos^6 x}$

18-нұсқа

1. $z\cos^2 \frac{\pi}{z}$

2. $\int\limits_{\partial D} \frac{z}{e^{z^2}-1} dz \quad (D: |z| > 5)$

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3};$

б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{8+\sin\varphi}$

19-нұсқа

1. $z^n e^{\frac{a}{z}}$

2. $\int\limits_{\partial D} \frac{ctgz}{z} \quad (D: |z| > 1)$

3. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^4+2x^2+2} dx;$

б) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{4+7x} dx$

20-нұсқа

1. $\frac{1}{\sin z^2}$

2. $\int\limits_{\partial D} \frac{\sin z\, dz}{\left(z^3-1\right)(z-i)} \quad (D: |z-1| < 1)$

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x dx}{x^2+2x+10};$

б) $\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{ctg}(x-2i) dx$

21-нұсқа

1. $\dfrac{2}{e^z+\pi}$

2. $\int\limits_{\partial D} z\sin\dfrac{z+1}{z-1}dz \quad (D:|z|>2)$

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{(x-1)\cos 2x}{x^2-4x+5}$;

б) $\int\limits_{0}^{\pi}\mathrm{tg}(x+3i)dx$

22-нұсқа

1. $\cos\pi\dfrac{z+2}{2z}$

2. $\int\limits_{\partial D}\dfrac{e^{\pi z}}{\left(2z^2-i\right)}dz \quad \begin{pmatrix} D:|z|<1 \\ \mathrm{Re}\,z>0 \\ \mathrm{Im}\,z>0 \end{pmatrix}$

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx$;

б) $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{(7-a)\sqrt{1-x^2}}$

23-нұсқа

1. $\dfrac{\cos z}{z^2-\dfrac{\pi}{4}}$

2. $\int\limits_{\partial D}\dfrac{z}{(z+3)\left(e^z-1\right)} \quad (D:|z|<4)$

3. а) $\int\limits_{0}^{\infty}\dfrac{x^2dx}{\left(x^2+5ix-4\right)^2}$;

б) $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{6+\sin\varphi}$

24-нұсқа

1. $\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$

2. $\int\limits_{\partial D}\dfrac{z^2}{e^{2\pi i z^3}-1}dz \quad \left(D:|z|>\sqrt[3]{\dfrac{9}{2}}\right)$

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{\left(x^2+4\right)\left(x^2+1\right)^2}$;

б) $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{\sin^2 x+5\cos^2 x}$

25-нұсқа

1. $z\cos^2\frac{\pi}{4}$

2. $\int\limits_{\partial D}\frac{z^2\sin^2\frac{1}{z}}{(z-1)(z-2)}dz \quad (D:|z|>3)$

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+1}dx;$

б) $\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos 2x}{(1+3\cos^3 x)(1+8\sin^2 x)}dx$

26-нұсқа

1. $\frac{(z^{10}1)\cos\frac{1}{z}}{(z^5+2)(z^6-1)}$

2. $\int\limits_{\partial D}\frac{\mathrm{ctg}z}{z}dz \quad (D:|z|>1)$

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+1)e^{-3ix}dx}{x^2-2x+5};$

б) $\int\limits_0^{2\pi}\frac{2+\cos\varphi}{2-\sin\varphi}d\varphi$

27-нұсқа

1. $\frac{1}{(z-1)^2\left(e^z-\frac{\pi}{2}\right)}$

2. $\int\limits_{\partial D}\frac{z^3}{z^4-1}dz \quad (D:|z-1|<1.5)$

3. а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{x\sin 2x}{x^2+4}dx;$

б) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{(4+x)\sqrt{1-x^2}}$

28-нұсқа

1. $\frac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}$

2. $\int\limits_{\partial D} z\cos\frac{z}{z+1}dz \quad (D:|z|>2)$

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x^3+5x)\sin x\,dx}{x^4+4x^2+8};$

б) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{(a^2+1)\sqrt{1-x^2}}$

Амалдық қисап

Бақылау жұмысы

№ 4

1. Берілген функция түпнұсқа бола ала ма?

2. Түпнұсқаның L бейнесін табу керек.

3. L бейнеге сәйкес түпнұсқаны табу қажет.

4. Интегралды есептеместен, оның L бейнесін табу керек.

5. Интегралды есептеу қажет.

6. Коши есебінің шешімін табу керек.

7. Дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешу қажет.

1-нұсқа

1. $f(t) = 3^t \cdot \sigma_0(t)$

2. $f\left(t\right) = \dfrac{\sin 2t}{t} + \sin 2t \cos 3t;$

3. $F\left(p\right) = \dfrac{2p+7}{\left(p+1\right)\left(p^2 - 3p\right)};$

4. $\int_0^t \tau e^{\tau} \sin 2\tau d\tau$

5. $\int_0^t \sin\tau \cos\left(t-\tau\right) d\tau$

6. $x'' + 2x' + x = t^2 + 5t + 4; x\left(0\right) = -1; x'\left(0\right) = 0$

7. $\begin{cases} x' + x - y = 2t + 5 \\ y' + 2x' - 3x = t \end{cases} x\left(0\right) = 0; y\left(0\right) = 1$

2-нұсқа

1. $f(t)=t^3\cdot\chi(t)$

2. $f(t)=\dfrac{\sin 2t}{t}+e^{2t}cht;$

3. $F(p)=\dfrac{p}{(2p-1)(p-3)};$

4. $\int_0^t \tau\sin 2\tau d\tau$

5. $\int_0^t \sin\tau\sin(t-\tau)d\tau$

6. $x'-x=1; x(0)=-1$

7. $\begin{cases} x'+x-y=\sin t, \\ y'+2x=\sin t, \end{cases} x(0)=0; y(0)=1$

3-нұсқа

1. $f(t)=e^{it}\cdot\chi(t)$

2. $f(t)=\dfrac{\sin^2 2t}{t}+\dfrac{1}{2^t};$

3. $F(p)=\dfrac{p}{(2p+1)(p+3)};$

4. $\int_0^t \tau\cos 2\tau d\tau$

5. $\int_0^t \sin\tau\cdot e^{\pi/2-\tau}d\tau$

6. $x''+3x'=e^t; x(0)=0; x'(0)=-1$

7. $\begin{cases} x'-2x+y=3-4t \\ y'+x+2y=4+t \end{cases} x(0)=0; y(0)=2$

4-нұсқа

1. $f(t)=e^{-t^2}\cdot\chi(t)$

2. $f\left(t\right)=\dfrac{\sin t\cdot\sin 3t}{t}+2sh4t-t^2;$

3. $F\left(p\right)=\dfrac{p}{\left(2p-1\right)\left(p^2-4\right)};$

4. $\int_0^t \tau^2\sin 2\tau d\tau$

5. $\int_0^t \left(t-x\right)^2\cos 2xdx$

6. $x''+3x'=e^t;x\left(0\right)=0;x'\left(0\right)=-1$

7. $\begin{cases} x''+y'-x=4-t^2 \\ x'-2y+2x=2t^2 \end{cases} x\left(0\right)=-1;x'\left(0\right)=0;y\left(0\right)=-1$

5-нұсқа

1. $f(t)=\dfrac{1}{(t-1)^2}\cdot\chi(t)?$

2. $f\left(t\right)=\dfrac{1-e^{2t}}{te^t}-e^t\cos^2 t;$

3. $F\left(p\right)=\dfrac{p}{\left(p^2-1\right)\left(p^2+3\right)};$

4. $\int_0^t \tau^2 e^{2\tau}d\tau$

5. $\int_0^t \sin\tau e^{\pi/2-\tau}d\tau$

6. $x''-4x'+x=1-2e^t;x\left(0\right)=2;x'\left(0\right)=1$

7. $\begin{cases} x'+x-y=2 \\ y'+x+y=2t \end{cases} x\left(0\right)=0;y\left(0\right)=-1$

6-нұсқа

1. $f(t)=\ln t\cdot\chi(t)$?
2. $f\left(t\right)=\dfrac{\cos 2t}{t}+t^{2}e^{t-3};$
3. $F\left(p\right)=\dfrac{p}{\left(2p+1\right)\left(p+3\right)};$
4. $\int_0^t \tau e^{\tau}\sin 2\tau d\tau$
5. $\int_0^t \tau\left(\pi-\tau\right)\sin\left(\pi-\tau\right)d\tau$
6. $x''+x=\cos t; x\left(0\right)=-1; x'\left(0\right)=1$
7. $\begin{cases} x'+2x-y=\sin t \\ y'-x=-1 \end{cases} x\left(0\right)=1; y\left(0\right)=1$

7-нұсқа

1. $f(t)=\operatorname{tg} t\cdot\chi(t)$?
2. $f\left(t\right)=\dfrac{\cos^{2} 2t}{t}+2te^{t-1};$
3. $F\left(p\right)=\dfrac{p-1}{\left(2p-1\right)\left(p^{2}+3\right)};$
4. $\int_0^t \tau\cos^{2} 2\tau d\tau$
5. $\int_0^t \cos\tau\cdot\chi\left(t-\tau\right)d\tau$
6. $x''+x=1; x\left(0\right)=-1; x'\left(0\right)=0$
7. $\begin{cases} 2x''-x'+x-y'=\sin t \\ y'+2x'-x=2t \end{cases} x\left(0\right)=0; y\left(0\right)=1$

8-нұсқа

1. $f(t)=\frac{1}{(t-1)^2}\cdot\chi(t)$?

2. $f\left(t\right)=\frac{\sin 2t-\sin 4t}{t}+e^{-2t+1};$

3. $F\left(p\right)=\frac{p^2+3}{\left(2p+1\right)\left(p-3\right)};$

4. $\int_0^t \tau\sin^2 2\tau d\tau$

5. $\int_0^t \sin\tau\sin\left(t-\tau\right)d\tau$

6. $x''+2x'+x=t^2+5t+4; x\left(0\right)=-1; x'\left(0\right)=0$

7. $\begin{cases} x'+2x-y=t \\ y'+2x=1-t \end{cases} x\left(0\right)=1; y\left(0\right)=1$

9-нұсқа

1. $f(t)=e^{(2+i)t}\cdot\chi(t-1)$?

2. $f\left(t\right)=\frac{\cos 2t\cdot\cos 6t}{t}-e^t\cos t;$

3. $F\left(p\right)=\frac{p}{\left(2p-1\right)\left(p^2+4\right)};$

4. $\int_0^t \tau\,\mathrm{s}h2\tau d\tau$

5. $\int_0^t \tau\sin\left(t-\tau\right)d\tau$

6. $x'-4x=1-t^2; x\left(0\right)=1$

7. $\begin{cases} x'+x+2y=2t \\ y'+x-y=2-t \end{cases} x\left(0\right)=0; y\left(0\right)=-1$

10-нұсқа

1. $f(t) = \sin t \cdot \chi(t+1)$?

2. $f(t) = \dfrac{\sin 2t}{t} + 3e^{-t};$

3. $F(p) = \dfrac{p+2}{(2p-1)(p-3)(p^2+4)};$

4. $\int_0^t \tau \cdot ch2\tau d\tau$

5. $\int_0^t \tau^3 \sin(t-\tau)d\tau$

6. $x'' - x' - 2x = 2e^t; x(0) = -1; x'(0) = 1$

7. $\begin{cases} x' + x - y = 2t - 3 \\ y' + 2x' - y = 4 \end{cases} x(0) = 0; y(0) = 1$

11-нұсқа

1. $f(t) = \dfrac{1}{t} \cdot \chi(t-1)$?

2. $f(t) = \dfrac{\sin 2t}{t} - te^{-t}sht;$

3. $F(p) = \dfrac{p^2+1}{(2p-1)(p^2-3p)};$

4. $\int_0^t \tau \cos 2\tau d\tau$

5. $\int_0^t \sin\tau \sin(t-\tau)d\tau$

6. $x'' - x = 1; x(0) = -1; x'(0) = 0$

7. $\begin{cases} x' + 5x - y'' = \sin t \\ y' + 2x = t \end{cases} x(0) = 0; y(0) = 1$

12-нұсқа

1. $f(t) = e^{it^2} \cdot \chi(t)$

2. $f\left(t\right) = \dfrac{\sin 2t}{t} - te^{2t}\cos 3t;$

3. $F\left(p\right) = \dfrac{p+5}{\left(2p^2 - p\right)\left(p-3\right)};$

4. $\int_0^t \tau^2 \sin 2\tau d\tau$

5. $\int_0^t e^{\tau} \sin\left(t-\tau\right) d\tau$

6. $x'' - x' = te^t 1; x\left(0\right) = x\left(0\right) = 0$

7. $\begin{cases} x' + x - y' = \mathrm{s}\,ht \\ y' + 2x = t \end{cases} x\left(0\right) = 0; y\left(0\right) = 1$

13-нұсқа

1. $f(t) = 2^{\sqrt[3]{1+t^4}} \cdot \chi(t)$?

2. $f\left(t\right) = \dfrac{\sin 2t}{t} + \left(t-3\right)^3 \chi\left(t-3\right);$

3. $F\left(p\right) = \dfrac{2p-1}{\left(2p^2 + 3p\right)\left(p-3\right)};$

4. $\int_0^t \tau e^{\tau} \cos 2\tau d\tau$

5. $\int_0^t \sin \tau e^{\left(t-\tau\right)} d\tau$

6. $x'' - x' = te^{2t}; x\left(0\right) = x'\left(0\right) = 1$

7. $\begin{cases} x' + x - y = t^2 \\ y' + 2x = 2 + t \end{cases} x\left(0\right) = 0; y\left(0\right) = 1$

14-нұсқа

1. $f(t)=3^t\cdot\chi(t)$?

2. $f\left(t\right)=\dfrac{\cos 2t}{t}-ch\left(2t-1\right)\chi\left(t-1/2\right);$

3. $F\left(p\right)=\dfrac{3p-7}{\left(p^2-1\right)\left(p^2+3\right)};$

4. $\int_0^t \tau\sin 2\tau d\tau$

5. $\int_0^t \sin^2\tau\sin\left(t-\tau\right)d\tau$

7. $x'''-x'=t-1; x\left(0\right)=-1; x'\left(0\right)=x''\left(0\right)=0$

8. $\begin{cases} x'+x-y=\sin t \\ y'+2x=\sin t \end{cases} x\left(0\right)=0; y\left(0\right)=1$

15-нұсқа

1. $f(t)=\ln t\cdot\chi(t)$?

2. $f\left(t\right)=\left(t-\pi/3\right)\sin\left(3t-\pi\right)\chi\left(t-\pi/3\right);$

3. $F\left(p\right)=\dfrac{p}{\left(2p+1\right)^2\left(p-3\right)};$

4. $\int_0^t \tau e^{3\tau}d\tau$

5. $\int_0^t \left(1-2\tau\right)\tau\sin\left(t-\tau\right)d\tau$

6. $x''-x'=t^2-1; x\left(0\right)=-1; x\left(0\right)=0$

7. $\begin{cases} x''+x-y'=2+t \\ y'+2x=\sin t \end{cases} x\left(0\right)=0; y\left(0\right)=1$

16-нұсқа

1. $f(t)=t^3\cdot\chi(t)$?
2. $f\left(t\right)=te^{2t}cos3t-\sin\left(t-2\right)\chi\left(t-2\right);$
3. $F\left(p\right)=\dfrac{p+3}{\left(2p-1\right)\left(p^2-5p+6\right)};$
4. $\int_0^t \tau^2 e^{\tau}\sin 2\tau d\tau$
5. $\int_0^t \sin\tau\left(t-\tau\right)^3 d\tau$
6. $x'-x=e^t-1; x\left(0\right)=-1$
7. $\begin{cases} x'+x+2y=t^2 \\ y'+2x=2t-3 \end{cases} x\left(0\right)=0; y\left(0\right)=1$

17-нұсқа

1. $f(t)=e^{it}\cdot\chi(t)$?
2. $f\left(t\right)=e^{3t}cht-t\cos 3t;$
3. $F\left(p\right)=\dfrac{p}{\left(2p-1\right)\left(p-3\right)};$
4. $\int_0^t \tau e^{\tau}\cos 2\tau d\tau$
5. $\int_0^t \sin\tau\sin\left(t-\tau\right)d\tau$
6. $x''+2x'+x=t^2+5t+4; x\left(0\right)=-1; x'\left(0\right)=0$
7. $\begin{cases} x'+x-y=\sin t \\ y'+2x=\sin t \end{cases} x\left(0\right)=0; y\left(0\right)=1$

18-нұсқа

1. $f(t)=e^{-t^2}\cdot\chi(t)$?

2. $f\left(t\right)=\dfrac{\sin^2 2t}{t}+sh\left(2t+1\right)\chi\left(t+1/2\right);$

3. $F\left(p\right)=\dfrac{p}{\left(2p-1\right)\left(p-3\right)};$

4. $\int_0^t \tau\sin 4\tau d\tau$

5. $\int_0^t \cos\tau\sin\left(t-\tau\right)d\tau$

6. $x''-x'+x=t^2-2; x\left(0\right)=-1; x\left(0\right)=0$

7. $\begin{cases} x'+2x-y=2t-1 \\ y'+2x'=t^2 \end{cases} x\left(0\right)=0; y\left(0\right)=1$

19-нұсқа

1. $f(t)=\mathrm{tg}\,t\cdot\chi(t)$?

2. $f\left(t\right)=\dfrac{\sin 2t}{t}-e^{t-1}t^2;$

3. $F\left(p\right)=\dfrac{p-3}{\left(2p^2-p\right)\left(p+3\right)};$

4. $\int_0^t \tau^2 e^{-2\tau}d\tau$

5. $\int_0^t \sin\tau\,\mathrm{s}h\left(t-\tau\right)d\tau$

6. $x''+2x'-x=3t-1; x\left(0\right)=-1$

7. $\begin{cases} x'+x-y=t^3-2 \\ y'+2x=2t \end{cases} x\left(0\right)=0; y\left(0\right)=1$

20-нұсқа

1. $f(t)=\dfrac{1}{(t-1)^2}\cdot\chi(t)\,?$

2. $f\left(t\right)=\dfrac{\cos 2t}{t}+t^2e^{t-2};$

3. $F\left(p\right)=\dfrac{3p+1}{\left(p^3-1\right)\left(p-3\right)};$

4. $\int_0^t \tau\cos 2\tau d\tau$

5. $\int_0^t \sin\tau e^{\pi-\tau}d\tau$

6. $x''-x'+x=3t-1; x\left(0\right)=-1; x\left(0\right)=0$

7. $\begin{cases} x'+2x-y=t \\ y'+2x=1-t \end{cases} x\left(0\right)=1; y\left(0\right)=1$

21-нұсқа

1. $f(t)=\ln t\cdot\chi(t)\,?$

2. $f\left(t\right)=\dfrac{\sin 2t}{t}-3sh3t-t^2;$

3. $F\left(p\right)=\dfrac{3p+2}{\left(2p^2-4p\right)\left(p-3\right)};$

4. $\int_0^t \tau\sin^2 2\tau d\tau$

5. $\int_0^t \sin\tau\cdot ch\left(t-\tau\right)d\tau$

6. $x''+x=1; x\left(0\right)=-1; x'\left(0\right)=0$

7. $\begin{cases} x'+x-y'=\sin t \\ y'+2x=t \end{cases} x\left(0\right)=0; y\left(0\right)=1$

22-нұсқа

1. $f(t) = \operatorname{tg} t \cdot \chi(t)$?

2. $f(t) = te^{-2t}\cos 3t + sh(t-3)\chi(t-3);$

3. $F(p) = \dfrac{p+3}{(p^2-4)(p-1)};$

4. $\int_0^t \tau \cos^2 2\tau d\tau$

5. $\int_0^t \sin 2\tau (t-\tau)^2 d\tau$

6. $x'' + 2x' - x = 3t - 1; x(0) = -1$

7. $\begin{cases} x' + x - y = 2 \\ y' + x + y = 2t \end{cases} x(0) = 0; y(0) = -1$

23-нұсқа

1. $f(t) = e^{(2+i)t} \cdot \chi(t-1)$?

2. $f(t) = \dfrac{\sin 2t}{t} + \sin 2t \cos 3t;$

3. $F(p) = \dfrac{2p+7}{(p+1)(p^2-3p)};$

4. $\int_0^t \tau e^{\tau} \sin 2\tau d\tau$

5. $\int_0^t \sin\tau \cos(t-\tau) d\tau$

6. $x'' + 2x' + x = t^2 + 5t + 4; x(0) = -1; x'(0) = 0$

7. $\begin{cases} x' + x - y = 2t + 5 \\ y' + 2x' - 3x = t \end{cases} x(0) = 0; y(0) = 1$

24-нұсқа

1. $t\cos(t+3)\,\chi(t+3)-(2t-5)^2\,\chi(2t-5)$

2. $f(t)=e^{t^2}$?

3. $F(p)=\dfrac{p+1}{p\left(p^2+4\right)}$;

4. $\int_0^t \tau^2 e^{-\tau}\sin\tau d\tau$

5. $\int_0^t \cos\tau\sin(t-\tau)\,d\tau$

6. $x''-x'=te^t 1; x(0)=x(0)=0$

7. $\begin{cases} x'+5x-y''=\sin t \\ y'+2x=t \end{cases} x(0)=0; y(0)=1$

25-нұсқа

1. $f(t)=\dfrac{1}{t}\cdot\chi(t-1)$?

2. $f(t)=\dfrac{\sin^2 2t}{t}-\dfrac{1}{3^t}$;

3. $F(p)=\dfrac{3p-5}{(2p-1)\left(p^2-3p\right)}$;

4. $\int_0^t \tau^2\sin^2 2\tau d\tau$

5. $\int_0^t \cos\tau\cos(t-\tau)\,d\tau$

6. $x'-4x=1-t^2; x(0)=1$

7. $\begin{cases} x'+x-y=t^3-2 \\ y'+2x=2t \end{cases} x(0)=0; y(0)=1$

26-нұсқа

1. $f(t)=e^{it^2}\cdot\chi(t)$?
2. $f\left(t\right)=e^{2t-1}sh2t;$
3. $F\left(p\right)=\dfrac{p}{\left(2p-1\right)\left(p-3\right)};$
4. $\int_0^t\tau\cdot ch2\tau d\tau$
5. $\int_0^t sh\tau\cdot sh\left(t-\tau\right)d\tau$
6. $x'-4x=1-t^2;x\left(0\right)=1$
7. $\begin{cases}x''+y'-x=4-t^2\\x'-2y+2x=2t^2\end{cases}$ $x\left(0\right)=-1;x'\left(0\right)=0;y\left(0\right)=-1$

27-нұсқа

1. $f(t)=2^{\sqrt[3]{1+t^4}}\cdot\chi(t)$?
2. $f\left(t\right)=3e^{1-t}-\dfrac{\sin^2 2t}{t};$
3. $F\left(p\right)=\dfrac{p}{\left(2p-1\right)\left(p-3\right)};$
4. $\int_0^t\tau\cos^2 2\tau d\tau$
5. $\int_0^t e^{\tau}\sin\left(t-\tau\right)d\tau$
6. $x''-4x'+x=1-2e^t;x\left(0\right)=2;x'\left(0\right)=1$
7. $\begin{cases}x'+x''-y'=3t\\y'+2x=t-3\end{cases}$ $x\left(0\right)=0;y\left(0\right)=1;x'\left(0\right)=0$

28-нұсқа

1. $f(t)=3^t\cdot\chi(t)$?

2. $f\left(t\right)=\dfrac{\mathrm{s}h2t}{t}-e^{2-t}\sin 3t;$

3. $F\left(p\right)=\dfrac{3p-1}{\left(2p-1\right)\left(p-3\right)};$

4. $\int_0^t \tau^2 e^{2\tau}d\tau$

5. $\int_0^t \sin\tau e^{(t-\tau)}d\tau$

6. $x''-x=1;x\left(0\right)=-1;x'\left(0\right)=0$

7. $\begin{cases} x'-2x+y=3-4t \\ y'+x+2y=4+t \end{cases} x\left(0\right)=0;y\left(0\right)=2$

29-нұсқа

1. $f(t)=t^3\cdot\chi(t)$?

2. $f\left(t\right)=t\chi\left(t\right)-\left(t-\pi\right)\chi\left(t-\pi\right)+\dfrac{\cos 3t}{t};$

3. $F\left(p\right)=\dfrac{p}{\left(2p-1\right)\left(p-3\right)};$

4. $\int_0^t \tau e^{\tau}\sin 3\tau d\tau$

5. $\int_0^t \sin\tau\sin\left(t-\tau\right)d\tau$

6. $x'''-x'=t-1;x\left(0\right)=-1;x'\left(0\right)=x''\left(0\right)=0$

7. $\begin{cases} x'+2x-y=\sin t \\ y'-x=-1 \end{cases} x\left(0\right)=1;y\left(0\right)=1$

30-нұсқа

1. $f(t)=e^{it}\cdot\chi(t)$?
2. $f(t)=(t+4)\chi(t+4)-\sin^2 4t;$
3. $F(p)=\dfrac{p}{(2p-1)(p-3)};$
4. $\int_0^t \tau\sin^2 2\tau d\tau$
5. $\int_0^t \sin\tau e^{\pi/2-\tau}d\tau$
6. $x''+3x'=e^t; x(0)=0; x'(0)=-1$
7. $\begin{cases} x'+x-y=\sin t \\ y'+2x=\sin t \end{cases} x(0)=0; y(0)=1$

Бақылау жұмысына қосымша.

№ 61-80. Амалдық қисап әдісімен Коши есебін шешу керек:

61. $x'' + x' - 2x = e^t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$;

62. $x'' + 3x' = e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$;

63. $x'' + x = \cos t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 1$;

64. $x'' + 4x' - 5x = 0$, $x(0) = 3$, $x'(0) = -3$;

65. $x'' + 4x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 6$;

66. $x'' + 2x' + x = t + 2$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$;

67. $x'' - x' = e^t$, $x(0) = 4$, $x'(0) = 4$;

68. $x'' - x = \sin t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$;

69. $x'' - 3x' + 2x = 2e^{3t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 3$;

70. $x'' + 4x = \sin 3t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$;

71. $x'' + 4x = e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$;

72. $x'' + x = 1$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$;

73. $x'' - 2x' + 2x = 2t - 2$, $x(0) = x'(0) = 0$;

74. $x'' - 6x' + 9x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$;

75. $x'' - x' - 2x = 1$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -2$;

76. $x'' - 2x' + 5x = 1 - t$, $x(0) = x'(0) = 0$;

77. $x'' + x = 1$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$;

78. $x'' + 2x' + x = t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$;

79. $x'' + 9x = 1$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$;

80. $x'' - 2x' + 2x = 1$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

№ 81-100. Алғашқы шарттармен бірге берілген дифференциалдық теңдеулер жүйесін амалдық қисап әдісімен шешу керек:

81. $\begin{cases} x' + y = 0 \\ y' + x = 0 \end{cases}$, $x(0) = 1, \quad y(0) = -1$;

82. $\begin{cases} x' - 3x - 4y = 0 \\ y' - 4x + 3y = 0 \end{cases}$, $x(0) = 1, \quad y(0) = 1$;

83. $\begin{cases} x' = 2x - 2y \\ y' = -4x \end{cases}$, $x(0) = 3, \quad y(0) = 1$;

84. $\begin{cases} x' + y = 2e^t \\ y' + x = 2e^t \end{cases}$, $x(0) = 1, \quad y(0) = 1$;

85. $\begin{cases} x' = 4x + 3 \\ y' = x + 2y \end{cases}$, $x(0) = -1, \quad y(0) = 0$;

86. $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = 3x \end{cases}$, $x(0) = 0, \quad y(0) = 1$;

91. $\begin{cases} x' = -y + 2 \\ y' = x + 1 \end{cases}$, $x(0) = -1, \quad y(0) = 0$;

92. $\begin{cases} x' - 2y = 0 \\ y' - 2x = 0 \end{cases}$, $x(0) = 2, \quad y(0) = 2$;

93. $\begin{cases} x' = 2x + 3y + 1 \\ y' = 4x - 2y \end{cases}$, $x(0) = -1, \quad y(0) = 0$;

94. $\begin{cases} x' = -x + 3y + 1 \\ y' = x + y \end{cases}$, $x(0) = 1, \quad y(0) = 2$;

95. $\begin{cases} x' = -y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$, $x(0) = 1, \quad y(0) = 1$;

96. $\begin{cases} x + x' = y + e^t \\ y + y' = x + e^t \end{cases}$, $x(0) = 1, \quad y(0) = 1$;

87. $\begin{cases} x' + x - y = 0 \\ y' + x + y = 0 \end{cases}$,

$x(0) = 0, \quad y(0) = 0$;

88. $\begin{cases} x' - 3y = 0 \\ y' + x - 2y = 0 \end{cases}$,

$x(0) = 0, \quad y(0) = 0$;

89. $\begin{cases} x' = 3y \\ y' = 3x + 1 \end{cases}$,

$x(0) = 2, \quad y(0) = 0$;

90. $\begin{cases} x' = 3y \\ y' = 3x + 1 \end{cases}$,

$x(0) = 2, \quad y(0) = 0$;

97. $\begin{cases} x' = 3y + 2 \\ y' = x + 2y \end{cases}$,

$x(0) = -1, \quad y(0) = 1$;

98. $\begin{cases} x' = 2y + 1 \\ y' = 2x + 3 \end{cases}$,

$x(0) = -1, \quad y(0) = 0$;

99. $\begin{cases} x' = y + 3 \\ y' = x + 2 \end{cases}$,

$x(0) = 1, \quad y(0) = 0$;

100. $\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = x - y \end{cases}$,

$x(0) = 1, \quad y(0) = 0$.

Комплекс айнымалды функциялар теориясы және амалдық қисап бөліміне арналған

І. Анықтама материал

1. Түбір табу

z комплекс санының n-ші дәрежелі түбірінің әртүрлі n мәні бар және оларды келесі формула арқылы табуға болады:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad \varphi = \arg z,$$

$$k = 0,1,\ldots,n-1.$$

2. Комплек айнымалды элементар функциялар

Комплекс айнымалды **көрсеткіштік функция** келесі теңдікпен анықталады:

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y). \qquad (1)$$

Көрсеткіштік функцияның қасиеттері:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2},$$

мұндағы z_1 мен z_2 – кез келген комплекс сандар;

$$e^{z+2\pi ki} = e^z, \; k = 0,1,\ldots,$$

яғни, e^z - негізгі периоды $2\pi i$ тең.

Тригонометриялық $\sin x$ және $\cos x$ **функциялары** көрсеткіштік функция арқылы өрнектеледі:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

tgz және $ctgz$ функциялары келесі теңдікпен анықталады:

$$tgz = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad ctgz = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Тригонометриядағы барлық формулалар комплекс айнымалды тригономертиялық функцияларға да сақталады.

Гиперболалық shz, chz, thz, $cthz$ **функциялары** келесі теңдіктермен анықталады:

$$shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2};$$

$$thz = \frac{shz}{chz}; \quad cthz = \frac{chz}{shz}.$$

Тригонометриялық және гиперболалық функциялардың арасындағы байланыс келесі теңдіктерден көрінеді:

$$\sin iz = ishz, \quad \cos iz = chz.$$

Логарифмдік функция көрсеткіштік функцияға кері функция ретінде анықталады:

$$Lnz = \ln|z| + iArgz = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), \ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Функцияның $k = 0$ сәйкес мәні оның **бас мәні** деп аталады және $\ln z$ арқылы белгіленеді:

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z$$

Логарифмдік функцияның қасиеттері:

$$Ln(z_1 z_2) = Lnz_1 + Lnz_2;$$

$$Ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Lnz_1 - Lnz_2;$$

$$Lnz^n = nLnz + 2\pi ki, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

$$Ln\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} Lnz \cdot$$

Кері тригонометриялық функциялар: $Arc\sin z$, $Arc\cos z$, $Arctgz$, $Arctgz$**,** сәйкес $\sin z$, $\cos z$, tgz, $ctgz$ **тригонометриялық** функцияларына кері функциялар ретінде анықталады. Бұл функциялардың барлығы көпмәнді және логарифмдік функция арқылы өрнектеледі:

$$Arc\sin z = -iLn(iz + \sqrt{1 - z^2})\,; \quad Arc\cos z = -iLn(z + \sqrt{z^2 - 1})\,;$$

$$Arctgz = -\frac{i}{2} Ln\frac{1 + iz}{1 - iz},$$

$$Arcctgz = \frac{i}{2} Ln\frac{z - i}{z + 1}.$$

Логарифмнің бас мәніне сәйкес келетін функциялар кіші әріптермен басталып жазылады $(\arcsin z, ...)$.

Дәрежелік $\omega = z^2$ (α –кез келген комплекс сан) **функция:** $z^{\alpha} = e^{\alpha Lnz}$, $z \neq 0$.

Бұл көпмәнді функция, $z^{\alpha} = e^{\alpha \ln z}$ – оның бас мәні.

Көрсеткіштік $\omega = \alpha^z$, $\alpha \neq 0$ **функция**

$$\alpha^z = e^{zLn\alpha}$$

теңдігімен анықталады. Бұл функцияның бас мәні – $\alpha^z = e^{z\ln\alpha}$.

3. Комплекс жазықтықтағы қисықтар

$z = z(t) = x(t) + iy(t)$ түріндегі теңдеу, комплекс жазықтықта параметрлік теңдеулері

$$x = x(t), \ \ y = y(t)$$

Түрінде болатын қисықты анықтайды. Бұл теңдеулерден t параметрін шығарсақ, қисықтың $F(x, y) = 0$ түріндегі теңдеуін аламыз.

4. Комплекс айнымалды функцияларды дифференциалдау. Коши-Риман шарттары

$\omega = f(z)$ функциясы қандай да бір G аймағында анықталсын. z пен $z + \Delta z$ нүктелері G аймағында жатсын және $\Delta\omega = f(z + \Delta z) - f(z)$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ болсын.

Егер $\Delta z \to 0$ ұмтылғанда, $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ қатынасының ақырлы шегі бар болса, онда $w = f(z)$, $z \in G$ нүктесінде дифференциалданатын функция деп аталады және $f'(z)$, $\frac{dw}{dz}$ символдарымен белгіленеді: $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$.

Егер $z = x + iy$, $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ болса, онда $f(z)$ функциясының дифференциалданатын әрбір нүктесінде ***Коши-Риман шарттары деп аталатын***

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2)$$

теңдіктері орындалады.

Керісінше, егер қандай да бір (x, y) нүктесінде Коши-Риман шарттары орындалса, сонымен бірге $u(x, y)$, $v(x, y)$ нақты екі айнымалды функция дифференциалданатын болса, онда $z = x + iy$ нүктесінде комплекс айнымалды $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ функциясы дифференциалданады.

$w = f(z)$ функциясы z нүктесінде және оның қандай бір маңайында дифференциалданса, онда ол z ***нүктесінде аналитикалық функция*** деп аталады. Егер $f(x)$, G аймағының әрбір нүктесінде дифференциалданатын функция болса, онда ол G ***аймағында аналитикалық функция*** деп аталады.

Аналитикалық функцияның туындысын

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$ ф

ормулалары бойынша есептеуге болады..

Егер $f(z)$ функциясының нақты $u = u(x, y)$ немесе жорамал $v = v(x, y)$ бөлігі беріліп және қандай да бір z_0 нүктедегі $f(z_0)$ мәні белгілі болса, онда Коши-Риман шарттарын пайдаланыпғ $w = f(z)$ аналитикалық функциясын құруға болады.

5. Комплекс айнымалды функцияларды интегралдау

G аймағында бірмәнді үзіліссіз $w = f(z)$ функциясы анықталсын. Γ, G – аймағында жатқан құрақты-тегіс қисық; $z = x + iy$, $f(x) = u + iv$, мұндағы $u(x, y)$, $v(x, y)$, x пен y айнымалдарының нақты функциялары. Комплекс айнымалды $w = f(x)$ функциясының интегралын есептеу екінші текті қисықсызықты

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma udx - vdy + i\int_\Gamma vdx + udy$$

интегралды есептеуге әкеледі.

Егер Γ қисығы $x = x(t),\ y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ параметрлік теңдеумен берілсе, онда

$$\int_\Gamma f(x)dz = \int_\alpha^\beta f\left[z(t)\right]z'(t)dt, \quad z(t) = x(t) + iy(t).$$

Егер $w = f(t)$ бір байламды G аймағында аналитикалық функция болса, онда, интеграл интегралдау қисығының түріне тәуелсіз, бірақ қисықтың бастапқы және соңғы нүктелеріне тәуелді болады. Бұл жағдайда интегралды есептеуге Ньютон-Лейбниц формуласын пайдалану керек:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \Phi(z_2) - \Phi(z_1),$$

мұндағы $\Phi(z)$ – $f(z)$ функциясының қандай да бір алғашқы функциясы: $\Phi'(z) = f(z)$, $z \in G$.

Егер $w = f(t)$ құрақты-тегіс Γ тұйық контурымен шектелген G аймағында және Γ контурында аналитикалық функция болса, онда Коши теоремасы:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

және $z_0 \in G$ ішкі нүкте үшін Кошидік интегралдық формуласы

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0 dz}$$

орындалады.

6. Лоран қатары

Егер $w = f(z)$ функциясы $\rho < \left|z - z_0 < R\right|$ сақиналы аналитикалық функция болса, онда ол осы сақинада Лоран қатарына жіктеледі:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

(6) $$c_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{k+1}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \, . \qquad (7)$$

Мұнда Γ – центрі z_0 нүктесі болатын, сақина ішінде жатқан (сағат тіліне қарама-қарсы бағытталған) кез келген шеңбер.

(6) фонрмуладағы

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z - z_0)^k \quad \text{және} \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

қатарлары Лоран қатарының сәйкес бас және дұрыс бөліктері деп аталады.

7. Аналитикалық функциялардың оқшауланған ерекше нүктелері

Егер $w = f(z)$ бірмәнді және $0 < |z - z_0| < \delta$ сақинасының z_0 нүктесінен басқа нүктелерде аналитикалық функция болса, онда z_0 – ***функцияның оқшауланған ерекше нүктесі*** деп аталады.

$w = f(z)$ функциясын z_0 нүктесінің маңайында $0 < |z - z_0| < \delta$ сақинасында жинақталатын Лоран қатарына жіктеуге болады. Келесі жағдайлар болуы мүмкін:

1) Лоран қатырнда $z - z_0$ айырымының теріс дәрежелі мүшелері жоқ, яғни $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$. Бұл жағдайда z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының **жөнделетін ерекше нүктесі** деп аталады;

2) Лоран қатары мүшелерінің құрамында $z - z_0$ айырымының теріс дәрежелері бар және ондай мүшелер саны ақырлы, яғни $f(z) = \sum\limits_{k=-n}^{\infty} c_k (z - z_0)^n$, $c_{-n} \neq 0$. Бұл жағдайда z_0 нүктесі $w = f(z)$ ***функциясының*** n***-ші ретті полюсі деп аталады;***

3) Лоран қатары мүшелерінің құрамында $z - z_0$ айырымының теріс дәрежелері бар және ондай мүшелер саны ақырсыз, яғни $f(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^n$. Бұл жағдайда, z_0 нүктесі $w = f(z)$ ***функциясының елеулі ерекше нүктесі деп аталады.***

Ерекше нүктелердің сипатын анықтау үшін келесі тұжырымдарды пайдалануға болады:

1. z_0 нүктесі $w = f(z)$ аналитикалық функциясының жөнделетін ерекше нүктесі áîëóû ¾øií, $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = C_0$, $|C_0| < \infty$ шегінің бар болуы қажетті және жеткілікті.

2. z_0 нүктесі $w = f(z)$ аналитикалық функциясының полюсі болуы үшін $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$ шегінің бар болуы қажетті және жеткілікті.

$2'$. z_0 нүктесі $w = f(z)$ функциясының n-ші ретті полюсі болуы үшін, $f(z)$ функциясы

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^n}$$

түрінде көрсетілуі қажетті және жеткілікті (мұндағы $\varphi(z)$ функциясы z_0 нүктесінде аналитикалық функция және $\varphi(z_0) \neq 0$).

$2''$. z_0 нүктесі $f(z) = \dfrac{\lambda(z)}{\mu(z)}$ функциясының оқшауланған ерекше нүктесі болсын ($\lambda(z)$ пен $\mu(z)$ – z_0 нүктесінде аналитикалық функциялар). Егер $\lambda(z_0) = \lambda'(z_0) = \ldots = \lambda^{(k-1)}(z_0) = 0$, $\lambda^{(k)}(z_0) \neq 0$ (яғни z_0 нүктесі $\lambda(z)$ функциясының *k*-ші ретті нөлі), ал $\mu(z)$ үшін $\mu(z_0) = \mu'(z_0) = \ldots = \mu^{l-1}(z_0) = 0$, $\mu^{l}(z_0) \neq 0$ (яғни z_0 – $\mu(z)$ функциясының *l*-ші ретті нөлі) болып:

$l > k$ болса, онда z_0, $f(z)$ аналитикалық функциясының $l - k$ ретті полюсі;

$l \leq k$ болса, онда z_0, $f(z)$ аналитикалық функциясының жөнделетін ерекше нүктесі.

Дербес жағдайда, $k=0$, $l=1$: $\lambda(z_0)\neq 0$, $\mu(z_0)=0$, $\mu'(z_0)\neq 0$ болса, онда z_0 $f(z)$ функцияның бірінші ретті полюсі (жай полюсі) болады.

3. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ шегінің болмауы – z_0 нүктесінің $w=f(z)$ функциясы үшін елеулі ерекше нүкте болуының қажетті және жеткілікті шарты.

8. Шегерімдер

z_0 арқылы $w=f(z)$ функциясының дараланған ерекше нүктесін белгілейік. $f(z)$ функциясының z_0 нүктесіндегі шегерімі деп $\underset{z=z_0}{\textit{шег}}\, f(z)$ (немесе $\textit{шег} f(z_0)$ арқылы белгіленетін,

$$\underset{z=z_0}{\textit{шег}}\, f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz \qquad (8)$$

санын айтады. Мұндағы γ тұйық контур ішінде $f(z)$ функциясының z_0 нүктесінен басқа ерекше нүктелері жоқ.

(7) және (8)-ші формулаларды салыстыра отырып, функция шегерімі $f(z)$-тің z_0 нүктесі мкаңайындағы Лоран қатарының минус бірінші дәрежелі мүшесінің коэффициентіне тең екенін көреміз:

$$\textit{шег} f(z_0)=C_{-1} \qquad (9)$$

Функецияның жөнделетін ерекше нүктедегі шегерімі нөлге тең.

Функцияның ***n-ші ретті полюстегі шегерімі*** келесі формуламен есептеледі:

$$\underset{z=z_0}{шег}\, f(z) = \frac{1}{(n-1)} \lim_{z \to z_0} \left[f(z)(z-z_0)^n \right]^{(n-1)};$$

Егер $n=1$ болса, онда

$$\underset{z=z_0}{шег}\, f(z) = \lim_{z \to z_0} f(z)(z-z_0).$$

Егер $w = f(z)$ функциясы z_0 нүктесінің маңайында екі аналитикалық функцияның қатынасы түрінде берілсе: $f(z) = \dfrac{\lambda(z)}{\mu(z)}$, және $\lambda(z_0) \neq 0$, $\mu(z_0) = 0$, $\mu'(z_0) \neq 0$ (яғни, z_0 – жай полюс) болса, онда

$$\underset{z=z_0}{шег}\, f(z) = \frac{\lambda(z_0)}{\mu'(z_0)}.$$

Егер z_0 – $w = f(z)$ функциясының елеулі ерекше нүктесі болса, онда шегерім (9) формуламен есептеледі.

Шегерімдер туралы Кошидің негізгі теоремасы. Егер $w = f(z)$, G аймағының саны ақырлы $z_1, z_2, \ldots z_n$ нүктелерінен басқа ішкі нүктелерінде және Γ шекарасында аналитикалық функция болса, онда

$$\oint_{\Gamma} f(z)ds = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{шег}\, f(z). \qquad (10)$$

8. Рационал функциялардың меншіксіз интегралдарын есептеу

$$R(x) = \frac{P_k(x)}{Q_l(x)} \qquad (11)$$

түріндегі рационал функция (мұндағы $P_k(x)$ пен $Q_l(x)$, сәйкес k –ші және l –ші дәрежелі көпмүшеліктер) бүкіл сан өсінде үзіліссіз және $l \geq k+2$, яғни бөлімінің дәреже көрсеткіші алымының дәреже көрсеткішінен, ең болмағанда, екі бірлікке артық болса, онда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum\limits_{m} \underset{z=z_k}{шег} f(z)$, мұндағы $R(z)$ функциясының шегерімдерінің қосындысы $\operatorname{Im} z > 0$ жарты жазықтықта орналасқан барлық z_m полюстері бойынша алынады.

9. Арнайы түрдегі меншіксіз интегралдарды есептеу

Егер $R(x)$ бүкіл сан өсінде үзіліссіз және $l \geq k+1$ болса, (яғни $R(x)$ – дұрыс бөлшек), онда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\lambda x dx = \operatorname{Re}\left\{2\pi i \sum_{m} \underset{z=z_m}{шег} R(z)e^{i\lambda z}\right\}, \quad \lambda > 0,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\lambda x dx = \operatorname{Im}\left\{2\pi i \sum_{m} \underset{z=z_m}{шег} R(z)e^{i\lambda z}\right\}, \quad \lambda > 0,$$

мұнда $R(z)e^{i\lambda z}$ функциясының шегерімдерінің қосындысы $\operatorname{Im} z > 0$ жарты жазықтықта орналасқан барлық z_m полюстері бойынша алынады.

10. Арнайы түрдегі интегралдарды есептеу

R, $\cos t$ мен $\sin t$-ге қатысты рационал функция және ол интегралдау аралығында үзіліссіз функция болсын. $z = e^{it}$ деп алсақ,

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad dt = \frac{dz}{iz}$$

болады да,

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \oint_{|z|=1} F(z)dz \qquad (12)$$

аламыз. (12)-нің оң жағындағы контурлық интеграл (10)-формуламен есептеледі ($F(z)$ функциясының шегерімдерінің қосындысы $|z|<1$ аймағында жатқан барлық ерекше нүктелер бойынша алынады).

11. Лаплас түрлендіруі

Түпнұсқа деп келесі шарттарды қанағаттандыратын, нақты t аргументтің $f(t)$ функциясын айтады:

1) $f(t)$ *функциясы* t *өсінің кез келген ақырлы аралығында интегралданады;*

2) *Барлық теріс* t *үшін* $f(t)=0$*;*

3) $f(t)$ *функциясының өсуі көрсеткіштік функцияның өсуінен артық емес, яғни барлық* t *үшін* $|f(t)|<M\cdot e^{s_0 t}$ *теңсіздігі орындалатындай* M *мен* s_0 *тұрақтылары табылады.*

$f(t)$ ***функциясының Лаплас кескіні*** *деп*

$$F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$$

теңдігімен анықталатын, комплекс $p=\delta+i\tau$ *айнымалдың* $F(p)$ *функциясын айтады және оны*

$$f(t) \leftrightarrow F(p)$$

арқылы белгілейді (***оның басқа да белгілеулері бар***).

Кез келген $f(t)$ түпнұсқа функция үшін $F(p)$ кескіні $\operatorname{Re} p > s_0$ жарты жазықтықта анықталады және сонда ол аналитикалық функция болады.

Қасиеттері

1^0. **Сызықтығы:** кез келген C_1 және C_2 комплекс тұрақтылары үшін

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \leftrightarrow C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p).$$

2^0. **Ұқсастық формуласы:** кез келген $\omega > 0$ тұрақтысы үшін $f(\omega t) \leftrightarrow \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right)$.

3^0. **Түпнұсқаны дифференциалдау:** егер

$f(t), f'(t), ... f^{(n)}(t)$ - түпнұсқа функциялар болса, онда

$f'(t) \leftrightarrow pF(p) - f(0)$,

$f''(t) \leftrightarrow p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$,

. . . .

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0).$$

Мұндағы $f^{(k)}(0) = \lim_{t \to 0+} f^{(k)}(t)$, $k = 0,1,...,n-1$.

4^0. **Кескінді дифференциалдау:** $F'(p) \leftrightarrow -tf(t)$.

5^0. **Түпнұсқаны интегралдау:** $\int_0^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(p)}{P}$.

6^0. **Кескінді интегралдау:** егер $\frac{f(t)}{t}$ түпнұсқа функция болса, онда $\int_p^{+\infty} F(p) dp \leftrightarrow \frac{f(t)}{t}$.

7^0. **Ығыстыру формуласы:** кез келген λ комплекс саны үшін $f(t) \cdot e^{-\lambda t} \leftrightarrow F(p + \lambda)$.

8^0. **Кешігу формуласы:** $f(t - \tau) \leftrightarrow e^{-p\tau} F(p)$, $\tau > 0$.

9^0. **Кескіндерді көбейту формуласы:**

$$F_1(p)\cdot F_2(p)\leftrightarrow\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau. \qquad (13)$$

(13) формуладағы интеграл, $f_1(t)$ мен $f_2(t)$ **функцияларының үйірткісі** деп аталады да, $f_1 * f_2$ символымен белгіленеді. Сонымен,

$$F_1(p)\cdot F_2(p)\leftrightarrow f_1 * f_2.$$

Кескіні бойынша түпнұсқаны табу

Белгілі $F(p)$ кескін бойынша $f(t)$ түпнұсқаны табу үшін көбінесе келесі әдістер қолданылады:

1) егер $F(p)$ дұрыс рационал функция болса, онда оны қарапайым бөлшектердің қосындысына жіктейді, содан соң 1^0-9^0 қасиеттерді пайдаланып, алынған әрбір бөлшектің түпнұсқасын табады;

2) белгілі жеткілікті шарттар орындалғанда, $F(p)$ үшін

$$f(t)=\sum_k \underset{z=z_k}{шег}\left[F(p)e^{pt}\right]$$

функциясы түпнұсқа болады. Бұл теңдік **жіктеу формуласы** деп аталады.

12. Негізгі сәйкестік формулалары

$$1\leftrightarrow\frac{1}{p}; \qquad e^{at}\leftrightarrow\frac{1}{p-a}; \qquad \sin\omega t\leftrightarrow\frac{\omega}{p^2+\omega^2};$$

$$\cos\omega t\leftrightarrow\frac{p}{p^2+\omega^2}; \qquad sh\omega t\leftrightarrow\frac{\omega}{p^2-\omega^2}; \qquad ch\omega t\leftrightarrow\frac{p}{p^2-\omega^2};$$

$$t^n\leftrightarrow\frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Көрстілген сәйкестіктердің сол жақ бөліктері

$$\eta(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0,\\ 0, & t<0\end{cases}$$ функциясына көбейтілген деп қабылданады.

13. Сызықтық дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есебі

Сызықтық дифференциалдық теңдеулерді ***амалдық¸*** шешу үш кезеңнен тұрады:

1) берілген функциялардың Лаплас кескіндеріне өту (дифференциалдық теңдеу ізделінетін функцияның кескініне қатысты алгебралық теңдеу түріне ауысады);
2) алынған алгебралық теңдеуді шешу;
3) кескіні бойынша ізделінген функцияға өту.

Сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесін де осы схема бойынша шешуге болады.

14. Дюамель формуласы

n-ші ретті сызықтық коэффициенттері тұрақты дифференциалдық теңдеу:

$$L\{x(t)\}\equiv a_0x^{(n)}(t)+a_1\,x^{(n-1)}(t)+...+a_nx(t)=f(t)$$

(15)

және алғашқы шарттар:

$$x(0)=x'(0)=...=x^{(n-1)}(0)=(0) \qquad (16)$$

берілсін. Алғашқы шарты (16) болатын $L\{x(t)\}=1$ теңдеуінің шешімі $x_1(t)$ болсын. Онда (15)–(16) есептің $x(t)$ шешімін келесі фомулалардың бірін пайдаланып, $x_1(t)$ мен $f(t)$ арқылы өрнектеуге болады:

$$x(t)=\int_0^t x_1'(\tau)f(t-\tau)d\tau,\quad x(t)=\int_0^t x_1'(t-\tau)f(\tau)d\tau,$$

$$x(t)=f(0)x_1(t)+\int_0^t f'(\tau)x_1(t-\tau)d\tau$$

$$x(t)=f(0)x_1(t)+\int_0^t f'(t-\tau)x_1(\tau)d\tau.$$

Бұл өрнектердің әрбіреуі Дюамель формуласы (немесе инетегралы) деп аталады.

Дюамель формуласына негізделген дифференциалдық теңдеулерді шешу әдісін, (15) теңдеудің оң жағындағы $f(t)$ функциясының $F(p)$ кескінін табу қиын болғанда және де (15) – (16) есептерін әртүрлі $f(t)$ функциясы үшін бірнеше рет шешу қажеттілігі болғанда қолданады.

Теориялық сұрақтар:

1. Комплекс сандар, оларға жасалатын амалдар.
2. Комплекс айнымалды көрсеткіштік және логарифмдік функциялар. Эйлер формулалары.
3. Дәрежелік функция. Тригонометриялық және гиперболалық функциялар.
4. Комплекс айнымалды функция туындысы. Коши-Риман шарттары. Аналитикалық функция түсінігі.
5. Комплекс айнымалды функция туындысының модулі мен аргументініңгеометриялық мағынасы. Конформдық бейне туралы түсінік.
6. Комплекс айнымалды функцияның интегралы, оның қасиеттері.
7. Бір және көпбайламды аймақтар үшін Коши теоремасы. Ньютон-Лейбниц формуласы.
8. Кошидің интегралдық формуласы.
9. Аналитикалық функцияның жоғарғы ретті барлық туындыларының бар болуы.
10. Тейлор қатары. Аналитикалық функцияның Тейлор қатарына жіктелуі туралы теорема.
11. Лоран қатары. Жинақтылық сақинасы. Лоран теоремасы.
12. Оқшауланған ерекше нүктелердің жіктелуі.
13. Шегерімдер. Шегерімдерді есептеу.
14. Шегерімдер туралы Кошидің негізгі теоремасы. Контурлық интегралды есептеу.
15. Шегерімдер көмегімен меншіксіз интегралдарды есептеу. Жордан леммасы.
16. Лаплас түрлендіруі. Түпнұсқа.
17. Лаплас түрлендіруінің қасиеттері.
18. Түпнұсқа мен кескінді интегралдау.
19. Берілген кескін бойынша түпнұсқаны табу әдістері.

Теориялық жаттығулар

1. Теңдікті дәлелдеу керек::

$$\sin\theta + \sin 2\theta + ... + \sin n\theta = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta \sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}},\ \theta \neq 2\pi n,$$

$$n = 0, \pm 1 ... .$$

Нұсқау. $e^{i\theta}, e^{i2\theta}, ..., e^{in\theta}$ геометриялық прогрессиясын пайдалануға болады.

2. Коши-Риман шарттары r, φ координаттары бойынша $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{r}\ \frac{\partial v}{\partial \varphi};\quad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r}\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}$ түрінде жазылатынын дәлелдеу керек.

3. $w = |z|$ функциясы ешбір нүктеде дифференфиалданбайтынын дәлелдеу керек.

4. $U(x, y)$ – қандай да бір G аймағында гармониялық функция, яғни $\forall (x, y) \in G$, $\Delta U = 0$. f функциялары қандай болғанда, $f[u(x, y)]$ күрделі функциясы G аймағында гармониялық функция болады?

5. $f(z)$ функциясы $|z| \leq R$ дөңгелегінде аналитикалық функция және $M = \max\limits_{z \subset R} |f(z)|$ болсын. $|z| < R$ дөңгелегінің ішкі барлық нүктелерінде $\left|\frac{f^{(n)}(z)}{n!}\right| \leq \frac{M \cdot R}{(R - (z)^{n+1}}$, $n = 1, 2, ...$

теңсіздігінің орындалатынын дәлелдеу керек.

6. $A_0 = 1$, $A_1 = 1$, $A_{n+2} = A_n + A_{n+1}$, $n = 0, 1, ...$ шарттарымен анықталатын A_n сандары Фибоначчи сандары деп аталады. Кандай

да бір аймақта $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n z^n = \dfrac{1}{1-z-z^2}$ теңдігінің орындалатынын дәлелдеу керек. Қатардың жинақталу аймағын табу керек.

6. $f(z)$ жұп функциясы үшін $\underset{z=z_0}{шег} f(z) = -\underset{z=-z_0}{шег} f(z)$, ал, $f(z)$ тақ функциясы үшін $\underset{z=z_0}{шег} f(z) = \underset{z=-z_0}{шег} f(z)$ ьеңдігі орындалатынын дәлелдеу керек.

7. $f(z)$ пен $\varphi(z)$ функциялары үшін $z = z_0$ нүктесі, сәйкес m-ші және n-ші ретті полюс.

a) $f(z)\cdot\varphi(z)$; b) $\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}$; c) $f(z)+\varphi(z)$

функциялары үшін $z = z_0$ ерекше нүктесінің сипаты туралы не айтуға болады?

8. $f(z)$ және $g(z)$, z_0 нүктеде аналитикалық функциялар және $f(z_0)\neq 0$, $g(z_0)=g'(z_0)=0$, $g''(z_0)\neq 0$. $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$ функциясының $z = z_0$ нүктедегі шегерімін табу керек.

9. $f(z) = \eta(t)\sin e^{t^2}$ функциясы және оның туындысы түпнұсқа бола ма? Мұндағы $\eta(t) = \begin{cases} 1, & t\geq 0, \\ 0, & t<0 \end{cases}$.

10. Бейнелерді көбейту формуласын пайдаланып,

$$\int\limits_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)d\tau = 1-\cos t$$

интегралдақ теңдеуінің шешімін табу керек..

Пайдаланылған әдебиеттер:

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М: Наука, 1989.
2. Араманович И.Г., Лунц Л.Г., Эльсгльц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М: Наука, 1989.
3. Айдос Е.Ж. Жоғары математика-3. «Бастау», 2015.
4. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. Высшая школа, 1983.
5. Л.В.Борисова, В.В.Новиков, С.В Тышкевич, А.В.Шаталина. Теория функций комплексной переменной. Учебное пособие для студентов механико-математического, физического и геологического факультетов. Издательство Саратовского университета. 2004.
6. Контрольные работы по математическому анализу. Методические указания для студентов заочной формы обучения направления подготовки «Информатика и вычислительная техника». – Ухта, УГТУ, 2013.
7. Қазақша-орысша орысша-қазақша терминологиялық сөздік: Математика, – Алматы, «Рауан» баспасы, 1999.
8. Қазақша-орысша орысша-қазақша терминологиялық сөздік: Математика – «ҚАЗақпарат» баспа корпорациясы, – Алматы, 2014.

Ерқара Жолдыбайұлы Айдос

Комплекс айнымалды функциялар теориясы және операциялық есептеулер

Компьютерде беттеген және дизайнін жасаған – **Любовицкая Ольга**

ISBN 978-601-281-160-5

Басуға 2015 жылы қол қойылды.
Форматы 60х84 1/16. Көлемі 18,5 баспа табақ.
Times гарнитурасы. Офсеттік басылым.
Тапсырыс № ____. Тиражы – 1000 дана.

«Бастау» баспасы
Мемлекеттік лицензия – № 0000036
ҚР Білім және ғылым министрлігі.
ҚР Ұлттық мемлекеттік кітап палатасының
халықаралық код беру туралы №155 –
978-601-281 сертификаты.
Қазақстан Республикасы Ұлттық бизнес-рейтингінің
«Лидер отрасли – 2015» ұлттық сертификаты.
Алматы қаласы, Сейфуллин даңғылы, 458/460-95.
Тел.: 279 49 53, 279 97 32.

«Полиграфсервис» баспаханасында басылды (тел. 233-32-53).
Алматы қаласы, 050050, Зеленая көшесі, 13-а.462