8 ҚАТАРЛАР ТЕОРИЯСЫ

8.1 Теориялық материалдар

8.1.1 Сан қатарлары

Анықтама 1. $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ шексіз сан тізбегі үшін

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots , \qquad (1)$$

мұндағы $a_i, i = 1,2,\ldots$ - қатардың мүшелері болатын (1) өрнегі *сан қатары* деп аталады.

$s_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_i, i = 1,2,\ldots$ қатардың дербес қосындысы.

a_n - қатардың жалпы мүшесі.

Анықтама 2. Егер дербес қосындылар тізбегінің шегі нақты сан болса, яғни, $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, онда (1) *қатар жинақты* деп аталады, ал S саны қатардың қосындысын береді.

Анықтама 3. Егер дербес қосындылар тізбегінің шегі шексіздікке тең немесе табылмайтын болса, онда (1) қатары *жинақсыз қатар* деп аталады.

Жинақты қатарлары үшін

$$a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

$$b = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$$

мына теңдіктер орынды:

а) $ca = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n + \ldots \quad , c - const$

б) $a \pm b = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n) + \ldots$

Теорема 1. Қатар жинақтылығының қажетті шарты. Қатар жинақты болса, онда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ теңдігі орындалады.

Теорема 2. Қатар жинақсыздығының жеткілікті шарты. Егер $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ шарты орындалса, онда сан қатары жинақсыз.

8.1.2 Мүшелері теріс емес қатарлар

Көп жағдайда S_n дербес қосындысы үшін ақырлы формуланы анықтау немесе оның шегін табу қиынға соғады. Сондықтан, қатардың жалпы мүшесін біле отырып, жинақтылығының жеткілікті белгілерін қарастырған жөн. Бірақ жеткілікті белгілер тек қана мүшелері теріс емес қатарларға арналған.

Мүшелері теріс емес қатарларды қарастырайық:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \qquad (3)$$

Теорема 3. Салыстыру белгісі:

1.Егер қандай да бір N нөмірінен бастап: $a_n \leq b_n, \quad n = N, N+1, \ldots,$ теңсіздігі орындалса, онда

а) (3) –қатардың жинақтылығынан (2)- қатардың жинақтылығы шығады,

б) (2) –қатардың жинақсыздығынан (3)- қатардың жинақсыздығы шығады.

2. Егер (2), (3) қатарларының жалпы мүшелері үшін $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k\neq 0$ шегі ақырлы сан болса, онда (2) және (3) қатарлары бірдей жинақты не бірдей жинақсыз болады.

Теорема 4-5. Даламбер (Коши) белгілері. Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l\right)$, мұндағы l ақырлы сан болса, онда

а) $l<1$- (1) жинақты,

б) $l>1$- (1) жинақсыз,

в) $l=1$- жинақты, жинақсыз екендігі ашық сұрақ(қосымша белгілер қолданып немесе анықтама бойынша зерттеу жасау керек).

Теорема 6. Интегралдық белгі. Егер қандай да бір N нөмірінен бастап: $a_N\geq a_{N+1}\geq a_{N+2}\geq ...,$ теңсіздігі орындалса және $f(x)$- үзіліссіз, өспейтін $f(N)=a_N$, $f(N+1)=a_{N+1},...$ теңдігімен анықталған функция және $\int\limits_N^{\infty} f(x)dx$ менішіксіз интегралы жинақты (жинақсыз) болса, онда (1) қатары да сәйкес жинақты (жинақсыз) болады.

8.1.3 Таңбасы ауыспалы қатарлар

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots, \tag{4}$$

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots, \tag{5}$$

Берліген қатарларды қарастырайық.

Анықтама 4. (4) сан қатары , мұндағы u_i, $i=1,2,...,$ … - (4) қатарының мүшелері оң сан да ,теріс сан да болса, ондай қатар *таңбасы ауыспалы қатар* деп аталады.

(4) қатарының дербес жағдайы ретінде мүшелерінің таңбасы кезектесіп ауысқан қатарды алайық:

$$a_1-a_2+a_3-a_4+...,\qquad a_i\geq 0, i=1,2,... \tag{6}$$

Теорема 7. Лейбниц белгісі. Егер (6) қатардың мүшелері қандай да бір N нөмірінен бастап $a_N\geq a_{N+1}\geq a_{N+2}\geq\ldots$ теңсіздігін қанағаттандырса және $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ болса, онда (6) қатары жинақты болады, оның қосындысы оң сан.

Теорема 8. Егер (5) қатары жинақты болса, онда (4) қатары да жинақты.

Анықтама 5. Егер (4) қатары жинақты, ал (5) қатары жинақсыз болса, онда (4) қатары *шартты жинақты* деп аталады.

Анықтама 6. Егер (5) қатары жинақты болса, онда (4) қатары *абсолютті жинақты* деп аталады.

Таңбасы ауыспалы (4) қатарларды жинақтылыққа зерттегенде, ең алдымен (5) қатарын мүшелері теріс емес қатарларға арналған жинақтылықтың жеткілікті белгілерін қолданып, зерттеу керек.

8.1.4 Функционалдық қатарлар

Анықтама 7. Мүшелері функциялар болған

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots, \tag{7}$$

қатарды функционалдық қатар деп аталады, мұндағы $u_i(x)$, $i=1,2,...$- қатар мүшелері.

x тің нақты мәнінде (7) қатары сандық қатарды береді. Сондықтан, x-тің қайсібір мәндерінде (7) қатары жинақты, ал қайбір мәндерінде жинақсыз болады.

Анықтама 8. (7) қатары жинақты болатын x мәндерінің жиыны функционалдық қатардың жинақтылық облысы деп аталады.

Жинақтылық облысында оның қосындысы x айнымалысының функциясы болатындықтан $S(x)$ деп белгілейік.

8.1.5 Бірқалыпты жинақтылық. Функционалдық қатарларға амалдар қолдану.

Анықтама 9. Егер D облысында (7) қатары үшін $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n+...$ жинақты болатын мүшелері теріс емес сан қатары табылып,

$$|u_1(x)|\le\alpha_1, |u_2(x)|\le\alpha_2,...,|u_n(x)|\le\alpha_n,....\forall x\in D \tag{8}$$

теңсіздігі орындалса, онда (7) қатары *мажорантталады* дейді.

Анықтама 10. Егер $\forall\varepsilon>0:\exists N,$ әрбір $n\ge N$ $|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$ $\forall x\in[a;b]$ теңсіздігі орындалса, онда $[a;b]$ кесіндісінде жинақталатын (7) қатары *бір қалыпты жинақты* деп аталады.

Теорема 9. $[a;b]$ кесіндісінде мажорантталатын (7) қатары бірқалыпты жинақталады.

Теорема 9 –дан қатардың мажорантталуы оның бірқалыпты жинақты болуына қарағанда күшті шарт, яғни, бірқалыпты жинақты болатын мажорантталмаған қатарлар табылады.

Теорема 10. Егер $[a;b]$ кеснідісінде (7) бірқалыпты жинақты және $S(x)$ оның қосындысы болсын.

1. $\lim\limits_{x\to x_0}u_i(x),\quad i=1,2,...$ - бар болса, онда

$$\lim_{x\to x_0}S(x)=\lim_{x\to x_0}u_1(x)+\lim_{x\to x_0}u_2(x)+...+\lim_{x\to x_0}u_n(x)+...,\quad x_0\in[a;b]$$

2. $u_i(x),\quad i=1,2,...$ - $[a;b]$ кесіндісінде қатардың мүшелері де, $S(x)$қосындысы да үзіліссіз, онда

$$\int_{x_0}^{x_1}S(x)dx=\int_{x_0}^{x_1}u_1(x)dx+\int_{x_0}^{x_1}u_2(x)dx...+\int_{x_0}^{x_1}u_n(x)dx+...,\quad x_0\in(a;b), x_1\in(a;b),$$

яғни, қатарды мүшелеп интегралдауға болады.

Теорема 11. Егер (7) қатары $[a;b]$ кесіндісінде жинақты және $u_i(x)\in C^1[a;b],\quad i=1,2,...$, ал $u_1'(x)+u_2'(x)+...+u_n'(x)+...$ $[a;b]$ кесіндісінде бірқалыпты жинақты болса, онда

$$S'(x)=u_1'(x)+u_2'(x)+...+u_n'(x)+...\quad\forall x\in[a;b]$$

теңдігі орындалады, яғни, мүшелеп дифференциалдауға болады.

8.1.6 Дәрежелік қатарлар

Дәрежелік қатарлар функционалдық қатарлардың дербес жағдайы болып есептеледі.

Анықтама 11.

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+...\equiv\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k, \tag{9}$$

мұндағы $a_0,a_1,a_2,...$ - тұрақты сандар болған (9) қатарын $x-a$-ның дәрежелеріне қатысты *дәрежелік қатар* деп атайды.

$a=0$ болса, дәрежелік қатардың түрі:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad (10)$$

Теорема 12. (Абель). (10) қатардың $x = x_0$ нүктесіндегі жинақтылығынан, оның $|x| < |x_0|$ облысында абсолютті жинақтылығы, ал $|x| > |x_0|$ облысында жинақсыз болатындығы шығады.

Абель теоремасынан (10) қатары үшін $|x| < R$ облысында жинақты, ал $|x| > R$ - облысында жинақсыз болатындай жалғыз R: $0 \le R \le \infty$ саны табылады.

R саны дәрежелік қатардың *жинақтылық радиусы*, $(-R; R)$ облысы *жинақтылық облысы* деп аталады.

Егер $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ шегі нақты сан болса, онда Даламбер белгісі бойынша $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{x a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| \cdot L < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{L} = R$, жинақтылық радиусын $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ теңдігімен анықтаймыз. Осыған ұқсас Коши белгісімен жинақтылық радиусы $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ формуламен есептеледі.

D облысы (9) дәрежелік қатарының жинақтылық облысының ішінде жатқан кез-келген кесінді болсын. Онда:

1. (9) қатары D облысында мажорантталады.
2. (9) қатарының қосындысы D облысында үзіліссіз.
3. (9) қатарын D облысында мүшелеп интегралдауға және мүшелеп дифференциалдауға болады. Нәтижесінде алынған қатарлардың жинақтылық облысы алғашқы қатардың жинақтылық облысымен сәйкес келеді.

8.1.7 Тейлор қатары

$y = f(x)$ функциясының a нүктесінің қандай да бір аймағында $(n+1)$ ретті туындысы бар болсын.

$$P_n(a) = f(a), P_n'(a) = f'(a), \ldots, P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \qquad (11)$$

теңдіктерін қанағаттандыратындай дәрежесі n -нен артық емес $P_n(x)$ көпмүшелігін

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n$$

түрінде іздейміз.

$P_n^{(i)}(x), \quad i = \overline{1,n}$, туындыларын анықтап, оларды $x = a$ нүктесінде есептеу керек.

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ функциясы қалдық мүшесі деп аталады. Онда $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ теңдігімен жазып, қалдық мүшесінің Лагранж түріндегі жазылуын беруге болады:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi = a + \Theta(x-a), \quad 0 < \Theta < 1$$

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+...+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \qquad (12)$$

(12) формуласы *Тейлор формуласы*, ал $a=0$ болса, *Маклорен формуласы* деп аталады.

Бұл формулалар $P_n(x)$ a нүктесінің аймағында $y=f(x)$ функциясын $P_n(x)$ көпмүшелігімен $|R_n(x)|$ тең дәлдікпен ауыстыруға мүмкіндік береді.

a нүктесінің аймағында $y=f(x)$ шексіз рет дифференциалданатын болсын. Онда n санының шексіз үлкен мәні үшін дәрежелік қатарға жіктеледі. Қандай шарттар үшін $S(x)=f(x)$ бұл қатардың қосындысы болады?

Теорема 13. Егер $f(x)$ функциясы $D=(a-r;a+r)$ шексіз дифференциалданатын функция және $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ $\forall x\in D$ болса, онда D облысында

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f^{(2)}(a)+...+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+..., \qquad (13)$$

теңдігі орынды және (13) қатары D облысында $f(x)$ функциясына бірқалыпты жинақталады.

Әрбір элементар функция үшін $(a-R;a+R)$ аралығында Тейлор қатарына жіктелетіндей a және R сандарын анықтауға болады.

Кейбір функциялардың Маклорен қатарына жіктелуін дәлелдеусіз берейік:

1. $y=e^x$, $R=\infty\Rightarrow-\infty<x<\infty$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}...+\frac{x^n}{n!}+...$$

2. $y=\sin x$, $-\infty<x<\infty$

$$Sinx=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...$$

3. $y=\cos x$, $-\infty<x<\infty$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...$$

4. $y=\ln(1+x)$, $-1<x\le 1$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...$$

5. $y=(1+x)^m$, $m-const,$ $-1<x<1$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+...+\frac{m(m-1)...[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot ...\cdot n}x^n+...$$

Ескерту: Көрсетілген жіктеулерді күрделі функциялардың Маклорен қатарына жіктелуін алу үшін де қолдануға болады.

Мысалы*:*

1. $\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-...$, $\qquad -1\le x<1$

2. $cosx^2=1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}-\frac{x^{12}}{6!}+...,$ $\qquad -\infty<x<\infty$

3. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\left[1+(-x^2)\right]^{-\frac{1}{2}}$. $(1+x)^m$ функциясының жіктеуіндегі $m=-\dfrac{1}{2}$ деп есептеп, x-тің орнына $-x^2$ қойып, жинақтылық интервалын $\left|-x^2\right|=\left|x^2<1\Rightarrow -1<x<1\right|$ анықтап,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+...$$

жіктейміз.

4. $\mathrm{y}=\arcsin \mathrm{x}$ функциясы үшін $y'=f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ теңдігі орынды, онда $-1<x<1$ облысында

$f(x)=\int\limits_0^x\dfrac{dt}{\sqrt{1-x^2}}=\int\limits_0^x(1+\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}t^6+..)dt\Rightarrow$ интегралдап,

$\arcsin x=x+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\dfrac{x^5}{5}+\ldots$, $\quad -1<x<1$ жіктелуін аламыз.

$x=\pm 1$ нүктелерінде берілген функцияның жіктелген қатары жинақты болады. Егер $x=1$ болса,

$\arcsin 1=\dfrac{\pi}{2}=1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\dfrac{1}{5}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\dfrac{1}{7}+...$ - бұл формула π санын есептеуге қолданылады.

Қатарлардың көмегімен интегралдары элементар функциялармен өрнектелмейтін интегралдарды есептеуге болады.

8.2 Өз білімін тексеруге арналған сұрақтар

1. Сандық қатардың анықтамасы.Қатардың дербес қосындысы.
2. Қатардың қосындысының анықтамасы.
3. Сандық қатардың жинақтылығы мен жинақсыздығы.
4. Жинақтылықтың қажетті шарты.
5. Таңбалары оң қатарларды салыстыру белгілері.
6. Жинақтылықтың жеткілікті белгілері:Даламбер белгісі.Коши белгісі.
7. Таңбалары ауыспалы қатарлар. Абсолютті және шартты жинақтылық.
8. Таңбалары алма-кезек ауыспалы қатарлар. Лейбниц белгісі.
9. Функционалдық қатардың анықтамасы.
10. Жинақтылық облысы.
11. Қатардың бірқалыпты жинақтылығының анықтамасы.
12. Қатарды мүшелеп интегралдау және мүшелеп дифференциалдау.
13. Дәрежелік қатарлар. Жинақтылық интервалы.
14. Тейлор және Маклорен қатарлары.
15. Элементар функцияларды қатарға жіктеу.

8.3 Есеп шығару үлгілері

Есеп №1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{14}{49n^2-70n-24}$ қатардың қосындысын табыңыз.

Шешуі. S_n дербес қосындысының формуласын алу үшін $\dfrac{14}{49n^2-70n-24}$ жалпы мүшесін қарапайым бөлшектердің қосындысына жіктейміз. Ол үшін квадраттық

үшмүшенің түбірлерін тауып, көбейткіштерге жіктейміз.
$D = 70^2 + 49 \cdot 24 \cdot 4 = 49(100+96) = 49 \cdot 196 = (7 \cdot 14)^2 = 98^2$

$$n_{1,2} = \frac{70 \pm 98}{98} = \left[\begin{array}{l} -\frac{28}{98} = -\frac{2}{7} \\ \frac{168}{98} = \frac{12}{7} \end{array}\right. \Rightarrow 49n^2 - 70n - 24 = 49\left(n + \frac{2}{7}\right)\left(n - \frac{12}{7}\right) = (7n+2)(7n-12)$$

Енді жалпы мүшесін анықталмаған коэффициенттер әдісін қолданып, жай бөлшектердің қосындысына жіктейміз.

$$\frac{14}{49n^2 - 70n - 24} = \frac{A}{7n+2} + \frac{B}{7n-12} = \frac{A(7n-12) + B(7n+2)}{(7n+2)(7n-12)}.$$

n - нің бірдей дәрежелерінің алдындағы коэффициенттерді салыстырып, A және B анықтауға мүмкіндік беретін теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\left.\begin{array}{l|l} n & 7A + 7B = 0 \\ n^0 & -12A + 2B = 14 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A = -B \\ 12B + 2B = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -B \\ 14B = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

Сонымен, $\dfrac{14}{49n^2 - 70n - 24} = \dfrac{1}{7n-12} - \dfrac{1}{7n+2}$.

S_n дербес қосындысын алынған соңғы жіктеу бойынша түрлендіріп,

$$S_n = \frac{1}{-5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{9} - \frac{1}{23} + \frac{1}{16} - \frac{1}{30} + \ldots + \frac{1}{7n-33} - \frac{1}{7n-19} + \frac{1}{7n-26} - \frac{1}{7n-12} +$$
$$+ \frac{1}{7n-19} - \frac{1}{7n-5} + \frac{1}{7n-12} - \frac{1}{7n+2} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{7n-5} - \frac{1}{7n+2}$$

аламыз.

Анықтама бойынша қатардың қосындысын, дербес қосындылар тізбегінің шегі ретінде анықтаймыз: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ $\quad S = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{7n-5} - \dfrac{1}{7n+2}\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{10}$

Жауабы: $S = \dfrac{3}{10}$.

Есеп №2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+8}{n(n+1)(n+2)}$ қатарының қосындысын табыңыз.

Шешуі. Қатардың жалпы мүшесін түрлендіріп,

$$\frac{3n+8}{n(n+1)(n+2)} = \frac{4n - n + 8}{n(n+1)(n+2)} = \frac{4(n+2)}{n(n+1)(n+2)} - \frac{n}{n(n+1)(n+2)} = \frac{4}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

S_n дербес қосындысын жіктеуді аламыз.

$$S_n = 4\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right) - \left(\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) =$$
$$= 4\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) =$$
$$= 4\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = 4 - \frac{4}{n+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} = 3\frac{1}{2} - \frac{4}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

Сонда қатар қосындысы анықтама бойынша

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(3\frac{1}{2} - \frac{4}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = 3\frac{1}{2} \text{ тең.}$$

Жауабы: $S = 3\dfrac{1}{2}$.

Есеп №3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n2^n}}$ қатарын жинақтылыққа зертеңіз.

Шешуі. Даламбер формуласын қолданып, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ шегін есептеу керек. Біздің есептің берілгені бойынша $a_n=\frac{2n+1}{\sqrt{n2^n}}$, $a_{n+1}=\frac{2(n+1)+1}{\sqrt{(n+1)2^{n+1}}}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)\sqrt{n2^n}}{\sqrt{(n+1)2^{n+1}}(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1}\cdot\sqrt{\frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1\Rightarrow$$

Ендеше қатар жинақты.

Есеп №4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n+3}{2n+5}\right)^n$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. Қатарды жинақтылыққа зерттеу үшін Кошидің радикалдық белгісін қолданамыз. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ есептей отырып,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\arcsin\frac{n+3}{2n+5}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\arcsin\frac{n+3}{2n+5}=\lim_{n\to\infty}\arcsin\frac{1+\frac{3}{n}}{2+\frac{5}{n}}=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}<1\Rightarrow$$

нәтижесінен қатар жинақты деген қорытындыға келеміз.

Есеп №5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)\ln(n+5)\ln\ln(n+5)}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. Қатарды жинақтылыққа зерттеу үшін Кошидің интегралдық белгісін қолданамыз. Ол үшін меншіксіз интегралды жинақтылыққа зерттейміз.

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+5)\ln(x+5)\ln\ln(x+5)}=\lim_{a\to\infty}\int_1^a\frac{d\ln\ln(x+5)}{\ln\ln(x+5)}=\lim_{a\to\infty}\ln\ln|\ln(x+5)|\Big|_1^a=$$
$$=\lim_{a\to\infty}(\ln\ln\ln(a+5)-\ln\ln\ln 6)=\infty$$

Сонымен, меншіксіз интегралдың жинақсыздығынан қатардың жинақсыздығы шығады.

Есеп №6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. Берілген қатардың мүшелерінің таңбасы кезектесіп, ауысатындықтан, Лейбниц белгісінің шарттарын тексерейік.

1) $\left\{n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right\}$ кемімелі тізбек болатынын көрсетейік. $\left(1+\frac{1}{\mathrm{n}^2}\right)^{\mathrm{n}}\rangle\left(1+\frac{1}{(\mathrm{n}+1)^2}\right)^{\mathrm{n}}$ белгілі теңсіздігін қолданып, оң жағын 1-ден үлкен өрнекке көбейтіп, теңсіздік таңбасын одан-әрі күшейтейік. Сонда

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)>\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n\Rightarrow\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n\Rightarrow\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n+1}>\ln\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)>n\ln\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)\Rightarrow\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)>\frac{1}{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)\Rightarrow a_n>a_{n+1}$$

Дәлелденді.

2) Лейбниц белгісін қолданып, таңбасы ауыспалы қатардың жинақтылығын көрсету үшін $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$. Лопиталь ережесінің көмегімен функцияның шегін есептеуге болады. Жинақтылықтың түрін ажырату үшін абсолют шамасынан тұратын қатарды салыстыратындай $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ гармониялық қатарды қолданамыз.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n^2\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = \ln e = 1$$

ендеше, гармониялық қатардың жинақсыз болуынан абсолют шамасынан тұратын қатардың жинақсыздығы шығады. Сөйтіп, берілген қатар шартты жинақты болады.

Есеп №7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\frac{x^n}{5^n}$

Шешуі. Кошидің радикалдық белгісін қолданып, жалпы мүшесінің абсолют шамасы үшін

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\left|\frac{x^n}{5^n}\right|} = \frac{|x|}{5}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{|x|}{5}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^n = \frac{|x|}{5}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-1}}\right]^{\frac{-1}{n+1}\cdot n} =$$

$$= \frac{|x|}{5}\lim_{n\to\infty} e^{\frac{-n}{n+1}} = \frac{|x|}{5}\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} = \frac{|x|}{5}\frac{1}{e}\angle 1 \Rightarrow |x|\angle 5e \Rightarrow -5e\angle x\angle 5e$$

анықтаймыз.

Облыстың шекарасындағы $x=5e$ және $x=-5e$ нүктелерде зерттеп, $x=5e$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\frac{(5e)^n}{5n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}e^n$ сан қатарына Даламбер белгісін қолданып,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{(n+1)^2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{e^{n+1}}{e^n} = e\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{(n+1)^2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} =$$

$$= e\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{\frac{n+2}{-1}}\right]^{-\frac{1}{n+2}\cdot(n+1)^2}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^n = e\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{(n+1)^2}{n+2}}\cdot e^n = e\lim_{n\to\infty} e^{\frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{n+2}} =$$

$= e\lim\limits_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n+2}} = e\cdot e^0 = e > 1 \Rightarrow$ қатардың жинақсыздығын аламыз. Ал $x=-5e$ нүктесінде $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}e^n$ таңбасы ауыспалы қатарды зерттеп, яғни, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. үшін оның абсолют шамасынан тұратын қатардың жинақты екенін көруге болады:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}e^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{n^2}e^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-1}}\right]^{\frac{-1}{n+1}\cdot n^2}\cdot e^n = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{n^2}{n+1}}\cdot e^n =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{n^2+n-n^2}{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{n}{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} = e > 1 \Rightarrow$ қатар жинақсыз.

Жауабы: $-5e < x < 5e$.-жинақтылық облысы.

Есеп №8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x-5)^n}{n3^n}$ жинақтылық облысын табыңыз.

Шешуі. Даламбер белгісін қолданамыз:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n(x-5)^{n+1}n3^n}{(n+1)3^{n+1}(-1)^{n-1}(x-5)^n}\right| = \frac{|x-5|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{|x-5|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{|x-5|}{3} < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x-5| < 3 \Rightarrow -3 < x-5 < 3 \Rightarrow 2 < x < 8$$

Егер x = 2 болса, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(-3)^n}{n3^n} = \sum(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{2n-1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ – сан қатары гармониялық, ендеше жинақсыз. Ал x = 8 болса, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}3^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ - таңбасы ауыспалы қатар, Лейбниц белгісі бойынша: 1) $a_n = \dfrac{1}{n}$; $1 > \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{3} > \cdots$ - кемімелі тізбек, 2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim\dfrac{1}{n} = 0$. Сонымен, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ қатары шартты жинақты, өйткені абсолютті мүшелерінен құрастырылған қатар гармониялық қатар жинақсыз. Жинақтылық облысы: $2 < x \le 8$.

Жауабы: $2 < x \le 8$.

Есеп №9. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!(x+3)^n}{n^n}$ дәрежелік қатардың жинақтылық облысын табыңыз.

Шешуі. Даламбер белгісін қолданамыз: $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right| < 1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!|x+3|^{n+1}n^n}{(n+1)^{n+1}n!|x+3|^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)|x+3|^n|x+3|\cdot n^n}{(n+1)^n(n+1)n!|x+3|^n} = |x+3|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$|x+3|\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n}{n+1}\right)^{(n+1)\cdot n\overline{-1}} n+1 = |x+3|e^{-1} = \frac{|x+3|}{e} < 1 \qquad |x+3| < e \quad -e < x+3 < e$$

$-e-3 < x < e-3$. Аралықтың шеткі нүктелерінде қатар жинақсыз болады.

Жауабы: $-e-3 < x < e-3$.

Есеп №10. $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)(2n+3)}$ қосындысын табыңыз.

Шешуі. $\dfrac{1}{(2n+2)(2n+3)}$ бөлшегін анықталмаған коэффициенттер әдісімен жай бөлшектердің қосындысына жіктейміз: $\dfrac{1}{(2n+2)(2n+3)} = \dfrac{A}{2n+2} + \dfrac{B}{2n+3}$

$$2An + 3A + 2Bn + 2B = 1$$

$$\begin{cases}2A+2B=0\\3A+2B=1\end{cases}\quad \begin{cases}A+B=0\\3A+2B=1\end{cases}\quad \begin{matrix}A=1\\B=-1\end{matrix}.$$

Екі қатарды $S_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{2n+2}$ және $S_2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{2n+3}$ жеке-жеке қарастырамыз. S_1 қатарын $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{2n+2}=\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}+\frac{x^8}{8}+\frac{x^{10}}{10}+\frac{x^{2n+2}}{2n+2}+...$ қосылғыштарына жіктеп, мүшелеп дифференциалдап, $x+x^3+x^5+x^7+x^8+x^9+...=\frac{x}{1-x^2}$ қатарын аламыз. Соңғы қосынды 1-ші мүшесі мен еселігі белгілі $b_1=x,\ q=x^2$ геометриялық прогрессияны береді. Қосындысын мүшелеп интегралдаймыз:

$$S_1=\int_0^x\frac{t}{1-t^2}dt=-\frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right|.$$

$S_2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{2n+3}=\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\frac{x^6}{7}+\frac{x^8}{9}+\frac{x^{10}}{11}+...+\frac{x^{2n+2}}{2n+3}+...$ қатарының мүшелерін x -ке көбейтіп, $\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}+\frac{x^{11}}{11}+...+\frac{x^{2n+3}}{2n+3}+...$ мүшелеп дифференциалдап, $x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}+...=\frac{x^2}{1-x^2}$ геометриялық прогрессиясын аламыз. Қосындысын мүшелеп интегралдаймыз:

$$S_2=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{t^2}{1-t^2}dt=-\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1-t^2-1}{1-t^2}dt=-\frac{1}{x}\left(\int_0^x dt-\int_0^x\frac{dt}{1-t^2}\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|-t\right)\Bigg|_0^x=\frac{1}{2x}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|-1$$

Берілген қатардың қосындысы: $S=S_1+S_2$

Жауабы: $S=\frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right|+\frac{1}{2x}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|-1$

Есеп №5. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2+9n+5\right)x^{n+1}$ қатарының қосындысын табыңыз.

Шешуі. Даламбер белгісін қолданып, жинақтылық облысын анықтаймыз: (-1; 1). Қатардың жалпы мүшесін қосылғыштарға жіктейміз.

$S_1=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2+9n+5\right)x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^{n+1}+9\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n+1}+5\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=S_1+9S_2+5S_3$. үшінші қатарға тоқталайық: $S_3=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}$,ашып жазсақ $S_3=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=x+x^2+x^3+x^4+...$.

$b_1=x,q=x$ белгілі геометриялық прогрессия үшін қосындысы: $S_3=\frac{x}{1-x}$. Енді екінші қосылғышты түрлендіріп,

$$S_2=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n+1}=x^2+2x^3+3x^4+4x^5+...=x^2\left(1+2x+3x^2+4x^3+...\right).$$

жақшада орналасқан қосындыны мүшелеп интегралдап, жоғарыдағыдай геометриялық прогрессия беретінін көруге болады:

$$\left(x+x^2+x^3+x^4+...\right),\ b_1=x,q=x,\ S_2=x^2\left(\frac{x}{1-x}\right)'=x^2\frac{(1-x)+x}{(1-x)^2}=\frac{x^2}{(1-x)^2}.$$

Бірінші қосылғышты түрлендіріп,

$$S_1=\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^{n+1}=x^2+4x^3+9x^4+16x^5+25x^6+...=x^2\left(1+4x+9x^2+16x^3+25x^4+...\right).$$

жақшаның ішін мүшелеп интегралдап,

$$x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+\ldots=x\left(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\ldots\right).$$

тағы бір рет мүшелеп интегралдап, жоғарыдағыдай геометриялық прогрессия аламыз: $x+x^2+x^3+x^4+x^5+\ldots$, $b_1=x, q=x$. Ендеше

$$S_1=x^2\left(x\left(\frac{x}{1-x}\right)^1\right)^1=x^2\left(x\frac{1-x+x}{(1-x)^2}\right)^1=x^2\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)^1=x^2\,\frac{(1-x)^2+x2(1-x)}{(1-x)^4}=x^2\,\frac{1-x^2}{(1-x)^3}=$$

$=\dfrac{x^2(1+x)}{(1-x)^2}$. Сонымен, қатардың қосындысы

$$S=\frac{x^2(1+x)}{(1-x)^2}+\frac{9x^2}{(1-x)^2}+\frac{5x}{(1-x)}=\frac{x^2(1+x)+9x^2+5x(1-x)}{(1-x)^2}.$$

Есеп №6. $\int_0^{0,1}\cos\left(10x^2\right)dx$ қатардың көмегімен жуықтап есептейік.

Шешуі. $y=\cos x$ функциясының дәрежелік қатарға жіктеуін қолданып,

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$$