Практическое занятие 1.

1. Определители

Значение определителей II–го порядка находится по следующему правилу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Примеры: 1) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 1 = 17$

2) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 4 \cdot 0 = -6$

3) $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-5) - (-2) \cdot 3 = 5 + 6 = 11$.

Замечание. Если элементами определителя являются некоторые функции, то данный определитель, вообще говоря, тоже функции (но может быть и числом).

Например,

4) $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

5) $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

6) $\begin{vmatrix} tgx & 2 \\ \frac{1}{2} & ctgx \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$.

Вычисления определителя III-го порядка осуществляются по правилу треугольников (или по правилу Саррюса)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Пример:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \cdot 2 + 4(-1) \cdot (-3) - (-3) \cdot 6 \cdot 2 - 2 \cdot 4 \cdot 1 - 5 \cdot (-1) \cdot 1 = 71$$

Определителем n-го порядка называется число Δ, записываемое в виде квадратной таблицы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Минором M_{ij} *элемента* a_{ij} $\left(i, j = \overline{1, n}\right)$ называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из определителя n-го порядка, вычерчиванием i-й строки и j-го столбца. Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} определяется равенством

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Для произвольного n $\qquad \Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot A_{1k}$,

где $A_{1k} = (-1)^{1+k} M_{1k}$, а миноры M_{1k} являющиеся определителями $(n-1)$-го порядка, получаются из Δ вычерчиванием первой строки и k-го столбца.

Например, для определителя III-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 4(-7) - 7 \cdot (21 - 25) - 2 \cdot 5 = -10$$

для определителя IV-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} -$$

$$- 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(4(-4) + 3 \cdot 4 - 2 \cdot 0) - (0 \cdot (-4) - 4 - 2 \cdot 5) +$$

$$+ 2 \cdot (0(-12) - 4 \cdot 4 - 2 \cdot 15) = -74$$

Рассмотрим основные методы вычисления определителей.

Пример1. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 30 & -10 & 120 & 80 \\ -5 & 3 & -34 & -23 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 8 & -15 \end{vmatrix}$$

из первой строки вынесем множитель 10, а затем будем последовательно умножать полученную строку на 3,1,2 и складывать соответственно со второй, третьей и четвертой строками. Тогда, имеем

$$\Delta = 10 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 15 & 1 \\ -3 & 0 & 32 & 1 \end{vmatrix}$$

полученный определитель можно разложить по элементам второго столбца

$$\Delta = 10 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 15 & 1 \\ -3 & 32 & 1 \end{vmatrix}$$

Получили определитель третьего порядка, который можно вычислить по правилу треугольников или подобным же приемом свести к вычислению одного определителя второго порядка. Действительно, вычитая из второй и третьей строк данного определителя первую строку получаем:

$$\Delta = 10 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & 0 \\ -7 & 30 & 0 \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 13 \\ -7 & 30 \end{vmatrix} = 10 \cdot 7 \cdot 13 = 910.$$

1.3. Приведение определителя к треугольному виду.

Определитель, у которого все элементы, находящиеся выше или ниже главной диагонали, равны нулю, называется ***определителем треугольного вида***. В этом случае определитель равен произведению элементов главной диагонали. Приведение любого определителя к треугольному виду всегда возможно.

Пример-2. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 9 & 27 & 6 & 10 & -9 \\ 3 & 9 & 6 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}$$

Выполним следующие операции. Пятый столбец определителя сложим в первым, этот же столбец умноженный на 3-со вторым, на 2- с третьим, на 8-с четвертым столбцом. В итоге получим определитель треугольного вида, который равен исходному:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & -12 & -2 \\ 0 & 7 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & -62 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -22 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 22 \cdot 1 = -5544$$

Решить следующие задания самостоятельно

1. С помощью правила треугольников (правила Саррюса) вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

Ответ: а) –36; б) 0; в) 87.

2. Методом понижения порядка вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 15325 & 15323 & 37527 \\ 23735 & 23735 & 17417 \\ 23737 & 23737 & 17418 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Ответ: а) 22198; б) 16.

3.Вычислить определители методом приведения их к треугольному виду:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 9 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Ответ: а) 48; б) 20.

4.Вычислить определители, предварительно упростив их:

а) $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & ax & 1 \\ x^2+y^2 & ay & 1 \\ x^2+y^2 & az & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 5 & 5 & 3 \\ 10 & 11 & 6 & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 6 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & 5 & 4 & 2 \\ 7 & 10 & 7 & 5 & 0 \end{vmatrix}$.

Ответ: а) $a(x-y)(y-z)(x-z)$; б) 5.