СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. Ранг матрицы

Выделим в матрице A k строк и k столбцов, где k - число, меньшее или равное меньшему из чисел m и n. Определитель порядка k, составленный из элементов, стоящих на пересечении выделенных k строк и k столбцов, называется минором или определителем k порядка, порожденным матрицей A. Например для матрицы

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

при $k=2$ определители $\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -6 \end{vmatrix}$ будут порожденными данной матрицей.

Рангом матрицы A (r_A) называется наибольшей порядок порожденных ею определителей, отличных от нуля. Если равны нулю все определители порядка k, порожденных данной матрицей A, то $r_A < k$.

С помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к виду, когда каждый ее ряд будет состоять только из нулей или из нулей и одной единицы. Тогда число оставшихся единиц и определяет ранг исходной матрицы, т.к. полученная матрица будет эквивалентна исходной.

Пример. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Умножим третий столбец матрицы A на $\frac{1}{2}$. Далее полученную строку умножим на 2 и вычтем ее из четвертой строки. Теперь третий столбец содержит три нуля и единицу (в первой строке). Легко делаем нули в первой строке на первой, второй, четвертой и пятой позициях.

Имеем

$$A \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Теперь четвертую строку последней матрицы складываем со второй и третьей, получая при этом еще два нуля во втором столбце, после чего делаем нули в четвертой строке всюду, кроме единицы на пересечении четвертой строки и второго столбца. В результате этих элементарных преобразований имеем:

$$A \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получили три единицы. Следовательно, $r_A = 3$.

2. Системы линейных алгебраических уравнений

Определения.

6. Системой m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными назовем систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2)$$

где числа a_{ik}, $i = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,n}$ - коэффициенты системы, b_i, $i = \overline{1,m}$ - свободные члены, x_i, $i = \overline{1,n}$ - неизвестные.

7. Числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называются решением системы (2), если они, будучи подставлены вместо неизвестных в уравнения, обращают их в тождества.

8. Систему (2) назовем совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и, несовместной – в противном случае.

9. Совместную систему (2) назовем определенной, если она имеет единственное решение, иначе – неопределенной.

10. Если все $b_i = 0$, $i = \overline{1,m}$, то систему (2) назовем однородной, иначе - неоднородной.

Из раздела 1 следует, что систему (2) можно записать в матричном виде

$$AX = B, \qquad (2)$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$

Теорема Кронекера-Капелли. Для того, что бы система (2) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы $r(A) = r(\overline{A})$, где

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m_2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

- расширенная матрица системы (2).

Так как каждое уравнение системы (2) однозначно определяется набором коэффициентов этого уравнения, то, рассматривая строки матрицы $\overline{A}$ как компоненты векторов, получим, что $r(\overline{A})$ равно числу линейно независимых уравнений системы (2).

Следствие 1. Система (2) является определенной тогда и только тогда, когда

$$r(A) = r(\overline{A}) = n,$$

где n - количество неизвестных.

Рассмотрим случай, когда $m = n$ и $\det A = \Delta \neq 0$. Из следствия 1 следует, что система (2) определенная и для нахождения решения системы рассмотрим следующие методы.

2. Методы решения

2.1 Правило Крамера

Решение системы (2) определяется формулами

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1,n},$$

где Δ_i, $i = \overline{1,n}$ - определители, получаемые из Δ заменой i-го столбца на столбец свободных членов.

2.2. Матричный способ

Так как $\det A \neq 0$, то

$$AX = B \Rightarrow A^{-1} \cdot AX = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

2.3 Метод Гаусса (метод исключения неизвестных).

С помощью элементарных преобразований систему (2) приводят к эквивалентной ей диагональной системе

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1,n-1}x_{n-1} + a'_{1,n}x_n = b'_1 \\ \qquad a'_{22}x_1 + \ldots + a'_{2,n-1}x_{n-1} + a'_{2,n}x_n = b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a'_{n-1,n-1}x_{n-1} + a'_{n-1,n}x_n = b'_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad a'_{n,n}x_n = b'_n \end{cases} \tag{3}$$

Неизвестные находят, начиная с последнего уравнения, определяют x_n, затем последовательно доходят до первого уравнения и определяют x_1.

Пример 2. Рассмотренными способами решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 - 4x_2 \qquad = -5 \end{cases}. \tag{4}$$

Решение.

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \quad r(A) = r(\overline{A}) = 3$$

Следовательно, система (4) имеет единственное решение.

а) Правило Крамера. Найдем Δ_1, Δ_2, Δ_3.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -7 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -5 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -7 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -4 & -5 \end{vmatrix} = -4.$$

Отсюда

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -2.$$

б) Матричный способ

Запишем систему (4) в виде $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Из примера 10 (лекция 1) имеем

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -4 & -10 \\ 2 & -1 & -3 \\ -8 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, из равенства $X = A^{-1}B$, получим

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -4 & -10 \\ 2 & -1 & -3 \\ -8 & 5 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

или

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -2.$

в) Метод Гаусса

Переставим местами 1-е и 2-е уравнения

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 - 4x_2 = -5 \end{cases}$$

Умножим 1-е уравнение на (–2) и сложим его 2-м уравнением. Затем, умножим 1-е уравнение на (–1) и сложим его с 3-м уравнением. Таким образом, мы исключим x_1 из 2-го и 3-го уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ -11x_2 - 3x_3 = -5 \\ -8x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$$

Умножим 2-е уравнение на $(-\frac{2}{11})$ и сложим его с 3-м уравнением. Мы исключили x_2 из 3-го уравнения

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ -11x_2 - 3x_3 = -5 \\ \dfrac{2}{11}x_3 = -\dfrac{4}{11} \end{cases}$$

Решая 3-го уравнение, получим $x_3 = -2$. Подставляя $x_3 = -2$ во 2-е уравнение, вычислим $x_2 = 1$. Далее, подставляя $x_3 = -2$, $x_2 = 1$ в 1-е уравнение, найдем $x_1 = -1$.

Пример 3. Решить систему уравнений с помощью формул Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8 \\ 2x_2 + 7x_3 = 17 \end{cases}$$

Вычислим $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 56 - 18 + 20 - 21 = 79$.

Последовательно заменив в Δ первый, второй и третий столбцы столбцом свободных членов, получим:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -8 & 4 & -5 \\ 17 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 395, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -8 & -5 \\ 0 & 17 & 7 \end{vmatrix} = -158$$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & 17 \end{vmatrix} = 237$. Следовательно, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{395}{79} = 5$,

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-158}{79} = -2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{237}{79} = 3.$$

Пример 4. Решить систему уравнений матричным методом:

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = 3 \\ x - 5y + 3z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

имеем: $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\det A = -8$, обратная матрица $A^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2 & 3 & -7\\ 2 & 1 & -5\\ 4 & -2 & -6\end{pmatrix}$

Находим:

$$X=\frac{1}{-8}\begin{pmatrix}-2 & 3 & -7\\ 2 & 1 & -5\\ 4 & -2 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{-8}\begin{pmatrix}-2\cdot 3+3(-1)-7\cdot 1\\ 2\cdot 3+1(-1)-5\cdot 1\\ 4\cdot 3-2(-1)-6\cdot 1\end{pmatrix}=\frac{1}{-8}\begin{pmatrix}-16\\ 0\\ 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ -1\end{pmatrix},$$

т.е. $x=2,\quad y=0,\quad z=-1$ - решение данной системы.

Пример 5. С помощью метода Гаусса решить вопрос о совместности данной системы и в случае совместности решить ее:

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=2\\ x_1+x_2+5x_3+2x_4=1\\ 3x_1+3x_2+9x_3+5x_4=-2\\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=-3\\ x_1+x_2+3x_3+4x_4=-3\end{cases}$$

Составляем расширенную матрицы $\overline{B}$ и проведем необходимые элементарные преобразования строк:

$$\overline{B}=\left(\begin{array}{cccc|c}2 & 3 & 11 & 5 & 2\\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1\\ 3 & 3 & 9 & 5 & -2\\ 1 & 1 & 3 & 2 & -3\\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 5 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3\\ 2 & 3 & 11 & 5 & 2\\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3\\ 3 & 3 & 9 & 5 & -2\end{array}\right)\approx-\frac{1}{2}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 5 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -7 & -2 & -5\\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5\end{array}\right)\approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 5 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7\\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 5 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 5 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Последней матрице соответствует система, эквивалентная исходной:

$$\left.\begin{array}{r}x_1+x_2+5x_3+2x_4=1\\ x_2+x_3+x_4=0\\ x_3-x_4=2\\ x_4=-1\end{array}\right\}.$$

Из этой системы, двигаясь снизу вверх, последовательно находим:

$$x_4 = -1, \quad x_3 = 2 + x_4 = 2 - 1 = 1, \quad x_2 = -x_3 - x_4 = -1 + 1 = 0,$$
$$x_1 = 1 - x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 1 - 5 + 2 = -2.$$

Итак, система совместна, ее решение единственно $(r = n = 4)$: $x_1 = -2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = -1$. Проверкой легко убедиться в правильности найденного решения.

1. Доказать совместность системы, записать системы в матричной форме и решить их:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$

Ответ: а) $x_1 = x_2 = x_3 = -1;$ б) $x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 2.$

2. Решить системы уравнений, используя формулы Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 = -6 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 8x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_4 = -24 \end{cases}$

Ответ: а) $x_1 = 1, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 0;$

б) $x_1 = -19, \quad x_2 = 26, \quad x_3 = -5.$

3. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$

Ответ: а) $x_1 = 14t, \quad x_2 = 12t, \quad x_3 = x_4 = t; \quad t -$любое число;

б) $x_1 = -10t + 10, \quad x_2 = t, \quad x_3 = -16t + 15, \quad x_4 = 4 - 5t, \quad t -$любое число.

4.Решить систему уравнений матричным способом и сделать проверку:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 2 \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = -4, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 2.$

5. Решить систему по формулам Крамера и сделать проверку:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_3 = -1 \\ x_1 + x_3 = -2 \end{cases}$$

6. Решить систему методом Гаусса и сделать проверку:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -22 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 12 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$