Практическое занятие 3.

Векторы и линейные операции над векторами. Базис. Ортонормированный базис. Действия над векторами в координатной форме

Вопросы

1.Векторы. Основные сведения о векторах.
2.Действия с векторами.
3.Векторное пространство. Линейная зависимость и независимость векторов.
4.Базис системы векторов.
5.Разложение вектора по базису.
6.Скалярное произведение векторов.
7.Векторное и смешанное произведение векторов.

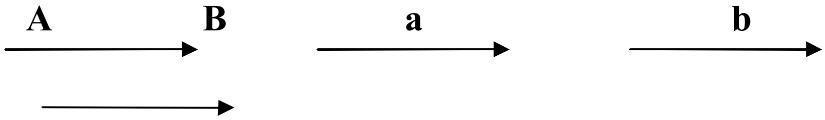
Векторы и линейные операции над векторами.

Вектором называется направленный отрезок. Если начало вектора находится в точке А, а конец – в точке В, то вектор обозначается **АВ.** Если же начало и конец вектора не указываются, то его обозначают строчной буквой латинского алфавита **a, b, c** ,….

Через **ВА** обозначают вектор, направленный противоположно вектору **АВ**. Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется нулевым и обозначается **ō**. Его направление является неопределенным. Другими словами, такому вектору можно приписать любое направление. Длиной или модулем вектора называется расстояние между его началом и концом.

Записи |**АВ**| и | **a** | обозначают модули векторов **АВ** и **a**.

Векторы называются коллинеарными, если они параллельны одной прямой, и компланарными, если они параллельны одной плоскости.
Два вектора называются равными, если они коллинеарны, одинаково направлены и равны по длине.



C **D** **АВ =CD, a = b**.

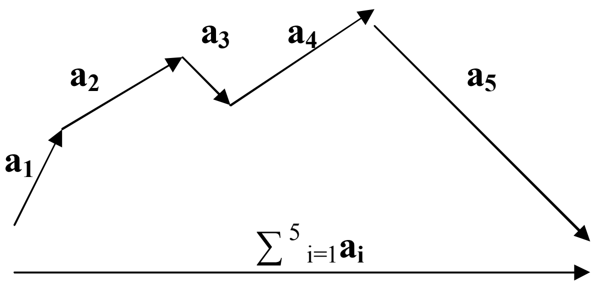
К линейным операциям над векторами относятся: умножение вектора на число и сложение векторов.

Произведением вектора **a** и числа α называется вектор, обозначаемый **α·a**. (или наоборот **a·α**), модуль которого равен $|\alpha\, \mathbf{a}| = |\alpha||\mathbf{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора **a,** если $\alpha>0$, и противоположно ему, если $\alpha< 0$.

Суммой векторов $\mathbf{a_i}$ ($i=1\div n$) называется вектор, обозначаемый

$$\mathbf{a_1}+\mathbf{a_2}+\ldots+\mathbf{a_n}=\sum^{n}_{i=1} \mathbf{a_i},$$

начало которого находится в начале первого вектора $\mathbf{a_1}$, а конец – в конце последнего вектора $\mathbf{a_n}$, ломаной линии, составленной из последовательности слагаемых векторов.



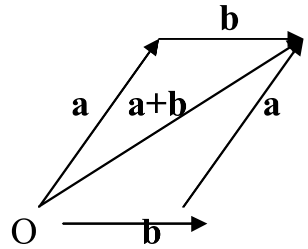


Рис. 2

Рис. 1

Это правило сложения называется правилом замыкания ломаной. В случае суммы двух векторов оно равносильно правилу параллелограмма (Рис. 2).

Прямая *e* с заданным на ней направлением, принимаемым за положительное, называется осью *e*.

Проекция вектора **a** на ось *e* называется число, обозначаемое $пр_e\, \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \operatorname{Cos}\varphi$, где φ ($0 \le \varphi \le \pi$) – угол между положительным направлением оси *e* и направлением вектора **a**.

Геометрически проекцию вектора **a** можно охарактеризовать длиной отрезка MN, взятой со знаком «+», если $0 \le \varphi \le \pi/2$, и со знаком «-», если $\pi/2< \varphi \le \pi$ (Рис. 3). При $\varphi= \pi/2$ отрезок MN превращается в точку и $пр_e\mathbf{a} = 0$.

$\varphi = e \wedge \mathbf{a}$

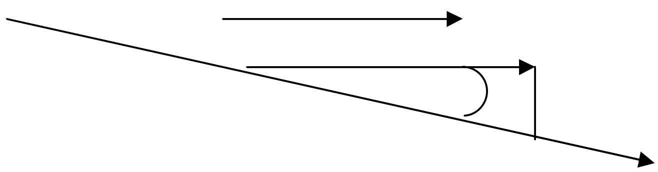


Рис. 3

Координатами вектора **a** называются его проекции на оси координат O_x, O_y, O_z. Они обозначаются соответственно буквами x, y, z. $\mathbf{a} =(x, y, z)$.

Для равенства векторов необходимо достаточно, чтобы их соответствующие координаты были равны. Если $M_1(x_1\ y_1\ z_1)$, $M_2(x_2\ y_2\ z_2)$, то $\mathbf{M_1M_2} = (x_2-x_1,\ y_2-y_1, z_2-z_1)$.

Линейной комбинацией векторов $\mathbf{a_i}$ называется вектор **a**, определяемый по формуле $\mathbf{a} = \sum^{n}_{i=1}$, где λ_i – некоторые числа.

Линейные операции над векторами удовлетворяют свойствам, по форме аналогичным свойствам умножения и сложения чисел. Например,
a+**b** = **b**+ **a**, (α+β)**a** = α**a**+ β**a**, α(**a**+ **b**) = α **a**+ α **b**, **a**+(-1)**a** = **a** – **a** = 0, 1**a** = **a**, **ōa** = **ō** и т. д.

Если для системы n векторов $\mathbf{a_i}$ равенство $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{a_i} = 0$ (1)
верно только в случае, когда $\lambda_i = 0$, то эта система называется линейно независимой. Если же равенство (1) выполняется для λ_i, хотя бы одно из которых отлично от нуля, то система векторов $\mathbf{a_i}$ называется линейно зависимой. Например, любые коллинеарные векторы, три компланарных вектора, четыре и более векторов в трехмерном пространстве всегда линейно зависимы.

Три упорядочных линейно независимых вектора $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ в пространстве называется базисом. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов всегда образует базис. Любой вектор **a** в пространстве можно разложить по базису $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$, т. е. представить **a** в виде линейной комбинации базисных векторов: $\mathbf{a} = x\,\bar{\mathbf{e}}_1 + y\,\bar{\mathbf{e}}_2 + z\,\bar{\mathbf{e}}_3$, где x, y, z являются координатами вектора **a** в базисе $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$.

Базис называется ортонормированным, если его векторы взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину. Обозначают такой базис **i, j, k**, т. е. **i**(1, 0, 0), **j**(0, 1, 0), **k**(0, 0, 1).

Аудиторные занятия

1. Даны векторы a,b,c (рис.1). Изобразить на рисунке их линейную комбинацию $-2a + \frac{1}{3}b + 4c$.

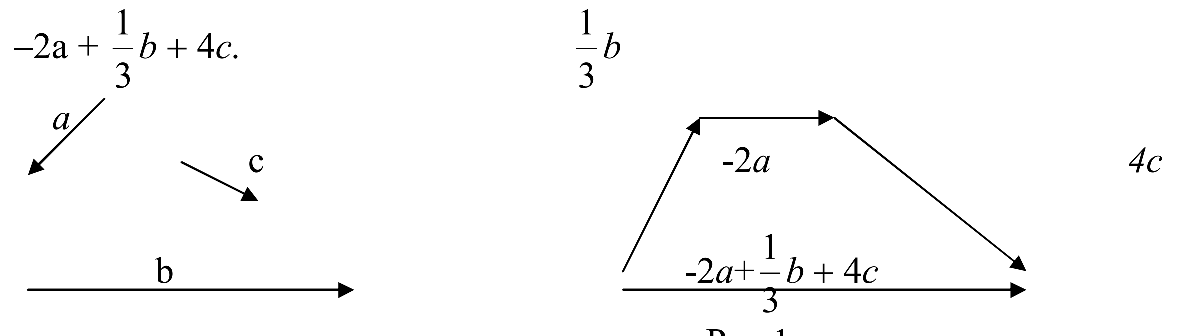


Рис.1

Выбираем на плоскости произвольную точку O и откладываем от нее вектор –2a . Затем от конца вектора –2a откладываем вектор $\frac{1}{3}$ и, наконец, строим вектор 4c, выходящий из конца вектора $\frac{1}{3}b$. Искомая линейная комбинация изображается вектором, замыкающим полученную ломаную, начало которого находится в точке O.

2.Векторы заданы в ортонормированном базисе **i, j, k** координатами: $\boldsymbol{a}$ = (2,-1,8), $\boldsymbol{e_1}$ = (1,2,3), $\boldsymbol{e_2}$ = (1,-1,-2), $\boldsymbol{e_3}$ = (1,-6,0). Убедиться, что тройка $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ образует базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{a}$ в этом базисе.

Если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -6 & 0 \end{vmatrix},$$

составленный из координат векторов $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3}$, не равен 0, то векторы $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3}$ линейно независимы и, следовательно, образуют базис. Убеждаемся, что Δ = -18-4+3-12=-31 $\neq 0$. Таким образом, тройка $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ - базис.

Обозначим координаты вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ через x,y,z.

Тогда $\boldsymbol{a} = (x,y,z) = x\boldsymbol{e_1} + y\boldsymbol{e_2} + z\boldsymbol{e_3}$. Так как по условию

$$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{e_1} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{e_3} = \boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j},$$

то из равенства $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{e_1} + y\boldsymbol{e_2} + z\boldsymbol{e_3}$ следует, что

$$2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k} = x\boldsymbol{i} + 2x\boldsymbol{j} + 3x\boldsymbol{k} + y\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} - 2y\boldsymbol{k} + z\boldsymbol{i} - 6z\boldsymbol{j} = (x+y+z)\boldsymbol{i} + (2x-y-6z)\boldsymbol{j} + (3x-2y)\boldsymbol{k}.$$

Как видно, вектор в левой части полученного равенства равен вектору в правой его части, а это возможно только в случае равенства их соответствующих координат. Отсюда получаем систему для нахождения неизвестных x, y, z :

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 2, \\ 2x - y - 6z &= -1, \\ 3x - 2y &= 8. \end{aligned}\right\}$$

Ее решение: $x = 2$, y = -1, z = 1. Итак, $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_3} = (2,-1,1)$.

3. По данным векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ построить следующие их линейные комбинации:
а) $2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$; *б)* $\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$; *в)* $\frac{1}{3}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}$; *г)* $-3\boldsymbol{a} - \frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

4. Даны векторы $\boldsymbol{a} = (3,-2,6)$ и $\boldsymbol{b} = (-2,1,0)$. Найти координаты векторов: $2\boldsymbol{a} - \frac{1}{3}\boldsymbol{b}$; $\frac{1}{3}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$; $2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$. *(Ответ: (20/3,-13/3,12); (3,-5/3,2); (0,-1,12).)*

5. В некотором базисе векторы заданы координатами: $\boldsymbol{a} = (1,1,2)$, $\boldsymbol{e_1} = (2,2,-1)$, $\boldsymbol{e_2} = (0,4,8)$, $\boldsymbol{e_3} = (-1,-1,3)$. Убедиться, что векторы $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ образуют базис, и найти в нем координаты вектора $\boldsymbol{a}$. (Ответ: $\boldsymbol{a} = (1,0,1)$.)

Домашние задания:

1. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах a = (3,-5,8) и b = (-1,1,-4). (Ответ: $|a+b| = 6,\ |a-b| = 14.$)

2. Векторы $\overrightarrow{AB}$ = (2,6,-4) и $\overrightarrow{AC}$ = (4,2,-2) определяют стороны треугольника ABC. Найти длину вектора $\overrightarrow{CD}$, совпадающего с медианой, проведенной из вершины С. (Ответ: $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{10}.$)

3. Найти координаты вектора c , направленного по биссектрисе угла между векторами a = (-3,0,4) и b = (5,2,14). (Ответ: $c = \lambda(-2,1,13), \lambda > 0.$)