Қазақстан Республикасының
Министерство
Білім және ғылым
образования и науки
министрлігі
Республики Казахстан

Д. Серікбаев атындағы ШҚМТУ ВКГТУ
им. Д. Серикбаева

УТВЕРЖДАЮ
проректор по УМР
_____________Н.Н. Линок
«___»_____________2006 ж.

МАТЕМАТИКА
жоғарғы оқу орындарындағы техникалық бағыттағы мамандықтарға арналған
оқу құралы
2-БӨЛІМ

МАТЕМАТИКА

учебное пособие для технических специальностей вуза

ЧАСТЬ 2

Өскемен
Усть-Каменогорск
2006

Оқу құралы жоғары математика кафедрасында Қазақстан Республикасының жалпы мемлекеттік білім беру стандарты негізінде барлық техникалық мамандықтардың студенттеріне арналып жасалған.

Оқу құралы жоғары математика құжыра отырысында талқыланған

Құжыра меңгерушісі Н.Г.Хисамиев

Хаттама № ____ ___________ 2006 ж.

Ақпараттық технология және энергетика факультетінің әдістемелік комиссиясының кеңесінде құпталды.

Әдістемелік комиссия төрағасы

Хаттама № ____ ____________ 2006 ж.

Құрастырғандар Н.Г. Хисамиев
С.Ж. Тыныбекова
Ә.Ә.Қоңырханова

Норма бақылаушы Е.В. Петрова

МАЗМҰНЫ

КІРІСПЕ

Жалпылай компьютерлеу мен техниканың жоғарғы деңгейде даму ғасырына аяқ басқан қоғамның талабына сәйкес студенттерді жүйелік математикалық дайындау ҚР техникалық бағыттағы жоғарғы оқу орындарының білім беруінің негізгі есептерінің бірі. Жоғарғы оқу орнының мақсаты – алған білімдерін ары қарай дамытып, сол білімнің көмегімен жоғарғы деңгейдегі маман бола алатындай студентке мықты базалық, іргелі білім беру. Кредиттік технологиямен оқытуға көшу осы мақсатқа жетудің бір жолы. Кредиттік технологиямен оқытудың негізі – білім алушылардың өз бетімен жұмыс жасауы, ал оны жүзеге асыру үшін оқу процессін әдістемелік қамтамасыз ету қажет.

Қазіргі уақытта Қазақстан Республикасында жоғарғы математикадан студенттердің өз бетімен жұмыс істеуіне бағытталған оқу әдебиеттері жеткіліксіз. Бұл оқу құралында біз осы айтылған кемшіліктің орнын толтыруға тырыстық. Есептер мен мысалдар оқу материалына сай таңдалынып алынды, сонымен қатар, өз бетімен шығаруға есептер ұсыныла отырып, әрбір лекциядан кейін өзін-өзі тексеру үшін сұрақтар берілген, ал соңында көрсетілген әдебиеттер оқылған материалды толық, әрі терең меңгеруге көмегін тигізеді.

Оқу құралының материалы техникалық бағыттағы жоғарғы оқу орындарында берілетін жоғарғы математика курсының бағдарламасын 2004 жылғы ҚР БжҒМ МЖМБС-на сәйкес жоғарғы деңгейде толығымен қамтиды және студенттердің жеке орындау жұмыстарын өз бетімен орындауына мүмкіндік береді. Оқу құралы әрқайсысы 15 лекцияны қамтитын екі бөлімнен тұрады, яғни жалпы көлемі 30 лекция (6 кредит). Әр лекцияда осы лекцияның тақырыбына сай есептерді шығару әдістемесіне тоқталдық, яғни, тәжирибелік сабақтарды да қамтып өттік. Әр лекция оқу процессін дифференциалдауға және студенттердің өз бетімен жұмыс істеуіне үлкен мүмкіндік беретін жеке модуль. Модулдық принцип бұл оқу құралын жоғарғы оқу орындарының әртүрлі мамандықтарындағы студенттерге оқу стандарттарына тәуелсіз қолдануына мүмкіндік береді, соның ішінде математиканы оқуға аз сағат берілген экономикалық мамандықтар үшін де. Ол үшін ұсынылып отырған материалдың ішінен қажетті модулдарды ғана таңдап алу керек.

Оқу құралы екі тілде жазылған: орыс және қазақ тілінде, ал бұндай екі тілде жазылған оқу құралдары жоқтың қасы. Ұсынылып отырған оқу құралы оқу процессі кезінде екі тілді де меңгеруге көмегін тигізеді деген ойдамыз. Ал біздің аймағымызда қазір мемлекеттік тілді меңгеру негізгі проблемалардың бірі.

Бұл оқу құралы математика курсын меңгеру кезінде студенттердің танымдық қабілетін арттырып, өз бетімен жұмыс істеу сапасының жоғарылауына көмегін тигізер деген үміттеміз.

Оқулықтың екінші бөлімінде мынадай материалдар қарастырылды: дифференциал теңдеулер, қатарлар, ықтималдықтар теориясының элементтері, математикалық статистика және корреляция теориясы.

Авторлар рецензенттер - физ.-мат.ғылымының докторы Н.М.Темірбековке, физ.-мат.ғылымының кандидаттары доцент А.Б.Базарбековке және Ғ.Х.Мұхамадиевке шексіз алғыстарын білдіреді.

16 ҚАРАПАЙЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

16.1 Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер. Негізгі ұғымдар

16.1.1 Анықтамалар. Жалпы, дербес және ерекше шешімдер

Анықтамалар:

1. Ізделінді функцияны, оның туындылары мен дифференциалдарын және аргументтерін байланыстыратын теңдеуді дифференциалдық теңдеу деп айтамыз.

2.Теңдеуге кіретін туындының не дифференциалдың ең жоғарғы ретін дифференциалдық теңдеудің реті деп атаймыз.

3.Дифференциалдық теңдеудің шешімі деп кез келген функцияны айтамыз, егер оның өзін, туындысын және дифференциалын теңдеуге қойғанда тепе-теңдік шығатын болса.

4.Тек қана бір айнымалыға (бірнеше айнымалыға) тәуелді дифференциалдық теңдеуді қарапайым (дербес туындылы) дифференциалдық теңдеулер деп айтамыз.

Мысал 1.

а) $\frac{\partial^2 u(x;y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x;y)}{\partial y^2}=f(x;y)$ - екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеу;

б) $y'''(x)-xy^2(x)=3$ - үшінші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеу;

в) $xdx-ydy=0$ - бірінші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеу.

Ескерту 1. Ары қарай дифференциалдық теңдеу дегенді қарапайым дифференциалдық теңдеу деп түсінеміз.

Мысал 2. Теңдеудің жалпы шешімін тап

а) $y'=2x\Rightarrow\int y'dx=\int 2xdx\Rightarrow$

$$y=x^2+C \tag{1}$$

(1) шешімі кез келген C тұрақтысына байланысты, яғни, C-ның әртүрлі мәнінде әртүрлі шешім аламыз.Енді C тұрақтысын анықтау үшін қосымша бір шарт (бастапқы шарт) берелік: $y(1)=2$.

Онда осы бастапқы шартты (1)-ге қойсақ: $2=1^2+C\ \Rightarrow C=1\ \Rightarrow\ y=x^2+1$ - дербес шешім.

б) $y''=2\Rightarrow\ \int(y')'dx=\int 2dx\Rightarrow y'=2x+C_1\Rightarrow\int y'dx=\int(2x+C_1)dx\Rightarrow$

$$y=x^2+C_1x+C_2 \text{ - жалпы шешім.} \tag{2}$$

Екінші ретті (2) теңдеуі екі тұрақтыға байланысты C_1 және C_2, оларды анықтау үшін екі шарт (бастапқы) қажет: $y(0)=1,\ y'(0)=2$. Бұдан:

$$\begin{cases} y=x^2+C_1x+C_2 \\ y'=2x+C_1 \end{cases}\Rightarrow\ \begin{cases} 1=C_2 \\ 2=C_1 \end{cases}\ \Rightarrow\ y=x^2+2x+1 \text{ - дербес шешім.}$$

Геометриялық тұрғыдан, (1) және (2) шешімдері – параболалар жиынтығы. Бастапқы шарт берілді деген: осы параболалар жиынтығынан мына шарттарды қанағаттандыратын параболаны тап деген сөз:

а) $M(1;2)$ нүктесі арқылы өтетін; б) $M(0;1)$ нүктесі арқылы өтетін және $x=0$ нүктесінде жүргізілген жанамасының бұрыштық коэффиценті $k = y'(0) = 2$ болатын.

16.1.2 Коши теоремасы. Жалпы және дербес шешім

$n-$ші ретті айқын дифференциалдық теңдеу мына түрде жазылады:

$$y^{(n)} = f(x; y; y'; ...; y^{(n-1)}), \tag{3}$$

ал айқын емес $n-$ші ретті дифференциалдық теңдеу: $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$.

Коши есебі. (3) дифференциалдық теңдеуінің, $x = x_0$ болғанда

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \ \dots, \ y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}{}_0 \tag{4}$$

бастапқы шартын қанағаттандыратын шешімдерін тап.

Коши теоремасы. Егер қандай да бір тұйық облыста $f(x; y; y', ..., y^{(n-1)})$ функциясы барлық аргументі бойынша үзіліссіз болып және осы облыста оның дербес туындылары $f'_y, f'_{y'}, ..., f'_{y^{(n-1)}}$ табылса, онда (3) дифференциалдық теңдеуінің (4) бастапқы шартын қанағаттандыратын жалғыз шешімі болады, мұндағы $(x_0; y_0)$ нүктесі - осы облысқа тиісті нүкте.

Анықтама 5. Кез келген дифференциалданатын функция

$$y = \varphi(x; C_1, C_2, ..., C_n), \tag{5}$$

мұндағы $C_i, i = \overline{1,n}$ - кез келген тұрақтылар, (3) дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімі деп аталады, егер:

а) ол $C_i, \ i = \overline{1,n}$ -дің кез келген тұрақты мәндерінде (3) дифференциалдық теңдеуінің шешімі болса,

б) Коши теоремасының шартын қанағаттандыратын осы облыстың кез келген бастапқы шарты үшін,

$$y = \varphi(x; C_1^0; C_2^0; ...; C_n^0) \tag{6}$$

шешімі бастапқы шартты қанағаттандыратындай $C_i = C_i^0, i = \overline{1,n}$ тұрақтылары табылатын болса.

Дифференциал теңдеудің берілген облысындағы әрбір нүктесі үшін жалғыздық шарты орындалатын болса, онда (6) түріндегі шешім дербес шешім деп аталады.

Геометриялық тұрғыдан, (5) – қисықтар жиынтығы (интегралдық қисықтар). Коши теоремасының шарты орындалды дегеніміз - облысқа тиісті кез келген (x_0, y_0) нүктесінен (4) шартын қанағаттандыратын тек бір ғана қисық өтеді деген сөз.

(3) теңдеуінің айқын емес түрде берілген жалпы (дербес) шешімі: $\Phi(x; y; C_1; C_2; ...; C_n) = 0$ $\left[\Phi(x; y; C_1{}^0; C_2{}^0; ...; C_n{}^0)\right]$ сәйкесінше дифференциалдық теңдеудің жалпы (дербес) интегралы деп аталады. (3) теңдеуінің жалпы және дербес шешімінен басқа ерекше шешімдері болады.

Анықтама 6. C_i-ді $(i = \overline{1,n})$ қандай етіп таңдап алсақ та, жалпы шешімнен шықпайтын және шешімнің жалғыздық шарты бұзылатын нүктелерде орналасқан (облыстың шекарасында) шешімдерді ерекше шешімдер деп атаймыз.

Мысал 3. Мынадай теңдеуді қарастыралық:

$$y' = \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{y}, \quad R > 0 \tag{7}$$

Шешуі. Орнына қою арқылы (7) теңдеуінің жалпы интегралы:

$$(x - C)^2 + y^2 = R^2 \tag{8}$$

болатынына көз жеткізуге болады.

$$f'_y = -\frac{R^2}{y^2\sqrt{R^2 - y^2}},$$

болғандықтан, $y = 0, y = \pm R$ түзулерінде f'_y - шектелмеген, яғни, Коши теоремасының шарты бұзылып тұр. $y = 0$ (7)-теңдеуінің шешімі болмайтыны анық, ал $y = \pm R$ түзулері (7) теңдеуінің шешімдері және бұл шешімдер жалпы шешім (8)-дегі C қалай таңдалса да онымен беттеспейді, С=±∞ болса да. Геометриялық тұрғыдан, бұл - $y = \pm R$ түзулерінің кез келген нүктесі арқылы екі интегралдық қисық өтеді деген сөз. Мысалы, $(0; R)$ нүктесі арқылы $y = R$ және $x^2 + y^2 = R\,(C = 0)$ қисықтары өтеді. Сонымен, $y = \pm R$ - ерекше шешім.

2 мысалда байқағанымыздай, теңдеуді шешу кезінде біз алғашқы функция табамыз. Сондықтан, дифференциалдық теңдеудің шешімін табу процессі теңдеуді интегралдау деп аталады.

16.2 Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер және оларды интегралдау

әдістері

Анықтама 7. y' бойынша шешілетін теңдеу:

$$\frac{dy}{dx} = f(x; y), \quad y' = f(x; y) \tag{9}$$

түрінде жазылады.

Бірінші ретті теңдеудің дифференциалдық пішіні мына түрде болады:

$$M(x; y)dx + N(x; y)dy = 0 \tag{10}$$

Геометриялық тұрғыдан, (9) теңдеуі әрбір $M(x; y)$ нүктесі үшін интегралдық қисыққа жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффицентінің мәнін береді, яғни, бағыттар өрісін береді.

Ескерту 2. Кей жағдайларда, x-ті y-ке қатысты функция ретінде қарастырсақ $\left(x' = \frac{1}{y'} = \frac{dx}{dy}\right)$, теңдеуді интегралдау жеңілденеді. Сондықтан да, ары қарай x пен y-ті тең құқылы айнымалылар деп есептейміз.

Мысал 4. $F(x,y)=\ln\frac{y}{x}-5+xy$ түрінде берілген айқын емес функция $(x+x^2y)y'=y-xy^2$ дифференциалдық теңдеуінің интегралы болатынын дәлелде.

Шешуі. Айқын емес функцияны дифференциалдау ережесіне сәйкес: $y'=\frac{F'_x}{F'_e}=-(y-\frac{1}{x})/(x+\frac{1}{y})=\frac{y}{x}\frac{1-xy}{1+xy}=\frac{y-xy^2}{x+x^2y}$. Табылған туындыны берілген дифференциалдық теңдеуге қоятын болсақ, тепе-теңдік аламыз.

16.2.1 Айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеулер

Анықтама 8.

$$M(x)\cdot N(y)dx+P(x)\cdot Q(y)dy=0\ , \tag{11}$$

түріндегі, dx пен dy-тің алдындағы коэффиценттері тек x-ке тәуелді функция мен тек y-ке тәуелді функциялардың көбейтінділері болатын дифференциалдық теңдеу айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу деп аталады.

$P(x)\neq 0$, $N(y)\neq 0$ деп есептеп, (11)-теңдеуінің екі жағын да $P(x)\cdot N(y)$ көбейтіндісіне бөліп, интегралдасақ:

$$\int\frac{M(x)}{P(x)}dx+\int\frac{Q(y)}{N(y)}dy=C\ .$$

Дифференциал теңдеудің жалпы шешімін алдық.

Ескерту 3. $P(x)=0$, $N(y)=0$ жағдайлары бөлек зерттеледі. Егер дифференциал теңдеудің ерекше шешімдері бар болса, онда олар берілген алгебралық теңдеудің шешімдері болып табылады.

Мысал 5. Теңдеуді шеш:

$$x(y^2-1)dx+y(x^2-1)dy=0\ .$$

Шешуі. Бұл айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу. Екі жағын да, $x^2-1\neq 0,\ y^2-1\neq 0$ дей отырып, $(x^2-1)(y^2-1)$ көбейтіндісіне бөлеміз.

$$\frac{x}{x^2-1}dx+\frac{y}{y^2-1}dy\Rightarrow\int\frac{x}{x^2-1}dx+\int\frac{y}{y^2-1}dy=C_1\Rightarrow\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+\frac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right|=\frac{1}{2}\ln C\Rightarrow$$

$$(x^2-1)(y^2-1)=C \text{ - жалпы интеграл.}$$

Енді, $x^2-1=0$ және $y^2-1=0$ қарастыралық.

$x=\pm 1$ және $y=\pm 1$ шешімдері берілген дифференциалдық теңдеудің шешімдері болады, бірақ олар жалпы шешімнен $C=0$ болғанда шығады. Сонымен, ерекше шешім жоқ. Жауабы: $(x^2-1)(y^2-1)=C$.

(1) теңдеуінің дербес жағдайы:

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot\varphi(y)\ .$$

Мысал 6.

$$\left(1+e^{2x}\right)y^2y'=e^x,$$

теңдеуінің $y(0)=1$ бастапқы шартын қанағаттандыратын дербес шешімін тап.

►Берілген теңдеуді дифференциалдық пішінде жазамыз:

$$\left(1+e^{2x}\right)y^2dy-e^x dx=0.$$

Енді айнымалыларын ажыратсақ:

$$y^2dy-\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=0.$$

Екі жағын да интегралдасақ:

$$\int y^2dy-\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=\frac{C}{3},. \qquad \frac{y^3}{3}-arctge^x=\frac{C}{3} \quad ,$$

$$y=\sqrt[3]{C+3arctge^x}.$$

Берілген теңдеудің жалпы шешімін алдық.

Бастапқы шартты ескеріп, тұрақтының мәнін анықтаймыз:

$$1=\sqrt[3]{C+\frac{3}{4}\pi}, \qquad C=1-\frac{3}{4}\pi.$$

Сонымен, берілген теңдеудің дербес шешімі:

$$y=\sqrt[3]{`1-\frac{3}{4}\pi+3arcte^x} \quad .◄$$

16.2.2 Біртекті дифференциалдық теңдеулер

Анықтама 9. $\varphi(x;y)$ функциясы x пен y бойынша α-шы ретті біртекті функция деп аталады, егер кез келген t үшін: $\varphi(tx;ty)=t^{\alpha}\varphi(x;y)$ теңдігі орындалатын болса.

Анықтама 10. Егер $M(x;y)$ және $N(x;y)$ - бірдей ретті біртекті функциялар болса, онда (1) теңдеуі біртекті дифференциалдық теңдеу деп аталады.

$y'=f(x,y)$ теңдеуі біртекті болады, егер $f(tx;ty)=f(x;y)$, яғни, $\alpha=0$.

Біртекті дифференциалдық теңдеу айнымалыларды ауыстыру көмегімен айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеуге келтіріледі:

$$u=\frac{y}{x}\Rightarrow y=ux,\; y'=u+xu' \text{ немесе } dy=udx+xdu. \qquad (12)$$

Мысал 7. Теңдеуді шеш: $y^2+x^2y'=xyy'$.

Шешуі. Барлығын теңдеудің бір жағына жинақтау арқылы, біртекті дифференциалдық теңдеуге келтіреміз:

$$y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx} \quad\Rightarrow\quad y^2dx+(x^2-xy)dy=0$$

$M=y^2$ және $N=x^2-xy$ - 2-ші ретті біртекті функциялар болғандықтан, теңдеу біртекті дифференциалдық теңдеу. $u=\dfrac{y}{x}$ белгілеуін енгіземіз.

$u^2x^2dx+(x^2-x^2u)(udx+xdu)=0 \Rightarrow udx+x(1-u)du=0$ - бұл айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу. Екі жағын да $u\cdot x$ көбейтіндісіне бөліп, интегралдасақ:

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{1-u}{u}du=C_1 \Rightarrow \ln|x|+\ln|u|-u=C_1 \Rightarrow \ln|ux|-\ln e^4=\ln C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{xu}{e^u}=C \Rightarrow \left|u=\frac{y}{x}\right| \Rightarrow y=Ce^{\frac{y}{x}}$$ - жалпы шешім.

$u=0$ және $x=0$ жағдайлары $y=ux=0$ жағдайымен тепе-тең. Жалпы шешімнен С=0 болғанда шығады.

Ескерту 4. $y'=f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ түріндегі теңдеу біртекті дифференциалдық теңдеуге келтіріледі.

Мысал 8. $(x-y+1)dx=(2x+y-1)dy$ теңдеуін біртекті дифференциалдық теңдеу түріне келтір.

Шешуі. Айнымалыларды ауыстырамыз (h және t - тұрақтылар):

$$\begin{cases}x=u+h\\ y=v+t\end{cases} \Rightarrow |dx=du,\, dy=dv| \Rightarrow (u-v+h-t+1)du=(2u+v+2h+t-1)dv.$$

h және t -ны бос мүшелері нөлге тең болатындай етіп, таңдап аламыз:

$$\begin{cases}h-t+1=0\\ 2h+t-1=0\end{cases} \Rightarrow h=0, t=1.$$

Сонымен, $x=u, y=v+1$ деп жаңа айнымалылар енгізсек,

$(u-v)du=(2u+v)dv$ түріндегі біртекті дифференциал теңдеуге келеміз.

Мысал 9. $2x^2y'=x^2+y^2$ дифференциал теңдеуін интегралда және оның *y(1)=0* бастапқы шартын қанағаттандыратын дербес шешімін тап.

► $2x^2$ және x^2+y^2 функциялары екінші ретті біртекті функция болғандықтан, берілген теңдеу - біртекті. Айнымалыларды ауыстырамыз: $y=xu, y'=u+xu'$.

Онда

$$2x^2(u+xu')=x^2+(xu)^2, 2x^2(u+xu')=x^2(1+u^2).$$

x≠0 деп, теңдеудің екі жағын да x^2-қа бөлеміз:

$$2u+2x\frac{du}{dx}=1+u^2, 2xdu=(1+u^2-2u)dx.$$

Айнымалыларды ажыратып, екі жағын да интегралдасақ:

$$\frac{du}{1+u^2-2u}=\frac{dx}{2x},$$

$$\int\frac{du}{1+u^2-2u}=\int\frac{dx}{2x}, \qquad \int\frac{d(u-1)}{(u-1)^2}=\frac{1}{2}\ln|x|,$$

$$-\frac{1}{u-1}=\frac{1}{2}\ln|x|+\ln C, \qquad 1=(1-u)\ln\left(C\sqrt{|x|}\right).$$

Соңғы өрнектегі *u*-дың орнына *y/x* –ті қойып, жалпы интегралды аламыз:
$1=\left(1-\frac{y}{x}\right)\ln\left(C\sqrt{|x|}\right),\qquad x=(x-y)\ln\left(C\sqrt{|x|}\right).$

Оны *y* –ке қатысты шешсек, берілген дифференциал теңдеудің жалпы шешімін аламыз:

$$y=x-\frac{x}{\ln\left(C\sqrt{|x|}\right)}.$$

y(1)=0 бастапқы шартын ескере, *C* тұрақтысын анықталық:

$$0=1-\frac{1}{\ln C},\qquad \ln C=1,\qquad C=e.$$

Сонымен, берілген теңдеудің дербес шешімі: $y=x-\frac{x}{1+\ln\sqrt{\|x\|}}$. ◄

16.2.3 Бірінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер

Анықтама 11. Егер дифференциал теңдеу ізделінді функция мен оның туындысы бойынша сызықты болса, ондай теңдеуді сызықты дифференциал теңдеу деп атаймыз.

Бірінші ретті сызықты дифференциал теңдеуді мына түрде жазуға болады:

$$y'+P(x)y=Q(x)\tag{13}$$

$$y'+P(x)y=0,\tag{14}$$

(13) – біртектес емес, ал (14) – біртектес дифференциал теңдеу деп аталады.
Біртектес дифференциал теңдеудің жалпы шешімін табалық:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)dx=0\Rightarrow\ln|y|=-\int P(x)dx+\ln|C|\Rightarrow$$

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}\tag{15}$$

Лагранж әдісін (тұрақты шаманы вариациалау әдісі) қолданып, (13) теңдеуінің шешімін алуға болады. Шешімді (15) түрінде іздейміз, мұндағы $C=C(x)$ - белгісіз функция. Онда (13) теңдеуіндегі y'-тың орнына:

$$y'=C'(x)e^{-\int P(x)dx}-C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx},$$

ал y - тің орнына (5)-ті қойсақ:

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx}-C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}+C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)\Rightarrow$$

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)\Rightarrow C'(x)=Q(x)\cdot e^{-\int P(x)dx}\Rightarrow C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_1$$

Осы табылған $C(x)$-ті (5)-ке қоя отырып, (13) теңдеуінің жалпы шешімін аламыз.

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(C_1+\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right)\tag{16}$$

Ескерту 5. $C_1e^{-\int P(x)dx}$ - (4) теңдеуінің жалпы шешімі, ал $e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$ - (13) теңдеуінің дербес шешімі ($C_1=0$ болғанда) болғандықтан, кез келген ретті сызықтық теңдеу үшін ақиқат болатын мынадай тұжырым жасауға болады: біртектес емес сызықты теңдеудің жалпы шешімі оған сәйкес біртекті сызықтық теңдеудің жалпы шешімі мен біртексіз сызықты теңдеудің дербес шешімінің қосындысына тең ($C_1 = 0$ болғандағы).

Мысал 10. $(x^2 - x)y' + y = x^2(2x-1)$ теңдеуінің жалпы шешімін тап. Бастапқы шарт *y(-2)=2* болғандағы, Коши есебін шеш.

►Берілген теңдеуді екі жағын да $x^2 - x \neq 0$ өрнегіне бөліп, (3) түріне келтіреміз:

$$y + \frac{y}{x^2 - x} = \frac{x^2(2x-1)}{x^2 - x}.$$

Мұнда

$$P(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)},. \qquad Q(x) = \frac{x^2(2x-1)}{x(x-1)}. = \frac{x(2x-1)}{x-1}.$$

Берілген теңдеудің (6) формуласына сәйкес жалпы шешімі:

$$y = e^{-\int \frac{dx}{x(x-1)}}\left(\int \frac{x(2x-1)}{x-1} e^{\int \frac{dx}{x(x-1)}} dx + c\right). \qquad (17)$$

Осы шешімнің ішіндегі интегралдарды шығаралық:

$$\int\left(\frac{dx}{x(x-1)}\right) = \left|\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{1}{x(x-1)}, A = 1, B = 1.\right| = \int\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right)dx = -\ln|x| + \ln|x-1| = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|,$$

$$\int \frac{x(2x-1)}{x-1} e^{\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|} dx = \int \frac{x(2x-1)}{x-1}\left|\frac{x-1}{x}\right| dx = \pm\int(2x-1)dx = \pm(x^2 - x),$$

мұндағы $\langle + \rangle$ және $\langle - \rangle$ таңбалары $\left|\frac{x-1}{x}\right| = \pm\frac{x-1}{x}$ теңдігінен шығады. Табылған интегралдарды (7) шешіміне қойсақ, берілген теңдеудің жалпы шешімін аламыз:

$$y = e^{-\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|}\left(\pm(x^2 - x) + C\right) = \left|\frac{x}{x-1}\right|\left(\pm(x^{2-x}) + C\right) = \pm\frac{x}{x-1}\left(\pm x(x-1) + C\right) = x^2 + \frac{Cx}{x-1}.$$

y(-2)=2 бастапқы шартын қанағаттандыратын дербес шешімі:

$$2 = 4 - \frac{2C}{-2-1}, C = -3, y = x^2 - \frac{3x}{x-1}. \blacktriangleleft$$

Мысал 11. $y'(3x - y^2) = y$ теңдеуін шеш.

Шешуі. Бұл теңдеу y-ке қатысты сызықты емес. x-ті у тәуелсіз айнымалысына тәуелді функция ретінде қарастырсақ: $x' = \frac{1}{y'}$. Онда

$$\frac{1}{x'}(3x - y^2) = y \Rightarrow 3x - y^2 = x'y \Rightarrow yx' - 3x = -y^2 \Rightarrow x' - \frac{3}{y}x = -y.$$

Бұл теңдеу x-ке қатысты сызықты $P(y) = -\frac{3}{y}, Q(y) = -y$.

(6)-дан,

$$x = e^{\int \frac{3dy}{y}} \cdot (C - \int y \cdot e^{-\int \frac{3dy}{y}} dy) = e^{3\ln y}(C - \int y \cdot e^{-3\ln y} dy) =$$

$$e^{3\ln y}(C - \int y \cdot e^{\ln y^{-3}} dy) = y^3(C - \int \frac{1}{y^2} dy) = y^3(C + \frac{1}{y})$$

$$x = Cy^3 + y^2 \text{ - жалпы шешім.}$$

Сонымен қатар, (3) сызықты дифференциал теңдеуін *Бернулли әдісін* қолданып та, интегралдауға болады. Екі белгісіз функция *u(x), v(x)* енгіземіз және *y=u(x)v(x) (Бернулли ауыстыруы)* деп аламыз. Онда $y' = u'v + uv'$. y және y' өрнектерін (3) теңдеуіне қоя отырып, $u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$ немесе

$$\left(v' + P(x)v\right)u + u'v = Q(x). \tag{8}$$

теңдеуін аламыз. Жақшаның ішіндегі өрнекті $v' + P(x)v$ =0 десек, бұл айнымалысы ажыратылатын дифференциалдық теңдеу. Осы теңдеуді шешіп, *v*-ны табуға болады. Енді жақшаның ішіндегі өрнекті нөлге тең деп алғандықтан, (8) теңдеуі мына түрге келеді: $u + u'v = Q(x)$. Бұл теңдеуге жоғарыда табылған *v*-ны қойсақ, бұл да айнымалылары ажыратылатын теңдеу болады, бұл жерден *u*-ды табамыз. Табылған *u* мен *v*-ны Бернулли ауыстыруына қоятын болсақ, берілген теңдеудің жалпы шешімі шығады.

Мысал 12.

$$y' + ytgx = \frac{1}{\cos x}$$

дифференциалдық теңдеуін Бернулли әдісін қолданып шеш және бастапқы шарт $y(\pi) = 1$ болғандағы, Коши есебін шығар.

► Бернулли ауыстыруын жасаймыз: $y = uv, y' = u'v + uv'$, онда:

$$u'v + uv' + uvtgx = \frac{1}{\cos x}, \ \left(v' + vtgx\right)u + u'v = \frac{1}{\cos x}.$$

$v' + vtgx = 0$ теңдеуінің шешімін іздейміз.

$$dv + vtgxdx = 0, \ \frac{dv}{v} + vtgxdx = 0,$$

$$\int \frac{dv}{v} + \int tgxdx = 0, \qquad \ln|v| - \ln|\cos x| = \ln C_1.$$

$C_1 = 1$ деп, $v = \cos x.$ шешімін табамыз. Енді $u'v = \frac{1}{cos\,x}$ теңдеуін шешеміз, мұндағы $v = cos\,x.$ $u' = \frac{1}{\cos x},$ $u = \int \frac{1}{\cos x} + C = tgx + C.$

Онда берілген теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = uv = (tgx + C)\cos x.$$

Енді бастапқы шартқа сәйкес дербес шешім іздейміз: $y(\pi) = 1, \quad 1 = (0 + C)(-1),$ бұдан $C = -1.$ Табылған С=-1 мәнін жалпы шешімге қойып, теңдеудің дербес шешімін аламыз: $y = (tgx - 1)\cos x = \sin x - \cos x.$ ◄

16.3 Өз бетімен шығаруға арналған есептер

I. Келесі сұрақтарға жауап беріңдер:

1.y(x,C) функциясы, мұндағы С – кез келген тұрақты, келесі дифференциалдық теңдеулердің шешімдері бола ма:

a) $y = x^2(1 + Ce^{1/x})$, $x^2 y' + (1 - 2x)y = x^2$;

b) $y = Ce^x - e^{-x}$, $xy'' + 2y' - xy = 0$;

c) $x^2 + y^2 = Cy^2$, $xydx = (x^2 - y^4)dy$?

(Жауабы: a)болады; б)болмайды; c)болады.)

2. $e^{y/x} = Cy$ айқын емес функциясы $xyy' - y^2 = x^2 y'$ дифференциалдық теңдеуінің интегралы бола ма? (Жауабы: болады.)

3. $y = \dfrac{2 + Cx}{1 + 2x}$ функциясы $2(1 + x^2 y') = y - xy'$ дифференциалдық теңдеуінің шешімі бола ма? (Жауабы: болады.)

II. Дифференциалдық теңдеулерді шеш:

1. Дифференциалдық теңдеудің жалпы және дербес шешімдерін тап:

а) $xy' = y^2 + 1$; б) $(x + xy)dy + (y - xy)dx = 0, y(1) = 1$;

(*Жауабы:* а) $arctg = \ln|Cx|$; б) $y - x + \ln|xy| = 0$;)

2. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін тап:

$ydx + \left(\sqrt{xy} - \sqrt{x}\right)dy = 0.$ (*Жауабы:* $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \ln C\sqrt{y}$ (C>0)

3. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін тап: $\left(1 + e^2\right)y' = ye^x.$

(*Жауабы:* $y = C\left(1 + e^x\right)$.)

4. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін тап:

а) $y' + \dfrac{y}{x} = 1 + 2\ln x$; б) $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}.$

(*Жауабы:* а) $y = x\ln x + C/x$; б) $y = \pm e^{-x^2}\left(C + x^2/2\right)$.)

5. Коши есебін шеш:

а) $2xydx + \left(y - x^2\right)dy = 0,$ $y(-2) = 4$;

б) $y' = 2y - x + e^x,$ $y(0) = 1.$

(*Жауабы:* а) $x^2 - y\ln(4e/y)$; б) $\dfrac{1}{2}x - e^x + \dfrac{1}{4}\left(1 - e^{2x}\right)$.

6. Коши есебін шеш: $xy' = x\sin\dfrac{y}{x} + x, y(2) = \pi.$

(*Жауабы:* $y = 2xarctg\left(x/2\right)$.)

7. Коши есебін шеш:

$ydx + \left(\sqrt{xy} - x\right)dy = 0, y(1) = 1.$ (*Жауабы:* $2 - \ln|y| = 2\sqrt{y/x}$.)

8. Коши есебін шеш:

а) $xy' = y(1 + \ln y - \ln x), y(1) = e^2.$ (*Жауабы:* $y = xe^{2x}$.)

б) $y' + ytgx = 1/\cos x,$ $y(\pi) = 5.$ (*Жауабы: y=-5cosx+sinx)*

в) $y^2 dx = \left(x + ye^{-1/y}\right)dy,$ $y(0) = 3$; (*Жауабы:* а) $x = e^{-1/y}(3 + y)$.)

16.4 Сұрақтар

1. Қарапайым дифференциалдық теңдеулер анықтамасы.
2. Коши есебі. Дифференциалдық теңдеудің шешімінің бар болуы.
3. Жалпы, дербес және ерекше шешім.
4. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеу анықтамасы.
5. Айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеулер.
6. Біртекті дифференциалдық теңдеулер.
7. Біртекті дифференциалдық теңдеуге келтірілетін дифференциал теңдеулер.
8. Бірінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер.

17 БЕРНУЛЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУІ ЖӘНЕ ТОЛЫҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕҢДЕУ. ЖОҒАРҒЫ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

17.1 Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер (жалғасы)

17.1.1 Бернулли теңдеуі

Анықтама 1.

$$y' + P(x)y = Q(x)\cdot y^{\alpha}$$

түріндегі дифференциалдық теңдеу Бернулли теңдеуі деп аталады, мұндағы $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$, $P(x), Q(x)$- қандай да бір кесіндіде үзіліссіз функциялар. Бұл теңдеу $u = y^{1-\alpha}$ айнымалысын ауыстыру көмегімен сызықты теңдеуге келтіріледі

Мысал 1. $y' + xy = -x\cdot y^2$ Бернулли теңдеуін сызықты теңдеуге келтір.

Шешуі:

$$\alpha = 2 \Rightarrow u = y^{1-\alpha} = \frac{1}{y} \Rightarrow u' = -\frac{1}{y^2}y' \Rightarrow y' = -y^2\cdot u' \Rightarrow y' = -\frac{u'}{u^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{u'}{u^2} + \frac{x}{u} = -\frac{x}{u^2} \Rightarrow -u' + xu = -x \Rightarrow u' - xu = x\,.$$

Мысал 2. $y' + 2e^x y = 2e^x\sqrt{y}$ Бернулли теңдеуінің жалпы шешімін тап.

►Берілген теңдеудегі $\alpha = \frac{1}{2}$, сондықтан $z = y^{1-\alpha} = \sqrt{y}$ белгілеуін енгіземіз. $z' + e^x z = e^x$ теңдеуін аламыз, бұл сызықты теңдеу және оның жалпы шешімі:

$$z = e^{-\int e^x dx}\left(\int e^x e^{\int e^x dx}dx + C\right) = e^{-e^x}\left(\int e^x e^{e^x}dx + C\right) = e^{-e^x}\left(\int e^{e^x}de^x + C\right) =$$

$$= e^{-e^x}\left(e^{e^x} + C\right) = 1 + Ce^{-e^x}\,.$$

Онда берілген теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = z^2 = \left(1 + Ce^{-e^x}\right)^2. \qquad ◄$$

Мысал 3. $xy' + y = xy^2\,ln\,x$ теңдеуінің жалпы шешімін тап.

►Берілген теңдеудің екі жағын да $x \neq 0$ айнымалысына бөліп, Бернулли теңдеуін алуға болады, мұндағы $\alpha = 2$. Ал біз бұл теңдеуді Бернулли ауыстыруы әдісімен шығаралық $(y = uv,\ y' = u'v + uv')$:

$$x(u'v + uv') + uv = x(uv)^2 \ln x.$$

$xv' + v = 0$ теңдеуінен, $v = x^{-1}$ аламыз. Енді $xvu' = xu^2 v \ln x$ теңдеуінің жалпы шешімін табу қажет, мұндағы $v = x^{-1}$. Онда $u' = u^2 \frac{\ln x}{x}$ теңдеуін аламыз. Айнымалыларды ажыратып, интегралдасақ:

$$\frac{du}{u^2} = \ln x \frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{du}{u^2} = \int \ln x \frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{u} = \frac{\ln^2 x}{2} + \frac{C}{2}, \qquad u = -\frac{2}{C + \ln^2 x}.$$

Сонымен, берілген теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = uv = -\frac{2}{x(C + \ln^2 x)}. \quad ◄$$

17.1.2 Толық дифференциалды теңдеулер

Анықтама 2.

$$M(x, y)dx + N(x, y) = 0 \qquad (1)$$

түріндегі дифференциалдық теңдеу толық дифференциалды теңдеу деп аталады, егер толық дифференциалы қандай да бір облыста теңдеудің сол жағындағы өрнекке тең болатын $u(x; y)$ функциясы табылса.

Сонымен,

$$Mdx + Ndy \equiv du(x) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0 \qquad (2)$$

Теорема 1. $M(x; y), N(x; y)$ үзіліссіз және дифференциалданатын функция және $\frac{\partial M}{\partial y}$ пен $\frac{\partial N}{\partial x}$ қандай да бір облыста үзіліссіз болсын. (1) теңдеуі толық дифференциалды теңдеу болуы үшін:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (3)$$

шарты орындалуы қажетті және жеткілікті. Және жалпы интеграл мына түрде жазылады:

$$\int_{x_0}^{x} M(x; y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0; y)dy = C, \qquad (4)$$

немесе:

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)dy = C, \qquad (5)$$

мұндағы $M_0(x_0, y_0) \in D$.

Мысал 4. $(3x^3+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$ теңдеуін шеш.

Шешуі:

$M=3x^3+6xy^2, N=6x^2y+4y^3$ және $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=12xy$ болғандықтан, бұл толық дифференциалды теңдеу. $(x_0;y_0)=(0;0)$ болсын. Онда

$\int_0^x(3x^2+6xy^2)dx+\int_0^y 4y^3dy=\left[x^3+3x^2y^2\right]_0^x+y^4\Big|_0^y\Rightarrow x^3+3x^2y^2+y^4=C$ - жалпы интеграл.

Мысал 5. $\left(x^2+y-4\right)dx+\left(x+y+e^x\right)dy=0$ теңдеудің жалпы интегралын тап.

► $P=x^2+y-4,\quad Q=x+y+e^y$ белгілеуін енгіземіз. $\frac{\partial P}{\partial y}=1,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=1$, яғни, (3) шарты орындалады, берілген теңдеу толық дифференциалды теңдеу. Оның жалпы интегралын (4) немесе (5) түрінде іздейміз, қарапайымдылық үшін $x_0=0,\ y_0=0$ деп аламыз. x_0, y_0-дің бұл мәндерін таңдап алуымыз дұрыс, себебі $P(x,y),\ Q(x,y)$ функциялары мен оның дербес туындылары осы нүктеде анықталған, яғни, $M_0(0,0)\in D.$ (4) формуласынан:

$$\int_0^x\left(x^2+0-4\right)dx+\int_0^y\left(x+y+e^y\right)dy=C,$$

$$\frac{x^3}{3}-4x+xy+\frac{y^2}{2}+e^y-1=C,$$

ал (5) формуласынан:

$$\int_0^x\left(x^2+y-4\right)dx+\int_0^y\left(0+y+e^y\right)dy=C,$$

$$\frac{x^3}{3}+xy-4x+\frac{y^2}{2}+e^y-1=C$$

шығады, бұл (4) формуласынан табылған жалпы интегралмен беттеседі.◄

17.2 Жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулердің негізгі түрлері және оны интегралдау әдістері

17.2.1 $F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},...,y^{(n)})=0$ түріндегі теңдеу

Ретін төмендетуге болатын жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулердің әртүрлі түрлерін қарастырамыз.

$$F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},...,y^{(n)})=0 \qquad (6)$$

- бұл дифференциалдық теңдеудің құрамына ізделініп отырған y функциясы мен оның (k-1)-ретке дейінгі туындылары кірмейді.Бұл жағдайда, ретін төмендету мына ауыстыру көмегімен жүзеге асырылады: $y^{(k)}=z, y^{(k+1)}=z',...,y^{(n)}=z^{(n-k)}$

Мысал 6. $y'''-y''=0\Rightarrow\left|y''=z, y'''=z'\right|\Rightarrow z'-z=0\Rightarrow$

$\Rightarrow z=C_1e^{\int dx}=C_1e^x\Rightarrow y''=C_1e^x\Rightarrow y'=\int C_1e^xdx+C_2=C_1e^x+C_2\Rightarrow$

$y = \int \left[C_1 e^x + C_2 \right] dx \Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 x + C_3$

Мысал 7. Коши есебін шеш:

$$xy'' - y' - x\sin\frac{y'}{x} = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Шешуі. берілген теңдеу (6) түріндегі теңдеуге жатады. Жаңа функция $y' = p, \ \ y'' = p'$ енгіземіз, теңдеудің екі жағын да x-ке бөліп, берілген теңдеу мына түрге келеді: $p' - \frac{p}{x} - \sin\frac{p}{x} = 0$ немесе $p' = \frac{p}{x} + \sin\frac{p}{x}$. Теңдіктің оң жағы $\frac{p}{x} + \sin\frac{p}{x}$ -нөлінші ретті біртекті функция, ендеше бұл біртекті дифференциалдық теңдеу. $p = zx, \ \ p' = z'x + z$ ауыстыруын жасаймыз. Онда $z'x + z - z - \sin z = 0$,яғни, $z'x - \sin z = 0$ теңдеуін шешеміз. Айнымалыларды ажырату арқылы: $\frac{dz}{\sin z} = \frac{dx}{x}$ $\ln\left|tg\frac{z}{2}\right| = \ln x + \ln c_1$, $tg\frac{z}{2} = xc_1$, $z = 2arctgxc_1$. Теңдеудегі z -тің орнына жоғарыдағы ауыстыруларды қоятын болсақ: $p = zx, \ \ z = \frac{y'}{x}$, онда $y' = 2xarctgxc_1$ $\rightarrow$ $\int dy = \int 2xarctgxc_1 dx$. Ары қарай бөліктеп интегралдасақ: $U = arctgxc_1, \ dU = \frac{c_1 dx}{1 + (xc_1)^2}, \ dV = 2xdx, \ \ V = x^2,$

$$y = x^2 arctgxc_1 - \int \frac{c_1 x^2}{1 + (xc_1)^2}\, dx = x^2 arctgxc_1 - \frac{1}{c_1}\int \frac{1 + c_1^2 x^2 - 1}{1 + (xc_1)^2}\, dx =$$

$$= x^2 arctgxc_1 - \frac{1}{c_1}x + \frac{1}{c_1^2} arctgxc_1 + c_2 = \left(x^2 + \frac{1}{c_1^2} \right) arctgxc_1 - \frac{1}{c_1}x + c_2$$ аламыз.

Сонымен, берілген теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = x^2 arctgxc_1 - \frac{1}{c_1}x + \frac{1}{c_1^2} arctgxc_1 + c_2$$ немесе

$$y = \left(x^2 + \frac{1}{c_1^2} \right) arctgxc_1 - \frac{1}{c_1}x + c_2.$$

Теңдеудің дербес шешімін табу үшін бірінші табылған функцияның туындысын табамыз:

$$y' = 2xarctgxc_1 + \left(x^2 + \frac{1}{c_1^2} \right) \cdot \frac{c_1}{1 + x^2 c_1^2} - \frac{1}{c_{1\,1}}.$$

Берілген $y(1) = \frac{\pi}{2}, \quad y'(1) = \frac{\pi}{2}$ бастапқы шартты ескерсек:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} = \left(1^2 + \frac{1}{c_1^2} \right) arctg1 \cdot c_1 - \frac{1}{c_1} \cdot 1 + c_2 \\ \\ \frac{\pi}{2} = 2 \cdot 1 \cdot arctg(1 \cdot c_1) + \left(1^2 + \frac{1}{c_1^2} \right) \cdot \frac{c_1}{1 + 1^2 c_1^2} - \frac{1}{c_1} \end{cases}$$

Жүйенің соңғы теңдеуінен c_1 тұрақтысын анықтаймыз:

$$\frac{\pi}{2} = 2arctgc_1 + \frac{c_1^2+1}{c_1^2}\cdot\frac{c_1}{1+1^2c_1^2} - \frac{1}{c_1}, \qquad arctgc_1 = \frac{\pi}{4} \quad => \ c_1 = 1.$$

Бірінші теңдеуден c_2 тұрақтысын анықтаймыз:

$$\frac{\pi}{2} = \left(1^2 + \frac{1}{1^2}\right)arctg1 - \frac{1}{1}\cdot 1 + c_2, \quad \frac{\pi}{2} = 2\cdot\frac{\pi}{4} - 1 + c_2, \quad c_2 = 1.$$

Сонымен, $c_1 = 1, \quad c_2 = 1$.

Ендеше, ізделінді дербес шешім:

$$y = \left(x^2+1\right)arctgx - x + 1.$$

17.2.2 $F(y\ , y', ..., y^{(n)}) = 0$ түріндегі теңдеу

$$F(y\ , y', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (7)$$

түріндегі дифференциалдық теңдеуді қарастырамыз. Бұл жоғарғы ретті бұл теңдеудің түріне тәуелсіз айнымалы x кірмейді. Бұл жағдайда мынадай белгілеу енгіземіз: $y' = \frac{dy}{dx} = p$. Күрделі функцияны дифференциалдау ережесін қолданып, мына теңдіктерді аламыз:

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{dp}{dx}\frac{dp}{dy} + p\frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}\right)\cdot\frac{dy}{dy} = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}, \dots \quad .$$

Дәл осылай, одан да жоғарғы ретті туындыларын тауып, орнына қойсақ $y^{(k)}$ туындылары *p=p(y)* функциясының y-тен тәуелді *k-1* реттен аспайтын туындылары арқылы өрнектелетіні анық, бұл теңңдеудің иретін бір санға келтіруге мүмкіндік тудырады. Бұл жағдайды мысал көмегімен қарастырып көрелік.

Мысал 8. $yy'' - (y')^2 = y'$ теңдеуін шеш.

Шешуі. Жаңа функция енгіземіз: $y' = p\,; y'' = p'_y \cdot p$, онда

$$ypp' - p^2 = p \Rightarrow p' - \frac{1}{y}p = \frac{1}{y} \Rightarrow p = e^{\int\frac{dy}{y}}\cdot\left(C_1 + \int\frac{1}{y}\cdot e^{-\int\frac{dy}{y}}dy\right) =$$

$$= y\left(C_1 + \int\frac{dy}{y^2}\right) = y\left(C_1 - \frac{1}{y}\right) = C_1y - 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = C_1y - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{C_1y-1} = dx \Rightarrow \frac{1}{C_1}\cdot\ln\left|C_1y-1\right| = x + C_2.$$

Мысал 9. $y'' - 2yy' = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін тап.

Шешуі. Теңдеуді шешу үшін, жаңа функция енгіземіз $p(y) = y'$. Онда

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy} \quad , \quad p\frac{dp}{dy} - 2yp = 0 \ , \quad \frac{dp}{dy} - 2y = 0 \ , \ p = y^2 + c_1^2,$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + c_1^2, \qquad \int\frac{dy}{y^2+c_1^2} = \int dx, \ \frac{1}{c_1}arctg\frac{y}{c_1} = x + c_2 \ , \ arctg\frac{y}{c_1} = c_1x + c_2c_1.$$

Сонымен, берілген теңдеудің жалпы шешімі:
$y = c_1 tg(c_1 x + \bar{c}_2)$, мұндағы $\bar{c}_2 = c_2 c_1$

17.2.3 $y^{(n)} = f(x)$ түріндегі теңдеу

$y^{(n)} = f(x)$ түріндегі, яғни, оң жағы тек x айнымалысына ғана тәуелді болатын дифференциалдық теңдеуді қарастырайық.

Онда $y = \int\int ...\int f(x)dxdx...dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + ... + C_{n-1}x + C_n$ - теңдеудің жалпы шешімі.

Мысал10. $xy''' = 2x + 3$ теңдеуінің жалпы шешімін тап.

Шешуі. Алдымен теңдеуді (1) түріне келтіреміз:

$$y''' = \frac{2x+3}{x}$$

(2) формулаға сәйкес біртіндеп интегралдасақ:

$$y'' = \int \frac{2x+3}{x}dx = \int\left(2 + \frac{3}{x}\right)dx = 2x + 3\ln x + C_1,$$

$$y' = \int(2x + 3\ln x + C_1)dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, \ du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, \ v = x_1 \end{matrix} \right| = x^2 + 3x\ln x - 3x + Cx_1 + C_2 .$$

$$y = \int\left(x^2 + 3x\ln x - 3x + +Cx_1 + C_2\right)dx = \frac{x^3}{3} + 3\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \int\frac{x^2}{2}\frac{dx}{x}\right) - \frac{3x^2}{2} + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3 =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\ln x - \frac{3x^2}{4} - \frac{3x^2}{2} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3 = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\ln x + \overline{C_1}\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3, \text{ мұндағы}$$

$$\overline{C_1} = \frac{C_1}{2} - \frac{4}{3} - \frac{3}{2}.$$

17.3 Өз бетімен шығаруға арналған есептер

Келесі дифференциалдық теңдеулерді өз беттеріңмен интегралдаңдар.

I. Коши есебін шығар:

1. $y' + 3y = e^{2x}y^2, \qquad y(0) = 1;$

(*Жауабы :* а) $y = e^{-2x}$)

2. а) $y^2dx = \left(x + ye^{-1/y}\right)dy, \quad y(0) = 3;$

б) $y' - 7y = e^{3x}y^2, \qquad y(0) = 2.$

(*Жауабы :*а) $x = e^{-1/y}(3 + y);$ *б)* $y = 10e^{7x}/(e^{10x} - 6).$)

3. а) $xdy = (e^{-x} - y)dx, \qquad y(1) = 1;$

б) $y' - \dfrac{y}{x-1} = \dfrac{y^2}{x-3}, \qquad y(1) = -2.$

(*Жауабы :п* а) $y = \dfrac{1}{x}\left(1 + \dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{e^x}\right);$ *б)* $y = \dfrac{x-3}{2-x}.$)

4. а) Коши есебін шығар:

$(2x + y + 3x^2\sin y)dx + (x + x^3\cos y + 2y)dy = 0; \quad y(0) = 2.$

($Жауабы$: $x^2+xy+\frac{1}{2}y^2+x^3\sin y=2.$)

б) Жоғарыдан бастапқы жылдамдығы $v(0)=0$, салмағы m болатын дене құлады. Дененің кез келген t уақыт мезетіндегі $v=v(t)$ жылдамдығын тап, егер оған $P=mg$ ауырлық күшінен басқа $v(t)$ жылдамдығына пропорционал, пропорционалдық коэффиценті 3/2-ге тең болатын ауаның кедергі күші де әсер ететін болса. (*Жауабы :* $v=\frac{3}{2}mg\left(1-e^{3t/(2m)}\right).$)

5.Дифференциал теңдеудің жалпы интегралын тап:

$(3x^2y+\sin x)dx+(x^3-\cos y)dy=0.$ (*Жауабы :* $x^3y-\cos x-\sin y=C.$)

6.Дифференциал теңдеудің дербес шешімін тап:

$\left(2x\ln y+\frac{y^2}{\cos^2 x}\right)dx+\left(\frac{x^2}{y}+tgx+e^y\right)dy=0,\quad y(0)=1.$ (*Жауабы :* $x^2\ln y+ytgx+e^y=e.$)

II. Келесі жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулерді шешіңдер

1.Келесі теңдеулерді шешіңдер:

а) $y'''=x^2-\sin x$ б) $y^{(4)}=y'''/x$ в) $yy''=y'^2$

2.Коши есебін шеш:

а) $y''=\ln x/x^2,\ y(1)=3,\ y'(1)=1;$

б) $xy'''-y''=x^2+1,\ y(-1)=0,\ y'(-1)=1, y''(-1)=0;$

в) $y''=e^{2y},\ y(0)=0,\ y'(0)=1$

3. $x^2y'''=y''^2$ теңдеуін шеш.

4. Коши есебін шеш: $2y'^2=(y-1)y'',\ y(0)=0,\ y'(0)=1;$

5. $xy''-y'=x^2e^x$ теңдеуін шеш.

6. Коши есебін шеш: $y^3y''+1=0\ y(1)=1,\ y'(1)=0$

7. $xy''+y'=y'^2$ теңдеуін шеш.

8. Коши есебін шығар: $2y''=3y^2,\ y(2)=1,\ y'(2)=-1$

17.4 Сұрақтар

1. Бернулли теңдеуі және шешу әдістері.
2. Толық дифференциалды теңдеулерді интегралдау.
3. Жоғарғы ретті дифференциал теңдеулерді шешу. Коши есебі.
4. Жоғарғы ретті дифференциал теңдеулердің түрлері.
5. Жоғарғы ретті дифференциал теңдеулердің ретін төмендету әдістері.

18 ЖОҒАРҒЫ РЕТТІ СЫЗЫҚТЫҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

18.1 Теңдеулер шешімінің жалпы құрылымы

Анықтама 1. n - ші ретті сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеу деп мына түрдегі теңдеуді айтамыз:

$$L[y]=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x), \qquad (1)$$

мұндағы $a_i=a_i(x),\ i=\overline{1,n}$ теңдеудің коэффиценттері, қандай да кесіндіде үзіліссіз функциялар.

Теңдеудің оң жағы $L[y]\equiv y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny$ сызықтық оператор деп аталады. $L[y_1\pm y_2]\equiv L[y_1]+L[y_2]$ және $L[Cy]\equiv CL[y]$ теңдігі орындалатынына оңай көз жеткізуге болады, $C-const$.

Теорема 1 (Пикар). Қандай да бір D облысының барлық нүктелерінде үзіліссіз болатын $a_i=a_i(x),\ i=\overline{1,n}$ және $f(x)$ функциялары үшін (1) Коши есебінің тек жалғыз ғана шешімі табылады.

Ары қарай, біз $a_i=a_i(x),\ i=\overline{1,n}$ және $f(x)$ функцияларын D облысында үзіліссіз деп қарастырамыз.

1. Сызықтық біртекті теңдеудің жалпы шешімі.

$$L[y]=0 \qquad (2)$$

Анықтама 2. $y_1,y_2,...,y_m$ функциялары $(a;b)$ аралығында сызықты тәуелді деп аталады, егер төмендегі теңдеуді қанағаттандыратын барлығы бірдей нөлге тең емес $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$, тұрақтылары табылатын болса:

$$\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+...+\alpha_my_m=0\ , \qquad \forall x\in(a;b)$$

кері жағдайда, сызықты тәуелсіз деп аталады.

Мысал 1.

а) $y_1=x,\quad y_2=x^2,\quad y_3=3x,\quad y_4=2x-x^2$ - функциялары $(-\infty;\infty)$ аралығында сызықты тәуелді, себебі:

1) $\alpha_1=-3,\alpha_2=0,\alpha_3=1,\alpha_4=0\Rightarrow-3y_1+0\cdot y_2+y_3+0\cdot y_4=-3y_1+y_3=-3x+3x\equiv0\Rightarrow y_3=3y_1$,

2) $\alpha_1=-2,\alpha_2=1,\alpha_3=0,\alpha_4=1\Rightarrow-2y_1+y_2+y_4=-2x+x^2+(2x-x^2)\equiv0\Rightarrow y_4=2y_1-y_2$.

б) $1,\ x,\ x^2$ функциялары $(-\infty;\infty)$ аралығында сызықты тәуелсіз, себебі $\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3x^2=0$ теңдігі барлық x үшін емес, тек x-тің екі мәні үшін ғана орынды.

Сызықты тәуелді $y_1,y_2,...,y_n$ функцияларының $(n-1)$ - ші ретке дейінгі туындылары бар болса, онда олар Вронский анықтауышы деп аталатын:

$$W[y_1;y_2;\ldots;y_n]=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$ анықтауыш көмегімен анықталады.

Теорема 2. Егер $y_1,y_2,...,y_n$ функциялары $(a;b)$, аралығында сызықты тәуелді болса, онда осы $(a;b)$ аралығында $W[y_1,y_2,...,y_n]\equiv0$.

Теорема 3. Егер (2) теңдеуінің дербес шешімдері $y_1,y_2,...,y_n$ $(a;b)$ аралығында сызықты тәуелсіз функциялар болса, онда $\forall x\in(a\ ;\ b)$: $W[y_1,y_2,...,y_n]\neq0$.

Анықтама 3. Кез келген (2) теңдеуінің n сызықты тәуелсіз дербес шешімдер жүйесі фундаментальдық шешімдер жүйесі деп аталады.

Теорема 4. (2) дифференциалдық теңдеуінің әрқашанда фундаменталдық шешімдер жүйесі табылады.

Теорема 5. Егер $y_1, y_2, ..., y_n$ - (2) теңдеуінің дербес шешімдері болса, онда

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \qquad (3)$$

мұндағы C_i, $i = \overline{1, n}$ - кез келген тұрақтылар және бұл да (2) теңдеуінің шешімі болады.

(3) шешімінде n тұрақты бар. Қандай шарт орындалғанда (3) шешімі (2) теңдеуінің жалпы шешімі болады.

Теорема 6. Егер (2) теңдеуінің дербес шешімдері $y_1, y_2, ..., y_n$ фундаменталдық шешімдер жүйесін құраса, онда (3) шешімі (2) теңдеуінің жалпы шешімі болады.

Мысал 2. e^x, e^{-x}, e^{2x} функциялар жүйесі $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ теңдеуінің фундаментальдық шешімдер жүйесі болатынын көрсет және оның жалпы шешімін жаз.

Шешуі: $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}, y_3 = e^{2x}$ функциялары мен оның туындыларын берілген теңдеуге қою арқылы олар теңдеудің шешімі болатынына көз жеткізуге болады. Оның вронскианы:

$$W\left(e^x, e^{-x}, e^{2x}\right) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = e^x e^{-x} e^{2x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -6e^{2x} \neq 0 .$$

Ендеше, e^x, e^{-x}, e^{2x} сызықты тәуелсіз функциялар және берілген теңдеудің фундаментальдық шешімдер жүйесін құрайды. Оның жалпы шешімі (4) формуласына сәйкес:

$$\tilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} .$$

Мысал 3. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x + 1$ теңдеуінің жалпы шешімін жаз, егер оның дербес шешімдерінің біреуі $y^* = x + 1$ функциясы болса.

Шешуі: Сәйкес біртекті дифференциал теңдеудің жалпы шешімі $\tilde{y}$ 2-мысалда табылған, онда теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = \tilde{y} + y^* \Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + x + 1 .$$

18.2 Кез келген тұрақтыны вариациялау әдісі

Теорема 7. (1) теңдеуінің жалпы шешімі осы теңдеудің дербес шешімі мен оған сәйкес (2) біртекті теңдеуінің жалпы шешімінің қосындысына тең.

Ендеше, (1) теңдеуінің жалпы шешімін табу үшін :

1) (2) біртекті теңдеуінің жалпы шешімін,
2) (1) теңдеуінің дербес шешімін

табу қажетті.

Тұрақты шаманы вариациялау әдісі (2) теңдеуінің жалпы шешімі белгілі болғанда (1) теңдеуінің дербес шешімін табу үшін қолданылады.

(3) шешімі (2) теңдеуінің жалпы шешімі болсын. (1) теңдеуінің дербес шешімін (3) түрінде іздейміз, C_i, $i=\overline{1,n}$ -ді x-ке тәуелді белгісіз функция деп қарастырамыз. Шешімді табу үшін n шарт қажет. Осы шарттар ретінде мына $(n-1)$ шарт

$$y^{(i)} = C_1 y_1^{(i)} + C_2 y_2^{(i)} + \ldots + C_n y_n^{(i)}, \quad i=\overline{1,n-1} \tag{4}$$

пен (1) теңдеуін (3) қанағаттандыратын шартты аламыз. (4)-тен $y^{(i)}$ -ді, мұндағы $i=\overline{1,n-1}$, анықтайтын өрнекте C_i, $i=\overline{1,n}$ функциясының туындысы болмауы қажет екенін көруге болады. $C_i(x)$ мынадай жүйе көмегімен анықталады:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}, \tag{5}$$

бұл n белгісіз C_i'-ке тәуелді сызықты алгебралық теңдеулер жүйесі. Теңдеулер жүйесінің анықтауышы фундаменталдық шешімдер жүйесі $y_i(x)$ нөлден өзгеше болатын жағдайдағы Вронский анықтауышы. Сондықтан, (5) жүйесінің тек бір ғана шешімі бар: $C_i'(x) = \varphi_i(x)$. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеу болатын соңғы теңдіктің екі жағын да интегралдап, $C_i(x) = \int \varphi_i(x)dx$ табамыз.

Сонымен, (1) теңдеуінің дербес шешімі:

$$y^* = y_1 \int \varphi_1(x)dx + y_2 \int \varphi_2(x)dx + \ldots + y_n \int \varphi_n(x). \tag{6}$$

Мысал 4. Теңдеудің жалпы шешімін тап:

$$y'' - \frac{y'}{x} = x \tag{7}$$

Шешуі.

1) $y'' - \dfrac{y'}{x} = 0$ біртекті теңдеуінің жалпы шешімін тап.

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x} \Rightarrow ln\, y' = ln\, x + ln\, 2C_1 \Rightarrow y' = 2C_1 x \Rightarrow \tilde{y} = C_1 x^2 + C_2 .$$

2) (7) теңдеуінің дербес шешімін табамыз. Шешімді $y = C_1(x) \cdot x^2 + C_1(x)$ түрінде іздейміз. Онда $y' = 2C_1 x + C_1' x^2 + C_2'$. y' өрнегі C_1' пен C_2' арқылы өрнектелмеуі керек болғандықтан, $C_1' x^2 + C_2' = 0$ деп аламыз, яғни, $y' = 2C_1 x$. y-ті (5)-ке қойып, екінші шартты табамыз. $y'' = 2C_1 + 2C_1' x$ болғандықтан, $2C_1 + 2C_1' x - \dfrac{2C_1 x}{x} = x \Rightarrow 2C_1' = 1$.

$C_1(x)$ мен $C_2(x)$ -ні табу үшін:

$$\begin{cases} C_1' = \dfrac{1}{2} \\ C_1'x^2 + C_2' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{2}x + C_3 \\ C_2' = -\dfrac{1}{2}x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{2}x + C_3 \\ C_2 = -\dfrac{1}{6}x^3 + C_4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\{\ |C_3 = C_4| \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{2}x \\ C_2 = -\dfrac{1}{6}x^3 \end{cases}.$$

Сонымен, теңдеудің дербес шешімі $y^* = \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^3}{6} = \dfrac{x^3}{3}$, ал жалпы шешімі – $y = C_1x^2 + C_2 + \dfrac{x^3}{3}$.

Мысал 5.

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$$

(8)

теңдеуінің жалпы шешімін тап.

Шешуі. (8) теңдеуіне сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімі:

$$\tilde{y} = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x}.$$

(8) теңдеуінің жалпы шешімін алу үшін, Лагранж әдісін қолданып оның y^* дербес шешімін табамыз. (5) формуласына сәйкес:

$$y^* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x} + C_3(x)e^{2x}.$$

Біздің жағдайымызда (5) жүйесі мына түрде болады:

$$\begin{cases} C_1'e^x + C_2'e^{-x} + C_3'e^{2x} = 0 \\ C_1'e^x - C_2'e^{-x} + 2C_3'e^{2x} = 0 \\ C_1'e^x + C_2'e^{-x} + 4C_3'e^{2x} = \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1} \end{cases} \tag{9}$$

Оның анықтауышы $W = -6e^{2x} \neq 0$. (9) жүйесін Крамер ережесін қолданып шешсек:

$$C_1' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{e^x}{e^x + 1};\ C_2' = \frac{1}{6} \cdot \frac{e^{3x}}{e^x + 1};\ C_3' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{e^x + 1}. \tag{10}$$

(10)-ды интегралдап, мына теңдіктерді аламыз:

$$C_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{e^x}{e^x + 1} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} = -\frac{1}{2}\ln(e^x + 1);$$

$$C_2 = \frac{1}{6}\int \frac{e^{3x}dx}{e^x + 1} = \frac{1}{6}\int \frac{e^{2x}d(e^x)}{e^x + 1} = \frac{1}{6}\int\left(e^x - 1 + \frac{1}{e^x + 1}\right)de^x;$$

$$C_3 = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{e^x + 1} = \frac{1}{3}\int \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1}dx = \frac{1}{3}\int\left(1 - \frac{e^x}{e^x + 1}\right)dx = \frac{1}{3}\left(x - \int \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1}\right) = \frac{1}{3}\left(x - \ln(e^x + 1)\right)$$

Онда (8) теңдеуінің дербес шешімі:

$$y^* = -\frac{1}{2}e^x \ln\left(e^x+1\right) + \frac{1}{6}e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x} + \ln\left(e^x+1\right)\right) + \frac{1}{3}e^{2x}\left(x - \ln\left(e^x+1\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{12}e^x - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}xe^{2x} + \left(\frac{1}{6}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{3}e^{2x}\right)\ln\left(e^x+1\right).$$

Ал, (8) теңдеуінің жалпы шешімі:

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x} + \frac{1}{2}\left(4xe^{2x} + e^x - 2\right) + \frac{1}{6}\left(e^{-x} - 3e^x - 2e^{2x}\right)\ln\left(e^x+1\right).$$

18.3 Өз бетімен шығаруға арналған есептер

Кез келген тұрақты шаманы вариациалау әдісін қолданып, келесі дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімдерін өз беттеріңмен табыңдар:

1. $y'' + 9y = \dfrac{1}{\sin 3x}$;
2. $y'' + 8y = \dfrac{1}{\sin 2x}$;
3. $y'' - 3y' + 3y = \dfrac{e^x}{\sin^2 x}$;
4. $y'' + y = ctgx$;
5. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$;
6. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x^3}$;
7. $y'' + 2y' + 3y = \dfrac{e^{-x}}{\cos x}$;
8. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}ctgx$;
9. $y'' + 16y = \dfrac{1}{\cos 3x}$;
10. $y'' + 2y' + 5y = \dfrac{e^{-x}}{\sin^2 x}$;
11. $y''' + y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$;
12. $y'' + 9y = \dfrac{1}{\cos 3x}$.

18.4Сұрақтар

1.Жоғарғы ретті сызықты дифференциал теңдеулер. Коши есебі.
2.Сызықты біртекті дифференциал теңдеулердің шешімдерінің қасиеті мен оның жалпы шешімінің құрылымы.
3.Сызықты біртекті емес дифференциал теңдеулердің жалпы шешімінің құрылымы.

19 ТҰРАҚТЫ КОЭФФИЦИЕНТТІ СЫЗЫҚТЫҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

Жоғарғы ретті сызықтық дифференциал теңдеулерді қарастыралық.

Анықтама 1. Егер сызықты дифференциалдық теңдеудегі:

$$L[y] = y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x), \qquad (1)$$

коэффиценттері деп аталатын барлық a_i, $i = \overline{1,n}$ - тұрақты сандар болса, онда ол тұрақты коэффициентті сызықты дифференциалдық теңдеулер деп аталады.

19.1 Жоғарғы ретті біртекті дифференциалдық теңдеулер

Оң жағы нөлге тең болатын теңдеулер жүйесінің фундаменталдық шешімдер жүйесін табайық:

$$L[y]=0 \tag{2}$$

Оның дербес шешімін $y=e^{kx}$ түрінде іздейміз, мұндағы k - қандай да бір тұрақты. Осы тұрақтыны табалық. (2)-ге $y=e^{kx}$ қойсақ:

$$L\left[e^{kx}\right]=e^{kx}\left(k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\ldots+a_{n-1}k+a_n\right)=0\,.$$

$\forall x:\ e^{kx}\neq 0$ болғандықтан, $y=e^{kx}$ (2) теңдеуінің шешімі болады, егер k мінездемелік деп аталатын мынадай алгебралық теңдеудің түбірі болса:

$$k^n+a_1k^{n-1}+\ldots+a_n=0\,.$$

$n=2$ жағдайы үшін фундаменталдық шешімдер жүйесін табу мәселесіне тоқталайық:

$$y''+py'+qy=0\ . \tag{3}$$

Бұл теңдеудің мінездемелік теңдеуі былай болады:

$$k^2+pk+q=0\,. \tag{4}$$

Ол алгебралық квадраттық теңдеу болғандықтан, мынадай жағдайлар болуы мүмкін:

1) $D=p^2-4q>0$. Онда $k_1\neq k_2$- (4) теңдеуінің нақты түбірлері. $y_1=e^{k_1x}$ және $y_2=e^{k_2x}$ дербес шешімдері фундаменталдық шешімдер жүйесін құрайды, себебі

$W[y_1,y_2]=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} \end{vmatrix}=e^{(k_1+k_2)x}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix}=e^{(k_1+k_2)x}\cdot\left(k_2-k\right)\neq 0$, өйткені $k_1\neq k_2$.

Сызықты теңдеулердің жалпы теориясын қолданып, (3) теңдеуінің жалпы шешімін аламыз:

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x} \tag{5}$$

2) $D=p^2-4q<0$. Түбірлері түйіндес комплекс сандар: $k_{1,2}=\alpha\pm i\beta$. Теңдеудің дербес шешімдері былай болады: $y_{1,2}=e^{(\alpha\pm i\beta)x}=e^{\alpha x}\cdot e^{\pm i\beta}=e^{\alpha x}\left(\cos\beta x\pm i\sin\beta x\right)$.

Сызықты операторлардың қасиеттерінен: $L[U(x)+iV(x)]\Rightarrow L[U]+iL[V]\equiv 0\Rightarrow L[U]=0$ және $L[V]=0$ екендігі шығады, яғни, теңдеудің фундаменталдық шешімдер жүйесі $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$ функцияларынан тұрады. Ендеше, теңдеудің жалпы шешімі:

$$y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x\pm C_2\sin\beta x\right). \tag{6}$$

3) $D=p^2-4q=0$. Онда $k_1=k_2=k=-\dfrac{p}{2}$. Тек бір ғана шешім табамыз: $y_1=e^{kx}$.

Бірінші шешім y_1-ге тәуелсіз теңдеудің екінші шешімін табамыз. Шешімді $y_2=U(x)e^{kx}$ түрінде іздейміз.

$L[y]=e^{kx}\cdot\left[u''+(2k+p)u'+\left(k^2+pk+q\right)\right]\Rightarrow u''=0\Rightarrow u=Ax+B\Rightarrow\left|A=1,\ B=0\right|\Rightarrow u=x.$

Теңдеудің фундаменталдық шешімдер жүйесі мына түрде болады: $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = xe^{kx}$, себебі $W[y_1, y_2] \neq 0$. Онда берілген дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}. \tag{7}$$

Сонымен, жалпы жағдайда, (2) теңдеуінің шешімін алу үшін:
1) мінездемелік теңдеуін құру және оны шешу
2) теңдеудің фундаменталдық шешімдер жүйесін табу:
А) әрбір бір еселі k нақты түбіріне $y = e^{kx}$ дербес шешімі сәйкес келеді.
Б) Бір еселі әрбір $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ комплекс түбірлер жұбына $y_1 = e^{\alpha x} \cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin\beta x$ екі дербес шешім сәйкес келеді.
В) әрбір r- еселі k нақты түбіріне r дербес шешім сәйкес келеді:
$y = e^{kx}$, $y_2 = xe^{kx}$, $y_3 = x^2 e^{kx}$, …, $x^{r-1} e^{kx}$.
Г) әрбір r-еселі $k = \alpha \pm i\beta$ комплекс түбірлеріне $2r$ шешім сәйкес келеді:
$y_1 = e^{kx}\cos\beta x$, $y_2 = xe^{kx}\cos\beta x$, $y_3 = x^2 e^{kx}\cos\beta x$, …, $y_r = x^{r-1}e^{kx}\cos\beta x$,
$\bar{y}_1 = e^{kx}\sin\beta x$, $\bar{y}_2 = xe^{kx}\sin\beta x$, $\bar{y}_3 = x^2 e^{kx}\sin\beta x$, …, $\bar{y}_r = x^{r-1}e^{kx}\sin\beta x$,
Дербес шешімдердің саны тура n-ге тең және олар фундаменталдық шешімдер жүйесін құрайды.
3) жалпы шешімін жазу: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$.

Мысал 1. Берілген теңдеудің жалпы шешімін тап

$$y^{IV} - 2y'' = 0.$$

Шешуі.

а) Мінездемелік теңдеуін құрып, оны шешеміз:
$k^4 - 2k^2 = 0 \Rightarrow k^2(k^2 - 2) = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 0$, $k_{3,4} = \pm\sqrt{2}$.

б) y_1, y_2, y_3, y_4 фундаменталды шешімдер жүйесін табамыз.
$k = 0$ - екі еселі түбір, онда: $y_1 = e^{0x} = 1$, $y_2 = x \cdot e^{0x} = x$.
$k = -\sqrt{2} \Rightarrow y_3 = e^{-\sqrt{2}x}$, $k = \sqrt{2} \Rightarrow y_4 = e^{\sqrt{2}x}$.

в) Жалпы шешімі: $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-\sqrt{2}x} + C_4 e^{\sqrt{2}x}$

Мысал 2. $y^{V} + 2y''' + y' = 0$

а) $k^5 + 2k^3 + k = 0 \Rightarrow k(k^2+1)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = 0$, $k = \pm i$ - екі еселі түбір.
б) $k = 0 \Rightarrow y_1 = 1$, $k = \pm i \Rightarrow y_2 = \cos x$, $y_3 = \sin x$, $y_4 = x\cos x$, $y_5 = x\sin x$.
в) $y = C_1 + C_2\cos x + C_3 \sin x + C_4 x\cos x + C_5 x \sin x$.

19.2 Жоғарғы ретті біртекті емес дифференциалдық теңдеулер

Тұрақты коэффицентті және оң жағы квазиполином (көрсеткіштік функцияға көбейтілген көпмүшелік) деп аталатын $f(x)$ функциясы болатын дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін тұрақты шаманы вариациалау әдісін қолданбай, басқа оңай әдіспен шығаруға болады.

$P_n(x)$ және $Q_m(x)$ сәйкесінше n-ші және m-ші дәрежелі көпмүшеліктер, ал r саны мінездемелік теңдеудің түбірі α $(\alpha \pm i\beta)$ -ның еселігі болсын, егер α $(\alpha \pm i\beta)$ мінездемелік теңдеудің түбірі болмаса, онда $r = 0$.

Егер

1. $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, онда дербес шешімді мына түрде іздейміз: $y^* = x^r \overline{P}_n(x)e^{\alpha x}$, (8)

мұндағы $\overline{P}_n(x)$ - коэффиценттері белгісіз көпмүшелік.

2. $f(x) = [P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\,]e^{\alpha x}$, онда $\bar{y} = x^r[U_k(x)\cos\beta x + V_k(x)\sin\beta x\,]e^{\alpha x}$, (9)

мұндағы $k = max(n, m)$, ал U_k және V_k - коэффиценттері белгісіз көпмүшеліктер.

Мысал 3. Берілген теңдеудің жалпы шешімін тап:

$$y'' + 4y' + 3y = xe^{-x} \qquad (10)$$

Шешуі.

$y'' + 4y' + 3y = 0$ біртекті теңдеуінің жалпы шешімін табамыз.

$k^2 + 4k + 3 = 0 \Rightarrow k_1 = -1\,, k_2 = -3 \Rightarrow \widetilde{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$.

(10) теңдеуінің дербес шешімін табалық: $f(x) = xe^{-x} \Rightarrow P_n(x) = x$, $\alpha = -1$ - бір еселі түбір $(\alpha = k_1) \Rightarrow r = 1, \overline{P}_n(x) = ax + b\,, y^* = x(ax+b)e^{-x}$, мұндағы a және b сандарын y^* (10) теңдеуінің шешімі болатындай етіп алуымыз керек.

$(y^*)' = \left[-ax^2 + (2a-b)x + b\right]e^{-x} \Rightarrow (y^*)'' = \left[ax^2 - (4a-b)\,x + 2a - 2b\right]e^{-x}$.

Табылған y^*, $(y^*)'$, $(y^*)''$-терді (10) теңдеуіне қоямыз және x-тің бірдей дәрежесінің коэффиценттерін теңестіре отырып, белгісіз коэффиценттерді табамыз:

$$\left\{\left[-ax^2 - (4a-b) + 2a - 2b\right] + 4\left[-ax^2 + (2a-b)\,x + b\right] + 3\left[ax^2 + bx\right]\right\}e^{-x} = xe^{-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4ax + (2a + 2b) \equiv x \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{4},\; b = -\frac{1}{4}.$$

Теңдеудің дербес шешімі $y^* = \frac{1}{4}x(x-1)e^{-x}$, ал жалпы шешімі

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + \frac{1}{4}x(x-1)\,e^{-x}.$$

Мысал 4. $y'' + 2y' + 5y = 2\cos x$.

Шешуі: $k^2 + 2k + 5 = 0 \Rightarrow D = 4 - 20 = -16 = 4i^2 \Rightarrow k_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i \Rightarrow$

$\widetilde{y} = (C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)\,e^{-x}$ - біртекті теңдеудің жалпы шешімі.

$f(x) = 2\cos x = 2\cos x \cdot e^{ox} \Rightarrow P_n(x) = 2, Q_m(x) \equiv 0, \alpha = 0, \beta = 2 \Rightarrow \alpha \pm \beta i = \pm 2i$ мінездемелік теңдеудің түбірі болмайды, яғни,

$(\pm 2i \neq k_{1,2}) \Rightarrow r = 0\,, U_k(x) = A\,, V_k(x) = B\,,\ y^* = r^0(A\cos x + B\sin x)\cdot e^{0x} = A\cos x + {}$
${} + B\sin x \Rightarrow (y^*)' = B\cos x - A\sin x \Rightarrow (y^*)'' = -A\cos x - B\sin x$. Табылған y^*, $(y^*)'$, $(y^*)''$-терді теңдеуге қойсақ:

$(2B + 4A)\cos x + (4B - 2A)\sin x \equiv 2\cos x \Rightarrow$

$$\begin{cases} 2B+4A=2 \\ 4B-2A=0 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{2}{5}, \quad B=\frac{1}{5} \Rightarrow y^*=\frac{2}{5}cos\,x+\frac{1}{5}sin\,x.$$

Онда жалпы шешім:

$$y=\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)e^{-x}+\frac{2}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x.$$

Мысал 5 . Теңдеудің жалпы шешімін тап: $y^{IV}-3y''=9x^2$

Шешуі. Мінездемелік теңдеуді құра отырып, оны шешіп, фундаменталдық шешімдер жүйесін табамыз және сәйкес біртекті дифференциал теңдеудің жалпы шешімін $\tilde{y}$ табамыз:

$$\lambda^4-3\lambda^2=0,\ \lambda_1=\lambda_2=0,\ \lambda_{3,4}=\pm\sqrt{3}.$$

$$\tilde{y}=C_1+C_2x+C_3e^{x\sqrt{3}}+C_4e^{-x\sqrt{3}}.$$

Мұнда α=0. Мінездемелік теңдеудің $\lambda_1=\lambda_2=0$ екі еселі түбірі α=0-мен беттеседі, ендеше, r=2 . Теңдеудің дербес шешімі (8) формулаға сәйкес $y^*=x^2(Ax^2+Bx+C)$ түрінде болады. Туындыларын есептелік:

$$(y^*)'=4Ax^3+3Bx^2+2Cx$$

$$(y^*)''=12Ax^2+6Bx+2C$$

$$(y^*)'''=24Ax+6B$$

$$(y^*)^{IV}=24A.$$

Табылған $(y^*)''$, $(y^*)^{IV}$ -терді берілген теңдеуге қойсақ:

$$(y^*)^{IV}-3(y^*)''=-36Ax^2-18Bx-6C+24\equiv 9x^2$$

x айнымалысының бірдей дәрежесінің оң жағы мен сол жағын теңестіре отырып, A,B,C белгісіздерін анықтауға болатын алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} -36A=9 \\ -18B=0 \\ -6C+24A=0 \end{cases}$$

бұдан A=-1/4 , B=0, C=-1. Сонымен,

$$y^*=x^2\left(-\frac{1}{4}x^2-1\right).$$

Ендеше, берілген теңдеудің жалпы шешімі:

$$y=\tilde{y}+y^*=C_1+C_2x+C_3e^{x\sqrt{3}}+C_4e^{-x\sqrt{3}}\cdot+x^2\left(\frac{-1}{4}x^2-1\right).$$

Мысал 6. Коши есебін шеш:

$$y''-7y'+6y=(x-2)e^x,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=3.$$

Шешуі. $\lambda^2-7\lambda+6=0$ мінездемелік теңдеудің түбірлері $\lambda_1=1, \lambda_2=6$ болғандықтан, берілген теңдеуге сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімі $\tilde{y}=C_1e^x+C_2e^{6x}$.

Теңдеудің оң жағына мән берсек, α=1; $P_1(x)=x-2;$ α мінездемелік теңдеудің түбірі болғандықтан $r=1$ және берілген теңдеудің дербес шешімін $y^*=xe^x(Ax+B)$ түрінде іздейміз.

$y^{*''} - 7y^{*'} + 6y^{*} = e^{x}((6A - 7A + A)x^{2} + (6B - 7B - 14A + 2A + B + 2A)x - 7B + 2A + 2B) \equiv e^{x}(x-2)$

Теңдіктің екі жағын да e^{x}-ке қысқартып, x айнымалысының бірдей дәрежесінің оң жағы мен сол жағын теңестірсек:

$$\begin{cases} -10A = 1 \\ 2A - 5B = -2 \end{cases},$$

бұдан $A = -1/10,\ B = 9/25$ және дербес шешім:

$$y^{*} = e^{x}(-\frac{1}{10}x^{2} + \frac{9}{25}x).$$

Берілген теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{6x} + e^{x}(-\frac{1}{10}x^{2} + \frac{9}{25}x).$$

Енді Коши есебін шешу үшін, y'-ті табамыз:

$y' = C_1 e^{x} + 6C_2 e^{6x} + e^{x}(-\frac{1}{10}x^{2} + \frac{9}{25}x) + e^{x}(-\frac{1}{5}x + \frac{9}{25}).$

Бастапқы шарттарды ескере отырып, мынадай жүйе аламыз:

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1, \qquad y'(0) = C_1 + 6C_2 + 9/25 = 3,$$

бұдан: C_1=84/125 , C_2=41/125.

Сонымен, берілген бастапқы шартты қанағаттандыратын теңдеудің дербес шешімі:

$y = \frac{84}{125}e^{x} + \frac{41}{125}e^{6x} + e^{x}(-\frac{1}{10}x^{2} + \frac{9}{25}x).$

Мысал 7. Берілген теңдеудің жалпы шешімін тап: $y'' + y = x\sin x + \cos 2x$ (11)

Шешуі. $\lambda^{2} + 1 = 0$ мінездемелік теңдеуінің түбірлері $\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i$, онда $y'' + y = 0$ біртекті теңдеуінің жалпы шешімі (6) формуласына сәйкес $\tilde{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ болады.

Берілген (11) дифференциал теңдеуінің оң жағы екі квазиполиномның қосындысына тең: $f_1(x) = x\sin x,\ f_2(x) = \cos 2x$. Сондықтан, (9) формуласын қолданып, алдымен

$$y'' + y = x\sin x$$

теңдеуінің дербес шешімі y_1^{*}-ті табамыз , одан кейін

$$y'' + y = \cos 2x$$

теңдеуінің y_2^{*} дербес шешімін табамыз.

(11) теңдеуінің оң жағы $f_1(x)$үшін: $a = 0,\ b = 1,\ \lambda = i = \lambda_1$, сондықтан $r = 1$ және

$.y_1^{*} = x((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x).$

$y_1^{*''} + y_1^{*} = (Ax^{2} + Bx + 2Cx + 2A + D - Ax^{2} - Bx + 2Cx + D)\cos x +$

$+ 9Cx^{2} + Dx - Cx^{2} - 2Ax - Dx - B - 2Ax - B + 2C)\sin x \equiv x\sin x.$

Ұқсас мүшелердің коэффиценттерін теңестіре отырып, A, B, C, D және y_1^{*} табамыз :

$$\left.\begin{array}{l|l} x\cos x & 4C=0, \\ \cos x & 2A+2D=0, \\ x\sin x & -4A=1, \\ \sin x & -2B+2C=0, \end{array}\right\}$$

бұдан $A=-1/4,\ B=0,\ C=0,\ D=1/4$. Сонымен,

$$y_1^*=x(-\frac{1}{4}x\cos x+\frac{1}{4}\sin x)=\frac{1}{4}x(\sin x-x\cos x).$$

(11) теңдеуінің оң жағы $f_2(x)$ үшін: $a=0,\ b=2,\ \lambda=2i$, сондықтан $r=0$ және

$$y_2^*=M\cos 2x+N\sin 2x.$$

Ары қарай, ұқсас мүшелердің коэффициенттерін теңестірсек:

$$\begin{array}{r|l} 1 & y_2^*=M\cos 2x+N\sin 2x, \\ 0 & y_2^{*\prime}=-2M\sin 2x+2N\cos 2x, \\ 1 & y_2^{*\prime\prime}=-4M\cos 2x-4N\sin 2x, \\ \hline \end{array}$$

$$y_2^{*\prime\prime}+y_2^*=-3M\cos 2x-3N\sin 2x\equiv\cos 2x$$

$-3M=1,\ -3N=0$ болады және $\quad y_2^*=-\frac{1}{3}\cos 2x$.

Сонымен, $\quad y^*=y_1^*+y_2^*=\frac{1}{4}x(\sin x-x\cos x)-\frac{1}{3}\cos 2x$

және берілген теңдеудің жалпы шешімі мына түрде болады:

$$y=\tilde{y}+y^*=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{4}x(\sin x-x\cos x)-\frac{1}{3}\cos 2x.$$

Мысал 8. Коши есебін шеш:

$$y''-2y'+5y=3e^x+e^x tg2x,\quad y(0)=3/4,\ y'(0)=2. \qquad (12)$$

Шешуі. Сәйкес біртекті теңдеудің $\lambda^2-2\lambda+5=0$ мінездемелік теңдеуінің түбірлері $\lambda_{1,2}=1\pm 2i$. Онда $y''-2y'+5y=0$ теңдеуінің жалпы шешімі (6) формуласы бойынша:

$$\tilde{y}=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

(12) теңдеуінің оң жағы екі функцияның қосындысы ретінде берілген. Оның біріншісі $f_1(x)=3e^x$ үшін: $P_r(x)=3,\ a=1,\ b=0,\ \alpha=1\neq\lambda_{1,2}$. Сондықтан, $y''-2y'+5y=3e^x$ теңдеуінің дербес шешімі y_1^*-ді былай іздейміз: $y_1^*=Ae^x$, мұндағы A белгісізі берілген теңдеуге y_1^*-ны қою көмегімен табылады.

Екінші функция $f_2(x)=e^x tg2x$ квазиполином емес және $y''-2y'+5y=e^x tg2x$ теңдеуінің дербес шешімі y_2^* -ны тұрақты шаманы вариациалау әдісімен (Лагранж әдісі) бойынша табылады. Әйгілі теоремаға сәйкес:

$$y_2^*=e^x(C_1(x)\cos 2x+C_2(x)\sin 2x).$$

Біздің жағдайымызда жүйе екі теңдеуден тұрады:

($y_1=e^x\cos 2x,\ y_2=e^x\sin 2x$):

$$\left.\begin{array}{l} C_1' e^x\cos 2x+C_2' e^x\sin 2x=0, \\ C_1' e^x(\cos 2x-2\sin 2x)+C_2' e^x(\sin 2x+2\cos 2x)=e^x tg2x. \end{array}\right\}$$

Жүйедегі теңдеулердің екі жағын да e^x-ке қысқартып:

$$\left.\begin{array}{l} C_1'\cos 2x + C_2'\sin 2x = 0, \\ C_1'(\cos 2x - 2\sin 2x) + C_2'(\sin 2x + 2\cos 2x) = tg2x. \end{array}\right\}$$

Соңғы жүйенің анықтауышы (вронскиан):

$$W = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ \cos 2x - 2\sin 2x & \sin 2x + 2co2x \end{vmatrix} = 2.$$

Крамер формуласын қолданып:

$$C_1' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ tg2x & \sin 2x + 2\cos 2x \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\sin 2x\, tgx,$$

$$C_2' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ \cos 2x - 2\sin 2x & tg2x \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Енді табылған теңдікті интегралдасақ:

$$C_1 = -\frac{1}{2}\int\frac{\sin^2 2x}{\cos 2x}dx = -\frac{1}{2}\int\frac{1-\cos^2 2x}{\cos 2x}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos 2x} + \frac{1}{2}\int\cos 2x dx = \frac{1}{4}\ln|tg(\pi/4 - x)| + \frac{1}{4}\sin 2x,$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\int\sin 2x dx = -\frac{1}{4}\cos 2x.$$

Сонымен,

$$y_2^* = e^x(\frac{1}{4}\ln|tg(\frac{\pi}{4} - x)|\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x\cos 2x) = \frac{1}{4}e^x\ln|tg(\frac{\pi}{4} - x)|\cos 2x.$$

Ендеше, берілген теңдеудің дербес шешімі:

$$y^* = y_1^* + y_2^* = \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{4}e^x\ln|tg(\frac{\pi}{4} - x)|\cos 2x = \frac{1}{4}e^x(3 + \ln|tg(\frac{\pi}{4} - x)|\cos 2x),$$

Ал оның жалпы шешімі:

$$y = \tilde{y} + y^* = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \frac{1}{4}e^x(3 + \ln|tg(\frac{\pi}{4} - x)|\cos 2x). \qquad (13)$$

Енді Коши есебін шешу үшін, y'-ті табамыз:

$$y' = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + e^x(-2C_1\sin 2x + 2C_2\cos s2x) +$$

$$+\frac{1}{4}e^x(3 + \ln|tg(\pi/4 - x)|\cos 2x) +$$

$$+\frac{1}{4}e^x(-\frac{\cos 2x}{tg(\pi/4 - x)\cos^2(\pi/4 - x)} - 2\ln|tg(\pi/4 - x)|\sin 2x).$$

Берілген бастапқы шарттарды қолдансақ:

$y(0) = 3/4 = C_1 + 3/4, \quad y'(0) = 2 = 2C_2 + 3/4 - 1/2,$

бұдан $C_1 = 0,\ C_2 = 7/4.$

Сонымен, ізделінді дербес шешім:

$$y = \frac{1}{4}e^x(3 + 7\sin 2x + \ln|tg(\pi/4 - x)|\cdot\cos 2x).$$

19.3 Өз бетімен шығаруға арналған есептер

Келесі дифференциал теңдеулерді өз беттеріңмен шығарыңдар:

I. Жалпы шешімін тап.

1. $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}(1 - x)$

2. $4y'' + y = x^3 - 24x$

3. $y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + e^{-2x}$

4. $y''' + y'' = 6x + e^{-x}$

5. $y'' + 4y = 1/sin^2 x$

6. $y''' + y' = tgx$

7. $y'' + 4y = \cos^2 x$

8. $y'' + 16y = x\sin 4x$

9. $y'' - 2y' + 5y = e^x tg2x$

10. $y'' - 4y' = 2cos^2 4x$

11. $y'' - 7y' = (1 - x)^2$

12. $y''' + y'' = 2x + e^{-x}$

13. $y'' - 3y' = e^{3x} - 28x$

II. Коши есебін шеш.

1. $y'' - 2y' = 2e^x \; y(1) = -1 \; , y'(1) = 0$

2 $y'' + 4y = x \, , y(0) = 1 \; , y'(0) = \pi / 2$

3. $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x, \;\; y(0) = -0.6, \; y'(0) = 0.8$

4. $y''' - y' = -2x \; y(0) = 0 \, , y'(0) = y''(0) = 2$

5. $y'' + 8y = 4(\sin 2x + \cos 2x) \;\; y(\pi) = y'(\pi) = 2\pi$

19.4 Сұрақтар

1.Тұрақты коэффицентті біртекті сызықты дифференциал теңдеулер. Анықтама. Шешімнің бар болуының шарты.

2. Коши есебі.

3. Мінездемелік теңдеу.

4. Біртекті сызықты теңдеудің мінездемелік теңдеуінің түбірлеріне байланысты жалпы шешімнің түрі.

5.Оң жағы $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ түріндегі квазиполином болатын тұрақты коэффицентті сызықты біртекті емес дифференциал теңдеудің дербес шешімдерінің түрлері.

6. Оң жағы $f(x) = [P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\,]e^{\alpha x}$ түріндегі квазиполином болатын тұрақты коэффицентті сызықты біртекті емес дифференциал теңдеудің дербес шешімдерінің түрлері..

20 ҚАТАРЛАР

Бұл курста біз сандық және функционалдық қатарларды қарастырамыз.

20.1 Сандық қатарлар

Анықтама 1. Берілген шектеусіз сандар тізбегі $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ үшін:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \qquad (1)$$

өрнегі сандық қатар деп аталады, мұндағы $a_i, i = 1,2,...$ сандары – қатардың мүшелері.

$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n, n = 1,2,...$ саны қатардың бөлік қосындысы деп аталады.

Анықтама 2. Егер $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, шегі табылатын болса, онда S (1) қатарының қосындысы деп аталады.

Анықтама 3. Қатар жинақты деп аталады, егер S тұрақты санға тең болса, кері жағдайда, яғни, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ шегі шексіздікке тең болса немесе табылмаса, онда қатар жинақсыз деп аталады.

Мысал 1. Қатардың қосындысын тап $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$.

Шешуі. Қатардың жалпы мүшесі:

$$a_n = \frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right).$$

Алынған формуланы қолданып, қатардың n-ші бөлік қосындысын табайық :

$$S_n = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + ... + a_n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 6} + ... + \frac{1}{(n-1)(n+2)} + \frac{1}{n(n+3)}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + ... + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right).$$

Сонымен,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{18}.$$

Ендеше, берілген қатар жинақты және оның қосындысы $S = \frac{11}{18}$.

Мысал 2. $a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ...,\ a \neq 0$ түріндегі қатарды (геометриялық прогрессия) қарастырайық. Онда бөлік қосынды:

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$$

1) Егер $|q|<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$

2) Егер $|q|>1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |q^n| = \infty \Rightarrow \frac{a-aq^n}{1-q} \to \pm\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n$ - табылмайды.

3) Егер $|q|=1$, онда

а) $q=1 \Rightarrow a+a+...+a+... \Rightarrow S_n = n\cdot a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n\cdot a = \infty$ ($a>0$ болса)

б) $q=-1 \Rightarrow a-a+a-a+... \Rightarrow S_n = 0$, егер n-жұп болса және $S_n = a$, егер n-тақ болса, $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n$ - табылмайды.

Сонымен, қатар $|q|<1$ болғанда ғана жинақты.

Қатардың соңғы мүшелерін лақтырып тастағаннан оның жинақтылығы өзгермейді. Жинақты қатар:

$a = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$

$b = b_1 + b_2 + ... + b_n + ...$

үшін келесі теңдіктер орынды:

а) $ca = ca_1 + ca_2 + ... + ca_n + ...$, $c - const$

б) $a \pm b = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + ... + (a_n + b_n) + ...$

Теорема 1.Қатардың жинақтылығының қажетті шарты. (1) қатары жинақты болуы үшін $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ болуы қажетті.

Мысал 3. $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+...+\frac{n}{2n+1}+...$ қатары жинақсыз, себебі қатардың жинақтылығының қажетті шарты орындалмайды: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$.

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ болу шартынан қатардың жинақты екені шықпайды.

20.2 Таңбасы оң қатарлар

2-мысалда көрсетілгендей S_n бөлік қосындысының ақырлы формуласын анықтау кей жағдайларда қиындық туғызуы мүмкін. Сондықтан, қатардың жалпы мүшесін білу ғана жеткілікті болатын қатардың жинақтылығының жеткілікті белгілерін білген жөн. Тек қана таңбалары оң қатарлар үшін ғана ақиқат болатын белгілерге тоқталайық.

Мүшелері оң сандар болатын қатарларды қарастырамыз:

$$a = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \quad (2)$$

$$b = b_1 + b_2 + ... + b_n + ... \quad (3)$$

Теорема 2. Салыстыру белгілері:

1.Егер қандай да бір N нөмірінен бастап, $a_n \le b_n$, $n = N, N+1,...$ теңсіздігі орынды болса, онда

а) (3) қатарының жинақтылығынан (2) қатарының жинақты екені шығады,

б) (2) қатарының жинақсыздығынан (3) қатарының жинақсыз екені шығады.

2. Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=k\neq 0$ ақырлы шегі табылса, онда (1) және (2) қатарлары не екеуі де бірдей жинақты, не екеуі де бірдей жинақсыз.

Мысал 4. Қатарды жинақтылыққа зертте:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^n}+\ldots \qquad (4)$$

Жинақты (мысал $1, q=\dfrac{1}{2}, a=1$) болатын

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

қатарын қарастыралық, $n\geq 2$ үшін: $\dfrac{1}{n^n}\leq\dfrac{1}{2^n}$ болғандықтан, $\dfrac{1}{2^2}\leq\dfrac{1}{2^2},\dfrac{1}{3^3}<\dfrac{1}{2^3},\ldots$, ендеше (4) қатары жинақты.

Теорема 3-4. Даламбер белгісі (Коши). Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l\right)$, мұндағы l-ақырлы сан болса, онда:

а) егер $l<1$ болса, онда (1) қатары жинақты,

б) егер $l>1$ болса, (1) қатары жинақсыз,

в) $l=1$ қатардың жинақтылығы туралы сұрақ ашық қалады.

Мысал 5. Қатарды жинақтылыққа зертте:

а) $\dfrac{3}{5}+\left(\dfrac{5}{8}\right)^2+\left(\dfrac{7}{11}\right)^3+\ldots+\left(\dfrac{2n+1}{3n+2}\right)^n+\ldots$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{3n+2}\right)^n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^\infty=0$, яғни, жинақтылықтың қажетті шарты орындалады. Коши белгісін қолданамыз:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{2n+1}{3n+2}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n+2}=\dfrac{2}{3}<1$- қатар жинақты.

б) гармониялық қатар үшін:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

Жинақтылықтың қажетті шарты : $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ орындалады. Даламбер белгісін қолданамыз: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$ -жинақтылық туралы сұрақ ашық қалады.

Мысал 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4\mathrm{n}-3}{5\mathrm{n}+2}\right)^{3\mathrm{n}+4}$.

Шешуі. $\mathrm{a}_\mathrm{n}=\left(\dfrac{4\mathrm{n}-3}{5\mathrm{n}+2}\right)^{3\mathrm{n}+4}$ болады. Коши белгісін қолдансақ:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+2}\right)^{\frac{3n+4}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4-\frac{3}{n}}{5+\frac{2}{n}}\right)^{3+\frac{4}{n}}=\left(\frac{4}{5}\right)^3<1.$$

Яғни, берілген қатар жинақты.

Теорема 5. Кошидің интегралдық белгісі. Қандай да бір N нөмірінен бастап $a_N \ge a_{N+1} \ge a_{N+2} \ge ...$ теңсіздігі орындалсын және $f(x)$ функциясы мынадай үзіліссіз өспелі емес функция болсын: $f(N)=a_N$, $f(N+1)=a_{N+1},...$. Онда, егер $\int_N^\infty f(x)dx$ жинақты (жинақсыз) болса, онда (1) қатары жинақты (жинақсыз).

Мысал 7. Берілген қатарды жинақтылыққа зертте:

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+...+\frac{1}{n^p}+..., \qquad p>0-const. \tag{5}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$ - қатардың жинақтылығының қажетті шарты орындалады.

$\frac{1}{1^p}>\frac{1}{2^p}>\frac{1}{3^p}>...$ болғандықтан, $f(x)=\frac{1}{x^p}$, $N=1$ деп алып, Кошидің интегралдық белгісін қолдансақ;

а) $p=1$ болса, онда $I=\int_1^\infty\frac{dx}{x}=\lim\limits_{N\to\infty}ln\,x\Big|_1^N=\lim\limits_{N\to\infty}(ln\,N-ln1)=\infty$, яғни, интеграл жинақсыз. б) $I=\int_1^\infty\frac{dx}{x^p}=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^N=\frac{1}{1-p}\lim\limits_{N\to\infty}\left(N^{1-p}-1\right).$

Бұл интеграл $p>1$ болғанда жинақты, ал $p<1$ жинақсыз.

Ендеше, (5) қатары $p>1$ болғанда ғана жинақты, ал қалған жағдайларда жинақсыз.

Егер p=1 болса, (5) қатары біз жоғарыда 5-мысалда қарастырған гармониялық қатар болады және ол жинақсыз. Ал $p\ne1$ болса, онда (5) Дирихле қатары деп аталады.

Мысал 8. Қатарды жинақтылыққа зертте: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$.

Шешуі. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ қатарымен салыстыралық, бұл қатар көрсеткіші $p=\frac{1}{2}<1$ болатын Дирихле қатары және ол жинақсыз. $a_n=\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}>\frac{n}{\sqrt{n^3}}=\frac{1}{\sqrt{n}}=b_n$.Ендеше, салыстырудың бірінші белгісі бойынша берілген қатар жинақсыз.

20.3 Таңбалары ауыспалы қатарлар

$$u_1+u_2+...+u_n+... \;, \tag{6}$$

$$|u_1|+|u_2|+...+|u_n|+..., \tag{7}$$

қатарларын қарастырамыз.

Анықтама 4. (6) сандық қатарының мүшелері деп аталатын u_i, $i=1,2,...,\dots$ оң да, теріс те болатын болса, онда бұл қатар таңбалары ауыспалы қатар деп аталады.

Таңбалары алма-кезек ауыспалы қатар (6) қатарының дербес жағдайы:

$$a_1-a_2+a_3-a_4+..., \qquad a_i \geq 0, i=1,2,... \tag{8}$$

Лейбниц белгісі. Егер (8) қатарының мүшелері үшін қандай да бір N нөмірінен бастап $a_N \geq a_{N+1} \geq a_{N+2} \geq ...$ теңсіздігі орындалып және $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ болса, онда (8) қатары жинақты және оның қосындысы оң сан.

Теорема 6. Егер (7) қатары жинақты болса, онда (6) қатары да жинақты.

Егер (6) қатары жинақты болып, ал (7) қатары жинақсыз болса, онда (6) қатары шартты жинақты деп аталады. Егер (7) қатары жинақты болып және сонымен қатар, (6) қатары да жинақты болса, онда (6) қатары абсолютті жинақты деп аталады. (6) таңбалары ауыспалы қатардың жинақтылығы туралы сұрақ, жалпы жағдайда, таңбалары оң қатар (7)-нің жинақтылығымен шешіледі. Ал таңбалары оң қатардың жинақтылық белгілерін жоғарыда қарастырдық.

Мысал 9. $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+... \tag{9}$$

қатары Лейбниц белгісі бойынша жинақты, ал оның абсолют шамаларынан құрылған қатар (гармониялық қатар) жинақсыз. Ендеше, (9) қатары шартты жинақты.

Мысал 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$.

Шешуі. Берілген қатардың абсолют шамаларынан құралған қатарды қарастырамыз: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$.

Бұл қатар Коши белгісі бойынша жинақты: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1$.

Сонымен, берілген қатар абсолютті жинақты.

Мысал 11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

Шешуі. Берілген қатардың абсолют шамаларынан құралған қатарды қарастырамыз: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, бұл қатар көрсеткіші $p=\frac{1}{2}<1$ болатын Дирихле қатары.

Берілген қатар таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар болғандықтан, Лейбниц белгісін қолдансақ:

1) $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, яғни, қатардың мүшелерінің тізбегі кемімелі;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$

Ендеше, берілген қатар шартты жинақты.

20.4 Өз бетімен шығаруға арналған есептер

Келесі есептерді өз беттеріңмен шығарыңдар:

1. Қатардың қосындысын тап: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

2. Қатардың n - ші мүшесінің формуласын жаз:

а) $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\dots$; б) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\dots$.

3. Белгілі a_n жалпы мүшесі бойынша қатардың алғашқы төрт мүшесін жаз.

а) $a_n=\frac{3n-2}{n^2+1}$; б) $a_n=\frac{2+(-1)^n}{n^2}$; в) $a_n=\frac{1}{\left[3+(-1)^n\right]^n}$.

Таңбасы оң қатарларды жинақтылыққа зертте:

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10n+1}$;

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$; 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2-n+8}{4n^2-3}$;

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{15n^3-3n+5}{6n^5-5n^2-2}$; 11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$; 12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$;

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$; 14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$; 15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{3n+2}\right)^{2n+1}$;

16. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$; 17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)\ln^2(n+1)}$;

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$; 19. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$; 20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}$.

21.Келесі қатарларды абсолютті және шартты жинақтылыққа зертте.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{6n-5}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$;

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\alpha}{(\ln 10)^n}$;

21.5 Сұрақтар

1.Сандық қатардың анықтамасы.
2. Қатардың бөлік қосындысы.
3. Қатардың қосындысының анықтамасы.
4. Сандық қатардың жинақтылығы мен жинақсыздығы.
5. Жинақтылықтың қажетті шарты.
6. Таңбалары оң қатарды салыстырудың бірінші белгісі.
7. Таңбалары оң қатарды салыстырудың екінші белгісі.
8. Даламбер белгісі.
9. Коши белгілері.
10. Таңбалары ауыспалы қатарлар. Абсолютті және шартты жинақтылық.
11. Таңбалары алма-кезек ауыспалы қатарлар. Лейбниц белгісі.

21 ФУНКЦИОНАЛДЫҚ ҚАТАРЛАР

21.1 Функционалдық қатарлар

Анықтама 1. Функционалдық қатар деп:

$$u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ..., \qquad (1)$$

мұндағы $u_i(x),\ i = 1,2,...$ қатардың мүшелері функциялар болатын қатарды айтамыз.

x қандай да бір тұрақты мән берсек, (1) қатары сандық қатарға айналады. Сонымен, x-тің қандай да бір мәндерінде (1) қатары жинақты, қандай да бір мәндерінде жинақсыз.

Анықтама 2. (1) қатары жинақты болатын x мәндер жиыны функционалдық қатардың жинақтылық облысы деп аталады.

Қатардың жинақтылық облысында қатардың қосындысы x-ке байланысты функция болатындықтан, қатардың қосындысын $S(x)$ деп белгілейміз.

Мысал 1. $|x| < 1$ болған жағдайда, $1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$ қатары жинақты. Себебі, бұл қатар кемімелі геометриялық прогрессия ($a_1 = 1,\quad q = x$) және оның қосындысы $\dfrac{1}{1-x}$. Сонымен, (-1,1) интервалында берілген қатар жинақты және

$$S(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$$

$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x)$ болса, онда $r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + ...$ - қатардың қалдық мүшесі.

Теорема 1. (1) қатарының жинақтылық облысында:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty}[S(x) - S_n(x)] = 0 .$$

21.1.1 Бірқалыпты жинақтылық. Функционалдық қатарларға қолданылатын амалдар

Анықтама 3. (1) қатары D облысында мажорланған деп аталады, егер $\forall x \in D$ үшін :

$$|u_1(x)| \le \alpha_1, |u_2(x)| \le \alpha_2, ..., |u_n(x)| \le \alpha_n, ...$$

теңсіздігі орындалатындай,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n + ..., \qquad (2)$$

таңбалары оң жинақты сандық қатар табылса.

Мысал 2.

$$\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + ... + \frac{\cos nx}{n^2} + ...$$

қатары барлық сан осінде мажорланған екені анық, өйткені,

$\forall x \in (-\infty, \infty) \Rightarrow \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}, \quad n = 1,2,...,$ ал $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^n} + ...$ - қатары жинақты қатар (*мысал 5*).

D облысында мажорланған қатар, осы D облысында абсолютті жинақты. .

Анықтама 4. $[a;b]$ аралығында жинақты (1) қатары бірқалыпты жинақты деп аталады, егер барлық $n \ge N$ үшін $\forall \varepsilon > 0 : \exists N,$

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a;b] \text{ болса.}$$

Теорема 2. $[a;b]$ аралығында мажорланған (1) қатары осы кесіндіде бірқалыпты жинақты.

2-теоремадан мажорланған қатар болу бірқалыпты жинақтылықтан да күшті шарт екенін көреміз, яғни, бірқалыпты жинақталатын, бірақ мажорланған емес қатарлар табылады.

Теорема 3. (1) қатары $[a;b]$ аралығында бірқалыпты жинақты және $S(x)$ - оның қосындысы болсын. Онда егер:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} u_i(x), \quad i = 1,2,...$ - табылса, онда

$$\lim_{x \to x_0} S(x) = \lim_{x \to x_0} u_1(x) + \lim_{x \to x_0} u_2(x) + ... + \lim_{x \to x_0} u_n(x) + ..., \quad x_0 \in [a;b]$$

2. қатардың мүшелері $u_i(x), \quad i = 1,2,...$ - $[a;b]$ аралығында үзіліссіз және $S(x)$ функциясы да $[a;b]$ аралығында үзіліссіз болса, онда

$$\int_{x_0}^{x_1} S(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} u_1(x)dx + \int_{x_0}^{x_1} u_2(x)dx ... + \int_{x_0}^{x_1} u_n(x)dx + ..., \quad x_0 \in (a;b), x_1 \in (a;b),$$ яғни,

қатарды мүшелеп интегралдауға болады.

Теорема 4. Егер (1) қатары $[a;b]$ аралығында жинақты болса, $u_i(x) \in C^1[a;b], \quad i = 1,2,...$, ал

$u_1'(x) + u_2'(x) + ... + u_n'(x) + ...$ қатары $[a;b]$ аралығында бірқалыпты жинақты болса, онда

$$S'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + ... + u_n'(x) + ... \quad \forall x \in [a;b],$$

яғни, қатарды мүшелеп дифференциалдауға болады.

21.2 Дәрежелік қатарлар

Дәрежелік қатар функционалдық қатарлардың дербес түрі.

Анықтама 5. ($x-a$) –ға қатысты дәрежелік қатар деп:

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ... \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k, \qquad (3)$$

түрінде берілген қатарды айтамыз, мұндағы $a_0, a_1, a_2, ...$ коэффиценттері – тұрақты сандар.

Егер $a=0$ болса, онда: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

(4)

Теорема 5. (Абель). $x = x_0$ болғанда (4) қатары жинақты болса, онда ол $|x| < |x_0|$ болғанда абсолютті жинақты; ал оның $x = x_0$ болғанда жинақсыз болуынан, $|x| > |x_0|$ болғанда жинақсыздығы шығады.

Абель теоремасынан: (4) қатары үшін жалғыз ғана R саны, $0 \le R \le \infty$, табылады, $|x| < R$ болғанда (2) қатары жинақты, ал $|x| > R$ үшін жинақсыз болатындай.

R саны дәрежелік қатардың жинақтылық радиусы деп аталады, ал $(-R; R)$ - жинақтылық интервалы деп аталады. Егер $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ ақырлы шегі табылса,

онда $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$ қатарына Даламбер белгісін қолдансақ,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\cdot L < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{L} = R, \text{ яғни, } R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Дәл осылай, Коши белгісін қолдансақ: $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Мысал 3. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^n}{n} + ...$ қатарының жинақтылық облысын тап.

$a_n = \frac{1}{n}$ болғандықтан, $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n=1}{n} = 1$ - жинақтылық радиусы. $x = \pm 1$ нүктелерінде жинақтылыққа зерттейміз.

$x = 1 \Rightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$ - гармониялық қатар, жинақсыз болады.

$x = -1 \Rightarrow -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ...$-таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар, бұл жинақты қатар (*мысал 6*). Сонымен, берілген дәрежелік қатардың жинақтылық облысы: $[-1;1)$.

(3) қатарының жинақтылық интервалы $(a-R;\ a+R)$, мұндағы R - (4) қатарының жинақтылық радиусы.

D -кез келген бүтіндей (3) қатарының жинақтылық интервалының ішінде жататын кесінді болсын. Онда:

1. (3) қатары мажорланған (бірқалыпты жинақты) D кесіндісінде.
2. (3) қатарының қосындысы жинақтылық интервалында үзіліссіз.
3. (3) қатарын D кесіндісінде мүшелеп интегралдауға және қанша болса сонша рет мүшелеп дифференциалдауға болады, сонымен қатар, алынған дәрежелік қатардың жинақтылық интервалы (3) қатарының жинақтылық интервалымен бірдей.

Мысал 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. Дәрежелік қатардың жинақталу аймағын тап.

Шешуі. $c_n=\frac{1}{n}$ болады, онда жинақтылық радиусы $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$;

$(-1,1)$ – жинақтылық интервалы.

$x=-1$ болсын, онда берілген қатар: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ түрінде болады.

Бұл қатар шартты жинақты, себебі $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ жинақсыз және

а) $\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}$; б) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

$x=1$ болса, берілген қатар $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - гармониялық қатар және ол жинақсыз қатар. Сонымен, берілген қатар $x\in(-1,1)$ аралығында абсолютті жинақты, $x=-1$ болғанда шартты жинақты.

Мысал 5. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(n-2)}$.

Шешуі. $c_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)}$, $c_n\neq 0$ егер $n=3,4,...$ болса.

Онда $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n-1)}{n(n-2)}=1$.

Сонымен, $R=1$- жинақтылық радиусы; $(-1,1)$ – жинақтылық интервалы.

Интервалдың шеткі нүктелерінде берілген қатарды жинақтылыққа зерттейік.

$x=-1$ болса:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-1)^n}{n(n-2)}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-1)^n}{n(n-2)}=-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-2)}$$

Бұл қатарды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ жинақты қатарымен салыстырамыз:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n(n-2)}:\frac{1}{n^2}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n-2)}=1\neq 0.$$

Сонымен, салыстырудың екінші белгісі бойынша $x=-1$ болғанда қатар абсолютті жинақты.

Егер $x=1$ болса, онда берілген қатар мына түрде болады: $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)}$.

Бұл қатардың мүшелерінің абсолют шамасынан құрылған қатар: $\sum_{n\to 0}^{\infty}\frac{1}{n(n-2)}$ жинақты қатар, ендеше жоғарыдағы таңбасы ауыспалы қатар абсолютті жинақты.

Сонымен, берілген қатар $x\in[-1,1]$ болғанда абсолютті жинақты.

21.3 Тейлор қатары

$y=f(x)$ функциясының қандай да бір a нүктесінің аймағында $(n+1)$ -ші ретті туындысы бар болсын. Дәрежесі n-нан жоғары емес төмендегі теңдік орындалатын $P_n(x)$ көпмүшелігін табалық:

$$P_n(a)=f(a), P_n'(a)=f'(a),\dots,P_n^{(n)}(a)=f^{(n)}(a) \qquad (5)$$

$P_n(x)$ көпмүшелігін мына түрде іздейміз:

$$P_n(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\dots+c_n(x-a)^k$$

$P_n^{(i)}(x)$-ті тауып және (5) шартын қолдансақ:

$$P_n(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\dots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

$R_n(x)=f(x)-P_n(x)$ - қалдық мүшесі болсын. Онда $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$ және $R_n(x)$-ті Лагранж формасында жазуға болатынын көрсетуге болады:

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),\quad \xi=a+\Theta(x-a),\quad 0<\Theta<1$$

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\dots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \qquad (6)$$

(6) формуласы Тейлор формуласы деп аталады, ал $a=0$ болса, Маклорен формуласы деп аталады.

Бұл формулалар $y=f(x)$ функциясын $P_n(x)$ көпмүшелігімен $|R_n(x)|$-ға тең дәлдікте айырбастауға мүмкіндік береді.

Мысал 6. $y=e^x$ функциясын Маклорен формуласы бойынша жікте және e санын $\varepsilon=10^{-5}$ дәлдікке дейін есепте.

$y=f(x)=e^x, f(0)=e^0=1\Rightarrow f'(x)=e^x, f'(0)=1\Rightarrow\dots\Rightarrow f^{(n)}(x)=e^x, f^{(n)}(0)=1\Rightarrow$

$\Rightarrow f^{(n+1)}(x)=e^x, f^{(n+1)}(\xi)=f(\Theta x)=e^{\Theta x}\Rightarrow$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\Theta x},\quad 0<\Theta<1$$

$x=1$ болса, $R_n(1)=\frac{1}{(n+1)!}e^{\Theta x}<\frac{3}{(n+1)!}$. $n=1,2,3,\dots,7$ үшін: $\frac{3}{(n+1)!}>10^{-5}$, ал $n=8$ үшін: $\frac{3}{9!}<10^{-5}$ болғандықтан, $n=8$. Сонымен,

$$e \approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{8!}=2.71828\,.$$

a нүктесінің аймағында $y=f(x)$ функциясы шексіз рет дифференциалданатын болсын. Онда n-ді өте үлкен шама деп ала отырып, (4) теңдігінің оң жағында дәрежелік функция аламыз. Қандай шарт орындалғанда бұл қатардың қосындысы $S(x)=f(x)$ тең?

Теорема 6. Егер $f(x)$ функциясы $D=(a-r;a+r)$ интервалында шектеусіз рет дифференциалданатын болса және $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0, \quad \forall x\in D$, онда D-да:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f^{(2)}(a)+...+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+..., \qquad (7)$$

Әрі, қатардың $f(x)$ функциясына D-да жинақталуы бірқалыпты.

Анықтама 6. (7) қатары Тейлор қатары деп аталады, ал егер $a=0$ болса, ол Маклорен қатары болады.

Әрбір элементар функция үшін $(a-R;a+R)$ интервалында Тейлор қатарына жіктелетіндей a және R сандары табылатындығын айта кеткен жөн. Кейбір функциялардың Тейлор қатарына жіктелуін дәлелдеусіз көрсетеміз:

1. $y=e^x, \quad R=\infty \Rightarrow -\infty<x<\infty$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x3}{3!}...+\frac{x^n}{n!}+...$$

2. $y=\sin x, \quad -\infty<x<\infty$

$$Sinx=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...$$

3. $y=\cos x, \quad -\infty<x<\infty$

$$\cos x=...$$

4. $y=\ln(1+x), \quad -1<x<1$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...$$

5. $y=(1+x)^m, \quad m-const, \quad -1<x<1$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+...+\frac{m(m-1)...[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot ...\cdot n}x^n+...$$

Е с к е р т у . Көрсетілген жіктеулерді күрделі функциялар үшін де қолдануға болады. *Мысалы:*

1. $\ln(1-x)=-1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-... \quad , \qquad -1<x<1$

2. $cosx^2=1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}-\frac{x^{12}}{6!}+..., \qquad -\infty<x<\infty$

3. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\left[1+(-x^2)\right]^{-\frac{1}{2}}$. $(1+x)^m$ жіктелуіндегі $m=-\dfrac{1}{2}$ деп есептейміз және x-тің орнына $(-x^2)$-ты қоямыз. жинақтылық интервалы: $\left|-x^2\right|=\left|x^2<1\Rightarrow -1<x<1\right|$ болады және:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\ldots.$$

4) $y=\arcsin x$. $y'=f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ болғандықтан, $-1<x<1$ үшін:

$$f(x)=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^x(1+\frac{1}{2}t^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}t^6+..)dt\Rightarrow arcsin\,x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\ldots\ ,$$

$-1<x<1$.

Бұл қатар $x=\pm 1$ болғанда жинақты екенін көрсетуге болады. Онда $x=1$ болғанда:

$\arcsin 1=\dfrac{\pi}{2}=1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\dfrac{1}{5}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\dfrac{1}{7}+\ldots$. Бұл π-ді есептеу формуласы.

Алғашқы функциясы элементар функциялар болмайтын интегралдарды кейде қатарлардың көмегімен есептеуге болады.

Мысал 7. $I=\int_0^a e^{-x^2}dx$ интегралын есепте.

Шешуі. $e^{-x^2}=1-\dfrac{x^2}{1!}+\dfrac{x^4}{2!}-\dfrac{x^6}{3!}+\ldots,\ -\infty<x<\infty$, екенін ескеріп, екі жағын да интегралдасақ:

$$\int_0^a e^{-x^2}dx=\int_0^a[1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots]dx=(x-\frac{1}{1!}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots)\Big|_0^a=$$

$$=a-\frac{1}{1!}\cdot\frac{a^3}{3}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{a^5}{5}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{a^7}{7}+\ldots).$$

Тейлор қатары, жалпы айтқанда, дәрежелік қатарлар дифференциалдық теңдеулердің дербес шешімдерін табу үшін жиі қолданылады.

Мысал 8. Берілген теңдеуінің жалпы шешімін тап:

Шешуі. $y''=2xy'+4y$, $y(0)=0, y'(0)=1$.

Шешімді $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ түрінде іздейміз.

Бастапқы шарттарды ескерсек: $a_0=y(0)=0,\quad a_1=y'(0)=1$.

$$y=x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

$$y'=1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots$$

$$y''=2a_2+3\cdot 2a_3x+\ldots+n\cdot(n-1)a_nx^{n-2}+\ldots$$

Ары қарай, y,y',y''-терді теңдеуге қойып, x-тің бірдей дәрежелерінің коэффиценттерін теңестірсек:

$$2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$$
$$3 \cdot 2 \cdot a_3 = 2 + 4 \Rightarrow a_3 = 1$$
$$4 \cdot 3 \cdot a_4 = 4a_2 + 4a_2 \Rightarrow a_4 = 0$$
....
$$n(n-1)a_n = (n-2) \cdot 2a_{n-2} + 4a_{n-2} \Rightarrow a_n = \frac{2a_{n-2}}{n-1}$$

Ендеше, $a_{2k} = 0, k = 1,2,...$.

$$a_5 = \frac{2 \cdot 1}{4} = \frac{1}{2!},\ a_7 = \frac{2 \cdot \frac{1}{2!}}{6} = \frac{1}{3!},....,a_{2k+1} = \frac{2 \cdot \frac{1}{(k-1)!}}{2k} = \frac{1}{k!},...$$

Бұдан, дербес шешім

$$y = x + \cdot \frac{x^3}{1!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + ...$$

Мысал 9. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ функциясын $x = 1$ аймағындағы Тейлор қатарына жікте.

Шешуі. Туындыларын табамыз:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, f''(x) = \frac{1 \cdot 2}{x^3}, f'''(x) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4}, f^{(4)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5}, \ldots$$

$x = 1$ болғанда:

$$f(1) = 1, f'(1) = -1, f''(1) = 1 \cdot 2, f'''(1) = -1 \cdot 2 \cdot 3, f^{(4)}(1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4, \ldots$$
$$\ldots, f^{(n)}(1) = (-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = (-1)^n \cdot n!, \ldots\ .$$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ функциясының $x = 1$ аймағындағы Тейлор қатары мына түрде болады:

$$1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \ldots + (-1)^n (x-1)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n\ .$$

Алынған қатар еселігі $q = -(x-1)$ болатын геометриялық қатар:

$$|q| = |x-1| < 1 \Rightarrow -1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2\ .$$

Ендеше, қатар $x \in (0,2)$ аралығында абсолютті жинақты. Онда

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n,\quad x \in (0,2)\ .$$

*Мысал 10***.** Берілген функцияны Тейлор қатарына жікте:

$$f(x) = \frac{5-x}{12-x-x^2}\ .$$

Шешуі. Берілген бөлшекті қарапайым бөлшектерге жіктейміз:

$$\frac{5-x}{12-x-x^2} = \frac{5-x}{(x+4)(3-x)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{3-x};$$
$$5 - x = A(3-x) + B(x+4)\ .$$

Бұдан, $x=3$ және $x=-4$ дей отырып, $A=\frac{9}{7},\ B=\frac{2}{7}$ екендігін аламыз.Ендеше,

$$\frac{5-x}{12-x-x^2}=\frac{9}{7}\cdot\frac{1}{x+4}+\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{3-x}. \qquad (8)$$

$a+a\cdot q+a\cdot q^2+\ldots=\frac{a}{1-q},\ \ |q|<1$ формуласын қолданып, әрбір қарапайым бөлшектерді жеке-жеке қарастырамыз:

$$\frac{1}{x+4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{4}\right)}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{4^2}-\ldots+\frac{(-1)^n x^n}{4^n}+\ldots\right),\ \ \left|\frac{x}{4}\right|<1;$$

$$\frac{1}{3-x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}+\ldots+\frac{x^n}{3^n}+\ldots\right),\ \ \left|\frac{x}{3}\right|<1.$$

Табылған жіктеуді (8)-ге қойсақ:

$$\frac{5-x}{12-x-x^2}=\frac{9}{7}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^n}{4^{n+1}}+\frac{2}{7}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{9}{7}\cdot\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}+\frac{2}{7\cdot 3^{n+1}}\right]x^n,$$

және $\begin{cases}-4<x<4,\\ -3<x<3,\end{cases}\Rightarrow x\in(-3{,}3)$ болады.

Сонымен, $\frac{5-x}{12-x-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{9\cdot(-1)^n}{7\cdot 4^{n+1}}+\frac{2}{7\cdot 3^{n+1}}\right)\cdot x^n,\quad x\in(-3{,}3).$

Мысал 11. $\mathrm{f(x)}=\sin^2 \mathrm{x}$ функциясын Тейлор қатарына жікте.

Шешуі. $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ екені бізге мектеп курсынан белгілі..

$\cos 2\mathrm{x}$ функциясын 3 пункттегі формула бойынша жіктесек (x-ті $2\mathrm{x}$-ке ауыстырсақ), онда:

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}=x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{2x^6}{45}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,$$

егер $\mathrm{x}\in(-\infty,+\infty)$.

Мысал 12. $f(x)=\ln\frac{2+x}{2-x}$ функциясын Тейлор қатарына жікте.

Шешуі. $\ln\frac{2+x}{2-x}=\ln\frac{1+\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}}=\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)-\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$ қарастырамыз.

5 пункттегі жіктеуді қолдансақ, x-ті сәйкесінше $\frac{\mathrm{x}}{2}$ және $(-\frac{\mathrm{x}}{2})$-пен алмастырсақ:

$$\ln\frac{2+x}{2-x}=\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2^2\cdot 2}+\frac{x^3}{2^3\cdot 3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{2^n\cdot n}+\ldots\right)-$$

$$-\left(-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2^2\cdot 2}-\frac{x^3}{2^3\cdot 3}-\ldots-\frac{x^n}{2^n\cdot n}-\ldots\right)=x+\frac{x^3}{2^3\cdot 3}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2^{2n}(2n+1)}+\ldots$$

Алынған жіктеу дұрыс болады, егер $\left|\frac{x}{2}\right|<1$, яғни, $|x|<2$ болса.

Мысал 13. $f(x)=\sqrt{1-x}$ функциясын Тейлор қатарына жікте.

Шешуі.

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots,$$

мұндағы $x\in(-1,1)$, жіктеуін қолданамыз. $m=\frac{1}{2}$ деп алып, x-ті $(-x)$-ке айырбастасақ, онда

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\ldots.$$

Жіктеу дұрыс болады, егер $|-x|<1$, яғни, $|x|<1$.

21.4 Өз бетімен шығаруға арналған есептер

Келесі есептерді өз беттеріңмен шығарыңдар.

Дәрежелік қатарлардың жинақтылық интервалын тап және интервалдың шектік нүктелерінде жинақтылыққа зертте:

1. $\sum\limits_{n=1}^{n}\frac{x^n}{n^n}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$;

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}3^{n^2}x^{n^2}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$; 6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^5x^{2n}}{2n+1}$;

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-5)^n}{(n\cdot 3)^n}$; 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$; 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$.

10. Қатарлардың қосындыларын табыңдар:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n+1}}{n+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)x^n}{2}$.

11. 1-5 негізгі жіктеулерін және геометриялық прогрессияны қолданып, келесі функцияларды x-тің дәрежелері бойынша жіктеп жаз және жинақтылық интервалын көрсет:

а) $\cos^2 x$; б) $\frac{3x-5}{x^2-4x+3}$; в) $\frac{x}{9+x^2}$; г) xe^{-2x};

д) $\sin 3x+x\cos 3x$; е) $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

12. x^3-2x^2-5x-2 функциясын $(x+4)$-дің дәрежелері бойынша қатарға жікте.

13. $\ln x$ функциясын $(x-1)$-дің дәрежелері бойынша қатарға жікте.

14. e^x функциясын $(x+2)$-дің дәрежелері бойынша қатарға жікте.

15. $\frac{1}{x^2}$ функциясын $(x+1)$ -дің дәрежелері бойынша қатарға жікте.

21.5 Сұрақтар

1. Функционалдық қатардың анықтамасы.
2. Жинақтылық облысы.
3. Қатардың бірқалыпты жинақтылығының анықтамасы.
4. Мажорланған қатарлар.
5. Қатардың қосындысының үзіліссіздігі.
6. Қатарды мүшелеп интегралдау.
7. Қатарды мүшелеп дифференциалдау.
8. Дәрежелік қатарлар. Жинақтылық интервалы.
9. Тейлор және Маклорен қатарлары.
10. Элементар функцияларды қатарға жіктеу.

5. Қатардың қосындысының үзіліссіздігі.
6. Қатарды мүшелеп интегралдау.
7. Қатарды мүшелеп дифференциалдау.
8. Дәрежелік қатарлар. Жинақтылық интервалы.
9. Тейлор және Маклорен қатарлары.
10. Элементар функцияларды қатарға жіктеу.

22 ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫНЫҢ ЭЛЕМЕНТТЕРІ

22.1 Ықтималдықтар теориясы пәні. Негізгі ұғымдар

Ықтималдықтар теориясы пәні жалпы кездейсоқ оқиғалардың ықтималды заңдылықтарын оқытады. Ықтималдықтар теориясының әдістері сенімділік теориясында, атқыштар және автоматты басқару теорияларында т.б. кеңінен қолданылады. Ықтималдықтар теориясы өндірісті жоспарлау мен құру үшін, технологиялық процесстерді анализдеу үшін т.б. қолданылатын математикалық және қолданбалы статистиканың негізі. Ықтималды және статистикалық әдістер зерттеуі қолданылмайтын білім облысы жоқ деп нақты айта аламыз.

Анықтама 1. Ықтималдықтар теориясында *оқиға* деп сынақ нәтижесінде қандай да бір шарттың орындалуын айтамыз.

Мысал 1. Мерген нысанаға оқ атты. Оқ ату – сынақ, ал нысанаға тию – оқиға. Оқиғаны әдетте былай белгілейміз: $A, B, \ldots$

Бір ғана кездейсоқ оқиға – көп жағдайда біз ескере алмайтын, өте көп кездейсоқ оқиғалардың салдары. Бірақ, бақылау нәтижесінде оның барлығы бір ғана анықталған заңдылыққа бағынатынын көреміз: егер тиынды қанша көп рет сол бір жағдайда лақтырып, герб жағының түсу саны барлық лақтыру санының жартысына тең деп айтар болсақ, қателіктің өте үлкен емес екеніне көз жеткізе аламыз.

Анықтама.

2. Егер қандай да бір сынақ нәтижесінде A оқиғасы:

а) сөзсіз пайда болатын болса, онда бұл оқиға *ақиқат оқиға* деп аталады.

б) мүлдем пайда болмайтын болса, онда бұл оқиға *жалған оқиға* деп аталады.

в) не орындалатын, немесе орындалмайтын болса, онда A оқиғасы – *кездейсоқ (мүмкін) оқиға* деп аталады.

3. Сынақ нәтижесінде пайда болған А оқиғасы В оқиғасының да пайда болуын қамтыса (яғни, $A \subset B$), не осы сынауда В оқиғасының пайда болуы А оқиғасының да пайда болуын қамтыса (яғни $B \subset A$), онда А және В оқиғалары *мәндес* (эквивалент) деп атаймыз және А=В деп белгілейміз. Өзара мәндес оқиғалар *тепе-тең* немесе *тең* оқиғалар деп аталады.

4. Оқиғалар *тең мүмкіндікті* деп аталады, егер сынақ нәтижесінде олардың біреуінің пайда болу мүмкіндігінің, екіншісіне қарағанда, артықшылығы бар деп айта алмайтын болсақ,яғни, бұл оқиғалардың орындалу мүмкіндіктері тең болса.

5. A және B оқиғалары - *үйлесімді (үйлесімсіз) оқиғалар* деп аталады, егер сынақ жүргізу кезінде олар бір уақытта бірге пайда бола алатын (бола алмайтын) болса.

6. Оқиғалар тобы *үйлесімді* деп аталады, егер осы топқа тиісті тым болмағанда екі оқиға үйлесімді болса, кері жағдайда, *үйлесімсіз* деп аталады.

7. Сынақтың барлық мүмкін жағдайларын қарастыратын үйлесімсіз оқиғалар оқиғалардың *толық тобын* құрайды.

Мысал 2. Нысанаға үш оқ атылды. A_1 $(\overline{A}_1)$ - бірінші оқ нысанаға тиді (тиген жоқ), A_2 $(\overline{A}_2)$ - екінші оқ нысанаға тиді (тиген жоқ), A_3 $(\overline{A}_3)$ - үшінші оқ нысанаға тиді (тиген жоқ) деген оқиғалар болсын. Онда:

а) A_1, A_2, A_3 - тең мүмкіндікті үйлесімді оқиғалар тобы.

б) A_1, $\overline{A}_1$ - үйлесімсіз оқиғалардың толық тобы, $\overline{A}_1$ - A_1 оқиғасына қарама-қарсы оқиға.

в) A_1, A_2, A_3, $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$ - оқиғалардың толық тобын құрайды.

22.2 Комбинаториканың негізгі формулалары

Оқиғаның ықтималдығын классикалық формула бойынша есептеу кезінде комбинаторика формулалары өте жиі қолданылады. Комбинаторика берілген ақырлы жиынның элементтерінен, берілген шартты қанағаттандыратын қанша топтастыру жасауға болады деген сұраққа жауап беретін ілім.

Комбинаториканың негізгі принциптерін қарастыралық. Бірінен кейін бірі орындалатын k әрекет жасау қажет болсын. действий. Егер бірінші әрекетті n_1 әдіспен, екінші әрекетті - n_2 әдіспен және т.с.с., k - әрекетті n_k әдіспен орындауға болатын болса, онда барлық k әрекетті $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ әдіспен орындауға болады.

n элементтен тұратын жиын берілсін.

Анықтама 8. *Орналастыру* деп айырмашылықтары не элементтерінің құрамында, не элементтерінің орналасу ретінде болатын әртүрлі n элементтің ішінен k элемент бойынша құралған топтастыруды айтамыз. Оны A_n^k деп белгілейміз.

Орналастырулар саны мына формула бойынша есептелінеді:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Мысал 3. {a,b,c} жиыны берілсін. Осы жиынның элементтерінен екі элементтен тұратын қанша орналастыру жасауға болады?

Шешуі: {a,b},{a,c},{b,c},{b,a},{c,a},{c,b} немесе $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6.$

Анықтама 9. Айырмашылықтары тек элементтерінің орналасу ретінде болатын жиынды *алмастыру* деп атаймыз және былай белгілейміз: P_n.

Алмастырулар саны былай есептеледі: $P_n = n!$.

Мысал 4. $\{a,b,c\}$ жиыны берілсін. Осы жиынның элементтерінен қанша алмастыру құрастыруға болады?

Шешуі: $P_3 = 3!=6$.

Анықтама 10. Айырмашылықтары тек элементтерінің құрамында болатын әртүрлі n элементтің ішінен k элемент бойынша құралған топтастыруды *теру* деп атаймыз және былай белгілейміз: $C_n^{\ k}$.

Теру саны былай есептеледі: $C_n^{\ k} = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.

Мысал 5. $\{a,b,c\}$ жиынының элементтерінен екі элемент бойынша алынған терулер саны: $\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}$, яғни, $C_3^{\ 2} = \dfrac{3!}{2!\cdot 1!} = 3$.

Мысал 6. Барлық жеті орынды телефон нөмірлерінің санын тап, егер бірде-бір цифр екінші рет қайталанбаса.

Шешуі. Бұл есепте кез келген екі цифрдың орнын ауыстырсақ, басқа телефон нөмірі шығады, яғни, орналасу реті ескеріледі. Ендеше, бұл 10 элементтен 7 элемент бойынша алынған орналастыру: $A_{10}^{\ 7} = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 604800$.

Мысал 7. Әртүрлі сегіз хатты әртүрлі сегіз конвертке неше тәсілмен салуға болады, егер бір конвертке тек бір ғана хат салу керек болса?

Шешуі: $p_8 = 8! = 40320$.

Мысал 8. Спорт алаңында 12 адам ойнап жүр. Бұлардың ішінен жарысқа қатысатын төрт адамнан тұратын команданы неше тәсілмен алуға болады?

Шешуі. Орналасу реті ескерілмейді, яғни, төрт адамнан алынған команданың ішіндегі адамдардың орнын қанша ауыстырсақ та, бұл бір ғана команда болады. Ендеше, бұл теру: $C_{12}^{\ 4} = \frac{12!}{4!\cdot 8!} = \dfrac{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{2\cdot 3\cdot 4} = 495$.

Мысал 9. Төрт сортты зат бар, әрі i-ші сорт заттың саны n_i (i=1,2,3,4). Бақылауға m зат алынды. Бұлардың ішіндегі m_1 -і бірінші сортты, m_2, m_3, m_4 -і сәйкесінше екінші, үшінші және төртінші сортты ($\sum_{i=1}^{4} m_i = m$) болу ықтималдығын тап.

Шешуі. Ықтималдықты классикалық анықтама бойынша есептелік: $P = \dfrac{M}{N}$, мұндағы M- жоғарыдағы табу керек шартты қанағаттандыратын оқиғалар саны, ал N – жалпы оқиғалар саны. Онда:

$$N = C_n^{\ m}, \quad \mathrm{M} = \mathrm{C}_{n_1}^{\ m_1}\cdot C_{n_2}^{\ m_2}\cdot C_{n_3}^{\ m_3}\cdot C_{n_4}^{\ m_4} \quad .$$

Мысал 10. *n* лотерея билетінің *k*-сы ұтыс билеті. Кез келген *m* билет алынды. Алынған билеттің *l* – ы ұтыс билеті болу ықтималдығын тап.

Шешуі. Ықтималдықты классикалық анықтама бойынша есептелік: $P = \dfrac{M}{N}$, мұндағы M- жоғарыдағы табу керек шартты қанағаттандыратын оқиғалар саны, ал N – жалпы оқиғалар саны. Бұл жағдайда: $N = C_n^{\ m}$, $M = C_k^{\ l}\cdot C_{n-k}^{\ m-l}$.

22.3 Ықтималдықтың анықтамасы

22.3.1 Ықтималдықтың анықтамасы

Ықтималдықты классикалық анықтау тең мүмкіндікті үйлесімсіз оқиғалардың толық тобы үшін қолданылады. *Ықтималдық* дегеніміз - қандай да бір оқиғаның орындалуының сандық мөлшері.

Бұл топтың әрбір оқиғасын *жағдай* деп немесе *элементарлық оқиға* деп атаймыз. Әрбір оқиғаға сәйкес қолайлы және қолайсыз жағдайлар болады.

Анықтама 11. A оқиғасының $P(A)$ ықтималдығы деп,

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

шамасын айтамыз, мұндағы m- А оқиғасына қолайлы элементарлық оқиғалар саны, n- тең мүмкіндікті элементарлық оқиғалар кеңістігінің барлық оқиғалар саны.

Мысал 11. Екі ойын сүйегі лақтырылған. A оқиғасы – түскен ұпай сандарының қосындысы 4 деген оқиға болсын. $P(A)$ тап.

а) Қате шешім. Барлығы екі жағдай болуы мүмкін: A және $\overline{A}$ - үйлесімсіз оқиғалардың толық тобын құрайды. Қажетті жағдай тек біреу ғана: А оқиғасы, яғни, $m=1$, $P(A)=\frac{1}{2}$.

Бұл қате, себебі A және $\overline{A}$ тең мүмкіндікті оқиғалар емес.

б) Дұрыс шешім. Барлық тең мүмкіндікті жағдайлар $n=6\cdot 6=36$. Ал А оқиғасы орындалатын жағдайлар: $(1,3),(2,2),(3,1)\Rightarrow m=3$, $P(A)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

Ықтималдықтың классикалық анықтамасының әлсіз жақтары:

1. Барлық жағдайлар саны n- ақырлы.
2. Сынақ нәтижесін элементар оқиғалардың жиынтығы ретінде беру көп жағдайларда мүмкін емес.
3. Тең мүмкіндікті жағдайлар санын санау негізін көрсету қиын.

Барлығы n сынақ жүргізілсін.

Мысал 12. Тиын үш рет лақтырылған. Қай ретпен түсуіне тәуелсіз екі рет герб және бір рет цифр жағы түсу ықтималдығын тап.

Шешуі.

1. Сынақ - тиынды үш рет лақтырудан тұрады.
2. Элементар оқиғалар тиынды үш рет лақтырғанда пайда болатын кез келген комбинациялардан тұрады.
3. U = {ГГГ, ЦЦЦ, ГЦГ, ЦЦГ, ГГЦ, ЦГЦ, ЦГГ, ГЦЦ}, $N = 8$.
4. A оқиғасы – «екі рет герб, бір рет цифр жағы түсті деген оқиға», $M = 3$.
5. $P(A) = M/N = 3/8 = 0{,}375$.

Анықтама 12. A оқиғасының салыстырмалы жиілігі деп:

$$P^{*}(A)=\frac{m}{n},$$

шамасын айтамыз, мұндағы m- А оқиғасы орындалатын сынақтар саны, n- барлық мүмкін сынақтардың жалпы саны.

Анықтама 13. А оқиғасының статистикалық анықтамасы деп осы оқиғаның ең үлкен сынақ саны бойынша есептелген салыстырмалы жиілікті айтамыз. Оны $P^*(A)$ деп белгілейміз. Сонымен,

$$P^*(A) = \underset{\text{при } n\to\infty}{\omega(A)} = \underset{\text{при } n\to\infty}{\frac{m}{n}}$$

Оқиғаның статистикалық ықтималдығы ретінде оқиғаның салыстырмалы жиілігін немесе оған жақын жуық санды аламыз.

Ықтималдықтың мынадай қасиеттері бар:

1. Ақиқат оқиғаның ықтималдығы 1-ге тең.
2. Жалған оқиғаның ықтималдығы 0-ге тең.
3. Кез келген А оқиғасы үшін: $0 \le P(A) \le 1$.

22.3.2 Геометриялық ықтималдық

Қандай да бір сынақ нәтижесінде Ω облысына лақтырылған нүктенің $\omega\subset \Omega$ облысына түсу ықтималдығын қалай табамыз?

Анықтама 14. А нүктесінің $\omega\subset \Omega$ облысына түсу ықтималдығы: $P(A) = \dfrac{m(\omega)}{m(\Omega)}$, мұндағы $m(\omega), m(\Omega)$- сәйкес облыстардың өлшемдері, *геометриялық ықтималдық* деп аталады.

Өлшем деп ұзындық, аудан, көлем т.с.с. түсінеміз.

Мысал 13. Бірлік кесіндіге нүкте лақтырылған. Осы нүктеден кесіндінің ұштарына дейінгі ара қашықтықтың $1/k$ шамасынан арту ықтималдығын тап.

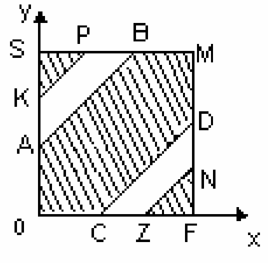
Шешуі. АВ – бірлік кесінді, СД кесіндісі – ұштарынан А және В нүктелеріне дейінгі ара қашықтық $1/k$ –дан аспайтындай етіп АВ кесіндісінің ішіне орналастырылған кесінді болсын. Онда геометриялық ықтималдықтың формуласы бойынша:

Р=ұзындық(СД)/ ұзындық(АВ),

Ұзындық АВ =1, ал ұзындық СД= $1\text{-}2\cdot 1/k$. Ендеше: $P = \dfrac{1-2/k}{1} = 1 - 2/k$.

Мысал 14. Екі кездейсоқ оқиғаның басталу уақыттары T_1, T_2 уақыттары аралығында таралған. Оқиғалардың біреуі t_1 минутқа, ал екіншісі t_2 минутқа созылған. а) оқиғағалардың уақыт аралықтарымен көмкерілу; б)көмкерілмеу ықтималдықтарын тап. Мұндағы t_1=5, t_2=10.

Шешуі. Суретін салайық.



Сурет 1

Бір оқиғаны OX осінің бойына, екіншісін OУ осінің бойына орналастырамыз. Т=$T_2 - T_1$ болсын. Сурет1 –де ол OS және OF кесінділері. Есептің шарты бойынша: 0≤ x ≤ T, 0≤y≤T. Егер оқиғалар уақыт аралығымен көмкерілген болса, онда │x-y│≤ min(t_1, t_2)=$\ddot{t}$, ал егер оқиғалар уақыт аралығымен көмкерілмеген болса, онда │x-y│≥ max(t_1, t_2)=$\dot{t}$. Бірінші теңсіздік мына теңсіздікпен пара-пар y-5 ≤ x ≤ y+5. Суретте бұл жазықтық AB және СД кесінділерінің ортасындағы жазықтық, яғни, OABMДС алтыбұрышы. Екінші теңсіздік x ≥10+y және x ≤ y-10 теңсіздіктерімен пара-пар. Суретте бұл KSP мен ZFN екі үшбұрышы. Жазықтықтағы геометриялық прогрессияның формуласы мынадай :

$$P = \frac{S_1}{S},$$

Мұндағы S_1- OABMДС алтыбұрышының ауданы, ал S – OSMF квадратының ауданы. Сонымен,

$$P = \frac{T^2 - (T - \dot{t})^2}{T^2} = \frac{(T - T + \dot{t})(T + T - \dot{t})}{T^2} = \frac{\dot{t}(2T - \dot{t})}{T^2}.$$

оқиғағалардың уақыт аралықтарымен көмкерілу жағдайы үшін, ал оқиғағалардың уақыт аралықтарымен көмкерілмеу жағдайы үшін бұл ықтималдық: $P = \frac{(T - \ddot{t})^2}{T^2}$.

22.4 Өз бетімен шығаруға арналған есептер

Келесі есептерді өз беттеріңмен шығарыңдар:

1. Қорапта 10 ақ, 15 қара, 10 сары және 25 қызыл шарлар бар. Қораптан бір шар алынды, алынған шардың ақ болу ықтималдығын тап.
2. Қорапта 10 ақ, 15 қара, 10 сары және 25 қызыл шарлар бар. Қораптан бір шар алынды, алынған шардың қара болу ықтималдығын тап.
3. Төрт әртүрлі цифрдан тұратын автомобильдер нөмірі қанша?
4. Тоғыз қабатты үйге 4 адам кірді. Бұл адамдардың әрқайсысы әр түрлі қабатта түсу ықтималдығын табыңыз.
5. Жәшікте 1-ден 5-ке дейін нөмірленген кубиктер бар. Жәшіктен кубиктер бір-бірден алынып, стол үстіне алынған ретпен қойылды. Қойылған кубиктердің нөмірі өсу ретімен орналасу ықтималдығын табыңыз?
6. Екі ойын сүйегі лақтырылған. Түскен ұпайлардың көбейтіндісі үшке бөліну ықтималдығын тап.
7. Екі ойын сүйегі лақтырылған. Түскен ұпайлардың қосындысы бестен артпау ықтималдығын тап.
8. Алты адамға демалыс орнына берілген екі билетті барлығы неше тәсілмен таратуға болады?

22.5 Сұрақтар

1. Ықтималдықтар теориясы пәні.
2. Оқиғалар түрлері.
3. Ықтималдықтың классикалық анықтамасы.
4. Ықтималдықтың статистикалық анықтамасы.
5. Ықтималдықтың геометриялық анықтамасы.

23 ОҚИҒАЛАР АЛГЕБРАСЫ

23.1 Негізгі ұғымдар

1. Бірнеше оқиғалардың *қосындысы* немесе *бірігуі* деп - бұл оқиғалардың тым болмағанда біреуінің пайда болуынан тұратын оқиғаны айтамыз.

2. Бірнеше оқиғалардың *көбейтіндісі* деп бұл оқиғалардың бір уақытта бірге қатар орындалуын айтамыз.

Жоғарыдағы 1-мысалға қайта оралсақ: $B = A_1 + A_2 + A_3$ дегеніміз – үш оқтың тым болмағанда біреуінің нысанаға тиюі, $C = A_1 A_2 \overline{A}_3$ - бірінші және екінші оқ нысанаға тиді, ал үшінші оқ тиген жоқ деген оқиға.

$D = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$ - тек бір ғана оқ нысанаға тиді деген оқиға.

$E = A_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3$ - нысанаға тиген оқтың саны екіден кем емес деген оқиға.

3. Екі оқиға *тәуелсіз (тәуелді)* деп аталады, егер оның біреуінің ықтималдығы екіншісінің пайда болуына немесе пайда болмауына тәуелсіз (тәуелді) болса.

4. Бірнеше оқиғалар *жинағы бойынша тәуелсіз* деп аталады, егер олардың әрқайсысы мен оның қалғандары арқылы жасалынған кез келген сызықтық комбинациясы тәуелсіз оқиғалар болса.

5. B оқиғасының шартты ықтималдығы деп A оқиғасы орындалғаны белгілі деп табылған B оқиғасының ықтималдығын айтамыз және оны былай белгілейміз: $P_A(B)$ $[P(B/A)]$.

23.2 Ықтималдықтарды қосу теоремасы

Теорема 1. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ оқиғаларының тым болмағанда біреуінің пайда болу ықтималдығы:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - \ldots - P(A_{n-1}A_n) +$$
$$+ P(A_1A_2A_3) + \ldots + P(A_{n-2}A_{n-1}A_n) - \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1A_2 \ldots A_n).$$

Салдар 1. Егер $A_1, A_2, \ldots, A_n$ оқиғалары өзара үйлесімсіз болса, онда

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Шынында да, бұл жағдайда: $P(A_1A_2) = P(A_1A_3) = \ldots = P(A_1A_2 \ldots A_n) = 0$.

Мысал 1. Нысанаға үш оқ атылды. Бірінші оқтың нысанаға тию ықтималдығы - $0{,}6$, екінші оқ үшін бұл ықтималдық - $0{,}7$, ал үшінші оқ үшін - $0{,}8$. Тым болмағанда бір оқтың нысанаға тию ықтималдығын тап.

Шешуі. A- бірінші оқ нысанаға тиді, B- екінші оқ нысанаға тиді, C- үшінші оқ нысанаға тиді деген оқиғалар, ал D- осы үш оқтың тым болмағанда біреуі нысанаға тиді деген оқиға болсын. Онда $D = A + B + C$, мұндағы A, B, C- үйлесімді жинағы бойынша тәуелсіз оқиғалар. Ендеше,

$$P(D) = P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = P(A) + P(B) + P(C) -$$
$$- P(A)\cdot P(B) - P(A)\cdot P(C) - P(B)\cdot P(C) + P(A) + P(B) + P(C) = 0{,}976.$$

Теорема 2. Өзара үйлесімсіз $A_1, A_2, \ldots, A_n$ оқиғалары оқиғалардың толық тобын құрайтын болса, онда

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Мысал 2. Институт бақылау жұмыстарының пакеттерін үш қаладан алады. Пакетті бірінші және екінші қаладан алу ықтималдығы сәйкесінше 0,7 және 0,2-ге тең. Пакетті үшінші қаладан алу ықтималдығын тап.

Шешуі. А,Б,В арқылы институт бақылау жұмыстарының пакеттерін алатын қалаларды белгілейік. Бұл оқиғалар оқиғалардың толық тобын құрайды, сондықтан Р(А)+Р(Б)+Р(В)=1. Ендеше, ізделінді ықтималдық:

Р(В)=1-0,7-0,2=0,1.

Анықтама 6. $\overline{\text{А}}$ оқиғасы А оқиғасына *қарама-қарсы оқиға* деп аталады, егер А оқиғасының орындалмауынан $\overline{\text{А}}$-ның орындалатыны және А оқиғасының орындалуынан $\overline{\text{А}}$ оқиғасының орындалмайтыны шығатын болса.

Салдар 1. Қарама-қарсы оқиғалар үшін:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - (\overline{A}).$$

Мысал3. Күннің жаңбырлы болуының ықтималдығы 0,7-ге тең. Күннің ашық болу ықтималдығын тап.

Шешуі. «Күн жаңбырлы» және «күн ашық» деген оқиғалар қарама-қарсы оқиғалар. Ендеше, күннің ашық болу ықтималдығы р=1-0,7=0,3.

Кей жағдайларда, есеп шығару кезінде қарама-қарсы оқиғаның ықтималдығын табу жеңілірек болады. Жоғарыдағы 1-мысалға қайта оралсақ, $\overline{D} = \vec{A}\overline{B}\overline{C}$ - үш оқтың да нысанаға тимеуі. A, B, C оқиғалары жинағы бойынша тәуелсіз оқиғалар және $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$, $P(\overline{B}) = 0{,}3$, $P(\overline{C}) = 0{,}2$ болғандықтан,

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 1 - P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})\cdot P(\overline{C}) = 1 - 0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}2 = 0{,}976.$$

Салдар 2. Өзара тәуелсіз $A_1, A_2, \ldots, A_n$ оқиғаларының тым болмағанда біреуінің нысанаға тию ықтималдығы былай есептеледі:

$$P(A) = P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n, \tag{1}$$

мұндағы q_i, $i = \overline{1,n}$- $\overline{A_i}$ оқиғасының пайда болуының ықтималдығы.

Егер $A_1, A_2, \ldots, A_n$ оқиғаларының пайда болуларының ықтималдықтары өзара тең және P-ға тең болса, онда (1) формуласын былай жаза аламыз: $P(A) = 1 - q^n$, мұндағы $q = 1 - p$.

Мысал 4. Жәшікте n зат бар, оның m-ы сапалы заттар. Алынған кез келген k заттың ішінде тым болмағанда бір сапалы зат болу ықтималдығын тап.

Шешуі. А оқиғасы - алынған заттардың ішінде тым болмағанда бір сапалы зат бар деген оқиға, ал $\bar{\text{А}}$ – алынған заттардың ішінде бірде-бір сапалы зат жоқ деген оқиға болсын. Бұл оқиғалар өзара қарама-қарсы оқиғалар. Р(А)=1- Р($\bar{\text{А}}$) екені белгілі. Р($\bar{\text{А}}$) ықтималдығы классикалық ықтималдықтың формуласы бойынша: P=M/N, мұндағы $M = C^k{}_{n-m}$, $N = C^k{}_n$. Онда ізделінді ықтималдық:

$$P(A)=1- C^k{}_{n-m}/C^k{}_n .$$

23.3 Ықтималдықтарды көбейту теоремасы

Бірнеше оқиғалардың бір уақытта пайда болуының (көбейту) ықтималдығы:

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)\cdot \ldots \cdot P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n)$$

формуласы бойынша есептелінеді, мұндағы $P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n)$ дегеніміз - $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ оқиғалары орындалғаны белгілі болғандағы A_n оқиғасының ықтималдығы.

Салдар 1. Егер $A_1, A_2, \ldots, A_n$ оқиғалары жинағы бойынша тәуелсіз болса, онда

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot \ldots \cdot P(A_n),$$

себебі $P_{A_1}(A_2) = P(A_2)$, $P_{A_1A_2}(A_3) = P(A_3), \ldots, P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n) = P(A_n)$.

Мысал 5. Жәшікте 5 ақ, 4 қара және 3 көк шарлар бар. Жәшіктен бір шар алынды. Алынған бірінші шардың ақ (A), екінші шардың қара (B), үшінші шардың көк болу *(C)* ықтималдығын тап, егер әрбір алынған шар қайта жәшікке салынғаннан кейін ғана, келесі шар алынған болса.

Шешуі. Есеп шарты бойынша A, B, C оқиғалары - жинағы бойынша тәуелсіз оқиғалар және

$$P(ABC) = P(A)\cdot\ P(B)\cdot P(C) = \frac{5}{12}\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{12} = \frac{5}{144}.$$

Мысал 6. Жәшікте 5 ақ, 4 қара және 3 көк шарлар бар. Жәшіктен бір шар алынды. Алынған бірінші шардың ақ (A), екінші шардың қара (B), үшінші шардың көк болу *(C)* ықтималдығын тап, егер әрбір алынған шар қайта жәшікке салынбаса.

Шешуі. Есеп шарты бойынша $P(A) = \frac{5}{12}$, $P_A(B) = \frac{4}{11}$- жәшікте бірінші шар алынғаннан кейін 11 шар қалды, бірақ жәшіктегі қара шардың саны өзгерген жоқ. Келесі шар алынғаннан кейін барлығы 10 шар қалды және жәшіктегі көк шардың саны өзгерген жоқ: $P_{AB}(C) = \frac{3}{10}$. Бұдан:

$$P(ABC) = P(A)\cdot\ P_A(B)\cdot P_{AB}(C) = \frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10} = \frac{1}{22}.$$

Мысал 7. Үлкен жарнамалық кәсіпорында жұмысшылардың 21 %-і жоғарғы еңбек ақысын алады. Сонымен қатар, бұл кәсіпорында жұмыс істейтіндердің 40 %- і әйел адамдар, оның ішінде 6.4 % әйел адам жоғарғы еңбек ақысын алатыны белгілі. Кәсіпорында еңбек ақысын төлеуде әйел адамдардың дискриминациясы бар деген тұжырым айта аламыз ба?

Шешуі. Бұл есептің шешуін ықтималдықтар теориясының тіліне аударсақ: «Кездейсоқ алынған адам жоғарғы еңбек ақысын алатын әйел адам болу ықтималдығын тап?». A оқиғасы – «кездейсоқ алынған жұмысшы жоғарғы еңбек ақысын алатын адам», B оқиғасы– «кездейсоқ алынған жұмысшы – әйел адам» деген оқиға болса, онда:

$P(A/B) = P(A{\cdot}B)/P(B) = 0{,}064/0{,}40 = 0{,}16.$

0,16 саны 0,21-ден аз болғандықтан, мынадай қорытынды жасай аламыз: «кәсіпорында жұмыс істейтін әйел адамдардың ер адамдарға қарағанда жоғарғы еңбек ақысын алу мүмкіндігі аз».

Мысал 8. Студент емтиханда келетін 25 сұрақтың 20-сын ғана біледі. Емтихан алушы студентке үш сұрақ қойды. Студенттің барлық сұраққа жауап беру ықтималдығын тап.

Шешуі. A оқиғасы – «студент барлық үш сұраққа жауап берді»; A_1 – «студент бірінші сұрақты біледі»; A_2 – «студент екінші сұрақты біледі»; A_3 – «студент үшінші сұрақты біледі». A_1, A_2, A_3 оқиғалары тәуелді болғандықтан:

$P(A)=P(A_1){\cdot}P(A_2/A_1){\cdot}P(A_3/A_1{\cdot}A_2)=(20/25){\cdot}(19/24){\cdot}(18/23)= 57/115 = 0{,}496.$

23.4 Өз бетімен шығаруға арналған есептер

Келесі есептерді өз беттеріңмен шығарыңдар:

1. Үш мерген нысанаға бір-бірден оқ атты. Атылған оқтың нысанаға тию ықтималдығы бірінші мерген үшін - 0,75, екінші мерген үшін - 0,8 және үшінші мерген үшін - 0,9. Үш мергеннің де нысанаға тигізу ықтималдығын тап.

2. Үш мерген нысанаға бір-бірден оқ атты. Атылған оқтың нысанаға тию ықтималдығы бірінші мерген үшін - 0,75, екінші мерген үшін- 0,8 және үшінші мерген үшін - 0,2. Тым болмағанда бір оқтың нысанаға тию ықтималдығын тап.

3. Жәшікте 10 зат бар және оның төртеуі боялған. Студент кез келген үш затты алды. Алынған заттардың тым болмағанда біреуі боялған болу ықтималдығын тап.

4. Үш мерген нысанаға бір-бірден оқ атты. Атылған оқтың нысанаға тию ықтималдығы бірінші мерген үшін - 0,75; екінші мерген үшін - 0,8 және үшінші мерген үшін - 0,9. Кез келген екі оқтың нысанаға тию ықтималдығын тап.

5. «Екі тиынды лақтырған кезде екеуінде де герб түсті» деген оқиғаға қарама-қарсы оқиға қандай?

6. $A_i, i=\overline{1,3}$ оқиғалары толық топ құрайды, әрі $P(A_1)=0{,}3; P(A_3)=0{,}2$. $P(A_2)$ ықтималдығын тап.

7. 10 ақ және 4 қара шары бар жәшіктен бірінен кейін бірі кез келген үш шар алынды және олар алынған ретте қайта жәшікке салынған жоқ. Көбейту теоремасын қолданып, алынған бірінші шардың қара, екінші шардың ақ және үшінші шардың қара болу ықтималдығын тап.

23.5 Сұрақтар

1.Үйлесімсіз оқиғалардың ықтималдықтары үшін қосу теоремасы.

2.Тәуелсіз оқиғалардың ықтималдықтары үшін көбейту теоремасы.
3.Шартты ықтималдық.
4.Тәуелді оқиғалардың көбейтіндісі.
5.Үйлесімді оқиғалардың қосындысы.
6.Қарама-қарсы оқиғалар.

24 ТОЛЫҚ ЫҚТИМАЛДЫҚТЫҢ ФОРМУЛАСЫ. БЕЙЕС ФОРМУЛАСЫ. ТӘУЕЛСІЗ СЫНАҚТАРДЫҢ ҚАЙТАЛАНУЫ

24.1 Толық ықтималдықтың формуласы

A оқиғасы, өзара үйлесімсіз, толық топ құратын $B_1, B_2, \ldots, B_n$ оқиғаларының (болжамдардың) біреуімен бірге пайда болатын болсын. Сонымен қатар, $P(B_i)$, $i = \overline{1,n}$ және шартты ықтималдық $P_{B_i}(A)$ белгілі болса, онда A оқиғасының ықтималдығы мына формуламен анықталады:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A), \qquad (1)$$

және болжамдар ықтималдықтардың толық тобын құрайтындықтан $\sum_{i=1}^{n} P(B_i) = 1$.

Бұл формула толық ықтималдықтың формуласы деп аталады.

Мысал 1. Цехта өнімділігі бірдей 3 түрлі станок бірдей заттар жасап шығарады. Бірінші түрдегі станоктың сапалы зат шығару ықтималдығы - 0,94, екінші түрдегі станок үшін бұл ықтималдық -0,9, ал үшінші түрдегі станок үшін - 0,85-ке тең. Жәшікте 10 зат жатыр, оның бесеуі бірінші түрдегі станокпен, үшеуі екінші түрдегі станокпен, ал қалған екеуі үшінші түрдегі станокпен жасалған. Жәшіктен кез келген бір зат алынды. Алынған заттың сапалы болу ықтималдығын тап.

Шешуі. A - жәшіктен алынған зат сапалы деген оқиға болсын. Онда болжамдар: B_1- зат бірінші түрдегі станокпен жасалған, B_2- зат екінші түрдегі станокпен жасалған, B_3 - зат үшінші түрдегі станокпен жасалған деген оқиғалар. Есеп шарты бойынша: $P(B_1) = \frac{5}{10}$, $P(B_2) = \frac{3}{10}$, $P(B_3) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. Егер зат бірінші түрдегі станокпен жасалғаны белгілі болса, онда оның сапалы болу ықтималдығы: $P_{B_1}(A) = 0{,}94$. Дәл солай, $P_{B_2}(A) = 0{,}9$, $P_{B_3}(A) = 0{,}85$. Ендеше, толық ықтималдықтың формуласын қолдансақ, жәшіктен алынған заттың сапалы болу ықтималдығы:

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}94 + \frac{3}{10} \cdot 0{,}9 + \frac{1}{5} \cdot 0{,}85 = 0{,}91.$$

Мысал 2. Қандай да бір ұжымның келесі жылы акциясының өсу ықтималдығы 0,75-ке тең, егер елдің экономикасының дамуы жоғарғы деңгейде болса; ал егер елдің экономикасы төмендейтін болса бұл ықтималдық 0,30-ға тең. Экономисттердің болжамы бойынша келесі жылы елдің экономикасының өсуінің ықтималдығы 0,80. Экономисттердің болжамы ақиқат болса, онда келесі жылы ұжымның акциясының бағасының өсу ықтималдығын тап.

Шешуі. A оқиғасы– «келесі жылы ұжымның акциясының бағасы өседі» деген оқиға болсын. Жұмыстық кестесін құралық:

B_i	Болжамдар B_i	$P(B_i)$	$P(A/B_i)$	$P(B_i)P(A/B_i)$
1	B_1 – «экономиканың өсуі»	0,80	0,75	0,60
2	B_2 – «экономиканың	0,20	0,30	0,06
∑		1,00	–	$P(A) = 0{,}66$

Мысал 3. Екі жәшіктің әрқайсысында 6 қара және 4 ақ шарлар бар. Бірінші жәшіктен екінші жәшікке бір шар салынды. Одан кейін екінші жәшіктен бір шар алынды. Алынған шардың қара болу ықтималдығын тап.

Шешуі. A оқиғасы – «екінші жәшіктен алынған шар қара» деген оқиға болсын. Жұмыстық кестесін құралық:

B_i	Болжамдар B_i	$P(B_i)$	$P(A/B_i)$	$P(B_i)P(A/B_i)$
1	B_1 – «бірінші жәшіктен екінші	6/10	7/11	42/110
2	B_2 – «бірінші жәшіктен екінші	4/10	6/11	24/110
∑		1,00	–	$P(A) = 0{,}60$

24.2 Бейес формуласы

A оқиғасы пайда болатын сынау жүргізілді деп есептейік. A-ның орындалуына байланысты болжамдар ықтималдығы қалай өзгереді $[P_A(B_i) = ?]$.

Болжамдар теоремасы (Бейес формуласы). A оқиғасы орындалғаны белгілі болғаннан кейінгі болжамдар ықтималдығы былай есептеледі:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i)P_{B_i}(A)}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Мысал 4. Жоғарыдағы 1-мысалда алынған заттың сапалы екені белгілі болсын. Осы алынған заттың екінші түрдегі станокпен жасалу ықтималдығы неге тең $[P_A(B_2) = ?]$.

Шешуі. $P(B_2) = \frac{3}{10}$ - болжамның A оқиғасы орындалғанға дейінгі ықтималдығы, $P_A(B_2)$- A оқиғасы орындалғаннан кейінгі ықтималдығы. Бейес формуласын қолдансақ:

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{3} P(B_i)P_{B_i}(A)} = \frac{\frac{3}{10}\cdot 0{,}9}{0{,}91} \approx 0{,}297.$$

Мысал 5. Экономикалық өсім жоғары болған аралықта американдық доллардың өсу ықтималдығы 0,7, ал экономикалық өсім төмен болған жағдайда доллардың өсу ықтималдығы 0,4, және экономикалық өсім өте төмен болған жағдайда доллардың өсу ықтималдығы 0,2. Кез келген уақыт аралығында экономикалық өсімнің жоғары болу ықтималдығы 0,3, экономикалық өсімнің қалыпты болу ықтималдығы – 0,5 және өте төмен болу ықтималдығы – 0,2. Ағымдық уақытта доллар қымбаттағаны белгілі болса, бұл аралықтың экономикалық өсімнің жоғары болу аралығымен сай келу ықтималдығын тап?

Шешуі. Болжамдар: H_1 – «экономикалық өсім жоғары»; H_2 – «экономикалық өсім қалыпты»; H_3 – «экономикалық өсім төмен».

A оқиғасы – «доллар өседі» деген оқиға болсын. Онда: $P(H_1) = 0,3$; $P(H_2) = 0,5$; $P(H_3) = 0,2$; $P(A/H_1) = 0,7$; $P(A/H_2) = 0,4$ и $P(A/H_3) = 0,2$. $P(H_1/A)$ ықтималдығын тап.

Бейес формуласын (2) қолданамыз :

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) + P(H_3)\cdot P(A/H_3)} =$$

$$= \frac{0,3\cdot 0,7}{0,3\cdot 0,7 + 0,5\cdot 0,4 + 0,2\cdot 0,2} = 0,467.$$

Кесте көмегімен де осындай нәтиже аламыз:

Болжамдар B_i	Априорлық ықтималдықтар $P(B_i)$	Шартты ықтималдықтар $P(A/B_i)$	Үйлесімді ықтималдықтар $P(A\cap B_i)$	Апостериорлық ықтималдықтар $P(B_i/A)$
B_1	0,30	0,70	0,21	0,21/0,45 = 0,467
B_2	0,50	0,40	0,20	0,20/0,45 = 0,444
B_3	0,20	0,20	0,04	0,04/0,45 = 0,089
Қосынды	1,00	–	0,45	1

24.3 Тәуелсіз сынақтардың қайталануы

24.3.1 Бернулли формуласы

Тәуелсіз n сынақ жүргізу нәтижесінде A оқиғасының пайда болу ықтималдығы тұрақты $P(A) = p$ (пайда болмауы $P(\overline{A}) = 1 - p$) болатын схеманы Бернулли схемасы немесе тәуелсіз сынауларды қайталау схемасы деп атаймыз. Ал сынауды тәуелсіз дегенде біз оқиғаның пайда болу (я болмау) ықтималдығы бір сынаудан екінші сынауға дейін өзгермейді және оқиға басқа, алдыңғы не соңғы сынауларда пайда болды ма, не болмады ма, оған байланысты емес деп түсінетін боламыз.Онда тәуелсіз n сынақ

жүргізу нәтижесінде A оқиғасының тура k рет пайда болу ықтималдығы Бернулли формуласымен есептеледі:

$$P_n(k) = P_{k,n} = C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

Мысал 6. Нысананы көздеп тәуелсіз 6 рет оқ атылды. Әрқайсысында оқтың нысанаға тию ықтималдығы $p = 0{,}9$. Атылған тәуелсіз 6 оқтың тура төртеуінің нысанаға тию ықтималдығын тап.

$$P_6(4) = \frac{6!}{4! \cdot 2!}(0{,}9)^4 \cdot (0{,}1)^2 = 0{,}984 .$$

$p + q = 1$ екенін ескере отырып, оның екі жағын да n дәрежелеп: $(p+q)^n = 1$, Ньютон формуласын қолдансақ, мынадай биномдық қатарды аламыз:

$$P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + \ldots + P(k) + \ldots + P(n) = 1 .$$

Анықтама 1. Р ықтималдығы ең үлкен мән қабылдайтын $k = k_0$ мәнін *ең ықтималды сан* деп атаймыз.

Егер (n+1)p – бүтін сан болса, онда екі мән болады: $k_0 =$(n+1)p-1 және $k_0 =$(n+1)p. Егер (n+1)p – бөлшек сан болса, онда $k_0 =$ [(n+1)p], мұндағы [...] белгісі – санның бүтін бөлігі дегенді көрсетеді.

Мысал 7. Лотореяда бір билетке ұтыс шығу ықтималдығы p=0,3. 13 билет сатып алынған. Ұтыс билетінің ең ықтималды саны қандай және оған сәйкес ықтималдықты тап.

Шешуі. **p=0,3; n= 13. Жоғарыдағы формула бойынша ең ықтималды санды табамыз: (n+1)p= 4,2 – бөлшек сан болғандықтан, $k_0 =$ [(n+1)p]=[4,2]=4. Ал сәйкес ықтималдықты Бернулли формуласы бойынша есептейміз:** $P_{13}(4) = P_{4,13} = C_{13}^4 \cdot (0{,}3)^4 (1-0{,}3)^{13-4} = = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot (0{,}3)^4 \cdot (0{,}7)^9 = 0{,}23$**.**

24.3.2 Полиномдық үлестірім

n тәуелсіз сынақ жүргізу нәтижесінде өзара тәуелсіз $A_1, A_2, \ldots, A_k$ оқиғаларының сәйкес $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ықтималдықтарымен сәйкесінше $m_1, m_2, \ldots, m_k$ рет пайда болу жағдайларын қарастырайық, мұндағы $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$.

A_1 оқиғасының m_1 рет, A_2 оқиғасының m_2 рет, ..., A_k оқиғасының m_k рет пайда болу ықтималдығы, әрі $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$, мынадай формула бойынша есептелінеді:

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_k!} \cdot p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \ldots \cdot p_n^{m_k} .$$

Бұл ықтималдықтың полиномдық үлестірімі.

Мысал 8. Әрбір лотерея билетінің ірі ұтысты болу ықтималдығы p_1, кішігірім ұтысты болу ықтималдығы p_2 және мүлдем ұтыссыз болу ықтималдығы p_3. n билет сатып алынды. Алынған билеттердің ішінде m_1 ірі ұтысты, m_2 кішігірім ұтысты болу ықтималдығын тап.

Шешуі. Ұтыссыз билеттер саны $m_3 = n - m_1 - m_2$. Ықтималдықтың полиномдық формуласын қолданамыз:

$$P_n(m_1, m_2, m_3) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot m_3!} p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot p_3^{m_3}.$$

24.3.3 Лаплас теоремасы

n үлкен сан болғанда Бернулли формуласын қолдану үлкен арифметикалық есептеулерге әкеп соғады. Сондықтан да, біз n - өте үлкен сан және $p > 0{,}1$ ($npq > 9$ болатындай) болған жағдайда, Лапластың локалдық немесе интегралдық теоремасын қолданамыз.

Лапластың локалдық теоремасы. Тәуелсіз n сынақ жүргізілгенде A оқиғасының тура k рет пайда болу ықтималдығы мына формула бойынша жуықтап есептеледі:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) \qquad (3)$$

мұндағы $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}, \quad 0 < p < 1$.

$\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ **функциясының мәнін есептеу үшін дайын кестені қолданамыз және $\varphi(-x) = \varphi(x)$ екенін ескереміз.**

Лапластың интегралдық теоремасы. **Тәуелсіз n сынақ жүргізу нәтижесінде A оқиғасының k_1-ден кем емес және k_2-ден артық емес рет пайда болуының ықтималдығы мына формула бойынша жуықтап есептеледі:**

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz ,$$

(4)

мұндағы $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

$\Phi(x) \approx \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ Лаплас функциясын есептеу үшін дайын кестені қолданамыз және $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ екенін ескереміз. Лаплас функциясының кестесін қолдану үшін (4) формуласын мынадай түрде жазуға болады:

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Мысал 9. Әрбір n тәуелсіз сынақта қандай да бір оқиғаның пайда болу ықтималдығы p. Осы оқиғаның k_2-ден артық емес рет пайда болу ықтималдығын тап (мұндағы n-өте үлкен сан).

Шешуі. n - өте үлкен сан және оқиғаның $0 \le m \le k_2$ аралығындағы ықтималдығын табу керек болғандықтан, Лапластың интегралдық формуласын қолданамыз: $P_n(0,k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, мұндағы $x_1 = \dfrac{0-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, Лаплас функциясының аргументтерін есептеп, дайын кестеден осы функцияның сәйкес мәндерін тауып, орнына қоямыз.

24.3.4 Пуассон формуласы

Егер n өте үлкен сан, ал p өте аз шама ($npq < 9$ болатындай) және $\lambda = np$ шамасы тұрақты болған жағдайда Пуассон формуласы қолданылады.

Пуассон теоремасы. Егер $n \to \infty,\ p \to 0$ болып және $\lambda = np \neq 0$ шамасы тұрақты болса, онда $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

Мысал 10 . 1000 тәтті тоқаш дайындау үшін 5000 жүзім қажет. Кездейсоқ алынған кез келген тәтті тоқашта үштен аз жүзім болу ықтималдығын тап.

Шешуі. A оқиғасы – кездейсоқ алынған тәтті тоқаштағы жүзім саны үштен аз деген оқиға болса, онда

$$P(A) = P_{5000}(0) + P_{5000}(1) + P_{5000}(2),$$

λ=np=5000·0,001=5, ендеше $P(A) = \dfrac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} + \dfrac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} + \dfrac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} \approx 0{,}125.$

Мысал 11 .Телефон станциясында әрбір қоңырау шалу кезінде ақау болу ықтималдығы 0,002. Барлығы 1000 қоңырау шалынған болса, оның ішінде 9 ақау болу ықтималдығын тап.

Шешуі. Пуассон формуласы бойынша есептейміз, мұндағы n=1000, k=9, p=0,002. Ендеше,

$$P_{1000}(9) = \frac{(1000 \cdot 0{,}002)^9}{9!}e^{-2} \approx 0{,}00019.$$

24.4 Өз бетімен шығаруға арналған есептер

Келесі есептерді өз беттеріңмен шығарыңдар:

1.Жанұяда 6 бала бар. Осы балалардың төртеуі ер бала болу ықтималдығын тап, егер қыз баланың дүниеге келу ықтималдығы 0,51-ге тең болса.

2. Жанұяда 6 бала бар. Осы балалардың төртеуі қыз бала болу ықтималдығын тап, егер ер баланың дүниеге келу ықтималдығы 0,49-ға тең болса.

3. Жанұяда 6 бала бар. Осы балалардың біреуі қыз болу ықтималдығын тап, егер қыз баланың дүниеге келу ықтималдығы 0,51-ге тең болса.

4. Жанұяда 6 бала бар. Осы балалардың ішінде тым болмағанда бір ұл бала болу ықтималдығын тап, егер ер баланың дүниеге келу ықтималдығы 0,49-ға тең болса.

5.Типографиядағы дұрыс қапталған кітаптардың ең ықтималды санын тап. Егер барлығы 10 кітап қапталған болса, әрі кітаптың дұрыс қапталмау ықтималдығы 0,7-ге тең болса.

6. Тиын 5 рет лақтырылды. «Герб» жағының төрт рет түсу ықтималдығын тап.

7. Тиын 5 рет лақтырылды. «Герб» жағының екі рет түсу ықтималдығын тап.

8. 8 тәуелсіз сынақ жүргізілген және бұлардың әрбіреуінде A оқиғасының пайда болу ықтималдығы 0,1. A оқиғасының тым болмағанда бір рет пайда болу ықтималдығын тап.

9. Бір рет атылған оқтың нысанаға тию ықтималдығы 0,9. Атылған 10 оқтың нысанаға тиюінің ең ықтималды санын тап.

10. 6 тәуелсіз сынақ жүргізілген және бұлардың әрбіреуінде A оқиғасының пайда болу ықтималдығы 0,2. A оқиғасының пайда болуының ең ықтималды санын тап.

24.5 Сұрақтар

1. Толық ықтималдықтың формуласы.
2. Бейес формуласы.
3. Биномдық, полиномдық үлестірім заңдары.
4. Лапластың локалдық теоремасы $p_n(m)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{t^2}{2}}$.
5. Лапластың интегралдық формуласы, $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ кестесі.
6. Пуассон теоремасы.
7. Пуассон формуласы: $P_n(k)\approx\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

25 КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ САНДЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫ

25.1 Дискретті және үзіліссіз кездейсоқ шамалар

25.1.1 Негізгі анықтамалар және кездейсоқ шамаларға арналған мысалдар

Анықтама

1. *Кездейсоқ шама* деп сынақ нәтижесінде қандай да бір мән (тек бір ғана) қабылдайтын шаманы айтамыз, әрі оның алдын-ала, сынақ жүргізілгенге дейін, қандай мән қабылдайтыны белгісіз.

2. Кездейсоқ шаманың қабылдайтын мәндері ақырлы бүтін сандар немесе тізбек түрінде жазылса, онда ондай кездейсоқ шамаларды *дискреттік шамалар* деп атаймыз.

Дискреттік үлестірімнің мысалдары.

Мысал 1. Биномдық үлестірім

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},\ 0 < p, q < 1,\ k = 0,1,2,\ldots,n$$

Мысал 2 . Пуассон үлестірімі $P_n(k) = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha},\ \alpha > 0,\ k = 0,1,2,\ldots$

Мысал 3. Геометриялық үлестірім

$$P_n(k) = pq^{k-1},\ 0 < p, q < 1,\ k = 0,1,2,\ldots$$

Мысал 4. Гипергеометриялық үлестірім

$$P = C_n^k C_{N-n}^{m-k} \Big| C_N^m \ .$$

Мысал 5.

а) X – n заты бар партияның ішіндегі сапалы емес заттар саны. X шамасының қабылдайтын мәндері: $x_1 = 0, x_2 = 1, \ldots, x_{n+1} = n$.

б) X – нысанаға алғашқы оқ тигенше жүргізілген атыс саны, онда: $x_1 = 1, x_2 = 2, \ldots$.

3. Егер кездейсоқ шама өзінің мүмкін мәндерін [a, b] интервалында қабылдаса және бұл мәндерді бүтін сандармен нөмірлеуге болмаса, онда ол *үзіліссіз кездейсоқ шама* аталады.

Үзіліссіз үлестірімнің мысалдары:

Мысал 6. Бірқалыпты үлестірім

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0 \ , & x \notin [a, b], \end{cases} \quad -\infty < a < b < \infty .$$

*Мысал 7.*Биномдық үлестірім

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ \ k = 0, 1, \ldots, n$$

Мысал 8. Қалыпты үлестірім ((a, τ) параметрлерімен берілген)

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} - e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ \ -\infty < a < +\infty,\ \ \sigma > 0$$

Мысал 9. Көрсеткіштік үлестірім

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0 \ , & x < 0, \end{cases} \quad , \lambda > 0.$$

Мысал 10. Коши үлестірімі $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$

Мысал 11. Пуассон үлестірімі $P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Мысал 12. X – мылтық ату кезіндегі оқтың түсу аралығы: $a < X < b$.

25.2 Дискретті кездейсоқ шамалардың үлестірім заңдары

Х кездейсоқ шамасын толық анықтау үшін, Х-тің мүмкін мәндерінен басқа, осы мүмкін мәндер мен оған сәйкес ықтималдықтарының арасындағы байланысты көрсету қажет. Бұл байланыс Х шамасының *үлестірім заңы* деп аталады және дискретті кездейсоқ шама үшін оны мынадай үлестірім қатары түрінде беруге болады:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

мұндағы $P(x_i) = p_i,\ i = \overline{1,n}$.

Сонымен қатар, бұл байланысты график түрінде үлестірім көпбұрышы ретінде беруге болады.

Мысал 13. Екі симметриялы ойын сүйегі лақтырылған. Х – екі ойын сүйегінде түскен ұпай сандарының қосындысы. Үлестірім қатарын құр.

Шешуі. y арқылы – бірінші сүйекте түскен ұпай санын, z арқылы – екінші сүйекте түскен ұпай санын белгілелік, онда $x = y + z$ және y пен z - тәуелсіз кездейсоқ шамалар.

Әрбір оқиғаның ықтималдығы $P(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. Кесте құралық:

y/z	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Сонымен, дискретті кездейсоқ шаманың есеп шартын қанағаттандыратын үлестірім заңын құрдық.

25.3 Үзіліссіз кездейсоқ шаманың үлестірім функциясы мен тығыздығы

Үзіліссіз Х кездейсоқ шамасының үлестірім заңдылығы үлестірім функциясы (интегралдық функция) арқылы беріледі. $F(x) = P(X < x)$.

X дискретті кездейсоқ шамасы үшін $F(x)=\sum_{x_i<x}P(X=x_i)$, ал үзіліссіз кездейсоқ шама үшін – сынақ нәтижесінде кездейсоқ X нүктенің x нүктесінің сол жағына таман орналасу ықтималдығы: $F(x)=P(X<x)$.

$F(x)$ үлестірім функциясының қасиеттері.

1. $0\le F(x)\le 1$
2. $P(\alpha\le X\le\beta)=F(\beta)-F(\alpha)$
3. $F(x)$ - кемімелі емес функция
4. $F(-\infty)=0, F(\infty)=1$.

Ары қарай, егер $F(x)$- үзіліссіз функция болса, онда X шамасын үзіліссіз деп қарастырамыз.

Үзіліссіз X шамасының үлестірімінің әртүрлі нүктелердің маңайындағы сипаттамаларын $F(x)$ функциясынан қарағанда үлестірім тығыздығы (дифференциалдық функция) $f(x)=F'(x)$ толығырақ сипаттайды.

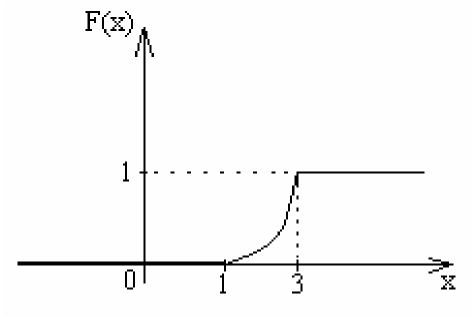
$f(x)$ үлестірім тығыздығының қасиеттері

1. $f(x)\ge 0$
2. $F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$
3. $P(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$
4. $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$

Мысал 14. $F(x)$ және $f(x)$ графиктерін тұрғыз, егер

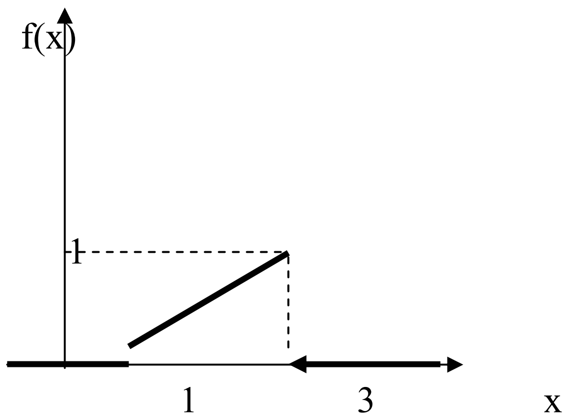
$$F(x)=\begin{cases}0, & егер \quad x\le 1\\ \frac{1}{4}(x-1)^2, & егер\ 1<x\le 3\\ 1, & егер \quad x>3\end{cases}$$

Шешуі.



$f(x)=F'(x)$ табалық:

$$f(x)=\begin{cases}0, & егер \quad x\le 1\\ \frac{1}{2}(x-1), & егер\ 1<x\le 3\\ 0, & егер \quad x>3\end{cases}.$$



Мысал 15. X кездейсоқ шамасы үлестірім тығыздығымен берілген: $p(x)=a,$ егер $x\in[(b-\gamma)/2;(b+\gamma)/2]$ болса және p(x)=0, егер x бұл интервалға тиісті емес болса. γ параметрін, X кездейсоқ шамасының үлестірім функциясын және $x_1 \le X \le x_2$ теңсіздігі орындалу ықтималдығын тап.

Шешуі. Үлестірім тығыздығының мына қасиетін ескерсек:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx=1 \Rightarrow \int_{b-\gamma/2}^{b+\gamma/2} adx=1 \Rightarrow a\left(\frac{b+\gamma}{2}-\frac{b-\gamma}{2}\right)=1 \Rightarrow a\gamma=1 \Rightarrow \gamma=\frac{1}{a}.$$

$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(x)dx$ формуласынан, $F(x)=a\left(x-\dfrac{b-1/\gamma}{2}\right)$ екені шығады. Ендеше, $P(x_1 \le X \le x_2)=F(x_2)-F(x_1)=a(x_2-x_1)$.

25.4 Өз бетімен шығаруға арналған есептер

Келесі есептерді өз беттеріңмен шығарыңдар.

1.Автобустың жүру интервалы 5 минут. X кездейсоқ шамасы – аялдамада автобусты тосу уақыты және ол көрсетілген уақыт аралығында бірқалыпты үлестірілген. X кездейсоқ шамасының үлестірім функциясын және аялдамада тосу уақыты 3 минуттан асу ықтималдығын тап.

2. X кездейсоқ шамасы – жанар-жағар май станциясында көліктің тосу уақыты және ол көрсеткіштік заң бойынша t_0-ге тең орташа тосу уақытымен үлестірілген. Келесі оқиғалардың ықтималдықтарын табыңдар:

$$A=\left\{\frac{t_0}{2} \le X < \frac{3}{2}t_0\right\}, \quad B=\{X \ge 2t_0\}.$$

3. Барлау радиолокаторының экранында мақсатқа жету белгісінің пайда болуы антеннаның бір орамы үшін 0,6-ға тең. Қойылған мақсатқа жетті деп есептейміз, егер экранда мақсатқа жету белгісі үш рет пайда болса. Антеннаның орамы бестен аспай мақсатқа жету ықтималдығын тап.

4. $f(x)=\dfrac{C}{1+x^2}$ берілген. C тұрақтысын және X кездейсоқ шамасының үлестірім функциясын тап.

5. X кездейсоқ шамасының үлестірім тығыздығы $f(x)=\dfrac{a}{e^{-x}+e^{x}}$. Тұрақты a параметрін тап.

6.Берілген үлестірім тығыздығы бойынша үлестірім функциясын тап:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ 1/(b-a), & a<x\le b,\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

Үлестірім тығыздығы мен үлестірім функциясының графиктерін сал.

7. X кездейсоқ шамасы үлестірім тығыздығымен берілген:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 2x, & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Сынақ нәтижесінде X шамасының (0,5; 1) аралығындағы мәндерді қабылдау ықтималдығын тап.

25.5 Сұрақтар

1. Дискретті кездейсоқ шама.
2. Дискретті кездейсоқ шаманың үлестірім заңы.
3. Үзіліссіз кездейсоқ шама.
4. Интегралдық функция, оның қасиеттері және графигі.
5. Дифференциалдық функция, оның қасиеттері және графигі.

26 КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАРДЫҢ САНДЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫ ҮЗІЛІССІЗ КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАРДЫҢ ҮЛЕСТІРІМІ. ҮЛКЕН САНДАР ЗАҢЫ

26.1 Кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамалары

Анықтама 1. X кездейсоқ шамасының математикалық үміті деп:

а) X – дискретті шама болса, онда

$$M[X]=x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$$

б) X – үзіліссіз шама болса, онда

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx\,.$$

26.1.1Математикалық үміттің қасиеттері

1. $M(C)=C$, мұндағы C – тұрақты шама.
2. $M(C\cdot X)=C\cdot M(X)$, мұндағы C – тұрақты шама.
3. $M(X_1\pm X_2\pm\ldots\pm X_n)=M(X_1)\pm M(X_2)\pm\ldots\pm M(X_n)$.
4. Тәуелсіз n кездейсоқ шамасы үшін , n ақырлы болғанда:

$M(X_1\cdot X_2\cdot\ldots\cdot X_n)=M(X_1)\cdot M(X_2)\cdot\ldots\cdot M(X_n)$.

5. $M(X–C) = M(X) – C$.

Салдар. X кездейсоқ шамасының мәндерінің оның математикалық үмітінен ауытқуының математикалық үміті нөлге тең: $M[X – M(X)] = 0$. Математикалық үміт ретінде X шамасының таралу центрін қарастыруға болады. Егер n сынақ жүргізідген болса, онда $M[X]$ жуық шамамен бақыланған X мәндерінің арифметикалық ортасына тең.

X кездейсоқ шамасының негізгі сандық сипаттамаларына, сонымен қатар, X кездейсоқ шамасының дисперсиясы $D[X]$ мен орташа квадраттық ауытқуы $\sigma(x)=\sqrt{D[X]}$ жатады. X кездейсоқ шамасының дисперсиясы $D[X]=M[X-M[X]]^2$:

а) X – дискретті шама болса, онда

$$D[X]=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M[X])^2 p_i.$$

б) X – үзіліссіз шама болса, онда

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx.$$

Сонымен қатар, X кездейсоқ шамасының сандық сипаттамасының қатарына орташа квадраттық ауытқу да енеді: $\sigma(x)=\sqrt{D[X]}$.

26.1.2 Дисперсияның қасиеттері:

1. $D(C) = 0$, мұндағы C – тұрақты шама.
2. $D(C·X) = C^2·D(X)$, мұндағы C – тұрақты көбейткіш.
3. . Тәуелсіз n кездейсоқ шамасы үшін , n ақырлы болғанда:

$D(X_1 \pm X_2 \pm\ldots\pm X_n) = D(X_1) + D(X_2)+\ldots+D(X_n)$.

Дисперсияны есептеу үшін мына жоғарыда берілген формуладан қорытылып шығатын мына формуланы қолдануға болады: $\sigma^2 = D(X) = M(X^2) – M^2(X)$.

Мысал 1. Екі симметриялы ойын сүйегі лақтырылған. X – екі ойын сүйегінде түскен ұпай сандарының қосындысы. Екі ойын сүйегінде түскен ұпай сандарының қосындысының математикалық үмітін m_X тап.

Шешуі. y арқылы – бірінші ойын сүйегінде түскен ұпай санын, z арқылы – екінші ойын сүйегінде түскен ұпай санын белгілелік. Онда $x=y+z$ және y пен z - тәуелсіз кездейсоқ шамалар.

Әрбір оқиғаның ықтималдығы: $P(x)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$. Кесте құралық:

y/z	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

5 6 7 8 9 10 11
6 7 8 9 10 11 12

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$M(X) = 2\cdot\frac{1}{36} + 3\cdot\frac{2}{36} + 4\cdot\frac{3}{36} + ... + 11\cdot\frac{2}{36} + 12\cdot\frac{1}{36} = 7.$$

Мысал 2. Кәсіпорын қандай да бір сатады, сату саны мың бірлік. Өнімнің айлық сатылу көлемі кестемен берілген. Айлық сатылымның күтілген орташа мәнін тап.

x товарының бірлік саны, мың,	*P(x)*
5000	0,2
6000	0,3
7000	0,2
8000	0,2
	1,0

Шешуі. Жоғарыдағы математикалық үміттің формуласын қолдансақ:
M(X) = 5000·0,2 + 6000·0,3+ + 7000· 0,2 + 8000· 0,2 + 9000· 0,1 = 1000 + 1800 + 1400 +
+ 1600 + 900 = 6700.

Мысал 3. Күнделікті газет баспасы келесі күні басылуға қажетті жаңа жарнамалар қабылдайды. Газеттегі жарнамалардың саны әртүрлі факторларға байланысты: апта күні, маусым, экономиканың жалпы жағдайы және т.б. X – белгілі бір күнгі газеттегі жаңа жарнамалардың саны болсын. X – тек қана бүтін сан болатын кездейсоқ шама. Біздің мысалымызда X кездейсоқ шамасы мынадай мәндер қабылдайды: 0; 1; 2; 3; 4; 5 сәйкес ықтималдықтарымен 0,1; 0,2; 0,3; 0,2; 0,1; 0,1. X – кездейсоқ шамасының математикалық үмітін, дисперсиясын және орташа квадраттық ауытқуын тап

Шешуі.

X кездейсоқ шамасының үлестірім қатары:

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(x_i)= p_i$	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

Жарнамалардың санының математикалық үміті :

x_i	0	1	2	3	4	5	n

$P(x_i)$	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1	$\sum_{i=1}^{n} P(x_i)^2$
$x_iP(x_i)$	0,0	0,2	0,6	0,6	0,4	0,5	$M(X) = 2,3$

Күніне орташа шамамен газетке 2,3 жарнама сияды. Бұл – берілген жарнамалардың күндегі күтілген орташа саны. Дисперсия:

$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i – M(X)]^2 P(x_i) = (0–2,3)^2 + (1–2,3)^2 + (2–2,3)^2 + (3–2,3)^2 + (4–2,3)^2 + (5 – 2,3)^2 = 2,01$. Орташа квадраттық ауытқу: $y = \sqrt{2,01} = 1,418$.

Жоғарыда айтылғандардан басқа, кездейсоқ шамалардың тағы да мынадай сандық сипаттамалары бар: мода, медиана, моменттер және т.б.

Бастапқы және центрлік теориялық моменттер.

Анықтама 2. X кездейсоқ шамасының k-шы ретті бастапқы моменті деп X^k шамасының математикалық үмітін айтамыз:

$$\nu_k = M(X^k)$$

$M(X) = \nu_1, M(X^2) = \nu_2, ...$

Дәл осылай, дисперсия үшін: $D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \nu_2 - \nu_1^2$.

Анықтама 3. X кездейсоқ шамасының k-шы ретті центрлік моменті деп $(X - M(X))^k$ шамасының математикалық үмітін айтамыз:

$$\mu_k = M[(X - M(X))^k]$$

$$\mu_1 = M[(X - M(X))] = 0$$

$$\mu_{2k} = M[(X - M(X))^2] = D(X)$$

μ_k мен ν_k арасындағы байланысты оңай есептеп шығаруға болады:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4$$

Мысал 2. X кездейсоқ шамасы үлестірім заңымен берілген:

	0 ,1	2	0	2 0
	0 ,4	0 ,2	,15	(,25

$\mu_2, \mu_3 = ?$

Шешуі.

$\nu_1 = M(X) = 0,1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,2 + 10 \cdot 0,15 + 20 \cdot 0,25 = 6,94,$

$\nu_2 = M(X^2) = 0,1^2 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0.2 + 100 \cdot 0,15 + 400 \cdot 0.25 = 115,804,$

$\nu_3 = M(X^3) = 0,001 \cdot 0,4 + 8 \cdot 0,2 + 1000 \cdot 0,15 + 8000 \cdot 0,25 = 2150.6004,$

Онда $\mu_2 = 115,804 - 6,94^2 = 67,6404,$ $\mu_3 = 2150,6004 - 3 \cdot 6,94 \cdot 115,804 + 2 \cdot 6,94^3 = 408,072.$

26.2 Үзіліссіз кездейсоқ шамалардың үлестірім түрлері

26.2.1 Ықтималдықтың бірқалыпты үлестірім заңы

Анықтама 4. Үлестірім бірқалыпты деп аталады, егер кездейсоқ шаманың барлық мүмкін мәндері жататын аралықта дифференциалдық функция $f(x) = const$ болса.

$X \in (a,b)$ деп есептеп, бірқалыпты үлестірімнің дифференциалдық функциясын табалық, мұндағы $f(x) = C$. Онда $x < a,\ x > b$ болғанда, $f(x) = 0$. Дифференциалдық функцияның қасиеті бойынша: $\int_a^b f(x)dx = 1$ немесе $\int_a^b Cdx = 1 \ \Rightarrow\ C(b-a) = 1$, бұдан $C = \dfrac{1}{b-a}$. Сонымен,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \dfrac{1}{b-a}, & a < x \le b \\ 0, & x > b \end{cases}.$$

26.2.2 Қалыпты үлестірім

Анықтама 5. Үзіліссіз кездейсоқ шаманың үлестірімі қалыпты деп аталады, егер оның дифференциалдық функциясы $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ болса.

1.Бұл жерде екі параметр бар: σ және a. Олардың мағынасы: a - қалыпты үлестірімнің математикалық үміті, σ - орташа квадраттық ауытқу.

а) $$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| \begin{array}{l} z = \dfrac{x-a}{\sigma} \\ x = z\sigma + a \\ dx = \sigma dz \end{array} \right| = \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma z + a) e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma z e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ze^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ze^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = a, \quad M(X) = a.$$

б) $D(X) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| \begin{array}{l} x - a = \sigma zz \\ dx = \sigma dx \end{array} \right| = \dfrac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} z \cdot ze^{-\frac{z^2}{2}} dz =$ /екі рет бөліктеп интегралдаймыз/ $= \sigma^2$; $\sigma = \sqrt{D(x)}$ – орташа квадраттық ауытқу.

Ескерту 1 . Егер $a = 0,\ \sigma = 1$ болса, онда қалыпты үлестірім қалыптандырылған деп аталады. Оның дифференциалдық функциясы: $f(x) = \varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, ал интегралдық функциясы $F_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$.

2. Лапластың интегралы $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ белгілі, онда $P(0<z<x)=$

$=\int\limits_0^x f(z)dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\Phi(x)-$ қалыпты үлестірім үшін.

3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$ қасиетін ескерсек, $\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx=\frac{1}{2}$ аламыз, яғни,

$P(-\infty<X<0)=0{,}5 \Rightarrow \quad F_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz=0{,}5+\Phi(x)..$

26.2.3 Қалыпты қисық

Анықтама 6. Қалыпты үлестірім функциясының графигі қалыпты қисық $y=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ деп аталады немесе Гаусс қисығы деп аталады.

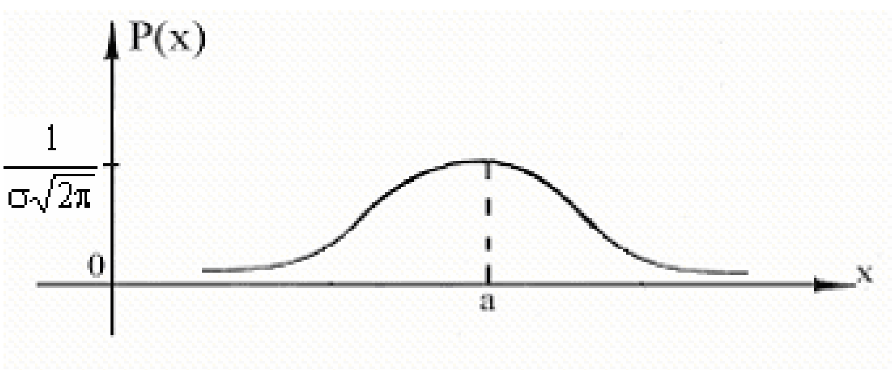
$y=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ функциясын зерттейік.

1) Анықталу облысы: $-\infty<x<\infty$;
2) барлық x үшін $y>0$;
3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0$, OX осі – горизонталь асимптота;
4) Экстремумға зерттелік: $y'=-\frac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $x=a$ болғанда $y'=0$,

егер $x<a$ болса, онда $y'>0-$ өседі, ал егер $x>a$ болса, онда $y'<0-$ кемиді, яғни, $x=a-$ максимум нүктесі, $y_{\max}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

5) $(x-a)^2$ болғандықтан, функцияның графигі $x=a$ түзуіне қарағанда симметриялы.
6) Иілу нүктесін табайық: $y''=0.$ $\quad y''=-\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\left(1-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right)$

$\left(a-\sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ және $\left(a+\sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ - иілу нүктелері.(Сурет 2)



Сурет 2

Қалыпты қисықтың түрі a және σ-ға тәуелді.
$f(x)$ және $f(x-a)$ қисықтары бірдей түрдегі қисықтар және оның екіншісі біріншісін a бірлікке оңға жылжыту нәтижесінде пайда болады. Сонымен, егер a өзгеретін болса, онда қалыпты қисықтың түрі өзгермейді, тек қана OX осінің бойымен жылжиды: $\rightarrow$, егер a өспелі болса және $\leftarrow$, егер a кемімелі болса. Енді σ өзгерсін делік. Онда σ өсетін болса, қалыпты қисықтың максималды ординатасы $\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$ кемиді, ал қисықтың өзі жазықтана түседі, егер σ кемитін болса, онда қалыпты қисық «сүйір төбелі» бола түседі.

Егер $a=0$ және $\sigma=1$ болса, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ – қалыпты қисық екенін жоғарыда айтып өттік.

26.2.4 Қалыпты кездейсоқ шаманың берілген аралыққа түсу ықтималдығы

$P(\alpha<x<\beta)=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$ формуласы белгілі, қалыпты үлестірім үшін бұл формуланы былай жазуға болады: $P(\alpha<x<\beta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\alpha}^{\beta}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$. Енді бұл формуланы дайын кестені қолданатындай етіп ықшамдаймыз:
$\frac{x-a}{\sigma}=z,\ x=\sigma z+a$,

$dx=\sigma dz,\ x=2,\ z=\frac{\alpha-a}{\sigma};\ x=\beta\Rightarrow z=\frac{\beta-a}{\sigma}$

$$P(\alpha<x<\beta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{\alpha-a}{\alpha-a0}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}\sigma\,dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{\alpha-a}{\alpha-a}}^{0}e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\omega}\right).$$

$P(\alpha<x<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\omega}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$. Бұл формуладан берілген ауытқудың ықтималдығы: $P(|x-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ тең.

Мысал 3. ξ кездейсоқ шамасының үлестірім тығыздығы $p(x)$ берілген. γ параметрін, $M\xi$ математикалық үмітін, $D\xi$ дисперсиясын, ξ кездейсоқ шамасының үлестірім функциясын, $x_1<\xi<x_2$ теңсіздігі орындалу ықтималдығын тап.

$$p(x)=\begin{cases} a, x\in\left[\dfrac{b-\gamma}{2};\dfrac{b+\gamma}{2}\right] \\ 0, x\notin\left[\dfrac{b-\gamma}{2},\dfrac{b+\gamma}{2}\right]\end{cases}$$

$a=0{,}05;\ b=4;\ x_1=0;\ x_2=10$

Шешуі. $p(x)$ үлестірім тығыздығының қасиетінен:

$$\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx=1\Rightarrow\int_{\frac{b-\gamma}{2}}^{\frac{b+\gamma}{2}}a\cdot dx=1\Rightarrow ax\Big|_{\frac{b-\gamma}{2}}^{\frac{b+\gamma}{2}}=1\Rightarrow a\left(\frac{b+\gamma}{2}-\frac{b-\gamma}{2}\right)=1\Rightarrow$$

$$a\cdot\frac{b+\gamma-b+\gamma}{2}=1\Rightarrow\quad a\gamma=1\Rightarrow\gamma=20$$

Бастапқы шарт берілсе және $\gamma=20$ болса, онда үлестірім тығыздығы $p(x)$ мына түрде болады:

$$p(x)=\begin{cases}0.05, x\in[-8,12]\\ 0,\quad x\notin[-8,12]\end{cases}.$$

$p(x)$ үлестірім тығыздығын біле отырып, ξ үзіліссіз кездейсоқ шамасының математикалық үмітін $M\xi$ және дисперсиясын $D\xi$ таба аламыз:

$$M\xi=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx=\int_{-8}^{12}x\cdot 0.05dx=0.05\frac{x^2}{2}\Big|_{-8}^{12}=$$

$$=0.05\cdot\frac{12^2-(-8)^2}{2}=0.05\cdot 40=2;$$

$$D\xi=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M_\xi)^2p(x)dx=\int_{-8}^{12}(x-2)^2\cdot 0.05dx=$$

$$=0.05\int_{-8}^{12}(x-2)^2dx=0.05\cdot\frac{(x-2)^3}{3}\Big|_{-8}^{12}=$$

$$=0.05\cdot\frac{(12-2)^3-(-8-2)^3}{3}=0.05\cdot\frac{10^3+10^3}{3}=33{,}3.$$

$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(x)dx$ формуласынан ξ кездейсоқ шамасының үлестірім функциясын табамыз: $F(x)=\int_{-8}^{x}0.05dx=0.05(x+8)$. Енді табылған үлестірім функциясын пайдаланып, $x_1<\xi<x_2$ теңсіздігін қанағаттандыратын ықтималдықты табамыз:

$$P(x_1<\xi<x_2)=F(x_2)-F(x_1)\quad P(0<\xi<10)=F(10)-F(0)=$$

$$=0.05\cdot(10+8)-0.05\cdot 8=0.05\cdot 10=0{,}5$$

Жауабы: $\gamma=20;\ M\xi=2;\ D\xi=33{,}3;\ p=0.5$

26.3 Үлкен сандар заңы

Сынақ қорытындысында кездейсоқ шаманың қандай мәндер қабылдайтынын сеніммен алдын-ала тура айта алмайтындығымыз белгілі. Бірақ, кейбір салыстырмалы кең жағдайларда кездейсоқ шаманың өте үлкен санының қосынды мінездемесі кездейсоқ сипаттамасын жоғалтып, қандай да бір заңдылыққа бағынады, яғни, құбылыстың пайда болу жолдарын алдын-ала білуге болады. Бұл шарттар үлкен сандар заңы деп аталатын теоремада көрсетілген.

26.3.1 Чебышев теоремасы

Чебышев теремасы. Тәуелсіз сынақтардың санын шексіз ұлғайту нәтижесінде ақырлы дисперсиясы болатын кездейсоқ шаманы бақылаудың арифметикалық орташа мәндері ықтималдық бойынша оның математикалық үмітіне жинақталады.

Көбінде, қандай да бір физикалық шаманы өлшеу үшін бірнеше өлшемдер жасалып, олардың арифметикалық ортасы осы шаманың өлшемі ретінде алынады.

Бұл тұжырымның қандай шарт орындалғанда орынды екеніне дәлелдеуі Чебышев теңсіздігіне негізделген Чебышев теоремасы жауап береді.

Чебышев теңсіздігі. X шамасының оның математикалық үмітінен ауытқуының абсолюттік шамасы қандай да бір берілген оң ε санынан кіші болады, төменгі жағынан $1–D(X)/\varepsilon^2$ шамасымен шектелген,

яғни, $$P(|X - M(X)|< \varepsilon) \geq 1–D(X)/\varepsilon^2. \quad (1)$$

(1)-де қарама-қарсы оқиғаға көше отырып, мынаны аламыз:

$$P(|X–M(X) | \geq \varepsilon) \leq D(X)/\varepsilon^2.$$

Әрбір өлшемнің нәтижесін кездейсоқ шамалар ретінде қарастыралық: $x_1, x_2, ..., x_n$.

Бұл шамаларға Чебышев теоремасын қолдануға болады, егер:

1. Олар өзара тәуелсіз болса - (әрбір өлшемнің нәтижесі қалған өлшемдердің нәтижелеріне тәуелсіз).
2. Олардың математикалық үміттері тең болса – (өлшем ешқандай жүйелік қателіксіз жүргізілген). Бұл жағдайда, барлық кездейсоқ шамалдардың математикалық үміттері бірдей және ақиқат өлшем a -ға тең.
3. Дисперсиялары бірқалыпты шектелген (өлшем құралы тура дәлдікпен анықталған өлшемді береді).

Ескерту 2. Өлшем санын ұлғайту нәтижесінде өте жақын дәлдікті аламын деп ойлау қателік. Бұл өлшеу құралының көрсеткіші $\pm\alpha$ дәлдіктегі шаманы беруімен шектеледі.

Чебышев теоремасы статистикада кеңінен қолданылатын таңдамалық тәсілдерге негізделген.

26.3.2 Бернулли теоремасы

Бернулли теоремасы. Тәуелсіз сынақтар санын белгілі бір тұрақты жағдайда шексіз ұлғайту нәтижесінде қарастырылып отырған A оқиғасының жиілігі жеке бір сынақта оның ықтималдығы p-ға жинақталады, яғни,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Мысал 4. Чебышев теңсіздігін қолданып, ξ кездейсоқ шамасының өзінің $M\xi$ математикалық үмітінен $N\sigma$-дан кем ауытқуының ықтималдығын бағала, мұндағы $\sigma=\sqrt{D\xi}, D\xi$ – дисперсия, N – нұсқа нөмірі.

Шешуі. N=31 және $\varepsilon=N\sigma$ болсын.

$|\xi-M\xi\geq\varepsilon|, |\xi-M_{\xi}|<\varepsilon$ – оқиғалары қарама-қарсы оқиғалар, ендеше

$P\{|\xi-M\xi|\geq N\sigma\}+P\{|\xi-M\xi|<N\sigma\}=1,$ онда Чебышев теңсіздігінен

$1-P\{|\xi-M\xi|<N\sigma\}=P\{|\xi-M\xi|\geq N\sigma\}\leq\dfrac{D\xi}{N^2\sigma^2}$ екені шығады. Бұдан,

$$P\{|\xi-M\xi|<N\sigma\}\geq1-\frac{\sigma^2}{N^2\sigma^2}\approx0{,}9979,$$
$$0{,}9979\leq P\{|\xi-M\xi|<31\sigma\}\leq1.$$

Мысал 5 ξ_i кездейсоқ шамалары бірдей ықтималдықпен i^2 немесе $-i^2$ мәндерінің біреуін қабылдайды. Өзара тәуелсіз кездейсоқ шамалар $\xi_1,\xi_2,...,\xi_i$ тізбегі үлкен сандар заңын қанағаттандыра ма:

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi\right|<\varepsilon\right\}=1,\varepsilon<0\quad(*).$$

Есепті α_1,α_2 үшін шеш.

Шешуі. $\alpha_1=-1{,}8,\alpha_2=0{,}42$ деп алайық. Есеп шарты бойынша

$P(\xi=i^{\alpha})=P(\xi=-i^{\alpha})=P,$ онда

$M\xi=pi^{\alpha}+p(-i^{\alpha})=0,$ сонымен $(*)$ формуласында:

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|=\sum_{i=1}^{\infty}i^{\alpha};\quad\sum_{i=1}^{\infty}i^{-1,8},\sum_{i=1}^{\infty}i^{0,42}$$

қатары қалады. $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^{1,8}}$ – қатары жинақты, себебі $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ – белгілі Дирихле қатары, және ол $p>1$ болғанда жинақты да, $p<1$ жинақсыз.

$\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}i^{0,42}$ – қатары жинақсыз, себебі $i\to\infty$ болғанда $i^{0,42}\to\infty$. Бұдан, $\alpha=-1{,}8$ болғанда $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n}\xi_k=0,$ ал екінші жағдай үшін $\alpha=0{,}42$ болғанда, бұл шарт орындалмайды.

Жауабы: $\alpha=-1{,}8$ болғанда үлкен сандар заңы орындалады, ал $\alpha=0{,}42$ болғанда үлкен сандар заңы орындалмайды.

Мысал 6. $[0,\alpha]$ кесіндісінен кез келген n сан таңдап алынған, анығырақ айтсақ, $[0,\alpha]$ кесіндісінде бірқалыпты үлестірілген n тәуелсіз кездейсоқ шамаларын $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ қарастырамыз. Олардың қосындысы x_1 мен x_2 аралығында болу ықтималдығын тап, яғни, $P\left\{x_1 \le \sum_{i=1}^{n}\xi_i < x_2\right\} = ?$

Ш е ш уі.

$P\left\{x_1' \le \sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_i - a}{\sigma\sqrt{k}} < x_2'\right\} = \Phi(x_2') - \Phi(x_1')$ екені белгілі.

$\alpha = \frac{3}{2}, n = 162, x_1 = 132, x_2 = 156$ болғандықтан, берілген шарт бойынша:

$$P(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}, x \in \left[0, \frac{3}{2}\right] \\ 0, x \notin \left[0, \frac{3}{2}\right] \end{cases}, \text{ онда } a = M\xi_i = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{3}{2}} x dx = \frac{3}{4}$$

$$D\xi_i = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{3}{2}}\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 dx = \frac{3}{16}, \sigma = \frac{\sqrt{3}}{4}, \sigma\sqrt{n} = \frac{9}{4}\sqrt{6}.$$

$$P\left\{x_1 < \sum_{i=1}^{n}\xi_i < x_2\right\} = P\left\{\frac{x_1 - na}{\sigma\sqrt{n}} < \sum\frac{\xi_i - a}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{x_2 - na}{\sigma\sqrt{n}}\right\} =$$

$$= \Phi\left(\frac{x_2 - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{156 - 162\cdot\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{162}}\right) - \Phi\left(\frac{132 - 162\cdot\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{162}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{23\sqrt{6}}{9}\right) - \Phi\left(\frac{7\sqrt{6}}{9}\right) \approx 0,5 - 0,4716 = 0,0994.$$

Жауабы: $p = 0,0994$.

26.4 Өз бетімен шығаруға арналған есептер

Келесі есептерді өз беттеріңмен шығарыңдар.

1. Автобустың жүру интервалы 5 минут. X кездейсоқ шамасы – аялдамада автобусты тосу уақыты және ол көрсетілген уақыт аралығында бірқалыпты үлестірілген. Орта тосу уақытын және тосу уақытының дисперсиясын тап.

2. X кездейсоқ шамасы – радиоаппаратының бұзылмай жұмыс істеу уақыты болсын және ол λ параметрі бойынша көрсеткіштік заңмен үлестірілген. Математикалық үмітін және дисперсиясын тап.

3. Нысана радиусы 30 см болатын дөңгелек. Атылған оқтың нысананың центрінен ауытқуының орташа шамасы 6 см. Чебышев теоремасын қолданып, атылған оқтың бір дегенде нысанаға тию ықтималдығын тап.

4. АТС-қа 1 минутта түсетін шақырудың орта саны $\lambda = 20 = m_X$. Келесі оқиғалардың ықтималдықтарын табыңдар: $A = \{X > 20\}, B = \{10 \le X \le 30\}$.

5. Сақтандыру компаниясында 10000 көлік тіркелген. Жол апатының нәтижесінде кез келген көліктің бұзылу ықтималдығы 0,006. Әрбір көлік иесі жылына көлігін сақтандырғаны үшін 12 у.е. төлейді, ал егер жол апатынан бұзылған жағдайда сақтандыру компаниясынан 1000 у.е. алады. А оқиғасының ықтималдығын тап, егер А - жыл соңында сақтандыру компаниясы шығынға ұшырады деген оқиға болса.

6. Алдыңғы есепте B_m оқиғасының ықтималдығын тап, егер B_m – жыл соңында сақтандыру компаниясына түсетін пайда m у.е.-дан кем емес деген оқиға болса, мұндағы $m = 40000;.\ 60000;\ 80000$.

26.5 Сұрақтар

1.Дискретті кездейсоқ шаманың математикалық үміті.
2. Математикалық үміттің ықтималды мағынасы.
3. Математикалық үміттің қасиеттері.
4. Ауытқу.
5. Дискретті кездейсоқ шаманың дисперсиясы және оның қасиеттері.
6. Дисперсияның ықтималды мағынасы.
7. Дисперсияның қасиеттері.
8. Бірқалыпты үлестірім заңы.
9. Қалыпты үлестірім. Қалыпты қисық.
10. Үлкен сандар заңы. Чебышев теоремасы.
11. Бернулли теоремасы.

27 МАТЕМАТИКАЛЫҚ СТАТИСТИКА ЭЛЕМЕНТТЕРІ

27.1 Негізгі есептер

Бірнеше кездейсоқ құбылыстар бағынатын заңдылықтарды құру статистикалық берілгендерді (бақылау нәтижелерін) оқуға негізделген. Математикалық статистиканың негізгі есебі - статистикалық мағлұматтарды жинау мен топтау әдістерін көрсету. Математикалық статистиканың жоғарыда айтылғаннан басқа есебі – зерттеу мақсатына байланысты статистикалық берілгендерді құру әдістерін анализдеу.

27.2 Зерттеудің таңдамалық әдісі ұғымы

Зерттелінетін объектілер жиынтығын толығымен зерттейтін әдістер бар, яғни, әрбір объект өзінің белгілеріне байланысты зерттелінеді. Тәжірибе жүзінде бұл әдістер жиі қолданылмайды. Егер бұл әдіс зерттелетін объектілер саны үлкен болса қолданылмайды. Тәжірибеде кеңінен таралған және жиі қолданылатын әдіс – таңдамалық әдіс.

Таңдамалық әдіс қандай да бір статистикалық жинақтың барлық емес, тек таңдап алынған мүшесінің құрама бөлігін ғана бақылау нәтижесінде сипаттамаларын (көрсеткіштерін) анықтаудан тұрады. Мысалы, электр шамдарының қызмет етуге жарамдылығының орташа уақытын анықтау үшін өте көп электр шамдарының ішінен салыстырмалы түрде біраз (көп емес) бөлігі ғана алынып, сыналады. Сыналған шамдардың орташа қызмет етуге жарамдылық уақыты жуық шамамен барлық электр шамының қызмет етуге жарамдылық уақыты ретінде алынады. Көлемі N болатын жинақтан n бірлікті таңдап алу «репрезентативті» болуы қажет, яғни, «таңдамаға» енетін мүшелердің қасиеті сәйкес барлық жинақтың қасиеттерін дұрыс бейнелеуі қажет. Үлкен сандар заңы бойынша кең ауқымды таңдама репрезентативті болады, егер оны кездейсоқ жүзеге асыратын болсақ: таңдаманың әрбір объектісі бас жинақтан кездейсоқ алынған және осы таңдамаға енуі үшін барлық объектінің ықтималдықтары өзара тең болса. N объектіден кез келген n бірлікті жребий көмегімен алуға болады. Тәжірибеде таңдаудың әртүрлі әдістері қолданылады, мысалы, қарапайым, кездейсоқ қайталанбайтын таңдау, қарапайым кездейсоқ қайталау, типтік, механикалық, бөлімдік және т.б.

Типтік таңдама зерттелінетін жинақты топтың қандай да бір белгісіне және қандай да бір ережеге байланысты мүшелерін бөлу көмегімен типке бөлуге негізделген. Бұл үшін әрбір топтың ішінде таңдау кездейсоқ жүргізілуі қажет.

Механикалық таңдама зерттелінетін жинақты механикалық тәсілмен топтарды таңдауға негізделген (мысалы, жинақтың әрбір 10-шы немесе 20-шы мүшесі).

Бөлімдік таңдама зерттелінетін жинақтан мүшелерінің бүтін тобын (бөлімін) таңдауға негізделген және әрбір топ толық зерттеуге түседі (яғни, жинақтың барлық мүшелерін зерттеу). Бөлімдік таңдаманы, зерттеу белгісі әр бөлімде анық болмай тербелмелі түрде болған жағдайда қолданамыз.

27.2.1 Математикалық теорияның таңдамалық әдісінің негізгі есебі

Анықтама 1. Бақылау және зерттеу объектілерінің барлық жиынын *бас жинақ* деп айтамыз.

Анықтама 2. Алынған кез келген объектілер жиынын *таңдама жиынтығы* деп айтамыз.

Анықтама 3. Таңдама жиынтығындағы (немесе генералды жиынтықтағы) объектілер санын *таңдаманың көлемі* деп айтамыз.

Мысал 1. 10000 заттың ішінен бақылауға 100 зат алынған. N=10000 – бас жинақ, ал n=100 – таңдаманың көлемі болады.

Көбінде, бас жинақ объектілердің ақырлы жинағынан тұрады. Бірақ, ол өте үлкен болғандықтан, теориялық қорытынды бойынша бас жинақтың көлемі шексіз деп алынады. Бұл бас жинақтың көлемінің артуы берілген таңдамамен жұмыс істеу нәтижесінде ескерілмейді дегенді білдіреді.

Анықтама 4.Таңдаманың вариациялық қатары деп элементтері шамасы бойынша реттелген, яғни, $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{n}$ түрінде жазылған, мұндағы $x^{(1)} \le x^{(2)} \le \ldots \le x^{n}$, қатарды айтамыз. Көлемі n болатын таңдамада x_i элементі

k_i рет кездессін, онда k_i саны x_i элементінің жиілігі деп аталады және $\sum_{i=1}^{n} k_i = n.$

Анықтама 5. Статистикалық қатар деп (x_i, k_i) жұптар тізбегін айтамыз. Көбінде, статистикалық қатар кесте түрінде жазылады, бірінші жолы х-тің мәндерінен тұрады, ал екінші жолы – сәйкес жиіліктен тұрады. Таңдаманың статистикалық үлестірімін, сонымен қатар, аралықтар тізбегі мен оларға сәйкес жиіліктері арқылы беруге болады (осы аралыққа түсетін варианталардың жиіліктерінің қосындысы).

Мысал 2. Таңдама берілген: 3,8,1,3,6,5,2,2,7. Бұл таңдаманы вариациялық қатар түрінде және статистикалық қатар түрінде жаз.

Шешуі. Вариациялық қатардың анықтамасын қолданып, 1,2,2,3,3,5,6,7,8 жазамыз.

Көлемі n=9 екенін ескерсек статистикалық қатар мына түрде болады:

X	1	2	3	5	6	7	8
n	1	2	2	1	1	1	1

Немесе қатысты жиілікке байланысты:

X	1	2	3	5	6	7	8
n_i / n	1/9	2/9	2/9	1/9	1/9	1/9	1/9

Бақылау: $\sum \frac{n_i}{n} = 1.$

Мысал 3. 55 бақылау таңдамасын жиілік кестесі түрінде жаз, топтау үшін жеті аралық қолдан:

17	19	23	18	21	15	16	13	20	18	15
20	14	20	16	14	20	19	15	19	16	19
15	22	21	12	10	21	18	14	14	17	16
13	19	18	20	24	16	20	19	17	18	18
21	17	19	17	13	17	11	18	19	19	17

Шешуі. Ең үлкен және ең кіші элементтің айырымы 24-10=14, онда аралық қадамы 14/ 7=2 болады, таңдама көлемі 55. Кесте құралық:

Аралық саны	шекаралар	жиіліктер	Қатысты жиілік
1	10 - 12	2	0,0364
2	12 - 14	4	0,0727
3	14 - 16	8	0,1455
4	16 - 18	12	0,2182
5	18 – 20	16	0,2909
6	20 – 22	10	0,1818
7	22 - 24	3	0,0545
		Σ=55	Σ=1

27.3 Үлестірімнің эмпирикалық функциясы

Бас жинақтың объектілері үшін қандай да бір сандық мінездеме анықталады – бұл әрбір объектіде қандай да бір сандық мән қабылдайтын кездейсоқ шама ξ. Таңдама жүргізу нәтижесінде, осы кездейсоқ шама ξ-дың мәндерінің қатарын аламыз: $X_1, X_2, ..., X_n$. Осы мәндер тізбегінен кездейсоқ шама ξ-дың үлестірім функциясын, математикалық үмітін және дисперсиясын мөлшермен қандай болатынын жорамалдауға болады.

1933 жылы совет математигі В.И. Гливенко математикалық статистиканың негізгі теоремасын дәлелдеді. Бұл теоремада ξ кездейсоқ шамасының үлестірім функциясын жуықтап алу ережесі көрсетілген. Оның мағынасы мынада: кез келген нақты х саны үшін, $x_1 ... x_n$ таңдамасынан алынған $x_n < x$ теңсіздігін қанағаттандыратын x_n санының жиілігін $n(x)$ деп белгілейміз. Сонымен, барлық сан түзуінде $n(x)$ функциясы берілген.

Анықтама 6. $F^*(x) = \dfrac{n(x)}{n}$ функциясы ξ кездейсоқ шаманың таңдамасының үлестірім функциясы деп аталады.

Ол ξ кездейсоқ шамасының $F(x)$ үлестірім функциясын жуықтап береді.

Үлестірімнің эмпирикалық функциясының қасиеттері:

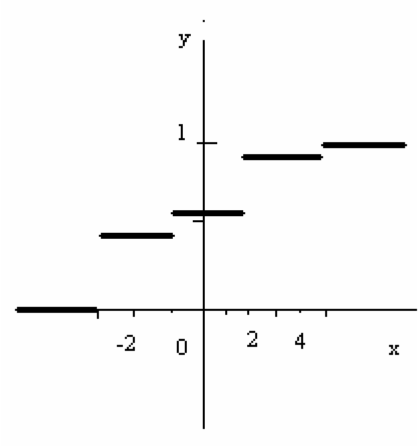
1. Эмпирикалық функцияның мәндері: $F^{\bullet}(x) \in [0,1]$.
2. $F^*(x)$ - кемімелі емес функция.
3. Егер $x_{\min}$ - ең кіші варианта болса, ал $x_{\max}$ - ең үлкен варианта болса, онда $F^*(x)$=0 болады, егер х< $x_{\min}$ және $F^*(x)$=1 болады, егер х> $x_{\max}$.

Мысал 4. Таңдама нәтижесінде -3,+2,-1,-3,+5,-3,+2. Үлестірімнің эмпирикалық функциясының графигін сыз.

Шешуі. $n = 7,\ x_1 = x_4 = x_6 = -3;\quad x_2 = x_7 = 2$.

$$n(x) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ 3, & -3 < x < -1 \\ 4, & -1 \le x < 2 \\ 6, & 2 \le x < 5 \\ 7, & x \ge 5 \end{cases} \Rightarrow F^*(x) = \frac{n(x)}{n} = \begin{cases} 0, & x \le -3 \\ \frac{3}{7}, & -3 < x \le -1 \\ \frac{4}{7}, & -1 \le x < 2 \\ \frac{6}{7}, & 2 \le x < 5 \\ 1, & x \ge 5. \end{cases}$$

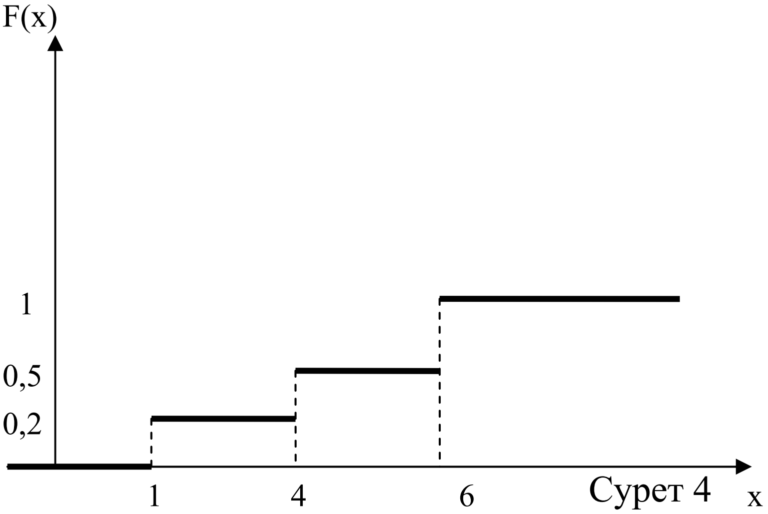
Мысалда үлестірімнің эмпирикалық функциясының негізгі ерекшеліктері көрініп тұр. Теория жүзінде айтып өткендей, ол кемімелі емес және оның мәндері $[0,1]$ аралығына тиісті. Эмпирикалық функция таңдаманың қандай ретпен жасалғанына тәуелсіз, яғни, тізбектегі $x_1 x_2 ... x_n$ сандарының қандай ретпен орналасқанына тәуелсіз (Сурет 3).



Сурет3

Мысал 5. Берілген таңдаманың эмпирикалық функциясын тап:

X	1	4	6
n	10	15	25



Сурет 4

Шешуі. Таңдаманың көлемі: n=10+15+25=50. Ең кіші варианта 1, ендеше, $F^*(x)$=0 болады, егер x≤1 болса. x<4 болғандағы мәні, яғни, x=1 болғанда 10 бақылау жүргізілген, ендеше, $F^*(x)$=10/50=0,2 болады, егер 1< x ≤4. x < 6 болғандағы мәні, яғни, x=1 және x=4 болғанда барлығы 10+15=25 бақылау жүргізілген, ендеше $F^*(x)$=25/50=0,5 болады, егер 4< x ≤ 6 болса. Ал, x=6 ең үлкен варианта болғандықтан, $F^*(x)$=1 болады, егер x > 6 болса. Сонымен, ізделінді үлестірімнің эмпирикалық функциясы мына түрде болады:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 0{,}2; & 1 < x \le 4, \\ 0{,}5; & 4 < x \le 6, \\ 1; & x > 6. \end{cases}$$

Ал оның графигі 4-суретте бейнеленген.

27.4 Полигон және гистограмма

Үлестірімнің эмпирикалық функциясынан басқа ықтималдықтың тығыздық функциясының аналогын бейнелеу де пайдалы болады. Бұл екі тәсілмен жүзеге асады. Әрбір x_k үшін n_k жиіліктерін санаймыз. Бұл мәндерді координата жазықтығында бейнелесек, сынық пайда болады. Пайда болған сынық жиіліктер полигоны деп аталады. Бұл график әрбір мәннің қаншалықты жиі кезігетіндігін көрсетеді. Жиіліктің орнына көбінде қатысты жиілік $\frac{n_k}{n}$ алынады және оған сәйкес полигон салынады.

Енді жиілік (қатысты жиілік) гистограммасы деген не, соған тоқталайық. Оны салу үшін, барлық $[X_{\min}, X_{\max}]$ аралығы ұзындықтары h болатын тең бөліктерге бөлінеді. Олардың әрбіреуі үшін осы аралыққа түсетін бақылау мәндерінің саны саналады. Егер Δl_S аралығындағы мәндер саны n_S болса, онда табаны Δl_S және биіктігі $\frac{n_S}{n}$ болатын тік төртбұрыш салынады. Сөйтіп, жиіліктің гистограммасын саламыз. Барлық көпбұрыштардың ауданы барлық бақылау құбылысының санына тең, яғни, таңдаманың көлеміне тең.

Анықтама 7. Жиіліктің гистограммасы деп табандары ұзындықтары h (бөлік аралықтар ұзындығы), ал биіктіктері - $\frac{h_S}{h}$ (жиілік тығыздығы) болатын тік төртбұрыштардан тұратын баспалдақты фигураны айтамыз. Жиілік гистограммасының ауданы таңдаманың көлеміне тең.

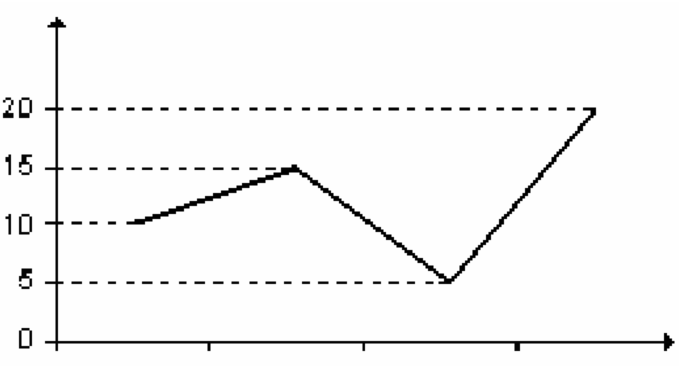
Гистограммадан кездейсоқ шаманың ықтималдығының тығыздығының неге тең екенін байқай аламыз, ал үлестірімнің эмпирикалық функциясынан үлестірімнің теориялық функциясын жуықтап алуға болады.

Мысал 6. Берілген таңдама бойынша жиіліктің полигонын сал:

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

Шешуі.

OX осіне x_i мәндерін, ал ордината осіне сәйкес n_i жиіліктерін саламыз. Алынған нүктелерді кесінділер арқылы қоссақ, ізделінді жиілік полигоны шығады (сурет 5).



Сурет 5

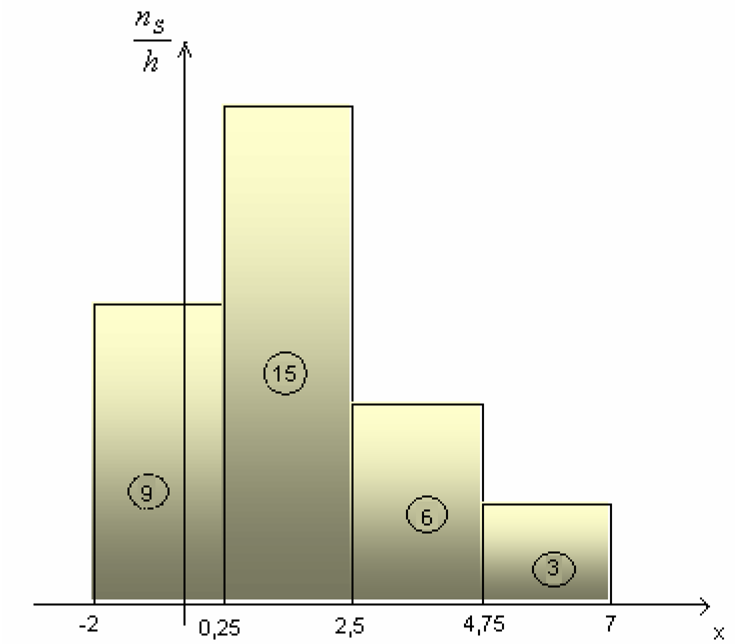
Мысал 2. Берілген таңдама бойынша жиіліктің гистограммасын сал:

x_i мəні	-2	0	1	2	3	5	7
n_i жиілігі	4	5	7	8	6	2	1

Шешуі: $\Delta l = 7-(-2)=9, \quad \Delta l_S = h = \frac{9}{4} = 2{,}25$.

Аралық	[-2;0,25]	[0,25;2,5]	[2,5;4,75]	[4,75;7]
n_S	9	15	6	3
$\frac{n_S}{h}$	4	$\frac{20}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{4}{3}$

OX осінің бойына бөлік аралықтарды, ал *OУ* осінің бойына $\frac{n_S}{h}$ мəндерін саламыз жəне осының арқасында тік төртбұрыштар тұрғызамыз. Тік төртбұрыштар жиынтығы ауданы таңдаманың көлеміне тең болатын ізделінді гистограмма (сурет 6).

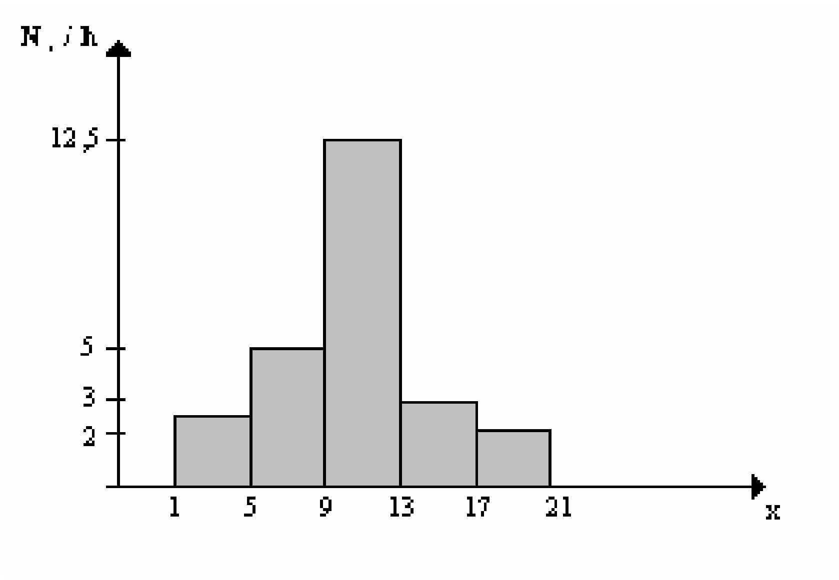


Сурет 6

7. Берілген таңдама бойынша жиіліктің гистограммасын сал, көлемі n=100:

Интервал нөмірі	Бөлік интервал	Варианта жиіліктерінің қосындысы	Жиіліктің тығыздығы
1	1 - 5	10	2,5
2	5 - 9	20	5
3	9 - 13	50	12,5
4	13 - 17	12	3

5	17 - 21	8	2



Сурет 7

OX осіне бөлік интервалдарды саламыз, ал OY өсіне $\frac{n_S}{h}$ мәндерін саламыз, сонда бізде тік төртбұрыштар пайда болады. Осы тік төртбұрыштардың жиынтығының ауданы таңдаманың көлеміне тең болады, ізделінді гистограммамыз осы тіктөртбұрыштар жиынтығы. (Сурет 7)

27.5 Өз бетімен шығаруға арналған есептер

Келесі есептерді өз беттеріңмен шығарыңдар.

1.Берілген таңдама бойынша вариациялық және статистикалық қатарды құр:

а) 11,15,20,0,16,19,6,11,12,13,16,8,9,14,5,11,3;

б) 17,18,16,16,17,18,19,17,15,17,19,18,16,16,18,18.

2. Алдыңғы 1-есептің шарты бойынша жиілік кестесін құр.

3. Төртінші сынып оқушыларының бақылау жұмысын шығару уақыты секундпен берілген:

38	60	41	51	33	42	45	21	53	60
68	52	47	46	49	49	14	57	54	59
77	47	28	48	58	32	42	58	61	30
61	35	47	72	41	45	44	55	30	40
67	65	39	48	43	60	54	42	59	50

Бірінші аралық: 14 – 23. Жиілік кестесін құр.

4. Электрондық шамның жұмыс істеу уақыты сағатпен берілген:

1304	14,7	15,2	15,1	13,0	8,8	14,0	17,9	15,1	16,5	16,6
14,2	16,3	14,6	11,7	16,4	15,1	17,6	14,1	18,8	11,6	13,9
18,0	12,4	17,2	14,5	16,3	1307	15,5	16,2	8,4	14,7	15,4
11,3	10,7	16,9	15,8	16,1	12,3	14,0	17,7	14,7	16,2	17,1
10,1	15,8	18,3	17,5	12,7	20,7	13,5	14,0	15,7	21,9	14,3
17,7	15,4	10,9	18,2	17,3	15,2	16,7	17,3	12,1	19,2	

Бірінші аралық: 8,4 – 10,4. Жиілік кестесін құр.

5. Берілген таңдама бойынша эмпирикалық функцияны тап:

а)

x_i	2	5	7	8
n_i	1	3	2	4

б)

x_i	4	7	8	9
n_i	5	2	3	4

6. Берілген таңдама бойынша жиілік полигонын сал:

x_i	15	20	25	30	10
n_i	10	15	30	20	25

7.Көлемі n=100 болатын таңдама бойынша жиілік гистограммасын сал:

Аралық саны	Бөлік аралық	Варианталар жиілігінің қосындысы	Жиілік тығыздығы
1	1 - 5	10	2,5
2	5 - 9	20	5
3	9 - 13	50	12,5
4	13 - 17	12	3
5	17 - 21	8	2

8. Мынадай таңдама берілген:

1,9	3,1	1,3	0,7	3,2	1,1	2,9	2,7	2,7	4,0
1,7	3,8	0,9	0,8	3,1	1,2	2,6	1,9	2,3	3,2
4,1	1,3	2,4	4,5	2,5	0,9	1,4	1,6	2,2	3,1
1,5	1,1	2,3	4,3	2,1	0,7	1,2	1,5	1,8	2,9
0,8	0,9	1,7	4,1	4,3	2,6	0,9	0,8	1,2	2,1
3,2	2,9	1,1	3,2	4,5	2,1	3,1	5,1	1,1	1,9
0,9	3,1	0,9	3,1	3,3	2,8	2,5	4,0	4,3	1,1
2,1	3,8	4,6	3,8	2,3	3,9	2,4	4,1	4,2	0,9

Осы таңдама бойынша сәйкес топтау кестесін құрып алып, жиілік гистограммасын сал. Аралық ұзындықтары ретінде келесі мәндерді алыңдар:
а) h=0,3; б) h=0,6; в) h=1,2.

9. Берілген таңдама бойынша жиілік гистограммасын сал:

Аралық саны	Бөлік аралық	Варианталар жиілігінің қосындысы	Жиілік тығыздығы
1	2 – 7	5	
2	7 – 12	10	
3	12 – 17	25	
4	17 – 22	6	
5	22 - 27	4	

11.Берілген таңдама бойынша жиілік гистограммасын сал:

Аралық саны	Бөлік аралық	Варианталар жиілігінің қосындысы	Жиілік тығыздығы
1	3 – 5	4	
2	5 – 7	6	
3	7 – 9	20	
4	9 – 11	40	
5	11 – 13	20	
6	13 – 15	4	
7	15 - 17	6	

27.6 Сұрақтар

1.Математикалық статистиканың негізгі есептері.
2. Зерттеудің таңдамалық әдісі ұғымы.
3. Таңдамалық әдістердің негізгі есептері.
4. Вариациялық қатардың негізгі есептері.
5. Таңдаманың статистикалық үлестірімі.
6. Таңдаманың жиілік кестесі.
7. Үлестірімнің эмпирикалық функциясы.
8. Жиілік полигоны.
9. Жиілік гистограммасы.

28 НҮКТЕЛІК БАҒАЛАР. ИНТЕРВАЛДЫҚ БАҒАЛАР

28.1 Параметрлердің нүктелік бағалары

Кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамаларының жуық формулаларына тоқталамыз: математикалық үміт және дисперсия.
Кездейсоқ шаманың математикалық үміті ретінде:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \qquad (1)$$

мәнін аламыз. $\bar{x}$ саны эмпирикалық (таңдамалық) математикалық үміт немесе таңдамалық орташа деп аталады.
$\sigma^2 = D\xi$ дисперсиясының жуықтап есептеу формуласы ретінде:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \bar{x}_k\right)^2 \qquad (2)$$

аламыз. S^2 саны эмпирикалық (таңдамалық) дисперсиясы деп аталады.
Егер $M\xi \approx \bar{x}$ жуықтап есептеуі ақиқат болса, онда $\sigma^2 \approx S^2$ жуықтап есептеуінде $\frac{1}{n-1}$ көбейткішінің орнында неге $\frac{1}{n}$ емес? Бұл сұраққа жауап келесі тұжырымдардан шығады. Бұл теңдіктерді кездейсоқ деп қарастыратын $M\xi$

және $\sigma^2 = D\xi$ параметрлерінің нүктелік бағалары деп атаймыз. x_n кездейсоқ шамасының бақылау нәтижесінде пайда болған мәндері де кездейсоқ. Бұл кездейсоқ шамалар ξ-мен бірдей мәндер қабылдай алады және онымен бірдей үлестіріле алады. Сондықтан, кез келген k үшін $M\xi = Mx_k$ және $D\xi = Dx_n = \sigma^2$. Эксперимент нәтижесінде алынатын мәндерді кездейсоқ шама ретінде қарастыру нүктелік бағаларға қойылатын талаптарды тудырады. Параметрлердің нүктелік бағалары үш қасиетке ие болуы қажет: жылжымаған, орнықты және эффективті.

1. Математикалық үміт пен дисперсияның жылжымаған нүктелік бағалары дегеніміз: $M\bar{x} = M\xi$, (3)

$$MS^2 = \sigma^2. \qquad (4)$$

(3) теңдігін дәлелделік:

$$M\bar{x} = M\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\left(Mx_1 + Mx_2 + \ldots + Mx_n\right) = Mx_n = M\xi.$$

(4) теңдігін дәлелделік:

$$MS^2 = M\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \bar{x}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}M\left(x_k - \bar{x}\right)^2 = \left\{\begin{matrix} D\eta = M\eta^2 - M^2\eta \\ M\eta^2 = D\eta + M^2\eta \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(D\left(x_n - \bar{x}\right) + M^2\left(x_n - \bar{x}\right)\right) = \left\{\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = \left(x_n + \sum_{i=1, i\neq k}^{n}x_i\right)\frac{1}{n}\right\} =$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}D\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)x_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1,\, i\neq k}^{n}x_i\right) + \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Mx_k - M\bar{x}\right)^2 = \left\{Mx_k - M\bar{x} = 0\right\} =$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 Dx_n + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1,\, i\neq k}^{n}Dx_i\right) = \left\{Dx_k = \sigma^2\right\} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\sigma^2 + \frac{n-1}{n^2}\sigma^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n-1}n\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\sigma^2 + \frac{n-1}{n^2}\sigma^2\right) = \sigma^2\left(\frac{n-1}{n} + \frac{1}{n}\right) = \sigma^2.$$

Дәлелдеу керегі де осы болатын.

2. Математикалық үміт пен дисперсияның орнықты нүктелік бағалары деп, кез келген оң a саны үшін келесі теңдіктердің орындалатын жағдайды айтамыз:

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|M\xi - \bar{x}\right| > a\right) = 0, \qquad (5)$$

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|D\xi - S^2\right| > a\right) = 0. \qquad (6)$$

Кездейсоқ шаманың математикалық үмітінің орнықты бағасын дәлелдеу үшін, $M\bar{x} = M\xi$ теңдігі мен Чебышев теңсіздігін қолданамыз:

$P\left(\left|M\xi - \bar{x}\right| > a\right) = P\left(\left|\bar{x} - M\bar{x}\right| > a\right) < \frac{D\bar{x}}{a^2} = \frac{\sigma^2}{na^2}$ болады, себебі

$$D\bar{x} = D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_n\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}Dx_n = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Математикалық үміт пен дисперсияның орнықты нүктелік бағаларының мағынасы, (1) және (2) формулалары $\bar{x}$ пен S^2-ты кез келген дәлдікпен және сенімділікпен есептеуге мүмкіндік береді.

3. $\bar{x}$ және S^2 нүктелік бағаларының эффективтілігі дегеніміз - $D\bar{x}$ және DS^2 минимал деген сөз. Яғни, $m-$ математикалық үміт пен ω^2- дисперсияның кез келген басқа нүктелік бағалары үшін мына теңдік орынды: $Dm > D\bar{x}, D\omega^2 > DS^2$.

Жалпы жағдай. θ - қандай да бір параметр және ол сынақ нәтижелерінен $x_1,...,x_n$ алынған. Дәл осы параметр $\bar{\theta}$, яғни, $\bar{\theta}$- берілген θ-ның нүктелік бағасы. $\bar{\theta} = \bar{\theta}(x_1, x_2,..., x_n)$, $\bar{\theta}$ – да кездейсоқ шама. θ параметрінің нүктелік бағасы $\bar{\theta}$ жылжымаған деп аталады, егер $M\bar{\theta} = \theta$ болса.
θ параметрінің нүктелік бағасы $\bar{\theta}$ орнықты деп аталады, егер $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\bar{\theta} - \theta\right| > a\right) = 0,$ теңдігі орынды болса, мұндағы $a > 0-$ кез келген.
θ параметрінің нүктелік бағасы $\bar{\theta}$ эффективті деп аталады, егер $D\bar{\theta}$ – минимал болса және $D\bar{\varpi} > D\theta$.

Мысал 1. Болттың диаметрін бақылап өлшеуінің нәтижелері мынадай: 2,31; 2,28; 2,29; 2,28; 2,32; 2,28; 2,32; 2,29; 2,31; 2,32. Болттың диаметрінің нүктелік бағалары мен өндірістің бақылау процессі кезіндегі дисперсиясын тап.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + ... + x_n}{10} = 2{,}3; \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} M\left(x_k - \bar{x}\right)^2 = 0{,}0003 .$$

28.1.1 Моменттер әдісі.

ξ - үлестірімнің кездейсоқ шамасы болсын.

Екі жағдай қарастырамыз:

а) ξ - дискретті кездейсоқ шамасы үлестірім заңымен берілген:

ξ	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Бұл жерде, барлық p_i белгісіз шама α-ға тәуелді:

$$M\xi = \sum x_i p_i(\alpha) = \varphi(\alpha).$$

Таңдамалық орташа: $\bar{x} = 1/n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Жылжымаған нүктелік бағаның қасиеттерін қолданып, белгісіз шама α-ны мына теңдеуден табамыз:

$$\varphi(\alpha) = \bar{x}.$$

б) ξ - үзіліссіз кездейсоқ шама болсын және ол $p = p(x,\alpha)$ тығыздығымен үлестірілген, мұндағы α – белгісіз шама. Бұл жағдайда, математикалық үміт мынаған тең:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x,\alpha)dx = \varphi_1(\alpha).$$

Таңдамалық орташа мен жылжымаған нүктелік бағаларды қолдана отырып, α белгісіз шамасын анықтайтын теңдеуді алуға болады:

$$\varphi_1(\alpha) = \bar{x}.$$

28.1.2 Неғұрлым шындыққа ұқсас әдіс.

Екі жағдайды қарастырамыз:

а) ξ -үлестірімнің дискретті кездейсоқ шамасы.

$p(\xi = x_i) = p_i(\alpha)$, мұндағы x_i- кездейсоқ шаманың мәндері, $p_i(\alpha)$- белгісіз α шамасына тәуелді олардың сәйкес ықтималдықтары.

Егер $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таңдамасының ішінде x_i саны n_i рет кезігетін болса, онда шындыққа ұқсас функция мынадай түрде болады:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_1^{n_1}(\alpha) \cdot p_2^{n_2}(\alpha) \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}(\alpha).$$

Осы функцияның максимумға жететін α мәнін белгісіз α шамасының неғұрлым шындыққа ұқсас бағасы деп айтамыз.

б) ξ - үзіліссіз кездейсоқ шама болса.,онда шындыққа ұқсас функция мына түрде болады:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, a) = p(x_1, \alpha) \cdot p(x_2, \alpha) \cdot \ldots \cdot p(x_n, \alpha),$$

мұндағы $p(x,\alpha)$ - кездейсоқ шама ξ-дың тығыздық функциясы.

Мысал 2. ξ кездейсоқ шамасы Пуассон үлестірімімен үлестірілгені белгілі:

$$P(\xi = m) = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a},$$

Бұл жерде a параметрі белгісіз. Жоғарыда көрсетілген нүктелік бағаларды алу әдістерін қолданып, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таңдамасы бойынша белгісіз a параметрінің a^* мәнін тап.

Шешуі. Екі әдіспен шығаралық.

1. Моменттер әдісі.

$M\xi$ пен $\overline{x}$ -ті есептейміз және берілген таңдаманы $(14, 12, 9, 8, 15, 7, 11, 8)$, $n = 30$ қолданамыз.

$$M\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = 14 \cdot \frac{a^{14}}{14!} \cdot e^{-a} + 12 \cdot \frac{a^{12}}{12!} \cdot e^{-a} + 9 \cdot \frac{a^9}{9!} \cdot e^{-a} + 8 \cdot \frac{a^8}{8!} \cdot e^{-a} +$$

$$+ 15 \cdot \frac{a^{15}}{15!} \cdot e^{-a} + 7 \cdot \frac{a^7}{7!} \cdot e^{-a} + 11 \cdot \frac{a^{11}}{11!} \cdot e^{-a} + 8 \cdot \frac{a^8}{8!} \cdot e^{-a} =$$

$$= e^{-a} a \cdot \left(\frac{a^{13}}{13!} + \frac{a^{11}}{11!} + \frac{a^8}{8!} + \frac{a^7}{7!} + \frac{a^{14}}{14!} + \frac{a^6}{6!} + \frac{a^{10}}{10!} + \frac{a^7}{7!} \right) =$$

$$= \left| e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \frac{a^4}{4!} + \ldots + \frac{a^n}{n!} + \ldots \right| \cong e^{-a} a e^a = a.$$

$$\overline{x} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{1}^{8} x_i = \frac{1}{8} \cdot (14 + 12 + 9 + 8 + 15 + 7 + 1 + 8) = \frac{21}{2} = 10{,}5.$$

$M\xi = \overline{x}$ теңдігінен $a \approx 10{,}5$, яғни, $a^* = 10{,}5$.

2. Неғұрлым шындыққа ұқсас әдіс.

Шындыққа ұқсас функциясын құрамыз:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, a) = \frac{a^{14}}{14!} e^{-a} \cdot \frac{a^{12}}{12!} \cdot e^{-a} \cdot \frac{a^9}{9!} \cdot e^{-a} \cdot \left(\frac{a^8}{8!} \cdot e^{-a} \right)^2 \cdot \frac{a^{15}}{15!} e^{-a} \cdot \frac{a^7}{7!} \cdot e^{-a} \cdot \frac{a^{11}}{11!} =$$

$$= \frac{1}{14! \cdot 12! \cdot 9! \cdot (8!)^2 \cdot 15! \cdot 7! \cdot 11!} \cdot e^{-8a} . a^{14+12+9+16+15+7+11} = A \cdot e^{-8a} \cdot a^{84} = L(a).$$

Бір айнымалы $L(a)$ функциясын экстремумға зерттейміз.

Экстремумның қажетті шарты: $L'(a)=0$ немесе

$A\left(e^{-8a}\cdot(-8)a^{84}+e^{-8a}\cdot 84a^{83}\right)=Ae^{-8a}a^{83}(-8a+84)=0$. $-8a+84=0$, $a=21/2=10{,}5$.

Сонымен, $a=10{,}5$ - кризистік нүкте.

Экстремумның жеткілікті шарты екінші туындының кризистік нүктедегі таңбасы:

$$L''(a)=A\left(e^{-84}\cdot(-8)a^{83}(-8a+84)+e^{-8a}\cdot 83a^{82}(-8a+84)+e^{-84}\cdot(-8)a^{83}\right)=$$
$$=Ae^{-8a}8a^{82}\left(-a(-8a+84)+83(-a+10{,}5)\right)=$$
$$=8Ae^{-8a}a^{82}\left(8a^2-84a-83a+83\cdot 10{,}5-a\right)=8Ae^{-8a}a^{82}\left(8a^2-18a+871{,}5\right).$$
$$L''(10{,}5)=8Ae^{-8a}a^{82}\left(8\cdot 10{,}5^2-18\cdot 10{,}5+871{,}5\right)=8Ae^{-8a}a^{82}(882-1764+871{,}5)=$$
$$=8Ae^{-8a}(10{,}5)^{83}(-1)<0.$$

Сонымен, $a=10{,}5$ мәні $L(a)$ функциясының максимумға жететін мәні болады.

Жауабы: $a^*=10{,}5$.

Мысал 3. ξ кездейсоқ шамасы биномдық үлестірілген:

$$p(\xi=m)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m},$$

Бұл жерде p параметрі белгісіз. Нүктелік бағаларды алу әдістерін қолданып, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таңдамасының белгісіз p параметрінің p^* мәнін тап.

Шешуі. Таңдама 2-мысалдағыдай берілсін: $(14, 12, 9, 8, 15, 7, 11, 8)$, $n=30$. Қойылған есепті екі әдіспен шешелік.

1. Моменттер әдісі.

$M\xi$ пен $\bar{x}$ -ті есептейміз:

$$\bar{x}=\frac{1}{8}\cdot\sum_1^8 x_i=10{,}5.$$

$$M\xi=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i=14\cdot C_{30}^{14}p^{14}(1-p)^{16}+12\cdot C_{30}^{12}p^{12}(1-p)^{18}+9\cdot C_{30}^{9}p^{9}(1-p)^{21}+$$
$$+2\cdot 8\cdot C_{30}^{8}p^{8}(1-p)^{22}+15\cdot C_{30}^{15}p^{15}(1-p)^{15}+11\cdot C_{30}^{11}p^{11}(1-p)^{19}=$$
$$=14\cdot\frac{30!}{14!\cdot 16!}p^{14}(1-p)^{16}+12\cdot\frac{30!}{12!\cdot 18!}p^{12}(1-p)^{18}+9\cdot\frac{30!}{9!\cdot 21!}p^{11}(1-p)^{19}=30p.$$
$$\left(2\cdot\frac{29!}{7!\cdot 22!}p^7(1-p)^{22}+\frac{29!}{14!\cdot 15!}p^{14}(1-p)^{15}+\frac{29!}{6!\cdot 23!}p^6(1-p)^{23}+\frac{29!}{10!\cdot 19!}p^{10}(1-p)^{19}+\right.$$
$$+30p\cdot\left(C_{29}^{13}p^{13}(1-p)^{15}+C_{29}^{11}p^{11}(1-p)^{18}+C_{29}^{7}p^{7}(1-p)^{21}+\right.$$
$$+C_{29}^{7}p^{7}(1-p)^{22}+C_{29}^{14}p^{14}(1-p)^{15}+C_{29}^{11}p^{11}(1-p)^{18}+C_{29}^{7}p^{7}(1-p)^{22}+$$
$$+2\cdot C_{29}^{7}p^{7}(1-p)^{22}+C_{29}^{14}p^{14}(1-p)^{15}+C_{29}^{6}p^{6}(1-p)^{23}+C_{29}^{10}p^{10}(1-p)^{19}=$$
$$=\left|\begin{array}{l}(p+q)^{29}=p^{29}+C_{29}^{28}p^{28}(1-p)+C_{29}^{27}p^{27}(1-p)^2+C_{29}^{26}p^{26}(1-p)^3+\ldots+\\ +C_{29}^{1}p(1-p)^{28}+(1-p)^{29}\end{array}\right|=$$
$$\cong 30p(p+1-p)^{29}=30p.$$

$M\xi=\bar{x}$ формуласына қойсақ, $30p\approx 10{,}5$, $p^*=0{,}35$ екені шығады.

2. Неғұрлым шындыққа ұқсас әдіс.

Шындыққа ұқсас функциясын құрамыз:

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_8,p)=C_{30}^{14}\,p^{14}(1-p)^{16}\cdot C_{30}^{12}\,p^{12}(1-p)^{18}\cdot C_{30}^{9}\,p^{9}(1-p)^{21}\cdot$$
$$\cdot\left(C_{30}^{8}\,p^{8}(1-p)^{22}\right)^2\cdot C_{30}^{15}\,p^{15}(1-p)^{15}\cdot C_{30}^{7}\,p^{7}(1-p)^{23}\cdot C_{30}^{11}\,p^{11}(1-p)^{19}=$$
$$=C_{30}^{14}\cdot C_{30}^{12}\cdot C_{30}^{9}\cdot\left(C_{30}^{8}\right)^2\cdot C_{30}^{15}\cdot C_{30}^{7}\cdot C_{30}^{11}\cdot p^{\sum\limits_i x_i}\cdot(1-p)^{30\cdot 8-\sum\limits_i x_i}=A\,p^{84}(1-p)^{156}=L(p).$$

Экстремумның қажетті шарты:

$$L'(p)=A\cdot\left(84\cdot p^{83}(1-p)^{156}-p^{84}\cdot 156(1-p)^{155}\right)=$$
$$=Ap^{83}(1-p)^{156}\cdot(84(1-p)-p\cdot 156)=12A\,p^{83}(1-p)^{155}(7-7p-13p)=$$
$$=12A\,p^{83}(1-p)^{155}(7-20p)=0$$

$p\neq 0,\ p\neq 1,\ 7-20p=0$, бұдан $p=7/20=0{,}35$ - кризистік нүкте екендігі шығады. Енді, осы кризистік нүктенің максимум нүктесі болу, болмауын тексеру үшін, $L''(0{,}35)$ табамыз:

$$L''(p)=12A\cdot\left(83\,p^{82}(1-p)^{155}(7-20p)+p^{83}\cdot 155(1-p)^{154}(-1)(7-20p)+\right.$$
$$\left.+\,p^{83}(1-p)^{155}(-20)\right)=12A\,p^{82}(1-p)^{154}\left(83(1-p)(7-20p)+155p(7-20p)-\right.$$
$$\left.-\,20p(1-p)\right)=12\,Ap^{82}(1-p)^{154}\cdot\left(83\left(7-27p+p^2\right)+1085p-3100p^2-20p+20p^2\right)=$$
$$=12\,Ap^{82}(1-p)^{154}\cdot\left(581-2241p+1660p^2+1085p-3100p^2-20p+20p^2\right)=$$
$$=12\,A\,p^{82}(1-p)^{154}\left(-1420p^2-1176p+581\right)=-12\,A\,p^{82}(1-p)^{154}\left(1420p^2+1176p-581\right).$$
$$L''(0{,}35)=-12\,A(0{,}35)^{82}(0{,}65)^{154}\left(1420\cdot(0{,}35)^2+1176\cdot(0{,}35)-581\right)=$$
$$=-12\,A(0{,}35)^{82}(0{,}65)^{154}(3{,}53)<0.$$

Сонымен, $p=0{,}35$ мәні $L(p)$ функциясының максимумға жететін нүктесі болады.

Жауабы: $p^*=0{,}35$.

28.2 Сенімділік интервалдары

28.2.1 Жалпы ұғым.

Бір санмен ғана анықталатын нүктелік баға, таңдаманың көлемі аз болғанда, өрескел қатеге соқтыруы мүмкін. Сондықтан, бас жинақтың белгісіз параметрінің интервалдық бағасын, яғни, осы θ параметрі жататындай қандай да бір интервалды белгілі сенімділікпен анықтау мәселесін қарастыралық.

Яғни, θ- үлестірімнің белгісіз параметрі болсын. Жасалынған таңдама бойынша $P(\theta\in(\theta_1,\theta_2))=\gamma$ теңдігін қанағаттандыратын θ_1 және θ_2 сандарын табамыз. θ_1 және θ_2 сандары *сенімділік шекаралары* деп аталады, ал (θ_1,θ_2) аралығы - θ параметрінің *сенімділік интервалы* деп аталады. γ саны жасалған *бағаның сенімділігі* (сенімділік ықтималдығы) деп аталады. Көбінде, γ саны: 0,95; 0,99; 0,999 мәндерін қабылдайды. Онда тәжірибе жүзінде, $\theta\in(\theta_1,\theta_2)$ екені ақиқат. Сондықтан да, $\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}$ саны бізге θ мәнін $\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}$ дәлдікпен береді және бұл тәжірибе жүзінде ақиқат.

Ескерту 1 . θ_1 және θ_2 сандары $x_1, x_2, ..., x_n$ таңдамасынан табылған, ендеше, олар да кездейсоқ шамалар. Яғни, (θ_1, θ_2) интервалы да кездейсоқ. Ол θ параметрін көмкеруі де, көмкермеуі де мүмкін. Тек $(\theta_1, \theta_2) \in \theta$ орындалатын кездейсоқ оқиға ғана θ санын көмкеретін сенімділік интервалы деп айтамыз.

Орталық шектік теоремасының арқасында қалыпты үлестірілген кездейсоқ шама өте жиі кездеседі. Сондықтан, қалыпты үлестірімнің параметрлері, математикалық үміт пен дисперсияның σ^2 сенімділік интервалдарын табамыз.

28.2.2 Дисперсиясы белгілі болғандағы қалыпты үлестірімнің математикалық үмітінің сенімділік интервалы.

ξ кездейсоқ шамасы қалыпты заң бойынша үлестірілген, яғни, $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$. $\sigma^2 = D\xi$ белгілі. $x_1, x_2, ..., x_n$ таңдамасын n тәуелсіз кездейсоқ шама ретінде қарастыруға болады, ол дәл ξ кездейсоқ шамасы сияқты үлестірілген. Сондықтан да, $M(x_1) = M(x_2) = ... = M(x_n)$, $D(x_1) = D(x_2) = ... = D(x_n) = \sigma^2$.

Орташа арифметикалық таңдама $\bar{x}$ үшін $M(\bar{x}) = a,\ D\bar{x} = \frac{\sigma^2}{n}$ теңдігі орынды. Берілген γ сенімділігі үшін $\delta > 0$ санын төмендегі шарт орындалатындай етіп таңдап аламыз:

$$P(|\bar{x} - a| < \delta) = \gamma \quad . \qquad (1)$$

$\bar{x}$ қалыпты заң бойынша $M\bar{x} = a$ және $D\bar{x} = \frac{\sigma^2}{n}$ параметрлерімен үлестірілгендіктен, оның үлестірім функциясы теориялық ықтималдықта дәлелденгендей:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

түрінде болады. Сондықтан, (1)-ді мына түрде жазуға болады:

$$|\bar{x} - a| < \delta$$

$$-\delta < \bar{x} - a < \delta$$

$$a - \delta < \bar{x} < a + \delta \text{, онда (1)} \rightarrow$$

$$P(|\bar{x} - a| < \delta) = P(a - \delta < \bar{x} < a + \delta) = F(a + \delta) - F(a - \delta) =$$

$$= \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \frac{1}{2} - \Phi\left(-\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

δ-ны, $2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \gamma$ теңдігі орындалатындай етіп таңдап аламыз.

Лаплас функциясы Φ(x) үзіліссіз болғандықтан, $[0, \infty)$ аралығында 0-ден 0,5-ке дейін өседі, онда кез келген $a\gamma < 1$ теңдеудің шешімі, яғни, t_γ мәні мынадай: $\Phi(t_\gamma) = \frac{\gamma}{2}$. Бұл t_γ саны қалыпты үлестірімнің $\frac{\gamma + 1}{2}$ квантилі деп аталады. Оны қолданып, (1) шартын мына түрде жазуға болады: $P\left(\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\gamma < a < \bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\gamma\right)=\gamma$,

себебі $t_\gamma = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma} \Rightarrow \delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\gamma$.

t_γ саны есеп шығару кезінде дайын кестеден γ сенімділігіне сәйкес таңдалынып алынады. Алынған нәтиженің мағынасы: γ сенімділігімен сенімділік интервалы:

$$\left(\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\gamma;\ \bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\gamma\right)$$

белгісіз a параметрін көмкереді, бұл параметрдің нүктелік бағасы $\bar{x}$ a-ның мәні $\delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\gamma$ дәлдікпен және γ сенімділігімен берілген. Сенімділік шекаралары мынадай формулалармен анықталады:

$$\theta_1 = \bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\gamma, \quad \theta_2 = \bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\gamma.$$

Мысал 4. $\sigma = 2$ параметрімен берілген кездейсоқ шама қалыпты заң бойынша үлестірілген. $n = 25$ таңдама жасалған. a белгісіз параметрінің $\gamma = 0{,}95$ сенімділігімен алынған сенімділік интервалын тап.

Шешуі. $\Phi(t) = \frac{1}{2}\gamma$ немесе $\Phi(t) = 0{,}475$ теңдігінен кесте бойынша, $t = 1{,}96$ екенін табамыз. Онда бағалау дәлдігі: $\delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t = \frac{2}{\sqrt{25}}\cdot 1{,}96 = 0{,}784$. Онда $\bar{x} - 0{,}784 < a < \bar{x} + 0{,}784$ болады.

Егер жасалынған таңдамада $\bar{x} = 2{,}3$ болса, онда 0,95 сенімділігімен (1,5; 3,1) интервалы a параметрін 0,8 дәлдікке дейін көмкереді және сенімділік 95 %.

28.2.3 Қалыпты үлестірімнің дисперсиясының сенімділік интервалы.

ξ кездейсоқ шамасы қалыпты заң бойынша үлестірілген және σ^2 дисперсиясы белгісіз. $x_1, x_2, ..., x_n$ таңдамасын n тәуелсіз кездейсоқ шама ретінде қарастырамыз және ол дәл ξ кездейсоқ шамасы сияқты үлестірілген. Қойылған есепті шешу үшін:

$$x^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

кездейсоқ шамасын қарастырамыз. Бұл функция $(n-1)$ еркін дәрежелі xu-квадрат үлестірімі деп аталады. $F(x)$ - осы кездейсоқ шаманың үлестірім функциясы болсын. Берілген γ сенімділігі бойынша төмендегі теңдік орындалатындай $x_1(\gamma)$ және $x_2(\gamma)$ оң сандарын таңдап аламыз:

$$F\left(x_1^2(\gamma)\right) = \frac{1-\gamma}{2}, \quad F\left(x_2^2(\gamma)\right) = \frac{1+\gamma}{2}.$$

$F(x)$ өспелі және үзіліссіз болғандықтан (қалыпты заң), онда $\forall\gamma \in [0{,}1]$ үшін $x_1(\gamma)$ және $x_2(\gamma)$ сандары табылады және ол тек біреу ғана.

Ендеше, $P\left(x_1^2(\gamma)<\chi^2<x_2^2(\gamma)\right)=F\left(x_2^2(\gamma)\right)-F\left(x_1^2(\gamma)\right)=\frac{1+\gamma}{2}-\frac{1-\gamma}{2}=\gamma$.

$$P\left(x_1^2(\gamma)<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<x_2^2(\gamma)\right)=\gamma ,$$

$$\frac{(n-1)S^2}{x_2^2(\gamma)}<\sigma^2<\frac{(n-1)S^2}{x_1^2(\gamma)} .$$

Сонымен, $\left(\frac{(n-1)S^2}{x_2^2(\gamma)},\frac{(n-1)S^2}{x_1^2(\gamma)}\right)$ интервалы - σ^2 дисперсиясының γ сенімділігі бойынша сенімділік интервалы.

Мысал 5. γ=0,96 сенімділігі $n=18$ таңдамасы бойынша қалыпты үлестірілген кездейсоқ шаманың $D\xi$ -інің сенімділік интервалын анықта.

Шешуі: Бұл қойылған есепті шешу үшін дайын кесте қолданамыз.

$$1-F(x)=q ,$$

яғни, $\left(x_2{}^2>x_1{}^2\right)$ оқиғасының келтірілген ықтималдығы $P\left(x_2{}^2>x_1{}^2\right)=q$ тең.

Бұл белгілеуде: $F\left(x_2^2(\gamma)\right)=1-q,\quad 1-F\left(x_2^2(\gamma)\right)=q$,

$F\left(x_1^2(\gamma)\right)=q,\quad 1-F\left(x_1^2(\gamma)\right)=1-q$,

Ал γ сенімділігі мен q арасындағы байланыс мына формуламен анықталады: $\gamma=1-2q$.

$\gamma=0{,}96,\ \ q=0{,}02$ және кесте бойынша $x_2=31$, онда $1-q=0{,}98\Rightarrow x_1=7{,}3$. Сонымен, дисперсияның 0,96 сенімділігімен бағаланған сенімділік интервалы $\left(\frac{17S^2}{31};\ \frac{17S^2}{7{,}3}\right)$. Графиктік түрде: штрихталған ауданның шамасы q, ал шекаралары x_1 және x_2 сандары.

28.3 Өз бетімен шығаруға арналған есептер

Келесі есептерді өз беттеріңмен шығарыңдар.

Көлемі n болатын $\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)$ таңдамасының берілген үлестірім параметрлерінің екі әдіспен нүктелік бағаларын анықта:

1. λ параметрімен берілген Пуассон үлестірімі:

$$P(\xi=k)=\frac{a^k}{k!}\cdot e^{-\lambda} .$$

2. Көрсеткіштік үлестірім: $f(x)=\lambda\cdot e^{-\lambda x}$, $x>0$ және $f(x)=0$, егер $x<0$ болса.

3. Қалыпты үлестірім $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, барлық x үшін.

4. ξ кездейсоқ шамасы белгісіз математикалық үміті a мен σ^2 дисперсиямен қалыпты үлестірілген. Көлемі n=26 болатын таңдама үшін:

$a^* = 1{,}7;\ (\sigma^2)^* = 0{,}8;\ \gamma = 0{,}9.$ Сенімділік ықтималдығы γ бойынша a математикалық үмітінің сенімділік интервалын тап.

5. n=46 сынақ нәтижесінде қалыпты кездейсоқ шаманың дисперсиясының жылжымаған бағасы $(\sigma^2)^* = 64$ алынған. Дисперсияның γ=0,98 сенімділігі бойынша сенімділік интервалын анықта.

6. n=41 атылған оқтың ішінен нысанаға тигендер саны бақылау кезінде m=24. Оқтың нысанаға тию ықтималдығы p-ның сенімділік интервалын анықта, егер сенімділік ықтималдығы γ=0,95 болса және u_γ=1,96 дегеніміз Ф(u_γ)=γ/2 болғандағы Лаплас функциясының аргументінің мәні.

7. Жүргізілген n сынақта А оқиғасы бірде-бір рет орындалған жоқ. γ=0,95 болғандағы жоғарғы сенімділік шекарасы Р(А) ықтималдығы үшін 0,032-ге тең болатындай n сынақ санын анықта.

28.4 Сұрақтар

1.Параметрдің нүктелік бағалары.

2. Нүктелік бағаларды алу әдістері.

3. Қалыпты үлестірімнің дисперсия белгілі болғандағы математикалық үмітінің сенімділік интервалы.

4. Қалыпты үлестірімнің дисперсиясының сенімділік интервалы.

29 СТАТИСТИКАЛЫҚ БОЛЖАМДАРДЫ ТЕКСЕРУ

29.1 Негізгі анықтамалар

Статистикалық зерттеулердің әртүрлі кезеңдерінде эксперименттік бақылау жүргізу кезінде табиғатқа қатысты немесе қарастырылып жатқан стохастикалық схеманың белгісіз параметрлерінің шамаларына қатысты алдын-ала жасалатын тұжырымдардың (болжамдардың) қажеттілігі туындайды. Мысалы, мынадай алдын-ала тұжырым жасалынған болсын: «Бас жинақ А заңы бойынша үлестірілген» немесе «θ үлестірімінің белгісіз параметрі θ_0 анықталған мәніне тең». Сонымен, бірінші болжамда үлестірімнің түрін алдын-ала болжасақ, екінші болжамда белгілі бір үлестірімнің параметрінің шамасын алдын-ала болжадық. Бұдан басқа да болжамдар жасалуы мүмкін: екі немесе бірнеше үлестірімнің параметрлерінің теңдігі туралы, таңдаманың тәуелсіздігі туралы және тағы басқалар.

Анықтама 1. *Статистикалық болжам* деп кездейсоқ шаманың үлестірімінің түрі немесе үлестірім параметрлері туралы алдын-ала жасалынатын болжамды айтады.

Мысалы, статистикалық болжамдар:

1) Бас жинақ Пуассон заңы бойынша үлестірілген;
2) Екі қалыпты жинақтың дисперсиялары өзара тең.

Тексерілуге тиіс болжаммен қатар кейде қарама-қарсы болжамдар қарастырылады.

Анықтама 2. *Нөлдік (негізгі) болжам* деп тексерілуге тиіс болжамды айтамыз және былай белгілейміз: H_0.

Анықтама 3. *Альтернативті болжам* деп нөлдік болжамға қарама-қарсы болжамды айтамыз және былай белгілейміз: H_1.

Мысалы, егер нөлдік болжам: қалыпты үлестірімнің математикалық үміті a=10 деген сөйлем болса онда оған альтернативті болжам: a≠10 деген сөйлем болады. Қысқаша былай жазамыз: $H_0 : a = 10$, $H_1 : a \neq 10$.

Анықтама 4. Болжам *жай болжам* деп аталады, егер ол бір ғана сөйлемнен тұрса.

Болжам *күрделі болжам* деп аталады, егер ол бірнеше немесе шексіз болжамдардан тұрса.

Тексерілуге тиіс болжам дұрыс не бұрыс болуы мүмкін, сондықтан оны анықтау үшін тексеру қажет. Егер тексеру статистикалық әдістер көмегімен жүзеге асатын болса, онда оны статистикалық тексеру деп айтамыз. Болжамдарды тексеру нәтижесінде шешім екі жағдайда дұрыс қабылданбауы мүмкін.

Анықтама 5. *Бірінші текті қате* - нөлдік болжам жоққа шығарылып альтернативті болжам қабылданады, бірақ негізінде нөлдік болжам дұрыс.

Анықтама 6. *Екінші текті қате* – нөлдік болжамды қабылдаймыз, бірақ альтернативті болжам дұрыс.

Бірінші текті қате жіберу ықтималдығын α деп белгілейміз және оны *маңыздылық деңгейі* деп атаймыз. Көбінде α-ның мәндері 0,05 немесе 0,01-ге тең. Дербес жағдайда, бұл айтылғанды былай түсінуге болады: $\alpha = 0{,}05$ дегеніміз, 100 жағдайдың бесеуінде бірінші текті қате жіберілу қаупі бар деген сөз (дұрыс болжамды жоққа шығару).

29.2 Келісімдік критерийі

Анықтама7. *Статистикалық критерий* деп нөлдік болжамды тексеруге қатысатын K кездейсоқ шамасын айтамыз.

Шығарылатын есептердің өзіндік мінездемелері мен қойылатын талаптарына байланысты статистикалық критерийлер әртүрлі болып келеді. Бірақ оларды логикалық схеманың жалпылығы біріктіреді:

1) H_0 нөлдік болжамы мен H_1 альтернативтік болжамы тексеріледі;

2) Критерийдің α маңыздылық деңгейінің шамасы беріледі;

3) H_0 болжамын тексеру үшін критерийдің z статистикасы таңдалынып алынады;

4) H_0 болжамы ақиқат болатындай, z статистикасының таңдамалық үлестірімі анықталады;

5) Альтернативті болжамға байланысты V_k кризистік облысы $z > z_{1-\alpha}$, $z < z_{\alpha}$ теңсіздіктерінің бірімен анықталады, немесе $z > z_{1-\alpha/2}$ және $z < z_{\alpha/2}$ теңсіздіктер жинағымен анықталады;

6) Бақылаудың таңдамасын алады және критерийдің статистикасының z_{β} таңдамалық мәнін есептейді;

7) Статистикалық шешім қабылданады:
егер $z_b \in V$ болса, онда бақылаудың нәтижелерімен келіспейтіндіктен H_0 болжамын жоққа шығарады;
егер $z_b \in V \setminus V_k$ болса, онда H_0болжамын қабылдайды, яғни, H_0 болжамы бақылау нәтижелеріне қарама-қайшы келмейді деп есептеуге болады.

*Мысал 6***.** Жол көлігінің двигателінің құжатының берілгені бойынша оның 100 км-ге жағатын жанар-жағар майының мөлшері 10 л. Двигатель құрылымын өзгерту нәтижесінде жағылатын жанар-жағар май мөлшері азаяды. Тексеру үшін құрылымы өзгертілген кез келген 25 жол көлігіне сынақ жүргізіледі, әрі оның 100 км-ге жағатын жанар-жағар майының мөлшерінің таңдамалық орташасы сынақ нәтижесінде x=9,3 л. Кететін жанар-жағар майдың таңдамасы қалыпты үлестірілген бас жинақтан m орташасымен және $\sigma^2 = 4\,л^2$ дисперсиясымен алынған. Маңыздылық критерийін қолданып, двигательдің құрылымын өзгерту жағылатын жанар-жағар майдың мөлшеріне әсер еткен жоқ деп тұжырымдалған болжамды тексер.

Шешуі. Қалыпты үлестірілген бас жинақтың орташасы m туралы болжам тексеріледі. Болжамды тексеруді мынадай ретпен жүргіземіз:

1) Тексерілуге тиіс болжам $H_0 : m = 10$, альтернативті болжам $H_1 : m < 10$;
2) Маңыздылық деңгейін таңдап аламыз: $\alpha = 0{,}05$;
3) Критерийдің статистикасы ретінде математикалық үміттің бағасы – таңдамалық орташа $\overline{x}$-ты аламыз.
4) Таңдама қалыпты үлестірілген бас жинақтан алынғандықтан, таңдамалық орташаның мынадай дисперсиямен берілген қалыпты үлестірімі бар: $\frac{\sigma^2}{n} = \frac{4}{25}$.

H_0 болжамы ақиқат деген шарт орындалса, осы үлестірімнің математикалық үміті 10-ға тең. Критерийдің қалыпқа келтірілген статистикасының:

$$U = \frac{\overline{x} - 10}{\sqrt{4/25}}$$

қалыпты үлестірімі бар $N(0{,}1)$;

5) Альтернативтік болжам $H_1 : m < 10$ жағылатын жанар-жағар май мөлшері азаяды деп жору, ендеше біржақты критерий қолдану керек. Кризистік облыс $U < u_{\alpha}$ теңсіздігімен анықталады. Кестені (қалыпты үлестірімнің квантилінің) қолданып, $u_{0,05} = -u_{0,95} = -1{,}645$ екенін табамыз;

6) Критерийдің қалыпқа келтірілген статистикасының сындық мәні мынаған тең:

$$U_{\beta} = \frac{9{,}3 - 10}{\sqrt{4/25}} = -1{,}75;$$

7) Статистикалық шешім: статистиканың сындық мәні кризистік облыста жатқандықтан, H_0 болжамы жоққа шығарылады, яғни, двигательдің құрылымын өзгерту жағылатын жанар-жағар май мөлшерін азайтты деп есептеуге болады.

Берілген x статистикасының кризистік облысының x_k шекарасын мына теңдіктен табуға болады:

$$\frac{\overline{x}_k - 10}{\sqrt{4/25}} = -1{,}645.$$

Бұдан $x_k = 9{,}312$, яғни, x статистикасының кризистік облысы мынадай теңсіздікпен анықталады.

29.3 χ^2 келісімдік критерийі

Анықтама 8. Кездейсоқ шаманың заңының үлестірімі туралы болжамды тексеру үшін қолданылатын критерийлерді *келісімдік критерийлері* деп атаймыз.

Негізгі болжам H_0: ζ кездейсоқ шамасының үлестірім функциясының түрі мынадай $F(x)$.

Сандық өсті мынадай аралықтарға бөлеміз:

$(-\infty = a_0, a_1)$, $[a_1, a_2], \dots, [a_{r-1}, a_r = +\infty)$, мұндағы $a_1 < a_2 < \dots < a_{r-1}$.

H_0 болжамы үшін: i-ші разрядқа $P_i = F(a_i) - F(a_{i1})$ ықтималдығы сәйкес келеді.

ζ кездейсоқ шамасының берілген сындық $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ мәндерінің ішінен i-шы разрядқа m_i кездейсоқ саны сәйкес келеді:

$$\left(\sum_{i=1}^{r} m_i = n \right).$$

Онда m_i / n - таңдамалық мәннің i-ші интервалға түсу жиілігі. m_i / n жиілігінің p_i санына жақындығы H_0 болжамының пайдасына шешіледі, ал айырмашылық айқын болса, онда H_0 болжамы жоққа шығарылады.

Кездейсоқ шама

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}, \quad (1)$$

H_0 болжамының сынақтың берілгендерімен сәйкес келетіндігін көрсетеді.

Критерийдің сындық мәндері (1) формуласымен есептелінеді, ал кризистік жиын $S = (\chi^2_{\alpha}, +\infty)$ түрінде таңдап алынады, мұндағы χ^2_{α} мәні дайын кесте көмегімен табылады, $\gamma = r - 1 - t$ және маңыздылық деңгейі α белгілі болған жағдайларда, t дегеніміз - $F = F(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t)$ функциясының параметрлерінің саны. Егер $\chi^2 > \chi^2_\alpha$ теңсіздігі ақиқат болса, онда H_0 болжамы α маңыздылық деңгейінде жоққа шығарылады. Кері жағдайда, H_0 болжамы сынақтың берілгендеріне қарама-қайшы болмайды.

Мысал 7. Бақылау үшін 200 тармақ алынған. Тармақтарды жинау кезінде і операциядан кейінгі қалған тармақ саны m_i кесте бойынша берілген:

i	0	1	2	3	4	5	6	7
m_i	41	62	45	22	16	8	4	2

Алынған нәтижелер Пуассон үлестірімімен, $P = \frac{a^i}{i!} \cdot e^{-a}$, сәйкес келе ме, мұндағы ζ дегеніміз - χ^2 критерийі бойынша α маңыздылық деңгейіндегі жүргізілген операциялардың кездейсоқ саны. Мұндағы: $a = 1{,}85,\ \alpha = 0{,}05$.

Шешуі.

H_0 болжамы: ζ кездейсоқ шамасы – тармақтарды жинау кезінде жүргізілген операциялар саны Пуассон үлестірімімен берілген:

$$P_i = \frac{a^i}{i!} \cdot e^{-a}.$$

$\chi^2 = \sum_i (m_i - np_i)^2 / np_i,\ i = 1,\ldots,8$ шамасын есептеу үшін кесте құрамыз:

Кесте 2

№	i	m_i	$P_i = \frac{a^i}{i!} \cdot e^{-a}$	nP_i	$m_i - nP_i$	$(m_i - nP_i)^2$	$(m_i - nP_i)^2 / nP_i$
1	0	41	0,13534	27,068	13,932	194,10	7,17
2	1	62	0,27067	54,134	7,866	61,87	1,14
3	2	45	0,27067	54,134	-9,134	83,43	1,54
4	3	22	0,18045	36,090	-14,090	198,53	5,50
5	4	16	0,09022	18,044	-2,044	4,18	0,23
6	5	8	0,03609	7,218	0,782	0,61	0,08
7	6	4	0,01203	2,406	1,594	2,54	1,06
8	7	2	0,00344	0,688	1,312	1,72	2,5
							$\sum = 19{,}224$

χ^2_α шамасын $\alpha = 0{,}05$ және Пуассон үлестірімінде a параметрі жалғыз болғандықтан t=1, яғни, $\gamma = 8 - 1 - 1 = 6$ екенін ескере отырып дайын кесте бойынша табамыз $\chi^2_\alpha = 12{,}59$, ал $\chi^2 = 19{,}224$.

$19{,}224 > 12{,}59$ болғандықтан, H_0 болжамы $\alpha = 0{,}05$ маңыздылық деңгейінде жоққа шығарылады.

Жауабы: алынған нәтижелер Пуассон үлестірімімен сәйкес келмейді.

29.4 Өз бетімен шығаруға арналған есептер

1. Бақыланатын объект не өз объектің, не қарсыласыңның объектісі болуы тиіс. Бірнеше бақылаулар нәтижесінде анықтау жүйесі белгілі мінездемелеріне сай объектіні осы кластардың біріне жатқызады. Нөлдік және альтернативтік болжамдар қандай болады, егер бірінші текті қатенің нәтижесі «мақсатқа жетпеу» болса.

Жауабы: H_0 болжамы: объект қарсыластың объекті;

H_1 : объект өзіндікі; екінші текті қате – «жалған дабыл».

2. Үлкен партияның ішінде жарамсыз заттар болуы мүмкін. Жеткізуші бұл партияның ішіндегі жарамсыз заттар барлық заттың 5%-ін құрайды десе, тұтынушы жарамсыз заттар барлық заттың 10%-ін құрайды дейді. Шарт мынадай: партиядан кез келген 10 зат алынып, тексеріледі; партия жеткізушінің шартымен қабылданады, егер тексеру кезінде жарамсыз заттар біреуден аспаса, кері жағдайда, партия тұтынушының шарты бойынша қабылданады. Осы есепті статистикалық болжамдарды тексеру теориясының терминдері арқылы тұжырымда және келесі сұрақтарға жауап бер:

а) Статистиканың критерийі қандай, оның мәндер облысын, кризистік облысын тап?

б) Статистиканың критерийі қалай үлестірілген?

в) Тексерілуге тиіс және альтернативті болжамдар қандай болады?

Жауабы: а) Жарамсыз заттар саны $V = \{0, 1, \ldots, 10\}$, $V_k = \{2, 3, \ldots, 10\}$;

б) биномдық үлестірім $B(10, p)$;

в) $H_0 : p = 0{,}05$, жеткізушінің тұжырымы дұрыс,

$H_1 : p = 0{,}10$, тұтынушының тұжырымы дұрыс;

г) бірінші текті қате: партия тұтынушының шартымен қабылданған, сонымен қатар, осы уақытта жеткізушінің тұжырымы дұрыс; екінші текті қате: партия жеткізушінің шартымен қабылданған, сонымен қатар, осы уақытта тұтынушының тұжырымы дұрыс, $\alpha \approx 0{,}086$, $\beta \approx 0{,}736$.

29.5 Сұрақтар

1. Статистикалық болжамдарды тексеру
2. Нөлдік және альтернативтік болжамдар
3. Бірінші және екінші текті қателер
4. Келісімділік критерийі
5. χ^2 келісімділік критерийі.

30 КОРРЕЛЯЦИЯ ТЕОРИЯСЫНЫҢ ЭЛЕМЕНТТЕРІ НЕГІЗГІ ҰҒЫМДАР. СЫЗЫҚТЫҚ КОРРЕЛЯЦИЯ

30.1 Функционалдық, статистикалық және корреляциялық байланыстар

Екі кездейсоқ шама бір-бірімен функционалдық байланыста немесе статистикалық байланыста болады, не олар бір-бірімен тәуелсіз болуы мүмкін. Екі кездейсоқ шама бір-бірімен функционалдық байланыста деп айтамыз, егер олардың біреуінің белгілі бір заң бойынша өзгеруі екіншісін де өзгертетін болса, ал олардың арасында басқа түрдегі тәуелділік бар болса, олар статистикалық байланыста деп айтамыз.

Анықтама 1. Шамалардың біреуінің өзгеруі екіншісінің үлестірімін өзгертетін болса, онда мұндай байланыс *статистикалық байланыс* деп аталады.

Анықтама 2. Егер шамалардың біреуінің өзгеруі екіншісінің орташа мәнін өзгертетін болса, онда бұл жағдайдағы статистикалық байланыс *корреляциялық байланыс* деп аталады.

Мысал 1. У дегеніміз – бидайдың түсімі болсын, ал Х - оған себілетін көңнің мөлшері. Аудандары бірдей жер бөліктеріне бірдей мөлшерде көң себілген, ал алынған түсімнің мөлшері әртүрлі, яғни, У Х-ке тәуелді функция емес. Бұл кездейсоқ факторлар (жауын-шашын, агротехника және т.б.) әсерінен деп түсіндіріледі. Жүргізілген тәжірибелер нәтижесінің көрсеткіші бойынша, орташа түсім себілетін көңнің мөлшеріне тәуелді. У пен Х-тің арасындағы байланыс корреляциялық байланыс.

30.1.1 Шартты орташалар

Әрбір X үшін бірнеше $У$ сәйкес келсін. Мысалы, X мәні: $x_1 = 2,$ ал Y мәні: $y_1 = 5,\ y_2 = 6,\ y_3 = 10$ болсын. У шамасының қабылдануы мүмкін мәндерінің арифметикалық орташасы: $\bar{y}_2 = \dfrac{5+6+10}{3} = 7$ - шартты орташа.

Анықтама 3. $\bar{y}_x$ шартты орташа мәні деп X=x болғандағы Y шамасының қабылдануы мүмкін мәндерінің арифметикалық орташасын айтамыз.

Анықтама 4. $У$-тің X бойынша корреляциялық байланысы деп шартты орташалардың функционалдық байланысын айтамыз

$\bar{y}_x$ шамасының x бойынша: $$\bar{y}_x = f(x). \quad (1)$$

(1) теңдеуі $У$ –тің X-ке байланысты регрессия теңдеуі деп атаймыз, $f(x)$ функциясын $У$ –тің X-ке байланысты регрессиясы деп атаймыз, ал оның графигін $У$ –тің X-ке байланысты регрессия сызығы деп атаймыз.

X -тің $У$-ке корреляциялық байланысы дәл осылай анықталады.

30.2 Корреляция теориясының негізгі есептері

Корреляция теориясының бірінші есебі – корреляциялық байланыстың формасын анықтау, яғни, регрессия функциясының түрін анықтау (сызықтық, квадраттық, көрсеткіштік және т.б.) Өте жиі кезігетіні – сызықтық. Егер екі тәуелділік те, x-тің y-ке байланысты және y-тің x-ке байланысты, сызықтық болса, онда корреляция – сызықтық, кері жағдайда, сызықтық емес.

Корреляция теориясының екінші есебі – корреляциялық байланыстың тығыздығын (күшін) бағалау. $У$-тің X бойынша корреляциялық байланысының тығыздығы У мәнінің $\bar{y}_x$ орташаның маңайында шама бойынша сейілуімен бағаланады. Үлкен сейілу $У$-тің X бойынша байланысы әлсіз немесе мүлдем жоқ дегенді білдіреді. Ал аз сейілу күшті байланысты көрсетеді, ол мүмкін функционалдық байланыс та болуы мүмкін. X -тің $У$-ке байланысы дәл осылай анықталады.

30.2.1 Регрессияның таңдамалық түзу сызық теңдеуінің параметрлерін топталмаған берілгендер бойынша іздеу

У пен Х-тің арасындағы корреляциялық байланыс сызықтық болсын, онда регрессияның сызығының теңдеуі түзу болады.

Бұл түзулердің теңдеулерін іздеу үшін n тәуелсіз сынақ жүргізілген және нәтижесінде n сандар жұбы алынған:

$$(x_1, y_1),\quad (x_2, y_2),...,\quad (x_n, y_n). \tag{2}$$

Оны бас жинақтан алынған кездейсоқ таңдама ретінде қарастырамыз. Онда осы берілгендер бойынша табылған шамалар мен теңдеулер таңдамалық деп аталады.

Қарапайым жағдайда, егер x мәніне $1y$ сәйкес келетін болса, онда ізделінді $\bar{y}_x = kx + b$ теңдеуін $Y = kx + b$ түрінде жазуға болады, мұндағы $k-$ регрессия түзу сызығының бұрыштық коэффиценті және ол былай белгіленеді: $k = \rho_{yx}$, ал регрессия теңдеуі мынадай:

$$Y = \rho_{yx} x + b. \tag{3}$$

ρ_{yx} және b параметрлерін, (1) теңдеуі XOY жазықтығында (2) теңдеуіне бар мүмкіндігінше жақындайтындай етіп таңдап аламыз. $Y_i - y_i$, $\left(i = \overline{1,n}\right)$ айырмасын ауытқу деп атаймыз, мұндағы Y_i шамасы (2) теңдеуі бойынша есептелінеді, y_i - (1)-дегі сындық нүкте. ρ_{yx} және b параметрлерін ауытқулар квадраттарының қосындысы минимал болатындай етіп таңдап аламыз (яғни, ең кіші квадраттар әдісі). $F(\rho, b) = \sum_1^n (Y_i - y_i)^2$ функциясын құрамыз немесе $F(\rho, b) = \sum_{i=1}^n \left(\rho_{yx} x_i + b - y_i\right)^2$.

Минимумын табу үшін жүйе құрамыз:

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = 2\sum_1^n (\rho x_i + b - y_i) x_i = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = 2\sum_1^n (\rho x_i + b - y_i) = 0$$

және бұл жерден ρ және b-ға тәуелді екі теңдеуден тұратын сызықтық теңдеулер жүйесін аламыз: $\left.\begin{array}{l}\left(\sum x^2\right)\rho+\left(\sum x\right)b=\sum xy \\ \left(\sum x\right)\rho+\sum nb=\sum y\end{array}\right\}$. Бұны шешсек, онда:

$$\rho=\frac{n\sum xy-\sum x\sum y}{n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2};\ b=\frac{\sum x^2\sum y-\sum x\sum yx}{n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2}$$

және нәтижесінде ізделінді $y=\rho x+b$ теңдеуін аламыз.

Мысал 1. Y –тің X –ке байланысты таңдамалық түзу сызықты регрессиялық теңдеуін $n=5$ берілген бақылауы бойынша анықта.

x	1	1,5	3	4,5	5
y	1,25	1,4	1,5	1,75	2,25

Шешуі: есептеу кестесін құрамыз:

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1	1,25	1	1,25
2	1,5	1,4	2,25	2
3	3	1,5	9	4,5
4	4,5	1,75	20,25	4,875
5	5	2,25	25	11,25
	$\sum x_i=15$	$\sum y_i=8{,}15$	$\sum x_i^2=5{,}75$	$\sum x_i y_i=26{,}975$

Белгілі формула бойынша:

$$\rho_{yx}=\frac{5\cdot 26.975-15\cdot 8{,}15}{5\cdot 57{,}5-15^2}=0{,}202$$

$$b=\frac{57{,}5\cdot 8{,}15-15\cdot 26{,}975}{62{,}5}=1{,}024.$$

Ізделінді регрессия теңдеуі:

$$Y=0{,}202x+1{,}024\ .$$

Бұл теңдеу бойынша Y_i -дің мәндері y_i сындық мәндерімен қаншалықты сәйкес екенін көру үшін, Y_i-y_i ауытқуын табамыз.

x_i	Y_i	y_i	Y_i-y_i
1	1,226	1,25	-0,024
1,5	1,327	1,4	-0,073
3,00	1,630	1,5	0,130
4,5	1,933	1,75	0,083
5	2,034	2,25	-0,216

Кестеден байқағанымыздай, барлық ауытқулар кіші шама емес. Бұл бақылау саны аз деп түсіндіріледі.

30.2.2 Корреляциялық кесте

Бақылаудың үлкен санында x –тің бір ғана мәні n_x рет кезігуі мүмкін, ал y-тің бір ғана мәні n_y рет кезігуі мүмкін, онда (х,у) сандар жұбының бір ғана мәні n_{xy} рет кезігеді. Сондықтан, бақылаудың берілгендері топталады, яғни, n_x, n_y, n_{xy} жиіліктері саналады. Барлық топталған берілгендер корреляциялық деп аталатын кесте түрінде жазылады.

Мысал 2.

Х / У	10	20	30	40	n_y
0,4	5	-	7	14	26
0,6	-	2	6	4	12
0,8	3	19	-	-	22
n_x	8	21	13	18	$n = 60$

30.3 Регрессияның таңдамалық түзу сызық теңдеуінің параметрлерін топталған берілгендер бойынша іздеу

$У$ –тің X –ке байланысты түзу сызықты регрессиялық теңдеуінің параметрлерін анықтау үшін мынадай теңдеулер жүйесі алынған:

$$\begin{cases}\left(\sum x^2\right)\rho_{yx} + \left(\sum x\right)b = \sum xy \\ \left(\sum x\right)\rho_{yx} + nb = \sum y\end{cases} \quad (4)$$

ρ_{yx} - регрессия коэффиценті.

X мәні мен оған сәйкес $У$ –тің мәні бір рет бақыланды деп алынған.

Берілгендер саны үлкен (≈ 50 бақылау) болсын, олардың арасында қайталанатындары да бар және олар корреляциялық кесте түрінде топталған. (4) жүйесін корреляциялық кестенің берілгендерін көрсететіндей етіп жазамыз $\sum x = n\bar{x}$ ($\bar{x} = \frac{\sum x^2}{n}$ -тың салдары), $\sum y = n\bar{y}$, $\sum x^2 = n\bar{x}^2$ ($\bar{x}^2 = \frac{\sum x^2}{n}$ -тан шығады)

$\sum xy = \sum n_{xy} x_y$ ((ху) мәні n_{xy} рет бақыланғаны ескерілген), онда (4) мына түрде болады:

$$\left.\begin{aligned}\left(n\bar{x}^2\right)\rho_{xy} + \left(n\bar{x}\right)b = \sum n_x xy \\ n\left(\bar{x}\right)\rho_{xy} + b = \sum \bar{y}\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Жүйені шешіп, ρ_{yx} пен b-ны табуға болады және $\bar{y}_x = \rho_{yx} x + b$ аламыз.

30.4 Корреляцияның таңдамалық коэффиценті

Бірақ та, жаңа шама – корреляция коэффицентін енгізу арқылы регрессия теңдеуін басқа түрде жазу ыңғайлы. $b = \overline{y} - \rho_{yx}\overline{x}$ шамасын регрессия теңдеуіне қойсақ:

$$\overline{y}_x = \rho_{yx}x + \overline{y} - \rho_{yx}\overline{x}$$

$$\overline{y}_x - \overline{y} = \rho_{yx}\left(x - \overline{x}\right), \qquad (6)$$

(5)-тен $\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2 = \sigma_x^2$ екенін ескере отырып, ρ_{yx}-ті табамыз:

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\overline{x}\overline{y}}{n\left(\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2\right]} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\overline{x}\overline{y}}{n\sigma_x^2},$$

$$\rho_{yx} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\overline{x}\overline{y}}{n\sigma_x^2},$$

r_B – корреляцияның таңдамалық коэффиценті :

$$\rho_{yx} = r_B \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}.$$

$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$- $У$-тің X-ке байланысты түзу сызықты регрессиялық теңдеуі.

30.4.1 Корреляцияның таңдамалық коэффицентінің қасиеті

Анықтама бойынша $\mathrm{r_B} = \dfrac{\sum \mathrm{n_{xy}xy - n\overline{x}\overline{y}}}{\mathrm{n}\sigma_\mathrm{x}\sigma_\mathrm{y}}$

Бұл шаманы енгізу мақсатымыз – сызықты корреляциялық байланыстың тығыздығын бағалау. Бұл сұраққа жауап оның қасиетінен шығады.

$$S_y = D_y\left(1 - r_b^2\right), \qquad S_x = D_x\left(1 - r_b^2\right),$$

мұндағы S_y- шартты орташа $\overline{y}_x$-ке сәйкес y-тің маңайындағы сындық мәндердің дисперсиясы. D_y- $\overline{y}$ жалпы орташасының маңайындағы бақылаулар дисперсиясы. S_x пен D_x дәл осылай анықталады.

1. r_B асолюттік шамасы бірден артпайды.

Дәлелдеуі: $S_y = D_y\left(1 - r_b^2\right) \geq 0$

$$1 - r_B^2 \geq 0, \quad -1 \leq r_B \leq 1 \text{ немесе } \left|r_B\right| \leq 1.$$

2. егер r_B=0 болса және регресияның таңдамалық сызықтары – түзу болса, онда X пен $У$ сызықты корреляция байланысымен байланысты емес.

Дәлелдеуі: егер r_B=0 болса, онда $\overline{y}_x - \overline{y} = r_B\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$,

$$\overline{y}_x - \overline{y} = 0 \Rightarrow \overline{y}_x = \overline{y},$$

$\overline{y}_x$- тұрақты мәнін сақтайды.

3. Егер $\left|r_B\right| = 1$ болса, онда $S_y = D_y\left(1 - r_b^2\right) = 0$.

4. $|r_B|$ өсуіне байланысты сызықты корреляциялық байланыс тығыз бола түседі және $|r_B| = 1$ болғанда, функционалдық байланысқа ауысады.

Осы қасиеттерден r_B коэффицентінің мағынасы шығады: корреляцияның таңдамалық коэффициенті таңдамадағы мөлшерлік белгілер арасындағы тығыздықты мінездейді, $|r_B| \to 1$ жақын болған сайын байланыс күштірек, ал $|r_B| \to 0$ жақын болған сайын байланыс әлсірейді.

Қалыпты үлестірілген бас жинақтың $(n \geq 50)$ r_B корреляция коэффицентін бағалау үшін мына формуланы қолдана аламыз:

$$r_B - 3\frac{1-r_B}{\sqrt{4}} \leq r_2 \leq r_B + 3\frac{1+r_B^2}{\sqrt{4}}.$$

30.5 Өз бетімен шығаруға арналған есептер

Келесі есептерді өз беттеріңмен шығарыңдар.

1. Берілген $n = 5$ бақылауы бойынша $У$ –тің X –ке байланысты таңдамалық түзу сызықты регрессиялық теңдеуін тап.

x	20	25	30	35	40
y	16	26	36	46	56

2. Берілген $n = 5$ бақылауы бойынша $У$ –тің X –ке байланысты таңдамалық түзу сызықты регрессиялық теңдеуін тап.

x	2	3	5	6	7
y	25	45	110	175	225

30.6 Сұрақтар

1.Корреляция теориясының негізгі есептері.
2.Шартты орташа.
3.Регрессия теңдеуі.
4.Корреляциялық кесте.
5. Корреляцияның таңдамалық коэффицентінің қасиеті.

Әдебиеттер

Негізгі

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры – М.: Наука, 1984. -176с.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление– М.: Наука, 1984. -432с.
3. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа. Под редакцией Ефимова А.В. и Демидовича Б.П. М.: Наука, 1986.-464с.
4. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике ч.1-3. Под редакцией Рябушко А.П. Минск: Вышейшая школа, 2001.-987с.
5. Кузнецов Л.А.Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). М.: Высшая школа, 2000.-222с.

Қосымша

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1,2- М.: Высшая школа, 1981.-371с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т.1,2- М.:Наука, 1985.-218с.
3. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Высшая школа 1983.-198с.
4. Гусятников П.Б., Резниченко С.В. Векторная алгебра в примерах и задачах. Учебное пособие. М.: Высшая школа, 1998.-188с.
5. Каплан И.А. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве. Практические занятия по высшей математике. Харьков: 1970, 1971, 1972.-321с.
6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. ч.1. М.: Высшая школа,1986.-128с.
7. Бронштейн И.Н.,Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров.М.: Высшая школа,1997.-498с.
8. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике- М.: Наука, 1977.-589с.