# 2. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, их вычисление и приложения

*Определение.*Скалярным произведением двух векторов **a** и **b** называется число, обозночаемое **c** = **a·b** и равное произведению модулей данных векторов на косинус угла между ними:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\mathrm{Cos}\,(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}),\ \text{где } (\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})$$

обозначает меньший угол между направлениями векторов **a** и **b**. Отметим, что всегда $(0 \leq \mathbf{a}\wedge\mathbf{b} \leq \pi)$.

Перечислим основные свойства скалярного произведения векторов:

1. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$;
2. $(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = \cdot(\lambda\mathbf{b}) = \lambda\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$;
3. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$;
4. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\ \text{пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\ \text{пр}_{\mathbf{b}}|\mathbf{a}|$;
5. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$;
6. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$, если $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

Если $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то в базисе $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,\quad |\mathbf{a}| = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2},\quad |\mathbf{b}| = \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}.$$

Обозначим через α, β, γ углы, которые образуют вектор **a** $(x_1, y_1, z_1)$ с осями координат $O_x$, $O_y$, $O_z$ соответственно (или, что то же самое, с векторами **i, j, k**). Тогда справедливы следующие формулы:

$$\mathrm{Cos}\,\alpha = \mathbf{a}\cdot\mathbf{i}/|\mathbf{a}| = x_1/\left(\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\right),\quad \mathrm{Cos}\,\beta = \mathbf{a}\cdot\mathbf{j}/|\mathbf{a}| = y_1/|\mathbf{a}|,$$

$$\mathrm{Cos}\,\gamma = \mathbf{a}\cdot\mathbf{k}/|\mathbf{a}| = z_1/|\mathbf{a}|,\qquad \mathrm{Cos}^2\alpha + \mathrm{Cos}^2\beta + \mathrm{Cos}^2\gamma = 1.$$

Величины Cos α, Cos β, Cos γ называются направляющими косинусами вектора **a**.

Работа A силы **F,** произведенная этой силой при перемещении тела на пути |S|, определяемой вектором **s**, вычисляется по формуле

$A = \mathbf{F}\cdot\mathbf{S} = |\mathbf{F}|\,|\mathbf{S}|\cdot\mathrm{Cos}(\mathbf{F}\wedge\mathbf{s})$.

<u>Пример.</u> Вычислить работу равнодействующей **F** сил $\mathbf{F_1} = (3, -4, 5)$, $\mathbf{F_2} = (2, 1, -4)$, $\mathbf{F_3} = (-1, 6, 2)$, приложенных к материальной точке, которая под их действием перемещается прямолинейно из точки $M_1(4, 2, -3)$ в точку $M_2(7, 4, 1)$.

*Решение***.** Так как $F = F_1 + F_2 + F_3$, $F = \mathbf{(4, 3, 3)}$, $M_1M_2 = S = \mathbf{(3, 2, 4)}$, то $A = \mathbf{F}\cdot\mathbf{S} = 4*3+3*2+3*4 = 30$.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов **a, b, c** с общим началом в точке O называется правой, если кратчайший поворот от вектора **a** к вектору **b** наблюдается из конца вектора **c** происходящим против движения часовой стрелки. В противном случае данная тройка называется левой (Рис.4).

**a** **a**

Правый базис Левый базис

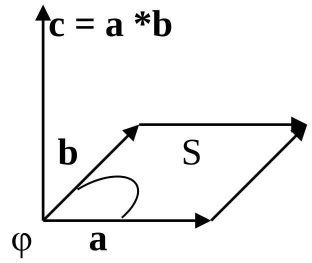
Рис. 4

Векторным произведением векторов **a** и **b** называется вектор **c**, обозначаемый **c = a *b**, который удовлетворяет следующим трем условиям:

1. |**c**| = **| a | |b|** Sin **(a^b);**
2. **c** $\perp$ **a, c** $\perp$ **b;**
3. тройка **a, b, c** – правая.

Перечислим основные свойства векторного произведения векторов:

1. **a *b = - (b* a);**
2. **(λ a)*b= λ (a *b) = a *(λb);**
3. **a *(b+c) = a *b+ a *c;**
4. **a *b = 0,** если **a** $\parallel$ **b;**
5. **| a *b|** = S, где S – площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**, имеющих общее начало в точке φ. (см. рис. )




Если **a** =($x_1$, $y_1$, $z_1$), **b** =($x_2$, $y_2$, $z_2$), то векторное произведение **a * b** выражается через координаты данных векторов **a** и **b**, следующим образом:

$$\mathbf{a*b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

*Определение.* Смешанным произведением векторов **a**, **b** и **c** называется число **(a *b ) c.**

Перечислим основные свойства смешанного произведения векторов:

1. **(a*b)·c = a·(b*c)**, поэтому смешанное произведение можно обозначить проще **abc = (a*b)·c;**
2. **abc =bca = cab = -bac = -cba = - acb;**
3. геометрический смысл смешанного произведения векторов в следующем: **abc** = ± V, где V – объем параллелепипеда, построенного на перемножаемых векторах, взятый со знаком «+» плюс, если

тройка векторов **a, b, c** – правая, или со знаком «-» минус, если она левая.

4. **abc** = 0, если **a, b, c** компланарны.

Если **a** =($x_1$, $y_1$, $z_1$), **b** =($x_2$, $y_2$, $z_2$), **c** = ($x_3$, $y_3$, $z_3$), то

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Пример. Даны векторы **a** = (1, 3, 1), **b** = (-2, 4, -1), **c** = (2, 4, -6). Требуется установить, компланарны ли данные векторы, в случае их некомпланарности выяснить, какую тройку (правую или левую) они образуют, и вычислить объем построенного на параллелипипеда.

Решение: Вычислим

$$\mathbf{a\,bc} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = -78 \neq 0.$$

из значения смешанного произведения следует, что векторы некомпланарны, образуют левую тройку и V = 78.

Пример. Даны векторы **a** = λ**i**+2**j**+3**k**, **b** = 4**i** + λ**j**-4**k**. При каком значении λ эти векторы перпендикулярны?

Решение:

Находим скалярное произведение этих векторов **a·b** = 4λ +2λ -12; так как **a** ⊥ **b**, то **a·b** =0. отсюда 4λ+2λ-12 = 0; 6λ = 12; λ = 2.

Пример. Определить угол между векторами **a** = **i** + 2**j** + 3**k**,
**b** = 6**i** + 4**j** - 2**k**.

Решение:

Так как **a·b =** | **a** | | **b** | Cos **(a^b)** = | **a** | | **b** | Cos φ, то
Cosφ = **a·b**/| **a** | | **b** |, **a·b** = 6 + 8 - 6 = 8. | **a** | = √1+4+9 = √14,
| **b** | = √36+16+4 = √56 = 2√14, Cosφ = 8/√14*2√14 = 2/7, φ = arccos 2/7.

Пример. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** = 2**i** +3**j**, **b** = **i** -4**j**. Здесь **i** (1, 0), **j**(0, 1)- единичные векторы, взаимно перпендикулярны.

Решение:

**a*b** = (2**i** +3**j**)*( **i** -4**j**) = 2**i*** **i** +3**j***i** -8 **i** ***j**-12**j*j** = -3**i** ***j**-8**i** ***j** = -11**i** ***j** = **c**;
Sпар. = |**c**| = 11|**i*j**| = 11*1*1Sinπ /2 = 11.

Пример. Заданы векторы **a** = (0, 1, 0) және **b** = (2, -1, 3). Найти координаты векторного произведения этих векторов и длину.

Решение:

$$\begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = \left| \quad \right| = 3\mathbf{i} + 0 + 0 - 2\mathbf{к} - 0 - 0 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{к} = \mathbf{c}$$

**c**(3, 0, -2), |**c**| = | **a** ***b**| = $\sqrt{9+0+4} = \sqrt{13}$.

<u>Пример.</u> Показать, что векторы **a** = 2 **i** +5**j**+7**k**, **b** = **i** +**j**-**k**, **c** = **i** +2**j**+2**k** компланарны.

Решение:

Если векторы **a**, **b**, **c** компланарны, то **a bc =** 0.

$$\mathbf{a\,bc} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4+14-5-7+4-10 = 0.$$

Векторы **a**, **b, c** компланарны.

Решить:

1.Заданы векторы **a (-**1, 2, 0**)** и **j (**0, 1, 0**)**. Вычислить: Cos **(a^j)**. (Ответ: $2/\sqrt{5}$).

2.Векторы **a** и **b** взаимно перпендикулярны, |**a**| = 3, |**b**| = 4. Вычислить: |**ab|**; |( **a**+**b**)( **a**-**b**)|; |(3 **a-b**)( **a-2b**)|. ( Ответ: 12; 24; 60).

3.Вычислить площадь треугольника ABC с вершинами A(1, 1, 1), B(2, 3, 4), C(4, 3, 2). (Ответ: $2\sqrt{6}$).

4.Дано |**a| =**10**,** |**b**| = 2, **a**·**b** = 12. Вычислить: | **ab** |. (Ответ: 16).

5.Вычислить работу силы **F = i** + 2**j** + **k** при перемещении материальной точкой из положения A (-1, 2, 0**)** в положение B (2, 1, 3). (Ответ: 4).

6.Вектор **x** перпендикулярен векторам $\mathbf{a_1}$ **(**2, 3, -1) и $\mathbf{a_2}$ (1, -2, 3) и удовлетворяет условию **x (**2**i**–**j**+**k) = -** 6. Найти координаты **x**. **(**Ответ: **x (-**3, 3, 3**))**.

7.Векторы $\mathbf{a_1}$ **,** $\mathbf{a_2}$ **,** $\mathbf{a_3}$ образуют правую тройку, взаимно перпендикулярны и $|\mathbf{a_1}| = 4$ , $|\mathbf{a_2}| = 2$ , $|\mathbf{a_3}| = 3$. Вычислить $\mathbf{a_1}\,\mathbf{a_2}\,\mathbf{a_3}$. (Ответ: 24).

8.Заданы векторы **a (**0, 3, 4**)**, **b (**2, 1, 3**)** и угол **a^ b** = φ = π/4. Вычислить $пр_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$.

**(**Ответ: $5\sqrt{2}/2$**)**.