Қазақстан Республикасы Ғылым және білім министрлігі
Семей қаласының Шәкәрім атындағы мемлекеттік университеті
Физика-математика факультеті
Математика және математиканы оқыту әдістемесі кафедрасы

КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯ

ОҚУ-ӘДІСТЕМЕЛІК КЕШЕН

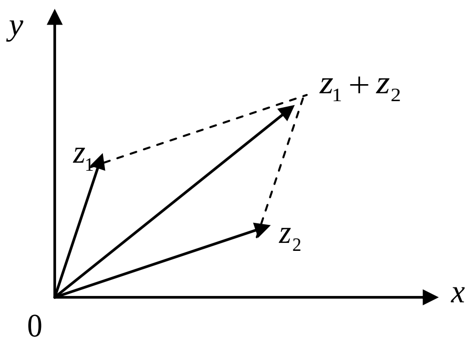
Семей 2014

I. КОМПЛЕКС САНДАР ЖӘНЕ КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР

§1. Комплекс сандар және комплекс жазықтық

Элементар алгебра курсында комплекс сан түсінігін көп жағдайда $x^2+1=0$ теңдеуімен байланыстырады. Алдымен бұл теңдеуді қанағаттандыратын нақты сан болмайтынына көңіл бөлінеді. Сондықтан «жорамал сан» $i=\sqrt{-1}$ енгізіледі де, теңдеу шешімі $\pm i$ болады. Осылай $x+iy$ комплекс саны x нақты саны мен iy «жорамал санының» қосындысы ретінде анықталды. $i^2=-1$ деп осы жаңа сандарға әртүрлі амалдар қолданылады. Жаңа сандар енгізілгеннен кейін $x^2+px+q=0$ түріндегі квадрат теңдеулер және, жалпы алғанда, $x^n+p_1x^{n-1}+...+p_{n-1}x+p_n=0$ түріндегі кез келген коэффициентті теңдеулердің бәрі шешілетін болды.

R^2 жазықтығын қарастырайық және оның әрбір нүктесін $z=(x,y)$, мұндағы $x\in R$, $y\in R$, вектор деп санаймыз.



Осыған байланысты z-тің модулін, сол сияқты $z_1=(x_1,y_1)$ және $z_2=(x_2,y_2)$ үшін қосу операциясын өзімізге векторлар үшін белгілі ережемен анықтайық:

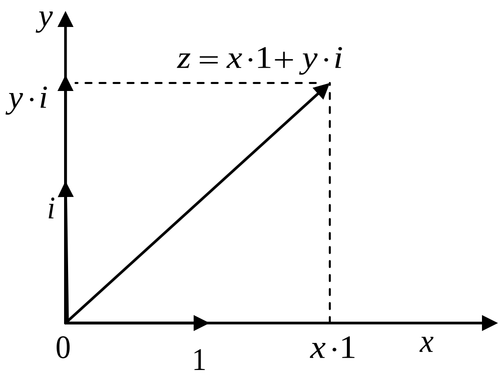
$$|z|=\sqrt{x^2+y^2},$$
$$z=z_1+z_2 \Leftrightarrow x=x_1+x_2 \wedge y=y_1+y_2. \quad (1)$$

Осылайша $\forall\alpha \in R$ үшін

$$\alpha z = (\alpha x, \alpha y).$$

Жазықтықтағы векторлар теориясы бойынша z -ті $1 = (1,0)$ және $i = (0,1)$ векторлары бойынша жіктеуге болады:

$$z = x \cdot 1 + y \cdot i. \qquad (2)$$



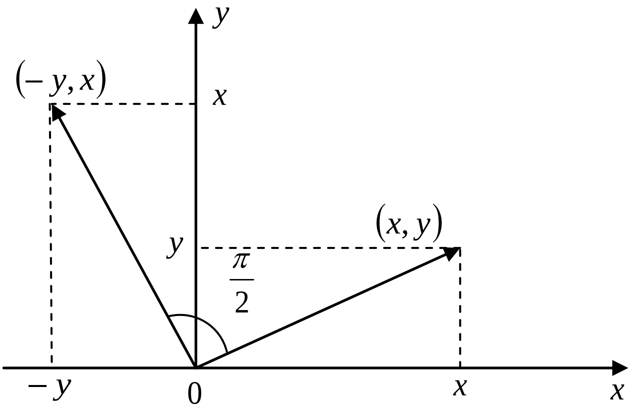
1 векторын көбейту операциясының бірлігі деп есептейік. Сонда (2) теңдігін ескере отырып $i \cdot i = i^2$ көбейтіндісін дұрыс анықтасақ болғаны. $1 \cdot i = i$ болғандықтан, яғни $(0,1)$ нүктесін R^2 жазықтығында сағат тіліне қарсы бағытта $\frac{\pi}{2}$ бұрышқа бұрғанда $(1,0)$ нүктесін алатын болғандықтан,

$$i^2 = -1 \qquad (3)$$

деп есептейміз. (1) және (2) теңдіктерін қолдана отырып, $z = (x, y)$ үшін мынадай қатынастарды жазайық:

$$z \cdot i = (x \cdot 1 + y \cdot i)i = -y \cdot 1 + x \cdot i = (-y, x) \qquad (4)$$

$(-y, x)$ нүктесін алу үшін (x, y) нүктесін R^2 жазықтығында сағат тіліне қарсы бағытта тік бұрышқа бұрсақ болғаны. Егер i - ға көбейту емес, басқа бір комплекс санға көбейту болса, онда басқа бұрышқа бұру керек болады.



Осылай жазықтықтың маңызды түрлендірулерін: жылжыту, бұру, гомотетияны қолдануға болады.

Енді R^2 жазықтығы нүктелерінің көбейту ережелерін қарастырайық:

$$\begin{aligned} &(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 \cdot 1 + y_1 \cdot i)(x_2 \cdot 1 + y_2 \cdot i) = \\ &= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2)1 + (x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)i, \\ &(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2). \end{aligned} \tag{5}$$

Анықтама. R^2 жазықтығы нүктелері үшін модуль, қосу және көбейту операциялары (1), (5) формулаларымен анықталса, онда ол *комплекс жазықтық* деп аталады . Оны C деп белгілейміз.

Комплекс сандар жиынында нақты сандар жиыны жатыр, яғни $C \supset R$. Ал енді $x \cdot 1$ орнына x деп, мұндағы $x \in R$, ал $y \cdot i$ орнына iy деп алсақ, $z = (x, y)$ комплекс санын $z = x + iy, \ x \in R, \ y \in R$ түрінде жазуға болады. x және y сандары z комплекс санының сәйкес нақты және жорамал бөліктері деп аталады да, $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ символдарымен белгіленеді. Комплекс санның $z = x + iy$ түрінде жазылуы комплекс санның *алгебралық түрде жазылуы* деп аталады.

«Комплекс сан» деген атты К.Гаусс (1777-1855), ал i символын Л.Эйлер (1707-1783) ұсынды.

$\bar{z} = x - iy$ саны $z = x + iy$ санының түйіндесі деп аталып, $\bar{z}$ арқылы белгіленеді. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ екені айқын. Жазықтықтың бас нүктесін $z = (x, y)$ нүктесімен қосатын Oz векторы $z = x + iy$ комплекс санының радиус векторы деп аталады.

§2. Комплекс санның аргументі. Комплекс сандардың тригонометриялық және көрсеткіштік түрде жазылуы. Комплекс сандарды көбейту, бөлу және комплекс саннан түбір табу

Анықтама. $z \in C$, $z \neq 0$, болсын. z нүктесінің радиус векторы мен нақты ось арасындағы φ бұрышы z санының аргументі деп аталады.

z комплекс санының аргументінің барлық мәндер жиынын $Arg\ z$ деп белгілесек, $Arg\ z = \{\varphi + 2n\pi \ |n \in Z\}$. $\varphi \in (-\pi, \pi)$ - басты мәні деп аталады да, $\arg\ z$ деп белгіленеді.

Декарттық координата мен полярлық координата арасындағы байланысты ескерсек, онда

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi, \tag{6}$$

мұндағы $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, $r = |z|$, $\varphi \in Arg\ z$

(6)- дан комплекс санның *тригонометриялық түрде жазылуын* аламыз:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \varphi \in Arg\ z,\quad r = |z|.$$

Л.Эйлер мынадай көрсеткіштік функцияны енгізген:

$$\varphi \to e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,\quad \varphi \in R. \tag{7}$$

Бұдан комплекс санның мынадай *көрсеткіштік түрде жазылуын* аламыз:

$$z = re^{i\varphi},\quad r = |z|,\quad \varphi \in Arg\ z.$$

Комплекс санның көрсеткіштік түрде жазылуы көбейту және бөлу операцияларын орындауды жеңілдетеді. Мысалы, егер

$z_j = r_j e^{i\varphi_j}$, $r_j = |z_j|$, $\varphi_j \in Arg\ z_j$, $j = 1,2$ болсын, онда

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 r_2) e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

(7) – нің салдары болып келетін немесе математикалық индукция әдісімен оңай тексерілетін Муавр (1667 – 1754) формуласы өте пайдалы: егер $z = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ болса, онда $\forall n \in N$ үшін

$$z^n = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)^n = (r^n \cos n\varphi, r^n \sin n\varphi). \qquad (8)$$

Муавр формуласын комплекс саннан бүтін дәрежелі түбір табуға қолдануға болады. Айталық, $z = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ болсын және $z_1^n = z$ болатындай $z_1 = (r_1\cos\varphi_1, r_1\sin\varphi_1)$ комплекс санын табу керек дейік. Онда (8) - формулаға сәйкес

$$(r_1^n \cos n\varphi_1, r_1^n \sin n\varphi_1) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

теңдігін аламыз.

Модульдері мен аргументтерін теңестіре отырып

$$r_1^n = r, \quad n\varphi_1 = \varphi + 2k\pi, \quad k \in Z,$$ болатынын байқаймыз.

Сонымен $r_1 = \sqrt[n]{r}$, $\varphi_1 = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$.

$k = \overline{0, n-1}$ деп есептеп n әртүрлі мәндер аламыз:

$$\sqrt[n]{z} = \left(\sqrt[n]{r}\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \sqrt[n]{r}\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right).$$

Бұл теңдікті мына түрде жазсақ та болады:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right). \quad k = \overline{0, n-1},$$

мұндағы $r = |z|$, $\varphi = \arg\ z$.

Бұл табылған мәндер радиусы $\sqrt[n]{r}$ болатын шеңберді іштей сызылған дұрыс n бұрыштың төбелері болады, яғни радиусы $\sqrt[n]{r}$ болатын шеңберді тең n доғаға бөледі.

Өзіндік бақылау сұрақтары

1. Комплекс санның модулі және комплекс сандарды қосу амалы қалай анықталады?
2. Комплекс санның аргументі және оның басты мәні дегеніміз не?
3. Комплекс сандар алгебралық, тригонометриялық және көрсеткіштік түрде қалай жазылады?
4. Комплекс сандарды көбейту және бөлу амалдары қалай анықталады?
5. Комплекс сандарды дәрежелеу және Муавр формуласы қалай жазылады?
6. Комплекс сандардан түбір табу амалы қалай орындалады?

Мысал 1. Келесі комплекс сандарды алгебралық формада $a+ib$ түрінде жазу керек:

$$z_1=\frac{2-i}{2+i},\qquad z_2=\frac{2}{2-3i},\qquad z_3=\left(1+i\sqrt{3}\right)^6,\qquad z_4=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5,$$

$$z_5=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4.$$

Шешуі:

$$z_1=\frac{2-i}{2+i}=\frac{(2-i)(2-i)}{|2+i|^2}=\frac{(2-i)^2}{5}=\frac{3-4i}{5}=\frac{3}{5}-i\frac{4}{5},$$

$$z_2=\frac{2}{2-3i}=\frac{2(2+3i)}{|2-3i|^2}=\frac{4+6i}{13}=\frac{4}{13}+i\frac{6}{13},$$

$$z_3=2^6\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^6=2^6e^{i\frac{\pi}{3}6}=2^6e^{i2\pi}=2^6,$$

$$z_4=\frac{(1+i)^{10}}{2^5}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{10}=e^{i\frac{\pi}{4}10}=e^{i\frac{5}{2}\pi}=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\right)}=e^{i\frac{\pi}{2}}=i$$

$$z_5=\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{i}{2}}\right)^4=2^2\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}}\right)^4=2^2\,\frac{e^{i\frac{\pi}{3}4}}{e^{-i\frac{\pi}{4}4}}=-2^2e^{i\frac{4}{3}\pi}=$$

$$=-2^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)\right)=2+i2\sqrt{3}.$$

Мысал 2. $a+ib$ комплекс сандарының модулін r және аргументін φ табу керек: $z_1=3i$, $z_2=-2$, $z_3=1+i$, $z_4=-1-i$, $z_5=2+5i$, $z_6=2-5i$, $z_7=-2+5i$, $z_8=-2-5i$, $z_9=bi\ \ (b\neq 0)$, $z_{10}=a+bi$.

Шешуі: φ -дің басты мәні: $-\pi<\arg z\leq\pi$, ал $arctg\varphi$ дегеніміз $-\frac{\pi}{2}$- ден $\frac{\pi}{2}$- ге дейінгі басты мәндерді қабылдайды.

$r_1=|z_1|=3,$ $\quad r_2=|z_2|=2,$ $\quad r_3=|z_3|=\sqrt{2},$

$\varphi_1=\frac{\pi}{2};$ $\quad \varphi_2=\pi;$ $\quad \varphi_3=\frac{\pi}{4};$

$r_4=|z_4|=\sqrt{2},$ $\quad r_5=|z_5|=\sqrt{29},$ $\quad r_6=|z_6|=\sqrt{29},$

$\varphi_4=-\frac{3\pi}{4};$ $\quad \varphi_5=arctg\,\frac{5}{2};$ $\quad \varphi_6=-arctg\,\frac{5}{2};$

$r_7=|z_7|=\sqrt{29},$ $\quad r_8=|z_8|=\sqrt{29}$ $\quad r_9=|z_9|=|b|,$

$\varphi_7=\pi-arctg\,\frac{5}{2};$ $\quad \varphi_8=arctg\,\frac{5}{2}-\pi,$ $\quad \varphi_9=\frac{\pi}{2}\frac{|b|}{b}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} b.$

$$r_{10}=|z_{10}|=\sqrt{a^2+b^2}, \qquad \varphi_{10}=\begin{cases} arctg\,\dfrac{b}{a}, & a>0, \\ \pi+arctg\,\dfrac{b}{a}, & a<0, b\geq 0, \\ arctg\,\dfrac{b}{a}-\pi, & a<0,<0. \end{cases}$$

Мысал 3. $\sqrt[4]{i}$ өрнегінің келесі төрт мәні бар екенін дәлелдеу керек:

$$\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right), \qquad \pm\frac{1}{2}\left(-\sqrt{2-\sqrt{2}}+i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right).$$

Шешуі: $z=i$ болсын. Онда $|z|=1$, $\arg z=\varphi=\dfrac{\pi}{2}$,

$$\sqrt[4]{z}=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}, \qquad k=0,1,2,3.$$

Осы формуланы қолданып $z=i$ санынан төрт түбір табамыз:

$$z_0=\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8},$$

$$z_1=\cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8}=-\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8},$$

$$z_2=\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}=-\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8},$$

$$z_3=\cos\frac{13\pi}{8}+i\sin\frac{13\pi}{8}=\cos\frac{3\pi}{8}-i\sin\frac{3\pi}{8}.$$

$$|\cos x| = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}, \qquad |\sin x| = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}$$

болғандықтан

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},$$

$$\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \qquad \sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

$$z_{0,2} = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right),$$

$$z_{1,3} = \pm\frac{1}{2}\left(-\sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right).$$

Мысал 4. Келесі екі шартты қанағаттандыратын $z = x + iy$ комплекс сандарын жазу керек:

$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3}, \qquad \left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1.$$

Шешуі:

$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right|^2 = \frac{(x-12)^2 + y^2}{x^2 + (y-8)^2} = \frac{25}{9},$$

$$\left|\frac{z-4}{z-8}\right|^2 = \frac{(x-4)^2 + y^2}{(x-8)^2 + y^2} = 1$$ болғандықтан, мынадай теңдеулер жүйесін шешеміз:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 27x - 50y + 38 = 0 \\ 8x = 48. \end{cases}$$

Бұл жүйенің шешімі:

$$z_1 = (6{,}17)$$
$$z_2 = (6{,}8),$$

$$z_1 = 6+17i$$

яғни

$$z_2 = 6+8i.$$

Мысал 5. $\cos 5x, \sin 5x$ функцияларын $\cos x, \sin x$ арқылы өрнектеу керек.

Шешуі: Муавр формуласы бойынша

$$\cos 5x + i\sin 5x = (\cos x + i\sin x)^5 .$$

Ньютон биномы формуласынан

$$(\cos x + i\sin x)^5 = \cos^5 x + 5i\cos^4 x\sin x - 10\cos^3 x\sin^2 x - $$
$$-10i\cos^2 x\sin^3 x + 5\cos x\sin^4 x + i\sin^5 x.$$

Бұдан

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x,$$
$$\sin 5x = 5\cos^4 x\sin x - 10\cos^2 x\sin^3 x + \sin^5 x.$$

Мысал ретінде $\cos\frac{2\pi}{5}, \sin\frac{2\pi}{5}$ мәндерін есептеп көрейік. Егер $x = \frac{2\pi}{5}$ мәнін соңғы өрнекке қойып, сосын $\sin\frac{2\pi}{5} \neq 0$ болатынын ескерсек, былай жаза аламыз:

$$0 = 5\cos^4\frac{2\pi}{5} - 10\cos^2\frac{2\pi}{5}\sin^2\frac{2\pi}{5} + \sin^4\frac{2\pi}{5} =$$
$$= 5\left(1-\sin^2\frac{2\pi}{5}\right)^2 - 10\left(1-\sin^2\frac{2\pi}{5}\right)\sin^2\frac{2\pi}{5} + \sin^4\frac{2\pi}{5}.$$

Енді $\sin^2\frac{2\pi}{5} = y$ деп белгілесек, онда $16y^2 - 20y + 5 = 0$ шығады.

$$y = \sin^2\frac{2\pi}{5} = \frac{10+2\sqrt{5}}{16},$$
$$\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Онда

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\sqrt{1-\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}=\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{4}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Мысал 6. $\sin^4 x$ функциясын тригонометриялық бұрыштары x-ке еселі аргументті бірінші дәрежелі көпмүшелік ретінде жазу керек.

Шешуі:

$$z=\cos x+i\sin x,\quad \bar{z}=\cos x-i\sin x,\quad z-\bar{z}=2i\sin x$$

екенін ескерсек, бұдан

$$\sin^4 x=\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^4=\frac{1}{2^4}\left(z-\bar{z}\right)^4=$$

$$=\frac{1}{2^4}\left(z^4-4z\bar{z}\left(z^2+\left(\bar{z}\right)^2\right)+6z^2\left(\bar{z}\right)^2+\left(\bar{z}\right)^4\right)=$$

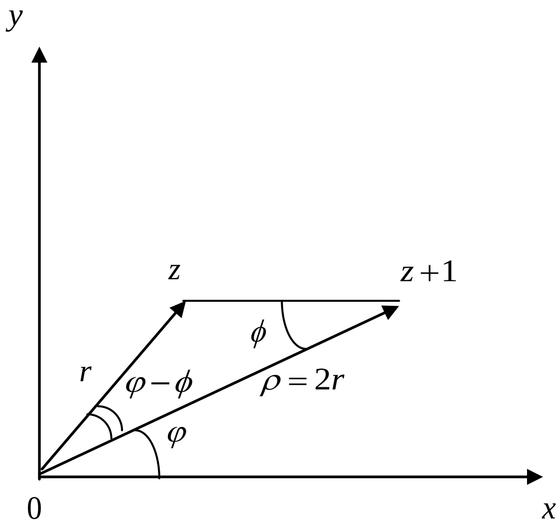
$$=\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}$$

теңдігін аламыз, себебі $z^k+\left(\bar{z}\right)^k=2\cos kx$, $z\bar{z}=1$, $z^2\left(\bar{z}\right)^2=\left(z\bar{z}\right)^2=1.$

Мысал 7. $32z^5=\left(z+1\right)^5$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі: Бұл теңдеудің түбірлері $|2z|=|z+1|$ шартын қанағаттандырады. Егер $x=\frac{z+\bar{z}}{2}$, $y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$ (мұндағы $z=x+iy$), теңдіктерін қолдансақ,

$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+y^2=\frac{4}{9}$ теңдігін аламыз, яғни $z_k=r_k\left(\cos\varphi_k+i\sin\varphi_k\right)$ $\left(k=\overline{0,4}\right)$ теңдеуінің түбірлері центрі $z=\frac{1}{3}$, ал радиусы $\frac{2}{3}$ болатын шеңберде жататынын білеміз.



$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
$$z+1 = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

десек

$$(2r)^5(\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi) = \rho^5(\cos 5\psi + i\sin 5\psi)$$

теңдігіне келеміз. Бұдан $\rho = 2r$, $\varphi = \psi + \dfrac{2k\pi}{5}$, $k = \overline{0{,}4}$.

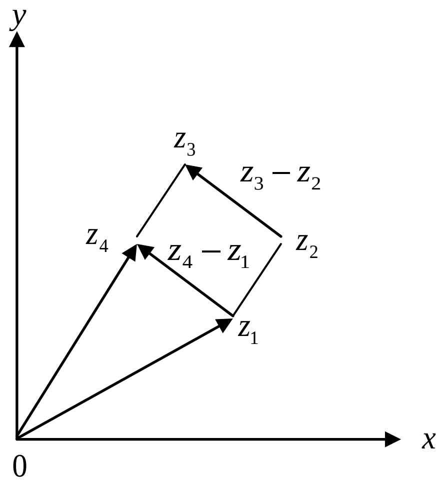
Үшбұрыштар үшін косинустар теоремасын төбелері $0, z$ $z+1$ болатын үшбұрышқа қолдансақ, онда $1 = 5r^2 - 4r^2\cos\theta$, $\theta = \varphi - \psi$, ал синустар теоремасы бойынша $\sin\psi = (5 - 4\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}\sin\theta$ теңдігін аламыз. Сондықтан

$$r_k = \frac{1}{\sqrt{5 - 4\cos\theta_k}}, \quad \theta_k = \frac{2\pi k}{5},$$

$$\varphi_k = \psi_k + \theta_k = \arcsin\left(\frac{\sin\theta_k}{\sqrt{5 - 4\cos\theta_k}}\right) + \theta_k, \qquad k = \overline{0{,}4}.$$

Мысал 8. Параллелограммның үш төбесі z_1, z_2, z_3 берілген (суретті қараңыз). Параллелограммның z_2 төбесіне қарама-қарсы жатқан z_4 төбесін табу керек.

Шешуі:



Суреттегі $z_4 - z_1$ және $z_3 - z_2$ векторлары коллинеар болғандықтан

$$z_4 - z_1 = z_3 - z_2,$$

$$z_4 = z_1 + z_3 - z_2.$$

Мысал 9. $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$ теңдігін дәлелдеңіз және оның геометриялық мағынасын түсіндіріңіз.

Шешуі: $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ болсын. Онда

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2),$$

$$|z_1 + z_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2,$$

$$|z_1 - z_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,$$

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(x_1^2+x_2^2\right)+2\left(y_1^2+y_2^2\right)=$$
$$=2\left(\left(x_1^2+y_1^2\right)+\left(x_2^2+y_2^2\right)\right)=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right).$$

Геометриялық мағынасы: Параллелограммның диагональдарының ұзындықтарының (d_1,d_2) квадраттарының қосындысы оның қабырғаларының ұзындықтарының (a,b) квадраттарының қосындысына тең болады:

$$d_1^2+d_2^2=2\left(a^2+b^2\right).$$

Мысал 10. Мына өрнектердің геометриялық мағынасы қандай?

$a)$ $|z-2|+|z+2|=5$,

$b)$ $\operatorname{Re} z\ge c$,

$c)$ $\alpha<\arg z<\beta$,

$d)$ $|z|=\operatorname{Re} z+1$,

$e)$ $\operatorname{Im}\left(\overline{z^2-\overline{z}}\right)=2-\operatorname{Im} z$,

$f)$ $|z-1|\ge 2|z-i|$.

Шешуі:

$a)$. Бұл теңдік жазықтықтағы берілген $F_1=-2$ және $F_2=2$ екі нүктеден қашықтықтарының қосындысы тұрақты сан 5-ке тең нүктелердің геометриялық орнын анықтап түр. Аналитикалық геометриядан белгілі, бұл эллипс. Оның үлкен жарты осі $\frac{5}{2}$-ке тең, ал кіші жарты осі $\frac{3}{2}$-ке тең. Эллипстің фокусы $F_1=-2$ және $F_2=2$ нүктелері.

$b)$. $\operatorname{Re} z\ge c$. Бұл теңсіздікті былай жазсақ та болады: $x\ge c$. Бұл $x=c$ түзуі мен оның оң жағында жатқан жартылай жазықтық.

$c)$. $\arg z=\alpha$ теңдеуі бұл нақты ось x пен α бұрыш жасап тұрған бас нүктеден шыққан сәуле. $\alpha<\arg z<\beta$ теңсіздігі $\arg z=\alpha$ және $\arg z=\beta$ сәулелерінің арасындағы шексіз секторды білдіреді, бірақ сәулелер бұл жиынға енбейді.

$d)\quad |z| = \operatorname{Re} z + 1$.

Айталық $z = x + iy$ болсын. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ болғандықтан және $\operatorname{Re} z + 1 = x + 1$ екенін ескеріп, бастапқы теңдікті $\sqrt{x^2 + y^2} = x + 1$ түрінде жазуға болады. Бұл теңдіктің екі жағын да квадраттағаннан кейін $y^2 = 2x + 1$ теңдігіне келеміз. Бұл теңдеу төбесі $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ нүктесінде, ал симметрия осі $\gamma = \left\{(x, y) \in R^2 \middle| x \geq -\frac{1}{2}, y = 0\right\}$ болатын параболаның теңдеуі.

$e)\quad \operatorname{Im}\left(\overline{z^2 - \bar{z}}\right) = 2 - \operatorname{Im} z$.

$z = x + iy$ болғандықтан $\operatorname{Im} z = y$ деп есептейміз де, берілген шарттан

$$\operatorname{Im}\left(\overline{z^2 - \bar{z}}\right) = 2 - y$$

теңдігін аламыз. Енді $\bar{z} = x - iy$ екенін ескеріп,

$$\operatorname{Im}\overline{(x + iy)^2 - (x - iy)} = 2 - y$$

деп жазамыз. Бұдан

$$\operatorname{Im}\left(\overline{x^2 + 2xiy - y^2 - x + iy}\right) = 2 - y$$

шығады. Одан $-2xy - y = 2 - y$ теңдігін алып, $-xy = 1$ екенін көреміз. Бұл $y = -\frac{1}{x}$, яғни екінші және төртінші ширекте жатқан гипербола.

$f)\quad |z - 1| \geq 2|z - i|$.

Айталық $z = x + iy$ болсын. Онда

$$|x - 1 + iy| \geq 2|x + i(y - 1)|,$$

яғни $\sqrt{(x-1)^2+y^2} \geq 2\sqrt{x^2+(y-1)^2}$. Бұл теңсіздіктің екі жағын квадраттап, біраз түрлендіргеннен кейін

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2 \leq \frac{8}{9}$$

теңсіздігін аламыз. Ал бұл шыққан өрнек - центрі $z_0=-\frac{1}{3}+i\frac{4}{3}$ нүктесінде тұрған, радиусы $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ болатын дөңгелек.

Мысал 11. Берілген $-\sqrt{3}+3i$ векторы 90^0 бұрышқа бұрғанда, қандай векторға көшеді?

Шешуі: Вектор берілген: $z_1=-\sqrt{3}+3i$. Бұдан $|z_1|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, ал $\arg z_1=\frac{2\pi}{3}$. Векторды 90^0 бұрышқа бұрғанда оның модулі өзгермейді, тек қана аргументі 90^0 бұрышқа өзгереді. Сондықтан

$$z_1=2\sqrt{3}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)}=2\sqrt{3}e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}=2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=-3-\sqrt{3}i .$$

Сонымен берілген $-\sqrt{3}+3i$ векторын 90^0 бұрышқа бұрғанда $z_2=-3-\sqrt{3}i$ векторы шығады.

Мысал 12. Берілген $3\sqrt{2}+i2\sqrt{2}$ векторды неше градус бұрышқа бұрғанда $-5+i$ векторы шығады?

Шешуі: $z_1\cdot z_0=z_2$, мұндағы $z_1=3\sqrt{2}+i2\sqrt{2}$, $z_2=-5+i$,

$$|z_1|=\sqrt{26},$$

$$|z_2|=\sqrt{26},$$

демек $|z_0|=1$ екені шығады.

$$z_0 = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\left(-5+i\right)\left(3\sqrt{2}-i2\sqrt{2}\right)}{\left(3\sqrt{2}+i2\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{2}-i2\sqrt{2}\right)} = \frac{-13\sqrt{2}+i13\sqrt{2}}{26} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Бұдан

$$\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

болғандықтан $\arg z_0 = \pi - arctg1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Сонымен берілген $3\sqrt{2}+i2\sqrt{2}$ векторын $\frac{3\pi}{4}$ бұрышқа бұрғанда $-5+i$ векторы шығады.

§3. Стереографикалық проекция және оның қасиеттері

Аналитикалық функция теориясында комплекс жазықтық C шексіз алыстатылған нүктемен (∞) толықтырылады. $\overline{C} = C \bigcup \{\infty\}$ жиыны *кеңейтілген комплекс жазықтық* деп аталады.

R^3 кеңістігінде C жазықтығы R^2 жазықтығымен беттесетіндей және $O\xi$ мен $O\eta$ осьтері Ox пен Oy осьтерімен беттесетіндей $O\xi\eta\zeta$ координаттар системасын енгіземіз. Радиусы $\frac{1}{2}$ болатын, ал центрі $(0,0,\frac{1}{2}) \in S$ болатын S сферасын тұрғызамыз.

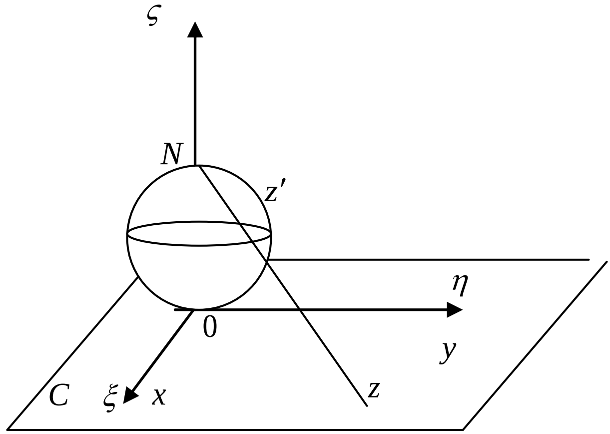
Ал $(\xi,\eta,\zeta) \in S$ нүктелері мына теңдеуді

$$\xi^2 + \eta^2 = \zeta(1-\zeta) \tag{9}$$

қанағаттандырады.

Енді $(0,0,1)$ нүктесін N деп белгілеп, оны сфераның әртүрлі $z'(\xi,\eta,\zeta)$ нүктелерімен N нүктесінен басталатын түзу сәуле етіп қосамыз және әр сәуленің C

жазықтығымен қиылысқан нүктесін $z = x + iy$ деп белгілейміз. Сонда сфераның N нүктесінен басқа барлық нүктелері C жазықтығына проекцияланады.



Сонымен C мен $S \setminus \{N\}$ жиындарының арасында өзара бірмәнді сәйкестік $z \leftrightarrow z'$ болады. Егер $z = \infty \leftrightarrow N$ десек, онда $\overline{C}$ және S жиындарының арасында өзара бірмәнді сәйкестік аламыз. Осы сәйкестік *стереографикалық проекция* деп аталады, ал S сферасын *Риман сферасы* деп атайды.

Ал енді z және z' нүктелерінің координаталарының арасындағы байланысты қарастырайық. z' нүктесінің координаталары (9) сфера теңдеуін қанағаттандырады, ал z , z' және N нүктелері бір түзу бойында жатқандықтан

$$\frac{\xi - 0}{x - 0} = \frac{\eta - 0}{y - 0} = \frac{\zeta - 1}{0 - 1}.$$

Бұдан

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \; y = \frac{\eta}{1 - \zeta}. \qquad (10)$$

(9) бен (10) формулаларын ескерсек,

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1-\zeta)^2} = \frac{\zeta}{1-\zeta},$$

бұдан

$$\zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}, \quad 1-\zeta = \frac{1}{1+|z|^2}.$$

(10) формуланы ескеріп, келесі оған кері формулаларды аламыз:

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}. \qquad (11)$$

(9), (10), (11) формулаларын стереографикалық проекцияның негізгі формулалары деп атаймыз.

Стереографикалық проекцияның екі маңызды қасиеті бар:

1.стереографикалық проекцияда шеңбер әруақытта шеңберге көшеді (бұл жағдайда C жазықтығындағы түзу шексіз радиусты шеңбер деп есептеледі);

2. егер S сферасындағы екі қисық M нүктесінде қиылысса, ал бұл қисықтарға жүргізілген жанама M нүктесінде α бұрыш жасаса, онда бұл қисықтардың стереографикалық проекциясына олардың қиылысатын M' нүктесінде жүргізілген жанамалардың арасындағы бұрыш та α-ға тең болады, яғни стереографикалық проекцияда бұрыштар сақталады.

Сфераның центрі арқылы өтетін және $\zeta = 0$ жазықтығына параллель жазықтықты экваторлық жазықтық деп атайды. Егер басы сфераның центрінде (O') жатқан радиус-вектор ($\overline{O'A}$) экваторлық жазықтықпен φ бұрышын жасаса, онда $A \in S$ нүктесі ендігі φ болатын параллельде жатыр дейміз. $A(\xi, \eta, \zeta) \in S$ нүктесінің бойлығы деп $\arg(\xi + i\eta)$ айтамыз. Берілген бойлықтың нүктелер жиыны λ осы бойлықтың жарты меридианын құрайды. N нүктесін солтүстік полюс деп, ал O- координаталар бас нүктесін оңтүстік полюс деп атайды.

§4. Комплекс айнымалы функцияның шегі мен үзіліссіздігі

Анықтама. $z \in C$ нүктесі z_n тізбегінің шегі деп аталады, егер (төменде N - натурал сандар жиыны)

$$(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists n_\varepsilon \in N) \ (\forall n \geq n_\varepsilon): \quad \rho(z_n, z) = |z_n - z| < \varepsilon.$$

Бұл жағдайда $z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ немесе $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z$ деп жазады да, тізбекті жинақты тізбек деп атайды. Егер $z_n \to z$ болса, онда белгілі бір $n_\varepsilon \in N$ номерінен бастап z_n тізбегінің барлық мүшелері $z \in C$ нүктесінің ε - маңайында жататыны анықтамадан шығады. Сонымен қатар жинақты тізбек шектеулі, яғни $\exists M \in R : \forall n \in N \quad |z_n| \leq M$. Тағы бір маңызды жағдай: егер z_n жинақты тізбек болса, онда бұл тізбектің шегі біреу ғана.

Теорема. $(z_n \to z) \Leftrightarrow (\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z) \wedge (\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z)$.

Дәлелдеуі: Қажеттілігі. Айталық $z_n \to z$, онда $\rho(z_n, z) = |z_n - z| \to 0$.

$\forall n \in N$ үшін

$$|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| \leq |z_n - z|,$$

$$|\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| \leq |z_n - z|.$$

Бұл теңсіздіктерден

$$\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z, \quad \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z,$$

екені шығады.

Жеткіліктігі. Ал енді $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z$ орындалсын. Онда $n \to \infty$ ұмтылғанда

$|z_n - z|^2 = (\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z)^2 \to 0$, яғни

$$z_n \to z.$$

Бұл теоремадан комплекс сандар тізбегінің (z_n) жинақты болуы екі нақты сандар тізбектерінің, $\operatorname{Re} z_n$ және $\operatorname{Im} z_n$, тізбектерінің жинақты болуымен пара-пар екені шығады.

Теорема (Коши критерийі). z_n тізбегі жинақты болу үшін оның фундаментальды болуы қажетті және жеткілікті, яғни

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_\varepsilon \in N)\ (\forall n \ge n_\varepsilon)\ (\forall p \in N):$$

$$\rho(z_{n+p}, z_n) = |z_{n+p} - z_n| < \varepsilon.$$

Комплекс айнымалы функцияның берілуі $w = f(z),\quad z \in D_f$ анықталу облысы $D_f \subset R^2$ болатын екі нақты $u \in R^2 \to R$ және $v \in R^2 \to R$ функцияның берілуімен пара-пар. Бұл жағдайда u функциясы f функциясының *нақты бөлігі* деп, ал v функциясы f функциясының *жорымал бөлігі* деп аталады, яғни

$$u = \operatorname{Re} f,\quad v = \operatorname{Im} f,\qquad f(z) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Сонымен $f : C \to C$ функциясын зерттеу x және y тәуелсіз айнымалыларына байланысты екі u және v сандық функциялардың қасиеттерін қарастыруға тіреледі.

Анықтама. $f : C \to C$ функциясы және D_f жиынының z_0 - шектік нүктесі берілсін. Егер D_f жиынының нүктелерінен түзілген z_n тізбегі үшін $(z_n \to z_0) \wedge \left(\forall n \in N,\quad z_n \ne z_0\right) \wedge \left(\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \alpha\right)$ болса, онда $\alpha \in C$ саны f функциясының z_0 нүктесіндегі дербес шегі деп аталады.

f функциясының z_0 нүктесіндегі барлық дербес шектер жиынын $E_f(z_0)$ арқылы белгілейміз.

Анықтама. Егер $E_f(z_0)$ жиынының бір ғана элементі болса, онда ол f функциясының z_0 нүктесіндегі шегі деп аталады және $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ арқылы белгіленеді.

Анықтама. Егер $(z_n \to z_0)\wedge(\forall n \in N,\ z_n \in D_f)$ үшін $\lim\limits_{z\to z_0} f(z_n) = f(z_0)$ шарты орындалса, онда f функциясы $z_0 \in D_f$ нүктесінде үзіліссіз деп аталады.

Егер $z_0 \in D_f$ және ол D_f жиынының шектік нүктесі болса, онда f функциясы z_0 нүктесінде үзіліссіз болады сонда тек сонда ғана, егер $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Анықтама. Егер

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \delta > 0) \quad \left(\forall\left(z_1 \in D_f, \quad z_2 \in D_f\right), \rho(z_1, z_2) < \delta\right):$$

$$\rho(f(z_1), f(z_2)) < \varepsilon,$$

теңсіздігі орындалса, онда f функциясы D_f жиынында бірқалыпты үзіліссіз болады.

Бірқалыпты үзіліссіз функция үзіліссіз болатыны айқын, бірақ кері ұйғарым әрқашан орындала бермейді. Мысалы: $w = z^2$ үзіліссіз функция, бірақ ол бірқалыпты үзіліссіз болмайды.

Өзіндік бақылау сұрақтары

1. Кеңейтілген комплекс жазықтық дегеніміз не?
2. Риман сферасы деген не?
3. Стереографиялық проекцияның негізгі формулалары қандай?
4. Тізбектің шегінің анықтамасы.
5. Коши критерийі.
6. Функцияның үзіліссіздігінің анықтамасы.
7. Функцияның бірқалыпты үзіліссіздігі.

Мысал 1. Риман сферасында мына нүктелердің

1) $z=1$
2) $z=-1$
3) $z=i$
4) $z=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$

бейнелері қандай?

Шешуі:

(11) формуласы бойынша

$\xi=\dfrac{x}{1+|z|^2}$, $\eta=\dfrac{y}{1+|z|^2}$, $\zeta=\dfrac{|z|^2}{1+|z|^2}$. Бізде $z_1=(1{,}0)$, $z_2=(-1{,}0)$, $z_3=(0{,}1)$, $z_4=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Берілген z_i нүктелерінің $i=\overline{(1{,}4)}$ бейнелерін сәйкес Z_i деп белгілейміз. Сонда берілген нүктелердің бейнелері

$Z_1=\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right)$, $Z_2=\left(-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right)$, $Z_3=\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$,

$Z_4=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4},-\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{1}{2}\right)$ болады.

Бұл төрт нүкте экваторда жатыр және олардың ендіктері сәйкес $0,\pi,\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{4}$ сандарына тең параллельде жатыр.

Мысал 2. Стереографикалық проекция жасағанда C жазықтығындағы параллель түзулер үйіріне Риман сферасында не сәйкес келеді?

Шешуі: C жазықтығындағы Oy осі арқылы өтетін параллель түзулер үйірін қарастырайық. Айталық бұл үйірдің бір түзуі координаталар бас нүктесі арқылы өтетін болсын және Ox осімен α бұрыш жасайды делік: $\arg z=\alpha$. Егер $z\in C$ нүктесі $\arg z=\alpha$ сәулесінде жатса, онда оған сәйкес келетін $Z=(\xi,\eta,\zeta)$ нүктесінің мынадай қасиеті бар: $\arg(\xi + i\eta)$-нің басты мәні α болады. Сондықтан Z нүктесі α бұрышына сәйкес келетін жарты меридианда жатыр. Демек стереографикалық проекция жасағанда $\arg z = \alpha$ сәулесінің образы α бұрышына сәйкес келетін жарты меридиан болады (солтүстік және оңтүстік полюстерді қоспағанда). Айталық

$y = kx + b, \quad k = tg\alpha$ - бұл берілген үйірдің кез келген

басқа бір түзуі болсын. Егер $Z = (\xi, \eta, \zeta) \in S$ нүктесі $z = x + iy$ нүктесіне сәйкес келсе, онда (11) формула бойынша

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \quad \eta = \frac{kx+b}{1+|z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}.$$

Бұдан $\eta = k\xi + \dfrac{b}{1+|z|^2} = k\xi + b(1-\zeta)$ шығады. Сондықтан

Z нүктесінің координаталары (ξ, η, ζ) мына теңдеулерді қанағаттандырады:

$$k\xi - \eta - b\zeta = -b$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Демек Z нүктесі соңғы екі теңдеумен анықталатын шеңберде жатыр. $(0,0,1)$ нүктесі осы теңдеулерді қанағаттандыратын болғандықтан, барлық осындай шеңберлер солтүстік полюс арқылы өтеді.

Сонымен С жазықтығындағы параллель түзулер үйіріне Риман сферасында шеңберлер үйірі сәйкес келеді, олардың әрқайсысы солтүстік полюс арқылы өтеді.

Мысал 3. Егер $n \to \infty$ ұмтылғанда $z_n \to 0$ болса, онда

$$\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n \to 1$$ екенін дәлелдеу керек.

Шешуі: Мына айырманы бағалайық: $\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n - 1$.

$$\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = 1+\sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{z_n^k}{n^k}$$ болғандықтан

$$\left|\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n - 1\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{z_n^k}{n^k}\right| \le \sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{|z_n|^k}{n^k} = \left(1+\frac{|z_n|}{n}\right)^n - 1 =$$

$$= e^{n\ln\left(1+\frac{|z_n|}{n}\right)} - 1 = e^{|z_n|+O\left(\frac{1}{n}\right)} - 1 \to 0, \quad n\to\infty.$$

Демек, $\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n \to 1$.

Мысал 4. Егер (z_n) тізбегі жинақты және $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \ne 0$ болғанмен де, $(\arg z_n)$ тізбегі жинақсыз болуы мүмкін екеніне мысал келтіреміз.

Шешуі: Мысалға

$$z_n = -1 + i\frac{(-1)^n}{n^2}$$

тізбегін қарастырайық. Бұл жинақты тізбек және

$$\lim_{n\to\infty} z_n = -1.$$

$$z_{2k} = -1+\frac{i}{4k^2}, \quad z_{2k-1} = -1-\frac{i}{(2k-1)^2}$$

болғандықтан,

$$\arg z_{2k} = \pi - arctg\frac{1}{4k^2}$$

$$\arg z_{2k-1} = -\pi + arctg\,\frac{1}{(2k-1)^2}\,.$$

Шекке көшсек

$$\lim_{k\to\infty} \arg z_{2k} = \pi,$$

$$\lim_{k\to\infty} \arg z_{2k-1} = -\pi,$$

демек $(\arg z_n)$ тізбегі (екі шектік нүктесі бар болғандықтан) жинақсыз.

Айта кетелік $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ болса да, $(\arg z_n)$ тізбегі жинақсыз болуы мүмкін екен. Мысалы: $z_n = \dfrac{e^{i\varphi_n}}{n}$,

мұндағы $\varphi_n = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}, & n = 2k, \\ \dfrac{\pi}{8}, & n = 2k-1, \end{cases}$ болсын делік.

Онда $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$,

$$\lim_{k\to\infty} \arg \varphi_{2k} = \frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{k\to\infty} \arg \varphi_{2k-1} = \frac{\pi}{8},$$

яғни $(\arg z_n)$ жинақсыз тізбек.

Мысал 5. Тізбектің шегін табыңыз: $z_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(\pi \cdot i)^n}{n!}$.

Шешуі: Тізбектің фундаментальды екенін дәлелдейік. $\forall \varepsilon > 0$, $n \in N$, $p \in N$ болсын. Онда барлық жеткілікті үлкен n және $\forall p \in N$ үшін

$$\left| z_{n+p} - z_n \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{(\pi \cdot i)^k}{k!} \right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{(\pi)^k}{k!} < \varepsilon\,,$$

себебі сандық қатар $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^k}{k!}$ жинақты болуы себепті n өскен сайын бұл қатардың қалдығының қосындысы нольге ұмтылады.

Енді $z_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pi \cdot i)^n}{n!}$ тізбегінің шегін есептейік:

$$z_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pi \cdot i)^n}{n!} =$$

$$= 1 + \pi i - \frac{\pi^2}{2!} - \frac{\pi^3}{3!} i + \frac{\pi^4}{4!} + \frac{\pi^5}{5!} i - \frac{\pi^6}{6!} - \frac{\pi^7}{7!} i + \ldots$$

Комплекс сандар тізбегінің жинақтылығы оның нақты бөлігі мен жорамал бөліктерінің тізбектерінің жинақтылығымен пара-пар болғандықтан

$$\operatorname{Re} z_n = 1 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} - \frac{\pi^6}{6!} + \ldots,$$

$$\operatorname{Im} z_n = \pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!} + \ldots$$

Онда

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = \cos\pi = -1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \sin\pi = 0.$$

Демек, $\lim_{n\to\infty} z_n = -1.$

Мысал 6. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + i\frac{n}{n^2-1}\right)^n$ шегін табу керек.

Шешуі: $z_n = \left(1 + i\frac{n}{n^2-1}\right)^n$ болғандықтан

$$|z_n| = \left(1 + \frac{n^2}{(n^2-1)^2}\right)^{\frac{n}{2}}, \quad \arg z_n = n \cdot arctg\,\frac{n}{n^2-1}\ .$$

$$\lim_{n\to\infty}|z_n| = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n^2-1)^2}\cdot\frac{n}{2}} = 1,$$

Ары қарай

$$arctg\,\frac{n}{n^2-1} \approx \frac{n}{n^2-1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\arg z_n = \lim_{n\to\infty} n\cdot arctg\,\frac{n}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2-1} = 1$$

болғандықтан

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \cos 1 + i\sin 1 = e^i.$$

Мысал 7. $z_n = \dfrac{sh(in)}{n}$ тізбегінің шегін табу керек.

Шешуі: $shz = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ болғандықтан

$$z_n = \frac{sh(in)}{n} = \frac{e^{in} - e^{-in}}{2n} = \frac{\cos n + i\sin n - (\cos n - i\sin n)}{2n} =$$

$$= \frac{2i\sin n}{2n} = i\frac{\sin n}{n} \to 0,\ \ (n\to\infty).$$

Сонымен

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\frac{sh(in)}{n} = 0.$$

Мысал 8. Мына **к**елесі берілген

$f_1(z) = \dfrac{1}{1-z}$, $f_2(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ функциялары $\{z\in C : |z| < 1\}$ облысында үзіліссіз бола ма, сонымен қатар бірқалыпты үзіліссіз бола ма?

Шешуі: Айталық z_0 нүктесі берілген облыстың кез келген нүктесі делік. Онда $1 - z_0 \neq 0$ болады да, екі үзіліссіз функцияның қатынасы да үзіліссіз функция болатыны туралы теорема бойынша $f_1(z)=\dfrac{1}{1-z}$ функциясы берілген облыста үзіліссіз. Келесі $f_2(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ функциясы да берілген облыста үзіліссіз. Сонымен берілген екі функцияның екеуі де өздерінің анықталу облысында үзіліссіз. Енді бұл функцияларды бірқалыпты үзіліссіздікке тексеріп көрейік.

Айталық $z_n'=1-\dfrac{1}{n}$, $z_n''=1-\dfrac{2}{n}$ болсын. Онда

$n\to\infty$ ұмтылғанда $\rho(z_n',z_n'')=|z_n''-z_n'|=\dfrac{1}{n}\to 0$.

Сонымен бірге $n\to\infty$ ұмтылғанда

$$\rho\left(f_1(z_n'),f_1(z_n'')\right)=\frac{\rho(z_n',z_n'')}{|1-z_n'|\cdot|1-z_n''|}=\frac{n}{2}\to+\infty.$$

Сонымен $f_1(z)=\dfrac{1}{1-z}$ функциясы берілген облыста $\{z\in C:|z|<1\}$ бірқалыпты үзіліссіз болмайды.

Ал енді $z_n'=i\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$, $z_n''=i\left(1-\dfrac{2}{n}\right)$ болсын.

Онда $n\to\infty$ ұмтылғанда

$$\rho(z_n',z_n'')=|z_n''-z_n'|=\frac{1}{n}\to 0.$$

Олай болса $n\to\infty$ ұмтылғанда

$$\rho\left(f_2(z_n'),f_2(z_n'')\right)=\frac{\left|(z_n'')^2-(z_n')^2\right|}{\left|1+(z_n')^2\right|\cdot\left|1+(z_n'')^2\right|}=\frac{n}{4}\to+\infty.$$

Сонымен $f_2(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ функциясы да берілген облыста бірқалыпты үзіліссіз болмайды.

Мысал 9. $f(z)=e^{-\frac{1}{z^2}}$ функциясы $D_f=\{z\in C:0<|z|\le R\}$ облысында бірқалыпты үзіліссіз бола ма?

Шешуі: Екі үзіліссіз функцияның композициясы болғандықтан $f(z)=e^{-\frac{1}{z^2}}$ функциясы үзіліссіз. Енді бірқалыпты үзіліссіздігін тексеріп көрейік. Бұрынғыдай $z=x+iy$ болсын. Онда

$$\frac{1}{z^2}=\frac{1}{x^2-y^2+i2xy}=\frac{x^2-y^2-i2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$e^{-\frac{1}{z^2}}=e^{-\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}}e^{\frac{i2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}}$$ болады.

Айталық $z_n'=\left(0,\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)$, $z_n''=\left(0,\frac{1}{\sqrt{\ln 2n}}\right)$ болсын.

Онда $\forall n\in N$, $z_n'\in D_f$, $z_n''\in D_f$ болса,

$n\to\infty$ ұмтылғанда $\rho(z_n',z_n'')=\sqrt{\frac{1}{\ln n}-\frac{1}{\ln 2n}}\to 0$.

Ал енді $n\to+\infty$ ұмтылғанда

$$\rho\left(f\ (z_n'),f\ (z_n'')\right)=e^{\ln 2n}-e^{\ln n}=2n-n=n\to+\infty.$$

Демек, $f(z)=e^{-\frac{1}{z^2}}$ функциясы берілген облыста бірқалыпты үзіліссіз болмайды.

§5. Комплекс айнымалы функциялардың дифференциалдануы

Анықтама. $f:C\to C$ және $z_0\in D_f$ болсын. Егер $D_\varphi=D_f$ болатындай z_0 нүктесінде үзіліссіз $\varphi:C\to C$

функциясы табылып, $\forall z \in D_f$ үшін

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)\varphi(z)$$

теңдігі орындалса, онда f функциясы z_0 нүктесінде дифференциалданады.

Егер z_0 нүктесі D_f жиынының шектік нүктесі болса, онда $\varphi(z_0)$ саны f функциясының z_0 нүктесіндегі туындысы деп аталады және $f'(z_0)$ арқылы бейнеленеді, яғни

$$f'(z_0) = \varphi(z_0).$$

Теорема. $f : C \to C$, $z_0 \in D_f$ болсын және z_0 нүктесі D_f жиынының шектік нүктесі болсын. Егер f функциясы z_0 нүктесінде дифференциалданатын болса, онда

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

туындысы бар болады.

Егер $f : C \to C$ функциясы $z_0 \in D_f$ нүктесінде дифференциалданса (жоғарыдағы анықтама), онда функция бұл нүктеде *С-мағынасында дифференциалданады* дейміз. Егер $g : R^2 \to R$ функциясы (x_0, y_0) нүктесінде (оның (x_0, y_0) нүктесіндегі өсімшесі

$$\Delta g(x_0, y_0) = \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y + \alpha(\rho),$$ мұндағы $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $\rho \to 0$ ұмтылғанда $\alpha \to 0$), R^2-*мағынасында дифференциалданады* дейді. Жалпы комплекс айнымалы функцияны $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, түрінде жазуға болатындықтан, С-мағынасында дифференциалдану мен R^2-мағынасында дифференциалдану

арасында қандай байланыс бар деген сұрақ тууы орынды. Ол байланысты келесі теоремадан байқаймыз:

Теорема. ($f:C \to C$ функциясының дифференциалдану критерийі). $f:C \to C$ функциясы (мұндағы $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$) $z_0 = x_0 + iy_0$ нүктесінің маңайында анықталсын. f функциясының z_0 нүктесінде дифференциалдануы үшін u және v функциялары (x_0, y_0) нүктесінде R^2-мағынасында дифференциалдануы және олардың дербес туындылары үшін бұл нүктеде

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}$$

теңдіктері орындалуы қажетті және жеткілікті.

Бұл теңдіктерді *Коши-Риман шарты* деп атайды.

Анықтама. Егер $G \subset C$ облысында анықталған $w = f(z)$ функциясы $\forall z \in G$ үшін дифференциалданса, онда функция G облысында *аналитикалық* немесе *голоморфты функция* деп аталады.

Анықтама. Егер $w = f(z)$ функциясы $z \in C$ нүктесінің маңайында аналитикалық болса, онда оны $z \in C$ нүктесінде *аналитикалық функция* дейді.

Айталық $f:C \to C$ функциясы $z_0 \in D_f$ нүктесінде дифференциалданатын болсын. Онда анықтама бойынша $\forall z \in D_f$ оның z_0 нүктесіндегі өсімшесі

$$\Delta f(z_0) = f(z) - f(z_0) = (z - z_0)\varphi(z), \qquad (1)$$

мұндағы φ функциясы z_0 нүктесінде үзіліссіз және $f'(z_0) = \varphi(z_0)$. (1) теңдігін мына түрде жаза аламыз:

$$\Delta f(z_0, \Delta z) = \varphi(z_0)\Delta z + \alpha(z_0, \Delta z)\Delta z, \qquad \Delta z = z - z_0,$$

мұндағы $\alpha(z_0,\Delta z)=\varphi(z)-\varphi(z_0)=\varphi(z_0+\Delta z)-\varphi(z_0).$

Сонымен z_0 нүктесінде дифференциалданатын f функциясының өсімшесі екі қосылғыштың қосындысынан тұрады, біріншісі $f'(z_0)\Delta z$, ал екіншісі $\alpha(z_0,\Delta z)\Delta z$, мұндағы α дегеніміз $z \to z_0$ ұмтылғанда нольге ұмтылатын шексіз аз шама. Енді (1) –ді былай жазсақ болады:

$$\Delta f(z_0,\Delta z)= f'(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|). \qquad (2)$$

Егер $f'(z_0)=a$ деп белгілесек, $\Delta f(z_0,\Delta z)=a\Delta z+o(|\Delta z|)$ болады да, f функциясының z_0 нүктесінде дифференциалдану шарты шығады немесе оны

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z_0,\Delta z)}{\Delta z}=a=f'(z_0) \qquad (3)$$

түрінде жазуға болады.

Өзіндік бақылау сұрақтары

1. Функцияның нүктеде дифференциалдануы.
2. Функцияның туындысы.
3. Функцияның дифференциалдану критерийі.
4. Коши-Риман шарттары.
5. Аналитикалық функция дегеніміз не?

Мысал 1. Мына функция

$$w(z)=\begin{cases}\dfrac{x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{5}{3}}}{x^2+y^2}+i\dfrac{x^{\frac{5}{3}}y^{\frac{4}{3}}}{x^2+y^2}, & z\neq 0,\\[2ex] 0, & z=0\end{cases}$$

$z=0$ нүктесінде дифференциалданбайтынын дәлелдеу керек.

Шешуі: Дәлелдеу үшін $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{w(z)}{z}$ шегінің жоқ екенін көрсетейік. Айталық $z = x + iy$ болсын. Онда

$$\frac{w(z)}{z} = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{7}{3}}y^{\frac{5}{3}} + x^{\frac{5}{3}}y^{\frac{7}{3}}}{\left(x^2+y^2\right)^2} + i\dfrac{x^{\frac{8}{3}}y^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{8}{3}}}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

Бұдан, егер $y = x \to 0$ болсын деп алсақ, онда $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{w(z)}{z} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^4}{4x^4} = \dfrac{1}{2}$. Егер $z = x \to 0$ болса, онда $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{w(z)}{z} = 0$ болады. Айтылғандардан $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{w(z)}{z}$ шегінің жоқ екенін және w функциясының $z = 0$ нүктесінде дифференциалданбайтынын аламыз.

Мысал 2. Берілген $w = x^3 - 3xy^2 + i\left(3x^2y - y^3 - 1\right)$, $D_w = C$, функциясының аналитикалық функция екенін дәлелдеу керек.

Шешуі: Берілген функцияның нақты және жорамал бөліктері сәйкес

$$u = x^3 - 3xy^2, \quad v = 3x^2y - y^3 - 1.$$

Бұл функциялар дифференциалданады және Коши-Риман шарттары да орындалады:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Онда $\frac{dw}{dz}=3x^2-3y^2+i6xy$ екені шығады.

Мысал 3. $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ функциясы D облысында аналитикалық функция болсын. Егер $\forall z\in D$, $u^2+uv+v^2=a$ $(a=const)$ болса, онда D облысында $f=const$ болатынын дәлелдеу керек.

Шешуі: $u^2+uv+v^2=a$ өрнегін x және y бойынша дифференциалдаймыз.

$$(2u+v)\frac{\partial u}{\partial x}+(u+2v)\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

$$(2u+v)\frac{\partial u}{\partial y}+(u+2v)\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Енді $f'(z_0)\neq 0$ орындалатын $z_0\in D$ нүктесі табылады деп кері жориық. Онда жоғарыдағы теңдіктердің $2u+v,$ $u+2v$ өрнектеріне қатысты тривиальды шешімдері ғана болады, яғни $u=v=0$. Бұл - біздің жоруымызға қарама-қайшылық. Демек $\forall z\in D$ үшін $f'(z)=0$, яғни D облысында $f(z)=const$.

Мысал 4. $f=u+iv$ функциясы үшін Коши-Риман шарттарын полярлық координатада жазу керек ($x=r\cos\varphi,$ $y=r\sin\varphi,$ $r=\sqrt{x^2+y^2}$).

Шешуі: Күрделі функцияны дифференциалдау ережесі бойынша

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}=-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot r\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot r\cos\varphi$$

теңдеулерін аламыз. Бұл теңдеулерді $\frac{\partial u}{\partial x}$ және $\frac{\partial u}{\partial y}$ өрнектеріне байланысты шешсек,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{r}$$

аламыз. Сол сияқты

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\cos\varphi-\frac{\partial v}{\partial\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r},\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\sin\varphi+\frac{\partial v}{\partial\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{r}$$

шығады. Енді Коши-Риман шарттарын жазсақ:

$$\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r}=\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\sin\varphi+\frac{\partial v}{\partial\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{r},\tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{r}=-\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\cos\varphi+\frac{\partial v}{\partial\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r}\tag{2}$$

болады. (1)-ді $\cos\varphi$-ге, ал (2)-ні $\sin\varphi$-ге көбейтіп қосатын болсақ, онда

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial\varphi}$$

шығады. Ал енді (1)-ді $-\sin\varphi$- ге, ал (2)-ні $\cos\varphi$-ге көбейтіп қосатын болсақ, онда

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi}=-\frac{\partial v}{\partial r}$$

теңдігін аламыз. Сонымен $f=u+iv$ функциясы үшін Коши-Риман шарттарын полярлық координатада жазсақ:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \qquad \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\frac{\partial v}{\partial r}.$$

Мысал 5. Берілген $w=f(z)=z\operatorname{Re}z$ ($D_f=C$) функциясының $z=0$ нүктесінде дифференциалданатынын дәлелдеу керек. $f'(0)$ мәнін есептеу керек.

Шешуі: $z=x+iy$ деп есептеп берілген функцияны былай жаза аламыз: $f(z)=u+iv=x^2+ixy$**.** Демек

$u=x^2, \qquad v=xy$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=y.$$ Сөйтіп

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad \Leftrightarrow x=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \quad \Leftrightarrow y=0,$$

яғни Коши-Риман шарттары тек қана $z=0$ нүктесінде орындалады. Анықтама бойынша

$$f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\left(x^2+ixy\right)}{x+iy}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\left(x^2+ixy\right)(x-iy)}{x^2+y^2}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\left(x^3-ix^2y+ix^2y+xy^2\right)}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}x=0.$$

Сонымен $f'(0)=0$.

Мысал 6. Мына $f(z)=\sqrt{|xy|}$ ($D_f=C$) функциясы үшін Коши-Риман шарттары тек қана $z=0$ нүктесінде орындалады, бірақ туындысы жоқ екенін дәлелдеу керек.

Шешуі: $f:C\to C$ функциясын $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ түрінде қарастырсақ, онда $u=\sqrt{|xy|}$, $v=0$ болады. Екі айнымалыдан тәуелді функцияның дербес туындысы анықтамасы бойынша

$$\frac{\partial u(0,0)}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x}=0,$$

$$\frac{\partial u(0,0)}{\partial y}=\lim_{y\to 0}\frac{u(0,y)-u(0,0)}{y}=0.$$

Берілген функцияда $v=0$ болғандықтан, $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$ болады. Демек $z=0$ нүктесінде Коши-Риман шарттары орындалады.

Ал енді туындысы жоқ екенін дәлелдейік. Ол үшін (3) шартын тексерейік. Мынаны ескеріп $\Delta f(0,\Delta z)=f(z)-f(0)=\sqrt{|xy|}$, $\Delta z=z-0=x+iy$,

келесі қатынасты қарастырайық: $\frac{\Delta f(0,\Delta z)}{\Delta z}=\frac{\sqrt{|xy|}}{x+iy}$. Егер

$z=(x,0)$, $x\to 0$ болса, онда $\Delta z\to 0$ және

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(0,\Delta z)}{\Delta z}=0.$$

Айталық $x\to 0$, $x>0$ және $y=x$ болсын. Онда $\Delta z\to 0$ және

$\dfrac{\Delta f(0,\Delta z)}{\Delta z}=\dfrac{x}{x(1+i)}\to\dfrac{1-i}{2}.$ Сонымен қарастырылған жағдайларда әртүрлі шектер алынғандықтан $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f(0,\Delta z)}{\Delta z}$ шегі жоқ және $z=0$ нүктесінде берілген $f(z)=\sqrt{|xy|}$ функциясының туындысы жоқ.

($u(x,y)=\sqrt{|xy|}$ функциясы $(0,0)$ нүктесінде дифференциалданбайды, шындығында берілген функцияны былай жазсақ болады : $2f(z)=\sqrt{\left|z^2-\bar{z}^2\right|}$, ал $f(z)=\bar{z}$ қарапайым функциясының жазықтықтың ешбір нүктесінде комплекс анализ мағынасында туындысы жоқ, яғни $f(z)=\bar{z}$ функциясы жазықтықтың ешбір нүктесінде голоморфты емес.)

Өзіндік жұмысқа жаттығулар

1. Келесі комплекс сандардың модулі мен аргументінің басты мәнін табу керек:

$a)\ z=4+3i,$

$b)\ z=-7-i,$

$c)\ z=4-3i,$

$d)\ z=-2+2\sqrt{3}i,$

$e)\ z=-\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5},$

$f)\ z=\cos\alpha-i\sin\alpha,\quad \pi<\alpha<\dfrac{3}{2}\pi.$

Жауабы: $a)\ \rho = 5,\ \ \varphi = arctg\frac{3}{4};$

$b)\ \rho = 5\sqrt{2},\ \varphi = arctg\frac{1}{7} - \pi;$ $\qquad c)\ \rho = 5,\ \ \varphi = -a \quad r\frac{3}{4};$

$d)\ \rho = 4,\ \ \varphi = \frac{2}{3}\pi;$ $\qquad e)\ \rho = 1,\ \ \varphi = \frac{4}{5}\pi;$

$f)\ \rho = 1,\ \ \varphi = 2\pi - \alpha.$

2. Келесі комплекс сандарды тригонометриялық формада жазу керек:

$a)\ z = -2,$

$b)\ z = 2i,$

$c)\ z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2},$

$d)\ z = 1 - \sin\alpha + i\cos\alpha,\quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$

$e)\ z = \frac{1 + \cos\alpha + i\sin\alpha}{1 + \cos\alpha - i\sin\alpha},\quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$

Жауабы: $a)\ 2(\cos\pi + i\sin\pi);\quad b)\ 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right);$

$c)\ 2\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right);$

$d)\ \sqrt{2(1 - \sin\alpha)}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)\right];$

$e)\ 1(\cos\alpha + i\sin\alpha);$

3. Келесі комплекс сандарды көрсеткіштік түрде жазу керек:

$a)\ z = -2,$

$b)\ z = i,$

$c)\ z=-i,$

$d)\ z=-1-i\sqrt{3},$

$e)\ z=\sin\alpha-i\cos\alpha,\ \left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right),$

$f)\ z=5+3i.$

Жауабы: $a)\ 2e^{i\pi};\quad b)\ 1\cdot e^{i\frac{\pi}{2}};\quad c)\ 1\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}};\quad d)\ 2e^{-\frac{2\pi}{3}i};$

$e)\ 1\cdot e^{\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)i};\quad f)\ \sqrt{34}e^{iarctg\frac{3}{5}};$

4. Есептеу керек:

$a)\ \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40},$

$b)\ (2-2i)^7,$

$c)\ \left(\sqrt{3}-3i\right)^6,$

$d)\ \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8.$

Жауабы: $a)\ -2^{19}\left(1+i\sqrt{3}\right);\quad b)\ 2^{10}(1+i);\quad c)\ 1728;\quad d)\ 1.$

5. Түбірдің барлық мәндерін табу керек:

$a)\ \sqrt[4]{-1},$

$b)\ \sqrt{i},$

$c)\ \sqrt[3]{i},$

$d)\ \sqrt[4]{-i}.$

Жауабы: $a)\ \pm\frac{1\pm i}{\sqrt{2}};\quad b)\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i);\quad c)\ \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{3}+i\right),\ -i;$

$d)\ \pm\left(\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}\right),\ \pm\left(\cos\frac{3}{8}\pi+i\sin\frac{3}{8}\pi\right).$

6. Комплекс жазықтықта келесі шарттарды қанағаттандыратын z нүктелер жиынын табу керек:

а) $|z-5i|=8$;

б) $|z-1-i|\le 4$;

в) $1<|z+i|<2,\quad \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{2}$;

г) $2<|z|<3,\quad \frac{\pi}{8}<\arg z<\frac{4}{3}\pi$;

д) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\le 1$;

е) $0\le \operatorname{Im} z\le 1$;

ж) $1\le|z+2+i|\le 2$.

З) $|z-1|<|z-i|$

и) $1<\operatorname{Re} z<2$

Жауабы:

а) Центрі $z=5i$ нүктесінде, радиусы $r=8$ болатын шеңбер;

б) Центрі $z=1+i$ нүктесінде, радиусы $r=4$ болатын дөңгелек;

в) $\arg z=\frac{\pi}{4}$ және $\arg z=\frac{\pi}{4}$ сәулелерімен және радиустары $r=1,\ r=2$ центрі $z=-i$ болатын шеңберлермен шектелген сақинаның бөлігі;

г) $\arg z=\frac{\pi}{8}$ және $\arg z=\frac{4}{3}\pi$ сәулелерімен және радиустары $r=2,\ r=3$ центрі $z=0$ нүктесінде болатын шеңберлермен шектелген сақинаның бөлігі.

д) OY өсін қоса алғандағы оң жақтағы жарты жазықтық ;

е) $y=0$ және $y=1$ түзулерінің арасындағы жолақ, бұл түзулер де жиынға тиісті;

ж) Центрі $z_0 = -(2+i)$ нүктесінде, радиустары $R_1 = 1, \; R_2 = 2$ болатын шеңберлермен шектелген сақина. Екі шеңбер де жиынға кіреді;

з) $y = x$ түзуінің астында жатқан жарты жазықтық;

и) $x = 1$ және $x = 2$ түзулерінің арасындағы жолақ.

7. Қандай қисықтар келесі теңдеулермен анықталады?

$a)$ $\operatorname{Im} z^2 = 2,$

$b)$ $\operatorname{Re} z^2 = 1,$

$c)$ $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2},$

$d)$ $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 1,$

$e)$ $\operatorname{Im}\left(\overline{z^2 - \bar{z}}\right) = 2 - \operatorname{Im} z,$

$f)$ $|z - i| + |z + i| = 4,$

$g)$ $|z| - 3\operatorname{Im} z = 6.$

Жауабы: $a)$ $xy = 1$ гиперболасы; $b)$ $x^2 - y^2 = 1$ гиперболасы;

$c)$ $x^2 + (y+1)^2 = 1$ шеңбері; $d)$ $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ шеңбері;

$e)$ $xy = -1$ гиперболасы; $f)$ $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ эллипсі;

$g)$ $\dfrac{\left(y + \frac{9}{4}\right)^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} - \dfrac{x^2}{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$ гиперболасы.

8. Тізбектердің шегін табу керек:

$$a)\ z_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\frac{\pi}{n}};$$

$$b)\ z_n = \frac{i^n}{n};$$

$$c)\ z_n = (1+3i)^n;$$

$$d)\ z_n = \frac{e^{in}}{n^2};$$

$$e)\ z_n = n\sin\frac{i}{n};$$

$$f)\ z_n = n\cos\frac{n\pi}{2} + in\sin\frac{n\pi}{2};$$

$$g)\ z_n = \frac{shin}{n}.$$

Жауабы: $a)$ 1; $b)$ 0; $c)$ тізбектің шегі жоқ;

$d)$ 0; $e)$ i; $f)$ тізбектің шегі жоқ; $g)$ 0.

9. Келесі функциялар өзінің анықталу облысында аналитикалық функция бола ма?

$a)$ $w = \left(\overline{z}\right)^2 z;$

$b)$ $w = ze^z;$

$c)$ $w = |z|\overline{z};$

$d)$ $w = e^{z^2};$

$e)$ $w = |z|\operatorname{Re}\overline{z};$

$f)$ $w = \sin 3z - i;$

$g)$ $w = \overline{z}\operatorname{Re} z;$

$h)$ $w = \overline{z}\operatorname{Im} z;$

$i)$ $w = |z|\operatorname{Im} z;$

$j)$ $w = chz.$

Жауабы: a) аналитикалық емес функция; b) аналитикалық функция; c) аналитикалық емес функция; d) аналитикалық функция; e) аналитикалық емес функция; f) аналитикалық функция; g) аналитикалық емес функция; h) аналитикалық емес функция; i) аналитикалық емес функция; j) аналитикалық функция.

II. КОМПЛЕКС ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯЛАР

§1. Бөлшекті-сызықты функциялар

Бөлшекті-сызықты функция деп

$$w(z) = \frac{az+b}{cz+d} \tag{1}$$

түріндегі өрнекті айтады, мұндағы $a \in C,\ b \in C,\ c \in C,$ $d \in C$ және $ad - bc \neq 0$ (өйткені, егер $ad - bc = 0$ болса, онда $w(z) = const$). Егер $c = 0,\ d \neq 0$ болса, онда (1) функциясы сызықтық функция болады:

$$w = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d} = Az + B .$$

Бөлшекті-сызықты функция w тек қана екі нүктеден, $z_1 = -\frac{d}{c}$, $z_2 = \infty$ басқа барлық $z \in \overline{C}$ үшін анықталған. Егер $c = 0$ болса, бұл нүктелер беттеседі. Енді w функциясының осы екі нүктедегі шектік мәндері $w(z_1)$ және $w(\infty)$:

$$w(z_1) = \infty, \qquad w(z_2) = \frac{a}{c}$$

дей отырып, w функциясын бүкіл кеңейтілген жазықтыққа, яғни $\overline{C}$-ға жалғастырамыз. Сонда бөлшекті-сызықты функция $\overline{C}$-дан $\overline{C}$-ға үзіліссіз бейнелеу бола отырып, $\overline{C}$-да үзіліссіз функция болады. (1) -ді теңдеу ретінде қарастырып z-ке байланысты шешсек, онда

$$z = -\frac{dw-b}{cw-a} \tag{2}$$

шығады. Тағы да $\overline{C}$-да анықталған бөлшекті-сызықты функция шықты.

Сонымен мынадай теорема алдық:

Теорема. Кез келген бөлшекті-сызықты функция (1) $\overline{C}$-ны $\overline{C}$-ға *голоморфты (өзара бірмәнді және үзіліссіз)* бейнелейді.

Бөлшекті-сызықты функцияның туындысы

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

нөлге тең емес және барлық $z \in \overline{C} \setminus \{z_1, z_2\}$ үшін ақырлы. Жалпы бөлшекті-сызықты функция w арқылы бейнелеу барлық $z \in \overline{C}$ үшін *конформды бейнелеу* болады.

Анықтама. Егер z және z^* нүктелері шеңбердің центрі z_0 нүктесінен шығатын бір сәуледе жатса және олардың центрден қашықтықтарының көбейтіндісі сол шеңбердің радиусының квадратына тең болса, онда z және z^* нүктелері *шеңберге (радиусы ақырлы) қарағанда симметриялы* деп аталады.

Ал енді z нүктесіне шеңбердің центріне қарағанда симметриялы z^* нүктесін

$$z^* = z_0 + \frac{R^2}{\overline{z - z_0}} \qquad (3)$$

формуласымен табуға болады, мұндағы R шеңбердің радиусы.

Бөлшекті-сызықты бейнелеу L төрт комплекс параметр (a, b, c, d) еніп тұрған

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

формуласымен беріледі.

Бұл бейнелеуде алымын да, бөлімін де бір нөлден өзгеше параметрге бөлсек, онда ол үш айнымалыдан тәуелді болады. Сондықтан бөлшекті-сызықты бейнелеуде үш нүкте бір ғана жолмен сәйкес үш нүктеге бейнеленеді.

Теорема. Қандай да болмасын әртүрлі үш $z_1 \in \overline{C}$, $z_2 \in \overline{C}$, $z_3 \in \overline{C}$ нүктені басқа әртүрлі үш

$w_1 \in \overline{C}, \quad w_2 \in \overline{C}, \quad w_3 \in \overline{C}$ нүктелеріне көшіретін бір ғана бөлшекті-сызықты бейнелеу L бар, яғни $L(z_k) = w_k, \quad (k = 1,2,3).$

Бөлшекті-сызықты бейнелеу L төмендегі формуламен анықталады:

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}. \qquad (4)$$

§2. Дәрежелік және көрсеткіштік функциялар

Дәрежелік $w = z^n$, $(z \in C)$ функциясы C комплекс жазықтықта аналитикалық функция болады. Бұдан $\frac{dw}{dz} = nz^{n-1} \neq 0, \quad \forall z \neq 0$ болғандықтан дәрежелік функция арқылы бейнелеу әр нүктеде $z \in C \setminus \{0\}$ конформды бейнелеу болады.

Көрсеткіштік функция $w = e^z, \quad z \in C$. Бұл функцияны былай жазсақ та болады:

$$w = u + iv = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Көрсеткіштік функция $w = e^z, \quad \forall z \in C$ аналитикалық функция болады. Шынында да

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y,$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$$

теңдіктері орындалады, яғни u және v функциялары Коши-Риман шарттарын қанағаттандырады.

$w = e^z$ көрсеткіштік функциясының келесі қасиеттерін атай кетелік:

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$, мұндағы z_1, z_2 - кез келген комплекс сандар;

2. $e^{z+2k\pi i} = e^{z}$, $\left(k = 0,\pm1,\pm2,...\right)$, яғни e^{z} - периодты функция, периоды $2\pi i$.

Көрсеткіштік $w = e^{z}$ функциясына кері функция

$$z = Lnw$$

көпмәнді функция болып табылады.

$$Lnw = \ln|w| + i\arg w + i2\pi k, \quad k \in Z.$$

Бұл көпмәнді функцияда $k = 0$ мәнін басты мәні деп атайды да, $\ln z$ арқылы белгілейді:

$$\ln w = \ln|w| + i\arg w.$$

Өзіндік бақылау сұрақтары

1. Бөлшекті-сызықты функция дегеніміз не?
2. Шеңберге қарағанда симметриялы нүктелер деген қандай нүктелер?
3. Бөлшекті-сызықты бейнелеу қандай формуламен анықталады?
4. Дәрежелік функция және көрсеткіштік функциялар.
5. Көпмәнді логарифмдік функциясы.

Мысал 1. **Б**ерілген $w = \dfrac{z + ia}{-z + ia}$, $a \neq 0$, $a \in R$, бейнелеуімен Oy өсінің бейнесі қандай болады?

Шешуі: $w(0) = 1$, $w(\infty) = -1$, $w(ia) = \infty$ екені белгілі. Үш нүкте -1, 1, ∞ нақты өсті анықтайды.

Мысал 2. **Ұ**штары $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = 1 + 2i$ нүктелерінде тұрған кесіндінің бейнесі **б**ерілген $w = \dfrac{2z + i}{iz + 2}$ бейнелеуімен қандай болады?

Шешуі: $w(z_1) = -5-2i,\qquad w(z_2) = 5-2i,\qquad w(2i) = \infty$

болғандықтан, берілген кесінді жатқан $y=2$ түзуінің бейнесі $\operatorname{Im} w = -2$ түзуі болады. Ақырлы кесінді $[z_1, z_2]$ шексіз алыстатылған нүктесі бар, ұштары $w_1 = -5-2i,\quad w_2 = 5-2i$ нүктелері болатын кесіндіге көшеді.

Мысал 3. $w = \dfrac{\sqrt{2}(z-1-i)}{2z-1-i}$ бейнелеуі арқылы $\gamma = \{w \in C : |w| = 1\}$ болатын бірлік шеңберге бейнеленетін z жазықтығындағы қисықты табу керек.

Шешуі: Берілуі бойынша $|w| = 1$ болғандықтан $w\overline{w} = 1$ деп жазсақ болады. Осыдан $\dfrac{2(z-1-i)(\overline{z}-1+i)}{(2z-1-i)(2\overline{z}-1+i)} = 1$, бұдан $z\overline{z} = 1$ шығады, яғни ізделінді кері бейне - $\gamma' = \{z \in C : |z| = 1\}$ бірлік шеңбері екен.

Мысал 4. $w = \dfrac{3-2z}{4z+8}$ бейнелеуі арқылы $K = \{z \in C : |z| < 1\}$ бірлік дөңгелектің бейнесін және нақты өстің жоғарғы бөлігіндегі жарты дөңгелектің бейнесін табу керек.

Шешуі: Берілген формула бойынша $w(-1) = \dfrac{5}{4},\qquad w(1) = \dfrac{1}{12}$**.** Бөлшекті-сызықты бейнелеудің коэффициенттері нақты сандар болғандықтан нақты өс нақты өске көшеді. Бірлік шеңбердің бейнесі шеңбер болады, ол шеңбердің диаметрі $\left[\dfrac{1}{12}, \dfrac{5}{4}\right]$ кесіндісі болады.

$w(0)=\frac{3}{8}$ екенін ескере отырып, K бірлік дөңгелегі $K_1=\left\{w\in C:\left|w-\frac{2}{3}\right|<\frac{7}{12}\right\}$ дөңгелегіне көшетінін байқаймыз. Айналу ережесі бойынша жоғарғы жарты дөңгелектің бейнесі төменгі жарты дөңгелек болады.

Мысал 5. $K=\{z\in C:|z|<1\}$ дөңгелегін $K^*=\{w\in C:|w-i|<1\}$ дөңгелегіне көшіретін және 0, 1 нүктелерін сәйкес $\frac{i}{2}$, 0 нүктелеріне көшіретін функцияны табу керек.

Шешуі: $w=\frac{i}{2}$ нүктесіне симметриялы w^* нүктесі (3) формуламен табылады:

$$w^*=i+\frac{1}{\overline{\frac{i}{2}-i}}=-i\,.$$

Ізделінді бейнелеуді үш пар нүктенің сәйкестігінен анықтаймыз:

$$w(0)=\frac{i}{2},\quad w(1)=0,\quad w(\infty)=-i\,.$$

Сонымен (4) формуланы қолданып

$$w=\frac{i-iz}{z+2}$$

бөлшекті-сызықты бейнелеуін табамыз.

Мысал 6. $w=z^2$ бейнелеуі арқылы $x^2-y^2=a^2$ гиперболасының оң жақ тармағының неге көшірілетінін табу керек.

Шешуі: Егер $z=x+iy$ болса, онда $w=(x+iy)^2=x^2-y^2+i2xy$, $\operatorname{Re}z=x^2-y^2$ болады.

Сонымен $x^2 - y^2 = a^2$ гиперболасының оң жақ тармағының бейнесі $u = a^2$ түзуі болады. Берілген $w = z^2$ бейнелеуімен гиперболаның оң жақ тармағы түзуге көшеді.

Мысал 7. Берілген $w = z^2$ бейнелеуі арқылы $x^2 - y^2 = 1$ гиперболасының оң жақ тармағы мен $\arg z = \pm\frac{\pi}{4}$ сәулелерімен шектелген облыстың неге көшетінін табу керек.

Шешуі: Берілген $\arg z = \pm\frac{\pi}{4}$ сәулелері $x^2 - y^2 = 1$ гиперболасының асимптоталары болады. Берілген $w = z^2$ бейнелеуімен $\arg z = \pm\frac{\pi}{4}$ сәулелері жорамал өске көшеді, ал $x^2 - y^2 = 1$ гиперболасының оң жақ тармағы $\operatorname{Re} w = 1$ түзуіне көшеді. Сонымен $x^2 - y^2 = 1$ гиперболасының оң жақ тармағы мен $\arg z = \pm\frac{\pi}{4}$ сәулелерімен шектелген облыстың бейнесі $M = \left\{ w \in C: \quad 0 < \operatorname{Re} w < 1 \right\}$ жолағы болады.

Мысал 8. Берілген дәрежелік функция $w = z^2$ бейнелеуімен $P = \left\{ z \in C: \ \operatorname{Im} z \geq c, \ c = const > 0 \right\}$ жарты жазықтығының бейнесін табу керек.

Шешуі: Берілуі бойынша $y = c$ болғандықтан $u = x^2 - c^2, \quad v = 2cx, \ x \in R$ екенін білеміз. Осыдан x-ті тапсақ, онда $u = \frac{v^2}{4c^2} - c^2$ болады. Енді $c > 0$ екенін ескере отырып, $P = \left\{ z \in C: \ \operatorname{Im} z \geq c, \ c = const > 0 \right\}$ жарты жазықтығының $w = z^2$ бейнелеуі арқылы көшкен бейнесі $u = \frac{v^2}{4c^2} - c^2$ параболасының сырты екенін байқауға болады.

Мысал 9. $Ln\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ есептеу керек.

Шешуі:

$$Ln\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \ln\left|\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right| + i\arg\frac{1+i}{\sqrt{2}} + i2\pi k = \ln 1 + iarctg1 + i2\pi k =$$

$$= \left(\frac{1}{4} + 2k\right)\pi i.$$

§3. Жуковский функциясы

Мына бейнелеу

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \tag{5}$$

Жуковский функциясы деп аталады. Бұл функция $C \setminus \{0\}$ облысында аналитикалық функция болады. Оның туындысы $\dfrac{dw}{dz} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{z^2}\right)$ бұл облыста $z = \pm 1$ нүктелерінен басқа нүктелерде нөлге тең емес. Демек (5) бейнелеуі C комплекс жазықтығында $z = \pm 1$ нүктелерінен басқа нүктелерде конформды бейнелеу болады.

Жуковский функциясының *бірпарақтық* облыстарын табамыз. Айталық z_1, z_2 нүктелері $\overline{C}$ жазықтығының әртүрлі екі нүктесі арқылы w жазықтығының бір ғана нүктесіне бейнеленетін, яғни $w(z_1), w(z_2)$ Жуковский функциясы мәндері тең болсын.

$$z_1 + \frac{1}{z_1} - \left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right) = z_1 - z_2 + \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right) =$$

$$= (z_1 - z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right) = 0.$$

Бұдан $z_1 \neq z_2$ болғандықтан $z_1 \cdot z_2 = 1$ шығады. Демек Жуковский функциясының бірпарақтық шарты $z_1 \cdot z_2 = 1$ болады. Сонымен қандай да бір аймақта Жуковский функциясы бірпарақты болу үшін бұл аймақта $z_1 \cdot z_2 = 1$ шартын қанағатандыратын $z_1,\ z_2$ нүктелері болмауы қажетті және жеткілікті. Мұндай аймақтарға мысал ретінде мына жиындарды алуға болады:

$$G_1 = \{z \in C:\ |z| < 1\},\ G_2 = \{z \in C:\ |z| > 1\},$$

$$G_3 = \{z \in C:\ \operatorname{Im} z > 0\},\ G_4 = \{z \in C:\ \operatorname{Im} z < 0\}.$$

Жуковский функциясы $\gamma = \{z \in C:\ |z| = r_0 \neq 1\}$ шеңберін жарты өстері

$$a = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right) \quad \text{және} \quad b = \frac{1}{2}\left(r_0 - \frac{1}{r_0}\right),$$ фокустары ± 1 нүктелері болатын эллипске бейнелейді.

§4. Тригонометриялық және гиперболалық функциялар

Тригонометриялық функцияларды көрсеткіштік функциялар арқылы Эйлер формуласымен анықтаймыз:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \qquad (6)$$

Гиперболалық функциялар келесі формулалармен анықталады:

$$shz = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \qquad chz = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}.$$

Тригонометриялық функциялар мен гиперболалық функциялар арасындағы байланыс мына формулалардан көрінеді:

$$shz = -i \cdot \sin iz, \quad chz = \cos iz,$$

$$\sin z = -i \cdot shiz, \quad \cos z = chz.$$

Басқа тригонометриялық функциялар

$$tgz = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad ctgz = \frac{\cos z}{\sin z}$$

және

$$tgz = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}, \quad ctgz = i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

Синус және косинус арқылы бейнелеулер (6) формуладан көрініп тұрғанындай өзімізге белгілі бейнелеулердің композициясы ретінде орындалады. Мысалы $w = \cos z$ бейнелеуі $\frac{\pi}{2}$ бұрышқа бұру мен көрсеткіштік функция және Жуковский функцияларының бейнелеулерінің композициясы ретінде орындалады:

1) $w_1 = iz$,

2) $w_2 = e^{w_1}$,

3) $w = \frac{1}{2}\left(w_2 + \frac{1}{w_2}\right)$.

Ал енді мына формуланы былай жазсақ:

$$\sin z = \frac{e^{i\left(z - \frac{\pi}{2}\right)} + e^{-i\left(z - \frac{\pi}{2}\right)}}{2}$$

онда $w = \sin z$ бейнелеуі төмендегі бейнелеулердің композициясы болады:

1) $w_1 = z - \frac{\pi}{2}$; 2) $w_2 = iw_1$; 3) $w_3 = e^{w_2}$;

4) $w = \frac{1}{2}\left(w_3 + \frac{1}{w_3}\right)$.

Кері тригонометриялық $Arc\sin z, Arc\cos z, Arctgz, Arcctgz$ функциялары сәйкес $\sin w,\ \cos w,\ tgw,\ ctgw$ тригонометриялық функцияларына кері функциялар ретінде анықталады. Мысалы, егер $z = \sin w$ болса, онда w дегеніміз z санының арксинусы деп аталады да, $w = Arc\sin z$ арқылы белгіленеді. Бұл функциялар көпмәнді функциялар және логарифмдік функциялар арқылы бейнеленеді:

$$Arc\sin z = -iLn\left(iz \pm \sqrt{1-z^2}\right);$$
$$Arc\cos z = -iLn\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right);$$
$$Arctgz = -\frac{i}{2}Ln\frac{1+iz}{1-iz};$$
$$Arcctgz = -\frac{i}{2}Ln\frac{z+i}{z-i}.$$

Өзіндік бақылау сұрақтары

1. Жуковский функциясы қалай жазылады?
2. Жуковский функциясының бірпарақтық шарты қандай?
3. Тригонометриялық функцияларды көрсеткіштік функциялар арқылы қалай жазуға болады?
4. Гиперболалық функцияларды көрсеткіштік функциялар арқылы қалай жазуға болады?
5. Тригонометриялық функциялар мен гиперболалық функциялар арасындағы байланыс формулалары.
6. Кері тригонометриялық функциялар формулалары қалай жазылады?

Мысал 1. Берілген ± 1 нүктелері арқылы өтетін кез келген шеңбер C жазықтығын бірпарақты Жуковский функциясының облыстарына бөлетінін дәлелдеу керек.

Шешуі: Айталық γ - шеңбері ± 1 нүктелері арқылы өтетін, z_1, z_2 нүктелері γ-да жатпайтын және $z_1 \cdot z_2 = 1$ шартын қанағаттандыратын шеңбер болсын. Бұл нүктелердің біреуі шекарасы γ болатын дөңгелектің ішінде жатқанын, ал екіншісі γ шеңберінің сыртында жататынын дәлелдеуіміз керек. Мына бейнелеуді қарастыралық:

$$w = \frac{z+1}{k(z-1)}, \quad |k| = 1.$$

Бұл бейнелеу шекарасы γ болатын z - жазықтықтың аймағын жоғарғы жарты жазықтыққа бейнелейді. Соңғы бейнелеуден

$$z=\frac{kw+1}{kw-1}$$

екенін табамыз. $z_1\cdot z_2=1$ шартын ескере отырып,

$$z_1\cdot z_2=\frac{(kw_1+1)(kw_2+1)}{(kw_1-1)(kw_2-1)}=1$$

теңдігін, немесе

$$k^2w_1w_2+k(w_1+w_2)+1=k^2w_1w_2-k(w_1+w_2)+1$$

теңдігін аламыз. Бұдан $w_1=-w_2$ болатынын көреміз. Өзара бірмәнді бейнелеудің қасиеті бойынша w_1, w_2 нүктелерінің кері бейнелері, яғни z_1, z_2 нүктелері γ-ның екі жағында жатады. Сөйтіп берілген ± 1 нүктелері арқылы өтетін кез келген шеңбер C жазықтығын Жуковский функциясының бірпарақты облыстарына бөлетіні дәлелденді.

Мысал 2. Берілген $\sin z-\cos z=i$ теңдеуінің шешімін табу керек.

Шешуі: (6) формуласын қолданалық:

$$\sin z-\cos z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}-\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=i\,.$$

$$e^{iz}-e^{-iz}-ie^{iz}-ie^{-iz}=-2; \qquad e^{iz}(1-i)-e^{-iz}(1+i)=-2;$$

$$e^{2iz}(1-i)+2e^{iz}-(1+i)=0,$$

$$e^{iz}=\frac{-2\pm\sqrt{4+8}}{2(1-i)}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{1-i}=\frac{\left(-1\pm\sqrt{3}\right)(1+i)}{2}.$$

$$iz=Ln\frac{\left(-1+\sqrt{3}\right)(1+i)}{2}=Ln\frac{\sqrt{3}-1+i\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}=$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{3}-1+i\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}\right|+iarctg1+i2\pi k=$$

$$=\ln\sqrt{2-\sqrt{3}}+i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right).$$

$$z_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi k - i\ln\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}.$$

Енді келесі мәнді есептейік:

$$iz = Ln\frac{\left(-1-\sqrt{3}\right)\left(1+i\right)}{2} = Ln\frac{-\sqrt{3}-1-i\left(\sqrt{3}+1\right)}{2} =$$

$$= \ln\left|\frac{-\left(\sqrt{3}+1\right)-i\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}\right| + i\left(-\pi + arctg1\right) + i2\pi k =$$

$$= \ln\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + i2\pi k.$$

$$z_2 = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k - i\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}.$$

Мысал 3. Берілген $e^z + i = 0$ теңдеуінің шешімін табу керек.

Шешуі: Бұл теңдеуді шешу үшін $e^z = -i$ деп жазамыз.

$$z = Ln\left(-i\right) = \ln\left|-i\right| = i\arg\left(-i\right) + i2\pi k = \ln 1 - i\frac{\pi}{2} + i2\pi k =$$

$$= i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right).$$

Мысал 4. Берілген $2\cos z + \sin z = i$ теңдеуінің шешімін табу керек.

Шешуі: $2\cos z + \sin z = 2\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} + \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2} = i$ **;**

$$2e^{iz} + \frac{2}{e^{iz}} + e^{iz} - \frac{1}{e^{iz}} = 2i; \qquad 2e^{2iz} + 2 + e^{2iz} - 1 = 2ie^{iz};$$

$$3e^{2iz} - 2ie^{iz} + 1 = 0;$$

$$e^{iz} = \frac{2i \pm \sqrt{-16}}{6} = \frac{2i \pm 4i}{6} = i\frac{1\pm 2}{3},$$

$$iz = Lni = \ln|i| + i\arg i + i2\pi k = i\frac{\pi}{2} + i2\pi k = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),$$

$$z_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Енді келесі мәнді есептейік:

$$iz = Ln\frac{-i}{3} = \ln\left|\frac{-i}{3}\right| + i\arg\left(\frac{-i}{3}\right) + i2\pi k = \ln\frac{1}{3} - i\frac{\pi}{2} + i2\pi k =$$

$= -\ln 3 + i\left(2\pi k - \frac{\pi}{2}\right)$. Сонымен теңдеудің келесі мәні:

$$z_2 = i\ln 3 + \left(2\pi k - \frac{\pi}{2}\right).$$

Өзіндік жұмысқа жаттығулар

1. Келесі функциялардың нақты және жорамал бөліктерін көрсету керек:

$a)\ w = \bar{z} - iz^2;$

$b)\ w = z^2 + i;$

$c)\ w = i - z^3;$

$d)\ w = \frac{1}{\bar{z}};$

$e)\ w = \frac{iz+1}{1+\bar{z}};$

$f)\ w = \frac{\bar{z}}{z}.$

Жауабы:

$a)\ u = x + 2xy,\ \ v = y^2 - x^2 - y;$ $b)\ u = x^2 - y^2,\ \ v = 1 + 2xy;$

$c) u = 3xy^2 - x^3, v = 1 - 3x^2y + y^3;$

$d) u = \frac{x}{x^2+y^2}, v = \frac{y}{x^2+y^2};$

$e)\ u = \frac{x - 2xy - y + 1}{(x+1)^2 + y^2},\ \ v = \frac{x^2 + y - y^2 + x}{(x+1)^2 + y^2};$

$$f)\ u=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ \ v=-\frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

2. Берілген бейнелеулер бойынша берілген z_0 нүктесінің бейнесін табу керек:

$a)\ z_0=-i,\ \ w=z^2;\ \ b)\ z_0=1-i,\ \ w=(z-i)^2;$

$c)\ z_0=1,\ \ w=\dfrac{1}{z-i};\ d)\ z_0=2+3i,\ \ w=\dfrac{\bar{z}}{z}.$

Жауабы: $a)\ w=-1;\ \ b)\ w=-3-4i;\ \ c)\ w=\dfrac{1+i}{2};$

$d)\ w=-\dfrac{5+12i}{13}.$

3. $w=z^2$ функциясы $|z|=1$ шеңберін қандай қисыққа бейнелейді?

Жауабы: z нүктесі $|z|=1$ шеңберін бір айналғанда оның бейнесі $|w|=1$ шеңберін екі рет айналады.

4. Келесі функциялардың модулі мен аргументінің басты мәнін табу керек: $w=\cos z,\ \ a)\ z_1=\dfrac{\pi}{2}+i\ln 2;\ \ b)\ z_2=\pi+i\ln 2.$

Жауабы: $a)\ \rho=\dfrac{3}{4},\ \ \varphi_0=-\dfrac{\pi}{2};\ \ b)\ \rho=\dfrac{5}{4},\ \ \varphi_0=\pi.$

5. Келесі функциялардың модулі мен аргументінің басты мәнін табу керек: $w=shz,\ \ z_0=1+i\dfrac{\pi}{2}.$

Жауабы: $\rho=ch1,\ \ \varphi_0=\dfrac{\pi}{2}.$

6. Келесі функциялардың модулі мен аргументінің басты мәнін табу керек: $w=ze^z,\ \ z_0=\pi i.$

Жауабы: $\rho=\pi,\ \ \varphi_0=-\dfrac{\pi}{2}.$

7. Келесі сандарды алгебралық формада жазу керек:

$a)\ \sin\pi i\ \ b)\ \cos\pi i.\ \ c)\ tg\frac{\pi}{2}i.$

Жауабы: $a)\ ish\pi;\ \ b)\ ch\pi\ \ c) ith\frac{\pi}{2}.$

8. Келесі сандардың логарифмдерін табу керек:

$a)\ e;\ \ b)\ -i;\ \ c)\ -1-i;\ \ d)\ 3-2i,\ \ e)\ i^{i}$.

Жауабы:

$a)\ 1+2k\pi i;\ \ k=0,\pm1,\pm2,...b)\ \left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi, i\ \ c)\ \ln\sqrt{2}+\left(2k-\frac{3}{4}\right)\pi i,$

$d)\ \ln\sqrt{13}+\left(2k\pi-arctg\frac{2}{3}\right)i;\ \ 2)\ -\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi+2n\pi\cdot i,$

$k,n=0,\pm1,\pm2,...$

9. Келесі комплекс сандарды алгебралық түрде жазу керек:

$a)\ e^{\frac{\pi}{4}i},\ \ b)\ \ln(1-i)$.

Жауабы:

$a)\ \frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ b)\ \frac{1}{2}\ln2-\frac{3}{4}\pi i.$

10. Келесі комплекс сандарды алгебралық түрде жазу керек:

$a)\ Arc\cos i,\ \ b)\ sh\frac{\pi i}{2}$.

Жауабы:

$a)\ k\pi+i\frac{\ln2}{2}\ \ (k=0,\pm1,\pm2,...)\ \ b)\ i.$

11. Келесі теңдеуді шешу керек:

$e^{z}+i=0$

Жауабы:

$z_k=\left(2k-\frac{1}{2}\right)i\pi,\ \ (k=0,\pm1,\pm2,...)$

12. Келесі теңдеуді шешу керек: $e^{ix}=\cos\pi x$**,** x **-** нақты сан

Жауабы: Теңдеудің шешімі: $x=0$.

III. КОМПЛЕКС ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ ФУНКЦИЯЛАРДЫ ИНТЕГРАЛДАУ

§1. Комплекс айнымалы функцияларды интегралдау

Анықтама. Егер үзіліссіз бейнелеу $[a,b]\xrightarrow{\varphi}\gamma$ бар болса, онда $\gamma\subset C$ $\left(\gamma\subset R^2\right)$ жиыны *үзіліссіз қисық* деп аталады. Бұл жағдайда φ бейнелеуі γ қисығының параметрлік түрде бейнеленуі болады.

Анықтама. Егер туындысы нөлден өзгеше үзіліссіз дифференциалданатын бейнелеу $[a,b]\xrightarrow{\varphi}\gamma$ бар болса, онда $\gamma\subset C$ $\left(\gamma\subset R^2\right)$ жиыны жай *тегіс қисық* деп аталады.

Анықтама. γ жай тегіс қисығының барлық эквивалентті параметрлік түрде бейнеленулерінің γ_{op} жиыны γ қисығының *ориентациясы* болады. Реттелген жұп $\Gamma=\left(\gamma,\gamma_{op}\right)$ - *ориентациясы бар тегіс қисық* деп аталады.

Анықтама. Айталық $\Gamma=\left(\gamma,\gamma_{op}\right)$ - ориентациясы бар тегіс қисық, $\varphi\in\gamma_{op}$ - бұл γ қисығының параметрлік түрде бейнеленуі және $D_\varphi=[a,b]$ болсын. Егер $f\ :C\to C$ және $\gamma\subset D_f$ болса, онда f функциясының Γ бойынша қисық сызықты интегралы деп мына санды айтады:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz=\int\limits_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{1}$$

(1) формуланы мына түрде жазса да болады:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz=\int\limits_a^b \operatorname{Re}\left(f(\varphi(t))\varphi'(t)\right)dt+i\int\limits_a^b \operatorname{Im}\left(f(\varphi(t))\varphi'(t)\right)dt.$$

(1) интеграл үшін сызықтық және аддитивтік қасиеттер орындалады. Бұл интегралдың тағы бір маңызды қасиеті:

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)dz\right| \le \int_{\Gamma} |f(z)|\cdot|dz|.$$

§2. Көпмәнді функцияның бірмәнді тармақталуы. Тармақталу нүктелері

Айталық $w=f(z)$ функциясы D аймағында аналитикалық функция болып, D аймағын G аймағына бейнелесін және оның кері $z=\varphi(w)$ функциясы G аймағында көпмәнді функция болсын. Егер G аймағында бірмәнді аналитикалық функциялар $z=\varphi_1(w),\quad z=\varphi_2(w),\ ...,$ (бұлар үшін $w=f(z)$ функциясы кері функция) бар болса, онда $\varphi_1(w),\ \ \varphi_2(w),\ ...$ функциялары G аймағында анықталған $\varphi(w)$ функциясының *бірмәнді тармақтары* деп аталады. Мысалы: $w=z^n$ функциясы z_0 нүктесіне бір ғана w_0 нүктесін сәйкес қояды, бірақ $z=\sqrt[n]{w}$ функциясы бір ғана w_0 $(w\neq 0,\ \ w\neq\infty)$ нүктесіне жазықтықтың n әртүрлі нүктелерін сәйкес қояды. Егер $w=\rho e^{i\theta}$ болса, онда z-тің әртүрлі n мәні мына формуламен табылады: $z_k=re^{i\varphi_k}$, мұндағы

$$r=\sqrt[n]{\rho},\quad \varphi_k=\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\quad \left(-\pi<\theta\le\pi,\quad k=0,1,2,...,n-1\right).$$

Айталық *бірбайланысты* G аймағында w_0 нүктесі бар, бірақ $w=0,\ w=\infty$ нүктелері жоқ делік. Онда k-ның тағайындалған мәндеріне $(k=0,1,2,...,n-1)$ таңдап алынған θ_0 $\left(\text{\textit{мысалы}}\ \theta_0=\arg w_0\right)$ санына байланысты $z=\sqrt[n]{w}$ функциясының әртүрлі тармақтары сәйкес келеді. Егер нүктенің жеткілікті аз маңайын айналған кезде көпмәнді функцияның бір тармағынан екінші тармағына ауысатын болса, онда мұндай қасиеті бар нүктені қарастырылып отырған көпмәнді функцияның *тармақталу нүктесі* деп атайды. Ал $\sqrt[n]{w}$ функциясының тармақталу нүктелері $w=0,\ w=\infty$ болады.

Біз $w=0$ нүктесінің маңайында n еселі айналу жасағаннан кейін $\sqrt[n]{w}$ функциясының алғашқы тармағына қайтып келеміз, мұндай қасиеті бар тармақталу нүктелері $n-1$ *ретті алгебралық тармақталу нүктелері* деп аталады. Функция бұл нүктелердің әрқайсысында бір ғана мән қабылдайды: $\sqrt[n]{0}=0,\ \sqrt[n]{\infty}=\infty$, яғни функцияның әртүрлі тармақтары бұл нүктелерде беттеседі.

Логарифмдік функция $w=Lnz$ үшін тармақталу нүктелері $w=0,\ w=\infty$ болады, $Ln0=\infty,\ Ln\infty=\infty$. Берілген $z=0$ нүктесінің маңайында саны ақырлы айналу жасағаннан $w=Lnz$ функциясының алғашқы тармағына келе алмаймыз. Мұндай тармақталу нүктелері *логарифмдік нүктелер* деп аталады. Интегралдаған кезде көпмәнді функцияның тармақтарын бөліп алу керек. Оны істеу үшін көпмәнді функцияның интегралдау контурының бір нүктесіндегі мәнін беру керек.

Егер Г интегралдау контуры тұйық болса, онда интегралдау контурының бастапқы нүктесі болып интеграл астындағы функцияның берілген мәні саналады.

Мысалы, **а**йталық $f=1$ болсын. Онда (1) формуланы қолданып

$$\int_{\Gamma} f(z)dz=\int_{a}^{b}\varphi'(t)dt=\varphi(b)-\varphi(a)$$

теңдігін аламыз.

Егер $f=z$ болса, онда (1) формуланы қолданып

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} zdz = \int_a^b \varphi(t)\varphi'(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b d\left(\varphi^2(t)\right) = \frac{\varphi^2(b)}{2} - \frac{\varphi^2(a)}{2}$$

теңдігін аламыз.

Бұл келтірілген мысалдардан байқайтынымыз екі интегралдың екеуі де Г –ориентациясы бар тегіс қисықтан байланысты емес, тек қана оның ұштарындағы $\varphi(a)$ және $\varphi(b)$ мәндеріне байланысты.

Егер Г –ориентациясы бар тұйық қисық болса, онда f функциясының Г контуры бойынша қисық сызықты интегралын былай белгілейді:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz .$$

Интеграл қисықтың ұштарына байланысты деген жоғарыдағы мысалдың ескертпесі бойынша

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{\Gamma} zdz = 0 .$$

Онда мына теңдіктің дұрыстығын байқаймыз:

$$\oint_{\Gamma} z^n dz = \frac{1}{n+1}\left(\varphi^{n+1}(b) - \varphi^{n+1}(a)\right).$$

Мысалы, **е**гер Γ_1 және Γ_2 - қисықтары центрі бас нүктеде радиусы 1-ге тең шеңбердің сәйкес жоғарғы және төменгі жарты шеңберлері болса, онда

$$\int_{\Gamma_1} \frac{dz}{z} = i\pi, \qquad \int_{\Gamma_2} \frac{dz}{z} = -i\pi$$

орындалады. Қисықтың бастапқы нүктесі $z = 1$.

Қисықтың бастапқы нүктесін таңдап алу оның ориентациясын анықтайды. Ориентациясы бар қисықтың параметрлік түрде бейнеленуі

$\varphi(t) = e^{it}, \quad 0 \le t \le \pi$ және $\phi(t) = e^{it}, \quad -\pi \le t \le 0$,

$\varphi(0)=\phi(0)=1$. Айтылғаннан

$$\int_{\Gamma_1}\frac{dz}{z}=\int_0^{\pi}\frac{ie^{it}}{e^{it}}dt=i\pi, \qquad \int_{\Gamma_2}\frac{dz}{z}=\int_0^{-\pi}\frac{ie^{it}}{e^{it}}dt=-i\pi$$

екені шығады.

Айталық $f(z)$ үзіліссіз функциясы D аймағында анықталған, ал Г осы D аймағында жатқан тегіс-жазық тұйық немесе тұйық емес ориентациясы бар қисық және $z=x+iy$, $f(z)=u+iv$ болсын, мұндағы $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$- нақты мәнді функциялар. Онда $f(z)$ комплекс айнымалы функциясының интегралы келесі қисық сызықты интегралдармен есептеледі:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz=\int_{\Gamma} udx-vdy+i\int_{\Gamma} vdx+udy. \qquad (2)$$

Жалпы айтқанда $\int_{\Gamma} f(z)dz$ интегралы Г- интегралдау жолына байланысты.

Егер $f(z)$ функциясы D - бірбайланысты аймағында аналитикалық болса, онда интеграл өзінің интегралдану жолына байланысты емес. Бұл жағдайда жоғарыда, айтып кеткеніміздей,

$$\int_{\Gamma} f(z)dz=0,$$

себебі Г осы D аймағында жатқан тегіс-жазық тұйық контур.

Өзіндік бақылау сұрақтары

1. Үзіліссіз қисықтың анықтамасы.
2. Жай тегіс қисық анықтамасы.
3. Комплекс айнымалы функцияны интегралдау формуласы
4. Көпмәнді функцияның бірмәнді тармақталуы дегеніміз не?
5. $\sqrt[n]{w}$ көпмәнді функциясының тармақталуы.

6. $w = Lnz$ көпмәнді функциясының тармақталуы.

Мысал 1. Интегралды есептеу керек:

$$\int_{\Gamma} \overline{z} dz,$$

мұндағы Г – оң ориентациясы бар тұйық жордан қисығы.

Шешуі: Бізге белгілі

$$\overline{z} = x - iy, \quad dz = dx + idy,$$

$$\overline{z} dz = xdx + ydy + i(-ydx + xdy)$$

өрнектерді қолданып,

$$\int_{\Gamma} \overline{z} dz = \int_{\Gamma} xdx + ydy + i\int_{\Gamma} -ydx + xdy = i \cdot 2\iint_{D} dxdy = i \cdot 2|D|$$

теңдігін аламыз (жоғарыда біз Грин формуласын қолдандық). Соңғы өрнектегі $|D|$ - Г қисығымен шектелген фигураның ауданы.

Мысал 2. Келесі интегралды есептеу керек:

$$\int_{\Gamma} e^{|z|^2} \operatorname{Re} z dz,$$

мұндағы Г- интегралдау контуры $z_1 = 0, \quad z_2 = 1 + i$ нүктелерін қосатын түзу.

Шешуі: Берілген интеграл есептеу үшін (1) –формуласын қолданайық. Ол үшін z-ті көрсеткіштік түрде жазамыз:

$$z = te^{i\varphi} = te^{i\frac{\pi}{4}} = t\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= t\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = t\frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

мұндағы $t = |z|$, t - параметр, $0 \le t \le \sqrt{2}$. Енді интегралды есептейік:

$$\int_{\Gamma} e^{|z|^2} \operatorname{Re} z dz = \int_0^{\sqrt{2}} e^{t^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} t \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} dt = \frac{1+i}{2} \int_0^{\sqrt{2}} t \cdot e^{t^2} dt =$$

$$=\frac{1+i}{4}\left(e^2-1\right).$$

Мысал 3. Берілген $\int\limits_{\gamma}\frac{dz}{\sqrt{z}}$ интегралын есептеу керек, мұндағы интегралдау контуры - басы $z_0=1$ нүктесінде және бағыты сағат тіліне қарсы бағытталған $\left\{\ |z|=1,\quad \operatorname{Im} z>0\right\}$ жарты шеңбер. Үзіліссіз функция $\sqrt{z}$ үшін $\sqrt{1}=1$ тармағы алынады.

Шешуі: Берілуі бойынша $z\in\left\{\ |z|=1,\quad \operatorname{Im} z>0\right\}$ болғандықтан мынадай өрнектелу дұрыс болады: $z=e^{i\varphi},\quad \varphi\in[0,\pi]$. Онда $\sqrt{1}=1$ мәнін қабылдап тұрған $\sqrt{z}$ -тің үзіліссіз тармақталуын мына түрде жазуға болады: $\sqrt{z}=e^{i\frac{\varphi}{2}}$, мұндағы $\varphi\in[0,\pi]$. Сонымен берілген интегралды есептеп келесі мәнді аламыз:

$$\int\limits_{\gamma}\frac{1}{\sqrt{z}}dz=\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{e^{i\frac{\varphi}{2}}}d\left(e^{i\varphi}\right)=\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{e^{i\frac{\varphi}{2}}}e^{i\varphi}id\varphi=i\int\limits_0^{\pi}e^{i\frac{\varphi}{2}}d\varphi=$$

$$=i\int\limits_0^{\pi}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi=2i-2.$$

Мысал 4. Берілген $\int\limits_{\gamma}\frac{dz}{\sqrt{z}}$ интегралын есептеу керек, мұндағы интегралдау контуры - басы $z_0=1$ нүктесінде болатын және бағыты сағат тіліне қарсы бағытталған $\left\{\ |z|=1,\quad \operatorname{Im} z>0\right\}$ жарты шеңбер. Үзіліссіз функция $\sqrt{z}$ үшін $\sqrt{1}=-1$ тармағы алынады.

Шешуі: $\sqrt{1}=-1$ мәнін қабылдайтын $\sqrt{z}$ үзіліссіз тармағы мына түрде жазылады: $\sqrt{z} = -e^{i\frac{\varphi}{2}}$, мұндағы $\varphi \in [0, \pi]$. Интегралды есептелік:

$$\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{z}} dz = \int_0^\pi \frac{1}{-e^{i\frac{\varphi}{2}}} d\left(e^{i\varphi}\right) = \int_0^\pi \frac{1}{-e^{i\frac{\varphi}{2}}} e^{i\varphi} i d\varphi = -i\int_0^\pi e^{i\frac{\varphi}{2}} d\varphi =$$

$$= -2\int_0^\pi e^{i\frac{\varphi}{2}} d\left(\frac{i\varphi}{2}\right) = -2\left(e^{i\frac{\pi}{2}} - 1\right) = -2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} - 1\right) = 2 - 2i.$$

Мысал 5. Берілген $|z| = 1$ шеңберінің доғасы бойынша $\int_1^i \frac{\ln z}{z} dz$ интегралын есептеу керек. $\ln 1 = 0$ болатындай етіп үзіліссіз функция $\ln z$ таңдап алынған.

Шешуі: Айталық $z = |z|e^{i\varphi}$ болсын. Онда берілуі бойынша $|z| = 1$ болғандықтан, $z = e^{i\varphi}$. Демек $\ln z = i\varphi,\quad dz = ie^{i\varphi}d\varphi$, ал φ айнымалысы $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ аралығында өзгереді. Енді берілген интегралды есептеп мына жауапты аламыз:

$$\int_1^i \frac{\ln z}{z} dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{i\varphi i e^{i\varphi} d\varphi}{e^{i\varphi}} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi d\varphi = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{4} = -\frac{\pi^2}{8}.$$

§3. Кошидің интегралдық формуласы

Кез келген n үшін $\int_{|z|=1} z^n dz$ интегралын есептегенде интегралдау контуры болып тұрған бірлік шеңберді ішінде нөл нүктесі жататын кез келген шеңбермен ауыстыруға болады. Бұл жағдайда интегралдың мәні сақталады.

Интегралдау контурларын ауыстырғанда интегралдың мәні сақталатын қисықтарды өзара *гомотопты қисықтар* деп атайды. Ішкі нүктесі координаталар бас нүктесі болып тұрған шеңберлер өзара гомотопты.

Айталық $[a,b]\xrightarrow{\varphi_0}\gamma_0$, $[a,b]\xrightarrow{\varphi_1}\gamma_1$ - бұл γ_0 және γ_1 үзіліссіз қисықтарының параметрлік бейнелеулері болсын. $G\subset C$ - ашық жиын және $\gamma_0\subset G,\ \gamma_1\subset G.$

Анықтама. Егер $[a,b]\times[\alpha,\beta]\xrightarrow{\varphi}C$ үзіліссіз бейнелеуі бар болса, онда γ_0 қисығы γ_1 қисығына гомотопты деп айтамыз, мұндағы $[a,b]\subset R$ кесіндісі мына шартты қанағаттандырады:

$$\forall t\in[a,b],\quad \varphi(t,\alpha)=\varphi_0(t),\quad \varphi(t,\beta)=\varphi_1(t).$$

Гомотоптылық анықтамасында $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ тіктөртбұрышының орнына $[0,1]\times[0,1]$ квадратын алуға болады.

Коши теоремасы. G облысында $f(z)$ голоморфты функциясынан γ_0 және γ_1 үзіліссіз қисықтары бойынша алынған интегралдар нөлге тең болады:

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz=\int_{\gamma_1} f(z)dz=0\,.$$

Бұл теоремаға эквивалентті Коши теоремасының басқаша да түрлерін айтуға болады. ∂G арқылы G облысының шекарасын белгілейміз. G - бірбайланысты аймақ болсын.

Коши теоремасы (бір байланысты аймақ үшін). Бір байланысты G аймағында $f(z)$ голоморфты функциясы берілсін. Онда бұл функциядан G аймағында жатқан тұйық Г контуры бойынша алынған интеграл нөлге тең болады.

Бұл теореманы көп байланысты аймаққа жалпылайық:

Коши теоремасы (көп байланысты аймақ үшін). $f(z)$ функциясы сырттан Γ_0 контурымен, ішінде өзара қиылыспайтын $\Gamma_1,\ \Gamma_2,...,\Gamma_n$ контурларымен шектелген көп байланысты G аймағында голоморфты функция болсын және $f(z)$ функциясы тұйықталған G аймағында үзіліссіз болсын. Онда

$$\int_{\Gamma_0} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_K} f(z)dz = 0.$$

Енді Кошидың интегралдық формуласына тоқталайық. $f(z)$ функциясы Г контурымен шектелген бір байланысты G аймағында аналитикалық функция болсын. G аймағының ішінде жатқан Г контурының ішінен z_0 нүктесін алайық. Оң бағыт ретінде Г контурының бойымен қозғалғанда G аймағы сол жақта қалатын бағытты аламыз. Онда $\forall z_0 \in G$ үшін мына теңдік орындалады:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \qquad (3)$$

Бұл Кошидың интегралдық формуласы. Бұл формула $f(z)$ аналитикалық функциясының контурдағы мәні мен контурдың ішіндегі мәнінің арасындағы байланысты көрсетеді. Кошидың интегралдық формуласын қолданып тұйық контур ішіндегі аналитикалық функция мәнін функцияның контурдағы мәні бойынша табуға болады.

Сонымен қатар $f(z)$ функциясының G аймағында кез келген ретті туындысын мына формулалар арқылы табуға болады:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \qquad (4)$$

мұндағы $z_0 \in G,\quad z \in \Gamma,\quad n \in N$ деп есептейміз.

Өзіндік бақылау сұрақтары

1. Гомотопты қисықтар деген не?
2. Коши теоремасы.

3. Бірбайланысты аймақ үшін Коши теоремасы.
4. Көпбайланысты аймақ үшін Коши теоремасы.
5. Кошидің интегралдық формуласы.

Мысал 1. Кошидың интегралдық формуласын қолданып келесі интегралды есептеу керек:

$$\int_{|z|=2} \frac{\sin(iz)}{z^2 - 4z + 3} dz .$$

Шешуі: Интегралдау контуры $|z| = 2$, яғни центрі координаталар бас нүктесінде, ал радиусы 2-ге тең шеңбер. Бұл шеңбер ішінде $z = 1$ ерекше нүктесі жатыр. (Бұл $z = 1$ нүктесінде интеграл астындағы функцияның бөлімі нөлге айналады.) Кошидің интегралдық формуласын қолдана алу үшін интегралды мына түрде жазамыз:

$$\int_{|z|=2} \frac{\sin(iz)}{z^2 - 4z + 3} dz = \int_{|z|=2} \frac{\frac{\sin(iz)}{z-3}}{z-1} dz .$$

Мұнда $z_0 = 1$ және $f(z) = \frac{\sin(iz)}{z-3}$ функциясы $|z| \le 2$ дөңгелегінде аналитикалық функция болады. Сондықтан

$$\int_{|z|=2} \frac{\sin(iz)}{z^2 - 4z + 3} dz = 2\pi i \cdot f(1) = 2\pi i \frac{\sin i}{-2} =$$

$$= -i\pi \cdot \sin i = \pi \cdot sh1.$$

жауабын аламыз.

Мысал 2. Кошидың интегралдық формуласын қолданып келесі интегралды есептеу керек:

$$\int_{|z|=1} \frac{sh\frac{\pi}{2}(z+i)}{z^2 - 2z} dz$$

Шешуі: Интегралдау контуры $|z| = 1$, яғни центрі координаталар бас нүктесінде, ал радиусы 1-ге тең шеңбер. Бұл шеңбер ішінде $z = 0$ ерекше нүктесі жатыр. (Бұл

$z=0$ нүктесінде интеграл астындағы функция нөлге айналады). Интегралды Кошидің интегралдық формуласын қолданып есептеу үшін интегралды мына түрде жазамыз:

$$\int_{|z|=1} \frac{sh\frac{\pi}{2}(z+i)}{z^2-2z}dz = \int_{|z|=1} \frac{\dfrac{sh\frac{\pi}{2}(z+i)}{z-2}}{z}dz.$$

Мұнда $z_0=0$ және $f(z)=\dfrac{sh\frac{\pi}{2}(z+i)}{z-2}$ функциясы $|z|\le 1$ дөңгелегінде аналитикалық функция болады.

$$\int_{|z|=1} \frac{sh\frac{\pi}{2}(z+i)}{z^2-2z}dz = 2\pi i\cdot f(0) = 2\pi i\frac{sh\frac{\pi}{2}i}{-2} =$$

$$= -i\pi i\sin\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Мысал 3. Кошидың интегралдық формуласын қолданып келесі интегралды есептеу керек:

$$\int_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16}.$$

Шешуі: Интегралдау контурының ішінде екі ерекше нүкте бар: $z_1=4i,\quad z_2=-4i$. Ондай жағдайда центрлері $z_1=4i,\quad z_2=-4i$ нүктелерінде жатқан, радиустары жеткілікті кіші болатын γ_1 және γ_2 шеңберлерін сызамыз, бірақ бұл шеңберлер бір-бірімен қиылыспау керек және екеуі де $|z|\le 5$ дөңгелегінің ішінде жату керек. $|z|=5$ шеңберімен және γ_1 мен γ_2 шеңберлерімен шектелген үшбайланысты облыста $f(z)=\dfrac{1}{z^2+16}$ функциясы аналитикалық функция болады.

Көпбайланысты аймақ үшін Коши теоремасы бойынша

$$\int\limits_{|z|=5}\frac{dz}{z^2+16}=\int\limits_{\gamma_1}\frac{dz}{z^2+16}+\int\limits_{\gamma_2}\frac{dz}{z^2+16}.$$

Теңдіктің оң жағындағы әрбір интегралға Кошидың интегралдық формуласын қолданып интегралдарды есептейміз:

$$\int\limits_{|z|=5}\frac{dz}{z^2+16}=\int\limits_{\gamma_1}\frac{\frac{1}{z+4i}}{z-4i}dz+\int\limits_{\gamma_2}\frac{\frac{1}{z-4i}}{z+4i}dz=$$

$$=2\pi i\frac{1}{z+4i}\bigg|_{z=4i}+2\pi i\frac{1}{z-4i}\bigg|_{z=-4i}=\frac{2\pi i}{8i}(1-1)=0.$$

Мысал 4. Келесі интегралды есептеу керек:

$$\int\limits_{|z-1|=1}\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{(z-1)^2(z-3)}dz$$

Шешуі: Интеграл астындағы функция $\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}z}{(z-1)^2(z-3)}$ берілген $|z-1|\le 1$ дөңгелегінде $z_0=1$ нүктесінен басқа нүктелерде аналитикалық функция болады. Сондықтан берілген $|z-1|\le 1$ дөңгелегінде аналитикалық функция болып тұрған интеграл астында $f(z)$ функциясын бөліп аламыз. Ол үшін интеграл астындағы функцияны мына

түрде жазамыз: $\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}z}{(z-1)^2(z-3)}=\dfrac{\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-3}}{(z-1)^2}$,

ал $f(z)$ функциясы ретінде $\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-3}$ функциясын аламыз.
(4)-ші формуланы қолданып,

$$\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0) \qquad (5)$$

екенін білеміз. (5)-ші формулада берілген интегралда $n=1$ деп есептеп,

$$\int_{|z-1|=1}\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{(z-1)^2(z-3)}dz=2\pi i f'(1)$$

теңдігін аламыз.

Туындыны табайық:

$$f'(z)=\left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-3}\right)'=\frac{\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}z\cdot(z-3)-\sin\frac{\pi}{4}z}{(z-3)^2}.$$

Бұдан $f'(1)=\dfrac{\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(-2)-\frac{1}{\sqrt{2}}}{4}=-\dfrac{(\pi+2)}{8\sqrt{2}}$. Ал берілген интегралдың мәні $2\pi i\cdot f'(1)=-\dfrac{\sqrt{2}(\pi+2)}{8}\pi\cdot i$.

Мысал 5. Келесі интегралды есептеу керек:

$$\int_{|z|=2}\frac{z\cdot shz}{(z^2-1)^2}dz$$

Шешуі: Интегралдау контурының $|z|=2$ ішінде екі ерекше нүкте бар: $z_1=1,\ z_2=-1$. Ондай жағдайда центрлері $z_1=1,\ z_2=-1$ нүктелерінде жатқан, радиустары жеткілікті кіші болатын γ_1 және γ_2 шеңберлерін сызамыз, бірақ бұл шеңберлер бір-бірімен қиылыспау керек және екеуі де $|z| \le 2$ дөңгелегінің ішінде жату керек.

$|z| = 2$ шеңберімен және γ_1 мен γ_2 шеңберлерімен шектелген үшбайланысты облыста $f(z) = \dfrac{z \cdot shz}{\left(z^2 - 1\right)^2}$ функциясы аналитикалық функция болады.

Көпбайланысты аймақ үшін Коши теоремасы бойынша

$$\int_{|z|=2} \frac{z \cdot shz}{\left(z^2-1\right)^2} dz = \int_{\gamma_1} \frac{z \cdot shz}{\left(z^2-1\right)^2} dz + \int_{\gamma_2} \frac{z \cdot shz}{\left(z^2-1\right)^2} dz \qquad (6)$$

Теңдіктің оң жағындағы әрбір интегралға (5) формуласын қолданып интегралдарды есептейміз. Ол үшін алдымен оң жақта тұрған бірінші интегралдың астындағы функцияны келесі түрде жазамыз:

$$\frac{z \cdot shz}{\left(z^2-1\right)^2} = \frac{\dfrac{z \cdot shz}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}.$$

Бөлшектің алымында тұрған $\dfrac{z \cdot shz}{(z \ \ +1)^2}$ функция γ_1 -дің ішінде аналитикалық функция болады. Сондықтан (5)-ті қолданып интегралды есептейміз:

$$\int_{\gamma_1} \frac{z \cdot shz}{\left(z^2-1\right)^2} dz = \int_{\gamma_1} \frac{\dfrac{z \cdot shz}{(z+1)^2}}{(z-1)^2} dz = 2\pi \cdot i \left(\frac{z \cdot shz}{(z+1)^2} \right)' \Bigg|_{z=1} =$$

$$= 2\pi \cdot i \frac{(shz + zchz)(z+1)^2 - z \cdot shz \cdot 2(z+1)}{(z+1)^4} \Bigg|_{z=1} = 2\pi \cdot i \frac{ch1}{4}.$$

(6)-шы теңдіктің оң жағындағы екінші интегралды есептейік. Ол үшін алдымен интеграл астындағы функцияны келесі түрде жазамыз:

$$\frac{z\cdot shz}{\left(z^2-1\right)^2}=\frac{\dfrac{z\cdot shz}{(z-1)^2}}{(z+1)^2}.$$

Бөлшектің алымында тұрған $\dfrac{z\cdot shz}{(z\ \ -1)^2}$ функция γ_2 -нің ішінде аналитикалық функция болады. Сондықтан (5)-формуланы қолданып интегралды есептейміз:

$$\int\limits_{\gamma_2}\frac{z\cdot shz}{\left(z^2-1\right)^2}dz=\int\limits_{\gamma_2}\frac{\dfrac{z\cdot shz}{(z-1)^2}}{(z+1)^2}dz=2\pi\cdot i\left(\frac{z\cdot shz}{(z-1)^2}\right)'\Bigg|_{z=-1}=$$

$$=2\pi\cdot i\frac{(shz+zchz)(z-1)^2-z\cdot shz\cdot 2(z-1)}{(z-1)^4}\Bigg|_{z=-1}=-2\pi i\frac{ch1}{4}.$$

Сонымен берілген интегралдың мәні:

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{z\cdot shz}{\left(z^2-1\right)^2}dz=2\pi\cdot i\left(\frac{ch1}{4}-\frac{ch1}{4}\right)=0.$$

Мысал 6. Келесі интегралды есептеу керек:

$$\int\limits_{|z-3|=6}\frac{zdz}{(z-2)^3(z+4)}$$

Шешуі: Интеграл астындағы функция $\dfrac{z}{(z-2)^3(z+4)}$ берілген $|z-3|\le 6$ дөңгелегінде $z_0=2$ нүктесінен басқа нүктелерде аналитикалық функция болады. Сондықтан берілген $|z-3|\le 6$ дөңгелегінде аналитикалық функция болып тұрған интеграл астындағы $f(z)$ функциясын бөліп аламыз. Ол үшін интеграл астындағы функцияны мына түрде жазамыз:

$$\frac{z}{(z-2)^3(z+4)}=\frac{\frac{z}{z+4}}{(z-2)^3}$$

ал $f(z)$ функциясы ретінде $\frac{z}{z+4}$ функциясын аламыз. (5)-ші формулада берілген интегралда $n=2$ деп есептеп,

$$\int\limits_{|z-3|=6}\frac{z}{(z-2)^3(z+4)}dz=\frac{2\pi i}{2!}f''(2) \qquad (7)$$

теңдігін аламыз.

Алдымен бірінші туындыны табайық:

$$f'(z)=\left(\frac{z}{z+4}\right)'=\frac{4}{(z+4)^2}.$$

Енді екінші туындыны табамыз:

$$f''(z)=-\frac{8}{(z+4)^3}, \text{ бұдан } f''(2)=-\frac{1}{27}.$$

Сонымен берілген интегралдың жауабын (7) бойынша аламыз:

$$\int\limits_{|z-3|=6}\frac{zdz}{(z-2)^2(z+4)}=\frac{2\pi\cdot i}{2!}\left(-\frac{1}{27}\right)=\frac{-i\pi}{27}.$$

Өзіндік жұмысқа жаттығулар

1. $\int\limits_L tg\,z\,d.$ интегралын есептеу керек, мұндағы L: $y=x^2$ параболасының $z_1=0$, $z_2=1+i$ нүктелерін қосатын доға.

Жауабы: $-\ln\sqrt{\cos^2 1+sh^2 i}+iarctg(tg1\cdot thi)$.

2. $\int\limits_L |z|\cdot\bar{z}dz$ интегралын есептеу керек, мұндағы L: $|z|=1$ шеңберінің жоғарғы бөлігі.

Жауабы: $2i\pi$

3. $\int\limits_L \left(1+i-2\bar{z}\right)dz$ интегралын есептеу керек, мұндағы L: $z_1 = 0,\ z_2 = 1+i$ нүктелері арасындағы кесінді.

Жауабы: $2(i-1)$.

4. $\int\limits_L z^2 dz$ интегралын есептеу керек, мұндағы L: $z_1 = 1,\ z_2 = i$

Жауабы: $-\frac{1}{3}(1+i)$.

5. $\int\limits_L \operatorname{Re} z dz$ интегралын есептеу керек, мұндағы L: $|z| = 1$ шеңберінің жоғарғы бөлігі.

Жауабы: $\frac{i\pi}{2}$

6. $\int\limits_L \frac{\sin \pi z}{\left(z^2-1\right)^2} dz$ интегралын есептеу керек, мұндағы L: $|z-1| = 1$**.**

Жауабы: $\frac{\pi}{4}$**.**

7. $\int\limits_L \frac{e^z}{z^3(z-1)} dz$ интегралын есептеу керек, мұндағы L: $(x-2)^2 + y^2 = 9$**.**

Жауабы: $i\pi(2e-5)$**.**

8. $\int\limits_L \frac{e^z}{z-2i} dz$ интегралын есептеу керек, мұндағы L: $|z| = 1$.

Жауабы: 0.

9. $\int\limits_L \frac{\sin z}{(z+i)^3} dz$ интегралын есептеу керек, мұндағы L: $|z+i| = 1$.

Жауабы: $-\pi shi$.

10. $\int\limits_L \frac{dz}{(z-1)^3(z++1)^3}$ интегралын есептеу керек, мұндағы L: $|z-i|=1$.

Жауабы: $\frac{3\pi i}{8}$.

11. $\int\limits_\gamma \frac{dz}{z-(1+i)}$ интегралын есептеу керек, мұндағы γ: $|z-(1+i)|=1$ шеңбері.

Жауабы: $2\pi i$.

12. $\int\limits_\gamma \frac{2z-1-i}{(z-1)(z-i)}dz$ интегралын есептеу керек, мұндағы γ: $|z|=2$ шеңбері.

Жауабы: $4\pi i$.

13. $\int\limits_0^i z\sin z dz$ интегралын есептеу керек.

Жауабы: $i(shi-chi)$.

14. $\int\limits_\gamma \frac{dz}{z^2}$ интегралын есептеу керек, мұндағы γ: $(x-4)^2+(y-3)^2=1$ шеңбері.

Жауабы: 0.

15. $\int\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz$ интегралын есептеу керек.

Жауабы: $\frac{e^{36}-1}{3}\pi i$.

16. $\int\limits_{L}\frac{dz}{z^2+9}$ интегралын есептеу керек, егер $z=3i\in L,\;\; z=-3i\notin L$.

Жауабы: $\frac{\pi}{3}$**.**

17. $\int\limits_{L}\frac{(a+b)z-az_1-az_2}{(z-z_1)(z-z_2)}dz$ интегралын есептеу керек, мұндағы L: $|z|=R$ шеңбері, ал z_1, z_2 бұл шеңбермен шектелген дөңгелектің ішіндегі нүктелер, $z_1\neq z_2$.

Жауабы: $2\pi i(a+b)$**.**

19. $\int\limits_{|z-1|=1}\frac{dz}{(z-1)^3(z+1)^3}$ интегралын есептеу керек.

Жауабы: $\frac{3\pi i}{8}$**.**

20. $\int\limits_{|z|=4}\frac{\cos z dz}{z^2-\pi^2}$ интегралын есептеу керек.. **Жауабы:** 0.

21. $\int\limits_{|z-a|=a}\frac{zdz}{z^4-1}$ интегралын есептеу керек, мұндағы $a>1$.

Жауабы: $\frac{\pi i}{2}$**.**

22. $\int\limits_{|z-1|=1/2}\frac{e^{iz}}{(z-1)^2}dz$ интегралын есептеу керек.

Жауабы: $\frac{1+i}{2}e^{i}$**.**

23. $\int\limits_{|z|=1}(z^2+z\bar{z})dz,\;\; 0\le\arg z\le\pi$ интегралын есептеу керек.

Жауабы: $-\frac{8}{3}$.

IV. КОМПЛЕКС ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ ҚАТАРЛАР, ОҚШАУЛАНҒАН НҮКТЕЛЕР ЖӘНЕ ШЕГЕРІМДЕР

§1. Дәрежелік қатарлар

Алдымен комплекс жазықтықтағы қатарларға тоқталайық. Айталық $z_n = x_n + y_n$ болсын, онда келесі қатар комплекс мүшелі қатар болады:

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \,. \tag{1}$$

(1) қатарды мына

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \tag{2}$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \tag{3}$$

түрде жазсақ, онда (1) қатар жинақты болу үшін (2) және (3) қатарлары жинақты болуы қажетті және жеткілікті.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ қатары, мұндағы $f_n(z) = a_n (z - z_0)^n,\ n \in N,\ a_n \in C,$ $z_0 \in C,\ z \in C$ *дәрежелік қатар* деп аталады. Бұл қатардың дербес қосындылары алгебралық көпмүшеліктер, сондықтан

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{4}$$

қатарының қосындысын көпмүшелік ұғымының жалпылануы деуге болады. Дәрежелік қатардың мүшелері C комплекс жазықтығында аналитикалық функциялар. Кез келген $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ дәрежелік қатар үшін бұл қатар $|z - z_0| < R$ дөңгелектің ішінде жинақталатын, ал бұл дөңгелектің сыртында жинақталмайтын болатындай R мәні табылады. Бұл R саны дәрежелік қатардың *жинақталу радиусы* деп, ал $|z - z_0| < R$ дөңгелегі *жинақталу дөңгелегі* деп аталады.

$|z - z_0| = R$ шеңберінде, яғни дөңгелектің шекарасында катар жинақты да, жинақсыз да болуы мүмкін. Қатардың жинақталу радиусы $0 \le R \le +\infty$. Дәрежелік қатардың жинақталу радиусын табу үшін

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{5}$$

немесе

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} \tag{6}$$

формулаларын қолдануға болады. (6)- формуланы *Коши – Адамар формуласы* деп атайды.

Жалпы айтқанда $z = z_0$ нүктесінде бірмәнді және аналитикалық $f(z)$ функциясы бұл нүктенің маңайында келесі *Тейлор қатарына* жіктеледі:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n ,$$

мұндағы a_n коэффициенттері келесі формулалармен анықталады:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, n = 0,1,2,... \tag{7}$$

(7) формулалардағы L- центрі z_0 нүктесінде болатын шеңбер. Бұл L шеңбері (7) формулада интеграл астындағы функцияның ерекше нүктесі арқылы өтеді. Қатардың жинақтылық радиусы R z_0 центрінен оған функцияның ең жақын ерекше нүктесіне дейінгі арақашықтыққа тең болады.

Берілген функцияны $z_0 = 0$ нүктесінің маңайында Тейлор қатарына жіктеу үшін келесі белгілі формулаларды қолдануға болады:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^n + ... \qquad (R = 1), \tag{8}$$

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\ldots+(-1)^{n-1}z^{n-1}+\ldots \quad (R=1), \qquad (9)$$

$$(1+z)^{\alpha}=1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\ldots \quad (R=1), \qquad (10)$$

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\ldots \quad (R=1), \qquad (11)$$

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots \quad (R=\infty) \qquad (12)$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots \quad (R=\infty) \qquad (13)$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots \quad (R=\infty) \qquad (14)$$

(11) формула логарифмнің басты мәнінің $z_0=0$ нүктесінің маңайында Тейлор қатарына жіктелуін береді. Ал көпмәнді $Ln(1+z)$ функциясының Тейлор қатарына жіктелуін алу үшін (11) қатарына $2\pi ni,\quad n=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$, сандарын қосу керек.

§2. Лоран қатары

Функционалдық қатарлар ішінде дәрежелік қатарлардан бөлек, бірақ дәрежелік қатарларға жақын келесі түрдегі қатарлар да бар: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(z-z_0)^n}$. Оның жинақталу аймағы радиусы $r=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$, центрі z_0 нүктесі болатын дөңгелектің сырты.

Егер $r<\infty$ болса, онда қатар $D=\{z\in C:\ |z-z_0|>r\}$ аймағында абсолют жинақты болады. Қатар қосындысы болатын f функциясы D аймағында аналитикалық функция.

Лоран теремасы. Егер f функциясы $r < |z - z_0| < R$ сақинасында аналитикалық болса, онда оны осы сақинада жинақты қатардың қосындысы ретінде былайша жіктеуге болады:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{15}$$

(15) қатардың коэффициенттері a_n мына формулалармен анықталады:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

мұндағы Γ: $r < |z - z_0| < R$ сақинасы. (15) қатар $r < |z - z_0| < R$ сақинасында анықталған *Лоран қатары* деп аталады. (15) қатар екі әртүрлі қатардан тұрады: біріншісі $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ кәдімгі дәрежелік қатар және оның жинақталу аймағы $|z - z_0| < R$, мұндағы $\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$; екінші қатар $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$, егер $z' = \frac{1}{z - z_0}$ деп алсақ, бұл да дәрежелік қатар болады. Екінші қатардың жинақталу аймағы радиусы $r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{-n}|}$ болатын дөңгелектің сырты. Егер $r > R$ болса, онда (15) қатар жинақсыз болады. Ал егер $r < R$ болса, онда (15) қатар $r < |z - z_0| < R$ сақинада жинақты болады, мұндағы $r \geq 0$, $0 < R < +\infty$.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ қатары Лоран қатарының *дұрыс бөлігі* деп аталады, ал $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$ қатары Лоран қатарының *басты бөлігі* деп аталады.

Лоран қатарының дұрыс бөлігінің радиусын табу үшін $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ формуласын қолданамыз. Лоран қатарының басты бөлігінің радиусын табу үшін $r = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_{-n}|} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{-n-1}}{a_{-n}}\right|$ формуласын қолданамыз

Өзіндік бақылау сұрақтары

1. Дәрежелік қатардың жазылуы.
2. Дәрежелік қатардың жинақталу радиусы және жинақталу дөңгелегі.
3. Коши-Адамар формуласы.
4. Негізгі жіктелу формулалары.
5. Лоран қатары дегеніміз не?
6. Лоран теоремасы.
7. Лоран қатарының дұрыс және басты бөліктері.

Мысал 1. Келесі дәрежелік қатардың жинақталу радиусын табу керек:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{n}} z^n .$$

Шешуі: Берілуі бойынша $a_n = e^{i\frac{\pi}{n}} = \cos\dfrac{\pi}{n} + i\sin\dfrac{\pi}{n}$ екені белгілі. Жинақталу радиусын табу үшін (6)-формуланы қолданамыз.

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = 1.$$

Сонымен берілген қатардың жинақталу радиусы $R = 1$.

Мысал 2. Келесі дәрежелік қатардың жинақталу радиусын табу керек:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{1-i}\right)^n$$

Шешуі: Берілуі бойынша $a_n = \left(\frac{1}{1-i}\right)^n$. Жинақталу радиусын табу үшін (6)- формуланы қолданалық:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[n]{|1-i|^n}} = \frac{1}{|1-i|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Сонымен берілген қатардың жинақталу радиусы $R = \sqrt{2}$ болды.

Мысал 3. Келесі дәрежелік қатардың жинақталу радиусын табу керек:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos in \cdot z^n.$$

Шешуі: Берілуі бойынша $a_n = \cos in = \frac{e^{-n} + e^n}{2} = ch n.$

Жинақталу радиусын табу үшін (5)-формуланы қолданалық:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n} + e^n}{e^{-n-1} + e^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^n\left(1+e^{-2n}\right)}{e^{n+1}\left(1+e^{-2n-2}\right)} = \frac{1}{e}.$$

Сонымен берілген қатардың жинақталу радиусы $R = \frac{1}{e}$.

Мысал 4. Берілген $z_0 = 0$ нүктесінің маңайында $f(z) = \frac{z+1}{z^2 + 4z - 5}$ функциясын Тейлор қатарына жіктеу керек.

Шешуі: Берілген функцияны қарапайым бөлшектерге жіктейміз:

$$\frac{z+1}{z^2+4z-5} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5+z} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-z}.$$

Теңдіктің оң жағын келесі түрде жазамыз:

$$f(z)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5\left(1+\frac{z}{5}\right)}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-z}.$$

(8) және (9) жіктелулерді қолданып, былай жаза аламыз (төмендегі бірінші жіктеу $\left|\frac{z}{5}\right|<1$, екіншісі $|z|<1$ үшін жазылған):

$$f(z)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}\left(1-\frac{z}{5}+\left(\frac{z}{5}\right)^2-\left(\frac{z}{5}\right)^3+\left(\frac{z}{5}\right)^4-\ldots\right)-$$

$$-\frac{1}{3}\left(1+z+z^2+z^3+z^4+\ldots\right)=-\frac{1}{5}-\frac{9}{25}z-\frac{41}{125}z^2-\ldots$$

$|z|<5$ және $|z|<1$ теңсіздіктер жүйесінің шешімі $|z|<1$. Сондықтан қатардың жинақталу радиусы $R=1$.

Мысал 5. Келесі $f(z)=\sin(2z+1)$ функциясын Тейлор қатарына $(z+1)$ - дің дәрежелері ретінде жіктеу керек.

Шешуі: Берілген функцияны мына түрде жазалық:

$$\sin(2z+1)=\sin[2(z+1)-1]=$$
$$=\sin 2(z+1)\cdot\cos 1-\cos 2(z+1)\cdot\sin 1.$$

(13) және (14) жіктелулерді қолдансақ:

$$f(z)=2(z+1)\cdot\cos 1-\frac{2^3(z+1)^3}{3!}\cos 1+\frac{2^5(z+1)^5}{5!}\cos 1-\ldots-$$

$$-\sin 1+\frac{2^2(z+1)^2}{2!}\sin 1-\frac{2^4(z+1)^4}{4!}\sin 1+\ldots=$$

$$=-\sin 1+2(z+1)\cdot\cos 1+\frac{2^2(z+1)^2}{2!}\sin 1-\frac{2^3(z+1)^3}{3!}\cos 1-$$

$$-\frac{2^4(z+1)^4}{4!}\sin 1+\frac{2^5(z+1)^5}{5!}\cos 1-\ldots$$

Қатардың жинақталу радиусы $R=\infty$.

Мысал 6. Берілген $z_0 = 0$ нүктесінің маңайында $f(z) = \ln(2 - z)$ функциясын Тейлор қатарына жіктеу керек.

Шешуі: Айталық ізделінді қатар мына түрде болсын:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

(7) - формула бойынша, мұндағы $a_n = \dfrac{f^n(z_0)}{n!}$, $n = 0,1,2,\dots$

және $f^{(0)}(0) = f(0) = 0$.

$z_0 = 0$ нүктесіндегі $f^{(n)}(z)$ туындыларды табу үшін берілген функцияны дифференциалдаймыз:

$$f'(z) = -\left.\frac{1}{2 - z}\right|_{z=0} = -\frac{1}{2},$$

$$f''(z) = -\left.\frac{1}{(2 - z)^2}\right|_{z=0} = -\frac{1}{4},$$

$$f'''(z) = -\left.\frac{2}{(2 - z)^3}\right|_{z=0} = -\frac{1}{4},$$

Сонымен $a_0 = \ln(2 - z)\big|_{z=0} = \ln 2$ болғандықтан, берілген функцияның Тейлор қатарына жіктелуін жазуға болады:

$$\ln(2 - z) = \ln 2 - \frac{1}{2} z - \frac{1}{4} \cdot \frac{z^2}{2!} - \frac{1}{4} \cdot \frac{z^3}{3!} - \dots =$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2} z - \frac{1}{8} z^2 - \frac{1}{24} z^3 - \dots$$

Берілген функцияның ерекше нүктесінің $z_0 = 0$ нүктесіне жақын жатқаны $z = 2$. Сондықтан қатардың жинақталу радиусы $R = 2$.

Екінші әдіс: $\ln(2 - z) = \ln 2\left(1 - \dfrac{z}{2}\right) = \ln 2 + \ln\left(1 - \dfrac{z}{2}\right)$. Одан кейін (11)-формула бойынша $|z| < 2$ үшін

$$\ln(2-z) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-z)^n}{2^n \cdot n} = \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n \cdot 2^n}.$$

Мысал 7. Қатардың жинақталу аймағын табу керек

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n(z-2+i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty}(1+in)(z-2+i)^n .$$

Шешуі:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n(z-2+i)^n}$ қатары үшін $a_{-n} = \frac{1}{n^n}$. Онда жинақталу радиусы $r = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_{-n}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ болады. Дәрежелік қатар $\sum_{n=0}^{\infty}(1+in)(z-2+i)^n$ үшін $a_n = 1+in$. Онда оның жинақталу радиусы

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+in}{1+i(n+1)}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+n^2}{1+(n+1)^2}} = 1.$$

Сонымен $r = 0,\ R = 1$ екені белгілі болды. Берілген қатардың жинақталу аймағы $0 < |z-2+i| < 1$, мұндағы $z_0 = 2-i$.

Мысал 8. Берілген $f(z) = \frac{2z+3}{z^2+3z+2}$ функциясын Лоран қатарына $1 < |z| < 2$ сақинада жіктеу керек.

Шешуі: Функцияның ерекше екі нүктесі бар: $z_1 = -2,\ z_2 = -1$. Олар $1 < |z| < 2$ сақинаға тиісті емес. Сондықтан берілген функцияны осы сақинада Лоран қатарына жіктеуге болады.

$$f(z)=\frac{2z+3}{z^2+3z+2}=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z+1}=\frac{1}{2\left(1+\frac{z}{2}\right)}+\frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}-\frac{z^3}{2^3}+\frac{z^4}{2^4}-...\right)+\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}-...\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n}.$$

Мысал 9. Берілген $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z}$ функциясын Лоран қатарына $z_0=0$ нүктесінің маңайында жіктеу керек.

Шешуі: Берілген функцияға дәрежені төмендету формуласын қолданып $\dfrac{\sin^2 z}{z}=\dfrac{1-\cos 2z}{2z}$ түрінде жазамыз. Енді (14) - формуланы қолданып келесі өрнекті аламыз:

$$\frac{\sin^2 z}{z}=\frac{1-\cos 2z}{2z}=\frac{1}{2z}-\frac{1}{2z}\left(1-\frac{(2z)^2}{2!}+\frac{(2z)^4}{4!}-\frac{(2z)^6}{6!}+...\right)=$$

$$=\frac{2}{2!}z-\frac{8}{4!}z^3+\frac{32}{6!}z^5-...$$

Сонымен бұл жіктелуде Лоран қатарының дұрыс бөлігі ғана бар.

Мысал 10. Берілген $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$ функциясын Лоран қатарына $z_0=0$ нүктесінің маңайында жіктеу керек.

Шешуі: Бұл жіктелуде (14) - формуланы қолданамыз:

$$z^3e^{\frac{1}{z}}=z^3\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2\cdot 2!}+\frac{1}{z^3\cdot 3!}+...+\frac{1}{z^n\cdot n!}+...\right)=$$

$$=z^3+z^2+\frac{1}{2!}z+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z^2}+\frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{z^3}+...$$

Сонымен бұл жіктелуде соңғы жолдағы алғашқы төрт қосылғыш Лоран қатарының дұрыс бөлігі, ал қалған қосылғыштар Лоран қатарының басты бөлігі болады.

Мысал 11. Берілген $f(z)=\dfrac{1}{(z+2)(1+z^2)}$ функциясын Лоран қатарына а) $1<|z|<4$ сақинада және

б) $4<z<+\infty$ аймағында жіктеу керек.

Шешуі: Алдымен а) жағдайын қарастырайық. Функцияның ерекше нүктелері үшеу: $z_1=-2,\ z_2=-i,$ $z_3=i$. Бірақ $z=-2$ ерекше нүктесі $1<|z|<4$ сақинада жатыр, сондықтан $f(z)=\dfrac{1}{(z+2)(1+z^2)}$ функциясы бұл сақинада Лоран қатарына жіктелмейді.

Енді б) жағдайына тоқталамыз.

Берілген функцияны келесі түрде жазайық:

$$\frac{1}{(z+2)(1+z^2)}=\frac{A}{z+2}+\frac{Bz+C}{1+z^2}.$$

Белгісіз $A,\ B,\ C$ коэффициенттерін іздеп, $A=\dfrac{1}{5},\ B=-\dfrac{1}{5},$ $C=\dfrac{2}{5}$ болатынын көреміз. Бұл коэффициенттерді орнына қойып

$$\frac{1}{(z+2)(1+z^2)}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z+2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{z-2}{1+z^2}$$

өрнегіне келеміз. Функцияны қай аймақта жіктеу керектігін еске ала отырып былай жаза аламы:

$$f(z)=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{z+2}-\frac{z-2}{1+z^2}\right)=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{z\left(1+\frac{2}{z}\right)}+\frac{2-z}{z^2\left(1+\frac{1}{z^2}\right)}\right]=$$

$$=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}-\frac{2^3}{z^3}+\ldots\right)+\left(\frac{2}{z^2}-\frac{1}{z}\right)\left(1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}-\ldots\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{z}-\frac{2}{z^2}+\frac{2^2}{z^3}-\frac{2^3}{z^4}+\frac{2^4}{z^5}-\frac{2^5}{z^6}+\ldots\right.$$

$$\left.-\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{1}{z^3}-\frac{2}{z^4}-\frac{1}{z^5}+\frac{2}{z^6}+\frac{1}{z^7}-\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{2^2+1}{z^3}-\frac{2^3+2}{z^4}+\frac{2^4-1}{z^5}-\frac{2^5-2}{z^6}+\frac{2^6+1}{z^7}-\frac{2^7+2}{z^8}+\ldots\right).$$

§3. Оқшауланған ерекше нүктелер

Анықтама. Егер $a\in C$ нүктесінің ойылған маңайы табылып, яғни ішкі радиусы нөл болатын сақина табылып f функциясы сақинада аналитикалық функция болса, онда $a\in C$ нүктесі f функциясының *оқшауланған ерекше нүктесі* деп аталады.

Айталық, $z=a\in C$ нүктесі f функциясының оқшауланған ерекше нүктесі болсын. f функциясының $r<|z-z_0|<R$ сақинасында Лоран қатарына жіктелуін қарастырайық:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n \qquad (1)$$

Осы жіктелуге байланысты оқшауланған ерекше нүктелердің үш түрін анықтауға болады:

1) Егер (1) жіктелуде Лоран қатарының басты бөлігі болмаса, онда $z=a$ нүктесі f функциясының *жөнделетін ерекше нүктесі* деп аталады.

2) Егер (1) жіктелуде Лоран қатарының басты бөлігінің саны ақырлы болса, онда $z=a$ нүктесі f функциясының

полюсі деп аталады. Бұл жағдайда $c_{-1}=c_{-2}=...=c_{-(n-1)}=0$, ал $c_{-n}\neq 0$ болса, онда n саны *полюстің реті* болады. Бірінші ретті полюсті жай полюс деп атайды.

3) Егер (1) жіктелуде Лоран қатарының басты бөлігінің шексіз көп мүшесі болса, онда $z=a$ нүктесі f функциясының *елеулі ерекше нүктесі* деп аталады.

Мысал: $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ функциясы $0<|z|<\infty$ аймағында аналитикалық болады. Оның жіктелуі келесі формуламен анықталады:

$$\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\frac{z^8}{9!}-...$$

Бұл жіктелуде Лоран қатарының басты бөлігі жоқ, сондықтан $z=0$ нүктесі f функциясының жөнделетін ерекше нүктесі.

Мысал: $f(z)=\dfrac{1}{z^2+4}$ функциясының екі ерекше нүктесі бар: $z_1=2i,\ z_2=-2i$. Функцияны z_1 нүктесінің ойылған $0<|z-2i|<4$ маңайында Лоран қатарына жіктейік:

$$\frac{1}{z^2+4}=-\frac{i}{4(z-2i)}+\frac{i}{4(z+2i)}=-\frac{i}{4(z-2i)}+\frac{i}{16\left(1+\dfrac{z-2i}{4i}\right)}=$$

$$=-\frac{i}{4(z-2i)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{4^{n+2}}(z-2i)^n.$$

$z=2i$ нүктесі f функциясының жай полюсі. Осыған ұқсас f функциясының z_2 нүктесінің $0<|z+2i|<4$ ойылған маңайында Лоран қатарына жіктелуін қарастырып, $z=-2i$ нүктесі f функциясының жай полюсі екенін көреміз.

Мысал: $f(z) = \sin\frac{1}{z-1}$ функциясы $0 < |z-1| < \infty$ ойылған маңайда аналитикалық функция болады. Оның Лоран қатарына жіктелуі келесі формуламен анықталады:

$$\sin\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!(z-1)^3} + \dots$$

$z = 1$ нүктесі f функциясының елеулі ерекше нүктесі.

Аналитикалық функцияның окшауланған ерекше нүкте маңайындағы өзгеріс сипатына қарап та олардың қандай оқшауланған ерекше нүкте екенін білуге болады.

Теорема (*жөнделетін ерекше нүкте*). Айталық $z = a$ нүктесі f функциясының окшауланған ерекше нүктесі болсын. Егер $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ шегінің ақырлы шегі бар болса, онда a -жөнделетін ерекше нүкте.

Теорема (*полюс критерийі*). f функциясының $z = a$ оқшауланған ерекше нүктесі полюс болу үшін $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ шегі шексіздікке ұмтылуы қажетті және жеткілікті.

Теорема (*елеулі ерекше нүкте критерийі*). f функциясының $z = a$ оқшауланған ерекше нүктесі елеулі ерекше нүкте болу үшін $z \to a$ ұмтылғанда f функциясының шегі болмауы қажетті және жеткілікті.

Аналитикалық функцияның нөлдері (функцияның нөлге айналатын нүктелері) де маңызды орын алады. Егер f функциясы үшін келесі шарттар орындалса $f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0$,

онда z_0 нүктесін $f(z)$ функциясының $n -$ *ші ретті нөлі* дейміз.

Егер $n = 1$ болса, онда z_0 нүктесін $f(z)$ функциясының *жай нөлі* деп атайды.

Функцияның нөлі мен полюсінің арасында байланыс бар.

Егер z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының $n-$ші ретті нөлі болса, онда z_0 нүктесі

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$$

функциясы үшін $n-$ші ретті полюс болады және керісінше.

Тұжырым. $f(z)$ функциясының z_0 нүктесі полюс болу үшін бұл нүкте $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$ функциясы үшін нөл болуы керек.

§4. Функциялардың шегерімдері

Анықтама. f аналитикалық функциясының $z=a\in C$ оқшауланған нүктесінің маңайында Лоран қатарына жіктелудегі теріс бірінші дәреженің коэффициенті c_{-1} осы f функциясының оқшауланған нүктедегі *шегерімі* деп аталады.

Шегерімді мына түрде $c_{-1}=\underset{a}{res}\,f(z)$ немесе $c_{-1}=resf(a)$ белгілейді. (Шегерімнің белгіленуі француз сөзі *residu* деген сөзден алынған).

Лоран қатарының коэффициенттері үшін

$$\underset{a}{res}\,f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}f(z)dz \qquad (2)$$

теңдігі орындалады, мұндағы $\gamma-$жалғыз ғана $z=a$ оқшауланған нүктесін қамтитын кез келген тұйық контур.

Егер $z=a$-жөнделетін ерекше нүкте болса, онда $\underset{a}{res}\,f(z)=0$. Егер $z=a$-бірінші ретті полюс болса, онда $\underset{a}{res}\,f(z)\neq 0$. Басқа жағдайларда $\underset{a}{res}\,f(z)$ нөлге тең болуы да, болмауы да мүмкін, мысалы

$$\underset{0}{res}\frac{\sin z}{z}=0,\quad \underset{2}{res}\frac{1}{z-2}=1,\quad \underset{0}{res}\,e^{\frac{1}{z^2}}=0.$$

Айталық, $z=a$ нүктесі f функциясының p - ретті полюсі болсын. f функциясының Лоран қатарына $z=a$ нүктесінің ойылған маңайында жіктелуі келесі түрде жазылады:

$$f(z)=\frac{c_{-p}}{(z-a)^p}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-a}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n.$$

Осыдан

$$f(z)(z-a)^p=c_{-p}+c_{-p+1}(z-a)+\ldots+c_{-1}(z-a)^{p-1}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^{n+p}$$

өрнегін аламыз.

$$\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}\left(f(z)(z-a)^p\right)=c_{-1}(p-1)!+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+p)\cdot\ldots\cdot(n+2)(z-a)^{n+1},$$

$$\lim_{z\to a}\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}\left(f(z)(z-a)^p\right)=c_{-1}(p-1)!.$$

Сонымен f функциясының p - ретті полюстегі шегерімін есептейтін мынадай формула алдық:

$$\operatorname*{res}_a f(z)=\frac{1}{(p-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}\left(f(z)(z-a)^p\right). \qquad (3)$$

Егер $p=1$ болса,

$$\operatorname*{res}_a f(z)=\lim_{z\to a}f(z)(z-a) \qquad (4)$$

Практикада (4)- формуланы аздап өзгертіп қолданған ыңғайлы. Айталық, f функциясы $z=a$ жай полюстің маңайында

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\phi(z)} \qquad (5)$$

түрінде жазылсын, мұндағы φ және ϕ функциялары $z=a$ нүктесінде аналитикалық функциялар болады және $\varphi(a)\neq 0,\ \phi(a)=0,\ \phi'(a)\neq 0.$ (4) - формула бойынша

$$\underset{a}{res}\, f(z) = \lim_{z \to a} \frac{\varphi(z)(z-a)}{\phi(z)} = \lim_{z \to a} \frac{\varphi(z)}{\dfrac{\phi(z)-\phi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\phi'(a)},$$

яғни

$$\underset{a}{res}\, f(z) = \frac{\varphi(a)}{\phi'(a)} \qquad (6)$$

Мысал: $\underset{k\pi}{res}\, ctgz = \underset{k\pi}{res} \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{\cos k\pi}{\cos k\pi} = 1$.

Егер f функциясы (5) формуламен анықталса, ал φ және ϕ функцияларының $z = a$ нүктесінде бірден жоғары ретті нөлдері болса, онда шегерімді есептеу үшін φ және ϕ функцияларын Тейлор қатарының бірнеше мүшесімен алмастырған ыңғайлы болады.

Мысал:

$$\underset{0}{res} \frac{\sin 3z - 3\sin z}{\sin z(\sin z - z)} = \underset{0}{res} \frac{3z - \frac{9}{2}z^3 + \ldots - 3z + \frac{z^3}{2} - \ldots}{\left(z - \frac{z^3}{6} + \ldots\right)\left(z - \frac{z^3}{6} + \ldots - z\right)} =$$

$$= \underset{0}{res} \frac{-4z^3 + \ldots}{-\frac{z^4}{6} + \ldots} = 24.$$

Егер $z = a$ елеулі ерекше нүкте болса, онда шегерімді табу үшін функцияның Лоран қатарына жіктелуін қарастырамыз. Сол жіктелудегі c_{-1} коэффициенті $f(z)$ функциясының $z = a$ нүктесіндегі шегерімі болады.

Коши теоремасы. Егер $f(z)$ функциясы D аймағының Г шекарасында аналитикалық және D аймағының ішінде $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ерекше нүктелерінен басқа нүктелерде аналитикалық болса, онда

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} resf(z_k).$$

Анықтама. $a=\infty$ нүктесі $f(z)$ аналитикалық функциясының оқшауланған ерекше нүктесі болсын. Онда $a=\infty$ нүктесіндегі $f(z)$ функциясының шегерімі деп $f(z)$ функциясының шексіздіктің маңайында жіктелуіндегі теріс бірінші дәрежені (-1)-ге көбейткен коэффициент алынады.

$$\underset{\infty}{res}\, f(z) = -c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} f(z)dz,$$

мұндағы , Γ^+ -контурды сағат тілі бағыты бойынша айналуды білдіреді.

Өзіндік бақылау сұрақтары

1. Оқшауланған ерекше нүкте дегеніміз не?
2. Жөнделетін ерекше нүкте дегеніміз қандай нүкте?
3. Полюс дегеніміз не?
4. Елеулі ерекше нүкте анықтамасы.
5. Функцияның нөлдері дегеніміз не?
6. Функцияның шегерімі деген не?
7. Функцияның жөнделетін нүктедегі шегерімін қалай анықтайды?
8. Функцияның полюстегі шегерімін қалай анықтайды?
9. Функцияның елеулі ерекше нүктедегі шегерімін қалай анықтайды?
10. Функцияның шегерімі туралы Коши теоремасы.
11. Шексіз алыстатылған нүктедегі функцияның шегерімі қалай анықталады?

Мысал 1. $f(z)=\dfrac{z^3}{1+z-e^z}$ функциясы үшін $z_0=0$ нөлдік нүктесінің ретін табу керек.

Шешуі:

$$f(z)=\frac{z^3}{1+z-e^z}=\frac{z^3}{1+z-\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots\right)}=$$

$$= \frac{z^3}{-\frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} - \ldots} = \frac{1}{-\frac{1}{2!} - \frac{z}{3!} - \ldots}.$$ Ендеше, анықтама бойынша,

$z_0 = 0$ - бірінші ретті нөл немесе жай нөл.

Мысал 2. $f(z) = 6\sin z^3 + z^3(z^6 - 6)$ функциясы үшін $z_0 = 0$ нөлдік нүктесінің ретін табу керек.

Шешуі:

$$f(z) = 6\left(z^3 - \frac{z^9}{3!} + \frac{z^{15}}{5!} - \frac{z^{21}}{7!} + \ldots\right) + z^9 - 6z^3 =$$

$$= 6z^3 - z^9 + \frac{6z^{15}}{5!} - \frac{6z^{21}}{7!} + \ldots + z^9 - 6z^3 =$$

$$= z^{15}\left(\frac{6}{5!} - \frac{6z^5}{7!} + \ldots\right).$$

Сонымен $z_0 = 0$ нүктесі 15 - ретті нөл.

Мысал 3. $f(z) = \frac{1}{z - \sin z}$ функциясының $z_0 = 0$ ерекше нүктесінің түрін анықтау керек.

Шешуі:

$$f(z) = \frac{1}{z - \sin z} = \frac{1}{z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots\right)} =$$

$$= \frac{1}{z^3\left(\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} - \ldots\right)}.$$

Сонымен $z_0 = 0$ нүктесі 3-ші ретті полюс.

Мысал 4. $f(z) = \frac{\sin z}{e^{-z} + z - 1}$ функциясының $z_0 = 0$ ерекше нүктесінің түрін анықтау керек.

Шешуі:

$$\frac{\sin z}{e^{-z}+z-1}=\frac{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots}{1-z+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\ldots+z-1}=$$

$$=\frac{z\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\ldots\right)}{z^2\left(\frac{1}{2!}-\frac{z}{3!}+\ldots\right)}=\frac{\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\ldots\right)}{z\ \left(\frac{1}{2!}-\frac{z}{3!}+\ldots\right)}$$

$z_0=0$ нүктесі жай полюс**.**

Мысал 5. $f(z)=\cos\frac{1}{z+\pi}$ функциясының $z_0=-\pi$ ерекше нүктесінің түрін анықтау керек.

Шешуі:

$$f(z)=\cos\frac{1}{z+\pi}=1-\frac{1}{2!(z+\pi)^2}+\frac{1}{4!(z+\pi)^4}-\frac{1}{6!(z+\pi)^6}+\ldots$$

$z_0=-\pi$ нүктесі елеулі ерекше нүкте, себебі Лоран қатарының басты бөлігінің шексіз көп мүшелері бар.

Мысал 6. $f(z)=\frac{1+\cos z}{z-\pi}$ функциясының $z_0=\pi$ ерекше нүктесінің түрін анықтау керек.

Шешуі:

$$\frac{1+\cos z}{z-\pi}=\frac{1-\cos(z-\pi)}{z-\pi}=\frac{1-1+\frac{(z-\pi)^2}{2!}-\frac{(z-\pi)^4}{4!}+\ldots}{z-\pi}=$$

$$=\frac{z-\pi}{2!}-\frac{(z-\pi)^3}{4!}+\frac{(z-\pi)^5}{6!}-\ldots$$

$z_0=\pi$ жөнделетін ерекше нүкте, себебі функцияның Лоран қатарына жіктелуінде басты бөлігі жоқ.

Мысал 7. $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$ функциясының ерекше нүктедегі шегерімін есептеу керек.

Шешуі: Функцияның ерекше нүктесі $z=0$.

$$f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}=z^3\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}+\ldots\right)=$$

$$=z^4+z^2+\frac{z}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!z}+\frac{1}{5!z^2}+\frac{1}{6!z^3}+\frac{1}{7!z^4}+\ldots$$

$$\underset{0}{res}\, f(z)=\frac{1}{4!}.$$

Мысал 8. $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$ функциясының ерекше нүктедегі шегерімін есептеу керек.

Шешуі: Берілген функцияның ерекше нүктесі екеу: $z_1=0$-нүктесі 3 ретті полюс болса, $z_2=1$ - жай полюс.

$$\underset{1}{res}\, f(z)=\lim_{z\to1}(z-1)\frac{e^z}{z^3(z-1)}=e.$$

Енді $z_1=0$ нүктесіндегі шегерімді есептейік. (2) формула бойынша

$$\underset{0}{res}\, f(z)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to0}\left(\frac{e^z}{z-1}\right)''=\left|\begin{array}{l}\left(\dfrac{e^z}{z-1}\right)'=\dfrac{e^z(z-1)-e^z}{(z-1)^2};\\[2ex] \left(\dfrac{e^z}{z-1}\right)''=\dfrac{e^z(z-1)^2-2e^z(z-2)}{(z-1)^3}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to0}\frac{e^z(z-1)^2-2e^z(z-2)}{(z-1)^3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+4}{-1}=-\frac{5}{2}.$$

Сонымен

$$\underset{1}{res}\, f(z)=e,$$

$$\underset{0}{res}\, f(z) = -\frac{5}{2}.$$

Мысал 9. $f(z) = e^{\frac{z}{z-1}}$ функциясының ерекше нүктедегі шегерімін есептеу керек.

Шешуі: Функцияның ерекше нүктесі $z = 1$.

$$f(z) = e^{\frac{z}{z-1}} = e^{1+\frac{1}{z-1}} = e \cdot e^{\frac{1}{z-1}} =$$

$$= e\left(1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!(z-1)^2} + \frac{1}{3!(z-1)^3} + \ldots\right).$$

$z = 1$ нүктесі елеулі ерекше нүкте,

$$\underset{1}{res}\, f(z) = c_{-1} = e.$$

Мысал 10. $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^3 - \frac{\pi}{2} z^2}$ функциясының ерекше нүктедегі шегерімін есептеу керек.

Шешуі: Функцияның екі ерекше нүктесі бар: $z_1 = 0,\ z_2 = \dfrac{\pi}{2}$. $z_2 = \dfrac{\pi}{2}$ жөнделетін ерекше нүкте болатындығын көрсету қиын емес. Ендеше жөнделетін ерекше нүктедегі шегерім нөлге тең болғандықтан, $\underset{\frac{\pi}{2}}{res}\, f(z) = 0$.

$$\underset{0}{res}\, f(z) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{\cos z}{z^2\left(z - \frac{\pi}{2}\right)} \cdot z^2\right)' = \lim_{z\to 0}\frac{-\sin z\left(z - \frac{\pi}{2}\right) - \cos z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{-1}{\frac{\pi^2}{4}} = -\frac{4}{\pi^2}.$$

Сонымен

$$\underset{0}{res}\, f(z) = -\frac{4}{\pi^2}, \quad \underset{\frac{\pi}{2}}{res}\, f(z) = 0.$$

Өзіндік жұмысқа жаттығулар

1. $f(z) = \dfrac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4} z^2}$ функциясының ерекше нүктедегі шегерімін есептеу керек.

Жауабы: $\underset{0}{res}\, f(z) = 0, \ \underset{\frac{\pi}{4}}{res}\, f(z) = \dfrac{16}{\pi^2} \sin \dfrac{\pi^2}{16}.$

2. $f(z) = \dfrac{e^z}{(z+1)^3 (z-2)}$ функциясының ерекше нүктедегі шегерімін есептеу керек.

Жауабы: $\underset{-1}{res}\, f(z) = -\dfrac{17}{54e}, \ \underset{2}{res}\, f(z) = \dfrac{e^3}{27}.$

3. $f(z) = z^3 \sin \dfrac{1}{z^2}$ функциясының ерекше нүктедегі шегерімін есептеу керек.

Жауабы: $\underset{0}{res}\, f(z) = 0.$

4. $\underset{0}{res} \dfrac{z^{n-1}}{\sin^n z}, \ (n = 1,2,...)$ шегерімін табу керек.

Жауабы: $\underset{0}{res}\, f(z) = 1.$

5. $\underset{0}{res} \dfrac{\sin 2z - 2z}{(1-\cos z)^2}$ шегерімін табу керек.

Жауабы: $\underset{0}{res}\, f(z) = -\dfrac{16}{3}.$

6. $\underset{0}{res} \dfrac{e^z - 1 - z}{(1-\cos 2z)\sin z}$ шегерімін табу керек.

Жауабы: $\underset{0}{res}\, f(z)=1.$

7. $\underset{0}{res}\dfrac{z^2}{chz-1-\dfrac{z^2}{2}}$ шегерімін табу керек.

Жауабы: $\underset{0}{res}\, f(z)=0$**.**

8. $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ функциясының ерекше нүктедегі шегерімін есептеу керек.

Жауабы: $\underset{0}{res}\, f(z)=e-1.$

9. $f(z)=\cos z\sin\dfrac{1}{z}$ функциясының $z=0$ ерекше нүктедегі шегерімін есептеу керек.

Жауабы: $\underset{0}{res}\, f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)!(2n+1)!}.$

10. $f(z)=e^{\frac{1}{z^2}}\cos z$ функциясының $z=0$ ерекше нүктедегі шегерімін есептеу керек.

Жауабы: $\underset{0}{res}\, f(z)=0.$

11. $f(z)=\dfrac{chz}{(z^2+1)(z-3)}$ функциясының ерекше нүктедегі шегерімін есептеу керек.

Жауабы:

$$\underset{-i}{res}\, f(z)=-\frac{1+3i}{20}\cos 1,\ \ \underset{i}{res}\, f(z)=-\frac{1-3i}{20}\cos 1,\ \ \underset{3}{res}\, f(z)=\frac{ch3}{10}.$$

12. $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}$ функциясының ерекше нүктедегі шегерімін есептеу керек.

Жауабы: $\underset{-1}{res}\, f(z)=\dfrac{1}{27},\ \ \underset{2}{res}\, f(z)=-\dfrac{1}{27}.$

13. $f(z)=\cos\frac{1}{z}+z^3$ функциясының ерекше нүктедегі шегерімін есептеу керек.

Жауабы: $\underset{0}{res}\, f(z)=0$.

14. $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{(z+i)\left(z-\frac{i}{2}\right)^2}$ функциясының ерекше нүктедегі шегерімін есептеу керек.

Жауабы: $\underset{-i}{res}\, f(z)=\frac{4}{9}sh2i,\ \underset{\frac{i}{2}}{res}\, f(z)=-\frac{4}{9}(e+2e^{-1})i.$.

15. $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^3(z-3)}$ функциясының ерекше нүктедегі шегерімін есептеу керек.

Жауабы: $\underset{0}{res}\, f(z)=-\frac{1}{6},\ \underset{3}{res}\, f(z)=\frac{2}{27}\sin^2\left(\frac{3}{2}\right)$.

16. $f(z)=e^{z^2+\frac{1}{z^2}}$ функциясының ерекше нүктедегі шегерімін есептеу керек.

Жауабы: $\underset{0}{res}\, f(z)=0$.

17. $f(z)=\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{1-z}$ функциясының ерекше нүктедегі шегерімін есептеу керек.

Жауабы: $\underset{0}{res}\, f(z)=\sin 1,\ \underset{1}{res}\, f(z)=-\sin 1.$

18. $f(z)=e\dfrac{z^2+1}{z}$ функциясының ерекше нүктедегі шегерімін есептеу керек.

Жауабы: $\underset{0}{res}\, f(z)=\frac{1}{e}-1$.

Негізгі әдебиеттер

1. *Кангужин Б.Е.* Теория функций комплексного переменного. –Алматы, Қазақ университеті, 2007.
2. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. – М: Наука,1984.
3. *Бицадзе А.В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1984.
4. *Свешников А.Г., Тихонов А.Н.* Теория функций комплексной переменной, - М.: Наука, 1979.
5. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Физматгиз, 1987.
6. *Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1970.
7. *Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Функций комплексного переменного. Операционное исчисление, Теория устойчивости. – М.: Наука, 1981.

Қосымша әдебиеттер

1. *Маркушевич А.И.* Краткий курс теории аналитических функций. –М.: Физматгиз, 1978.
2. *Евграфов М.А.* Сборник задач по теории аналитических функций. –М.:Наука, 1969.
3. *Евграфов М.А.* Аналитические функции. – М: Наука, 1968.
4. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. –М.:Наука, 1985.
5. *Стоилов С.* Теория функций комплексного переменного.- М, ИЛ, 1962.
6. *Гурвиц А, Курант Р.* Теория функций. – М: Наука, 1968.
7. *Фукс Б.А. и Шабат Б.В.* Функции комплексного переменого и некоторые их приложения. – М: Наука, 1964.
8. *Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин* М.И. Лекции по теории аналитических функции. – М: Наука, 1982.
9. *Каратеодори. К.* Конформное отображение. – М: ОНТИ, 1934.
10. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М: Наука, 1968.