2.Матрицы и операции над ними

Сложение и вычитание матриц

Эти операции определяются только для матриц одинаковой размерности.

Если $A=\left(a_{ij}\right),\ B=\left(b_{ij}\right),\ \left(i=\overline{1,m}\right);\quad j=\overline{1,n}\quad \Rightarrow A\pm B=C$,

где $C=\left(c_{ij}\right)$ и $c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}$.

Например, пусть $A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 2 & -4\\ -3 & 9\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & 7\\ 8 & -11\end{pmatrix}\quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow\quad A+B=\begin{pmatrix}-1 & 10\\ 5 & 3\\ 5 & -2\end{pmatrix},\quad A-B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & -11\\ -11 & 20\end{pmatrix}.$$

Умножение матрицы на число

Произведением матрицы A и числа λ, обозначающим λA, называется матрица B той же размерности, элементы которой $b_{ij}=\lambda a_{ij}$, где a_{ij}-элементы матрицы A, т.е. при умножении матрицы на число (числа на матрицу) надо все элементы матрицы умножить на это число.

Например, пусть

$$\lambda=-2,\quad A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 7 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow \lambda A=-2\begin{pmatrix}3 & 0\\ 7 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 0\\ -14 & 2\end{pmatrix}.$$

Умножение матриц

Пусть $A=\left(a_{ij}\right),\ i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n};\quad B=\left(b_{ij}\right),\ i=\overline{1,n};\quad j=\overline{1,p}\Rightarrow$

$C=A\cdot B=\left(c_{ij}\right),\ i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,p}$, где $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{m}a_{ik}\cdot b_{kj}$.

Число строк матрицы $A\cdot B$ равно числу строк A, а число столбцов – числу столбцов B.

Пример 1. Найти $A\cdot B$ и BA, если $A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 8\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$,

$$B=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ -2 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot B=\begin{pmatrix}4\cdot(-1)+(-5)(-2)+8\cdot 3 & 4\cdot 5+(-5)(-3)+8\cdot 4\\ 1\cdot(-1)+3(-2)+(-1)\cdot 3 & 1\cdot 5+3(-3)+(-1)\cdot 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}30 & 67\\ -10 & -8\end{pmatrix},\qquad AB=\begin{pmatrix}30 & 67\\ -10 & -8\end{pmatrix}.$$

Далее находим,

$$BA=\begin{pmatrix}(-1)\cdot 4+5\cdot 1 & (-1)\cdot(-5)+5\cdot 3 & (-1)\cdot 8+5(-1)\\ (-2)\cdot 4+(-3)\cdot 1 & (-2)(-5)+(-3)\cdot 3 & (-2)\cdot 8+(-3)(-1)\\ 3\cdot 4+4\cdot 1 & 3\cdot(-5)+4\cdot 3 & 3\cdot 8+4\cdot(-1)\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & 20 & -13 \\ -11 & 1 & -13 \\ 16 & -3 & 20 \end{pmatrix} \text{ и так, } AB\neq BA.$$

Пример 2. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти AB и BA.

$$AB=\begin{pmatrix} 3\cdot 1+5(-1) & 3(-5)+5\cdot 2 \\ 1\cdot 1+2\cdot(-1) & 1\cdot(-5)+2\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} 1\cdot 3+(-5)\cdot 1 & 1\cdot 5+(-5)\cdot 2 \\ (-1)\cdot 3+2\cdot 1 & (-1)\cdot 5+2\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, $AB\neq BA$. (В этом случае матрицы называются не*перестановочными*).

Пример 3. Найти $(AB)C$ и $A(BC)$, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix},\; C=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Имеем $AB=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -1 & 9 & -2 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $(AB)C=\begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ -15 \end{pmatrix}$,

$$BC=\begin{pmatrix} -10 \\ 1 \end{pmatrix},\quad A(BC)=\begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ -15 \end{pmatrix} \text{ т.е } (AB)C=A(BC).$$

1.5. Обратная матрица

Только для квадратных невырожденных матриц $A=(a_{ij})$ $i=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,n}$ $(\det\ A\neq 0)$ вводится понятие обратной матрицы A^{-1}, которая определяется формулой

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пример-1. Дана матрица А. Убедиться, что она невырожденная, найти обратную ей матрицу A^{-1} и проверить выполнимость равенств $AA^{-1}=A^{-1}A=E$, если

а) $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

а) Имеем $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \neq 0$. Находим алгебраические дополнения: $A_{11} = 3, \quad A_{12} = -1, \quad A_{21} = -2, \quad A_{22} = -1$. Следовательно,

$$A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 & 2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}, \quad AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}A.$$

б) Вычислим $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$ и алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -2, \quad A_{12} = 2, \quad A_{13} = 4, \quad A_{21} = 3, \quad A_{22} = 1, \quad A_{23} = -2,$$
$$A_{31} = -7, A_{32} = -5, \quad A_{33} = -6.$$

Тогда, $A^{-1} = \dfrac{1}{-8}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}, \quad AA^{-1} = A^{-1}A = E.$

1.6. Ранг матрицы

Выделим в матрице A k строк и k столбцов, где k - число, меньшее или равное меньшему из чисел m и n. Определитель порядка k, составленный из элементов, стоящих на пересечении выделенных k строк и k столбцов, называется минором или определителем k порядка, порожденным матрицей A. Например для матрицы

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

при $k = 2$ определители $\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -6 \end{vmatrix}$ будут порожденными данной матрицей.

Рангом матрицы A (r_A) называется наибольшей порядок порожденных ею определителей, отличных от нуля. Если равны нулю все определители порядка k, порожденных данной матрицей A, то $r_A < k$.

С помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к виду, когда каждый ее ряд будет состоять только из нулей или из нулей и одной единицы. Тогда число оставшихся единиц и определяет ранг исходной матрицы, т.к. полученная матрица будет эквивалентна исходной.

Пример. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Умножим третий столбец матрицы A на $\frac{1}{2}$. Далее полученную строку умножим на 2 и вычтем ее из четвертой строки. Теперь третий столбец содержит три нуля и единицу (в первой строке). Легко делаем нули в первой строке на первой, второй, четвертой и пятой позициях.

Имеем

$$A \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Теперь четвертую строку последней матрицы складываем со второй и третьей, получая при этом еще два нуля во втором столбце, после чего делаем нули в четвертой строке всюду, кроме единицы на пересечении четвертой строки и второго столбца. В результате этих элементарных преобразований имеем:

$$A \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получили три единицы. Следовательно, $r_A = 3$.

Решить:

1. Даны матрицы A и B. Найти $A+B, 2A, A-3B$, если

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 11 & 7 \end{pmatrix}$.

2. Даны матрицы A и B. Найти AB и BA, если

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -2 & 3\end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\2 & 3\end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & \alpha\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\beta & \gamma\\0 & 0\end{pmatrix}$.

Ответ: а) $AB=\begin{pmatrix}4 & 1 & 11\\0 & -11 & 19\\13 & 13 & 29\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}6 & -7 & 30\\-13 & -2 & -8\\21 & 3 & 18\end{pmatrix}$

б) $AB=\begin{pmatrix}3 & 11\\2 & 17\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}21 & -7 & 35\\15 & -1 & 20\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

в) $BA=(13)$, $AB=\begin{pmatrix}15 & -6 & 9\\20 & -8 & 12\\10 & -4 & 6\end{pmatrix}$

г) $AB=$ $BA=\begin{pmatrix}10 & 14\\7 & 10\end{pmatrix}$

д) $AB=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}0 & \alpha\gamma\\0 & 0\end{pmatrix}$.

3. Найти матрицу A^{-1}, обратную данной матрице A, если

а) $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -5\\1 & 2 & 4\\3 & 2 & -1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1\\0 & 3 & 1 & -7\\2 & 7 & 6 & 1\\1 & 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

Ответ: а) $A^{-1}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-10 & -9 & 14\\13 & 12 & -17\\-4 & -3 & 5\end{pmatrix}$;

б) $A^{-1} = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 3 & -13 & 41 \\ -13 & -3 & 8 & -16 \\ 18 & 3 & -3 & 6 \\ -3 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$.

4. Найти ранг матрицы A с помощью элементарных преобразований если

а) $A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & -7 & -5 & -5 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & -4 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

в) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) 2; б) 2; в) 3.