2.Уравнения плоскостей. Взаимное расположение плоскостей. Расстояние от точки до плоскости

Основная теорема. *В декартовых прямоугольных координатах уравнение любой плоскости приводиться к виду*

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

Уравнение (1) называется *общим уравнением плоскости.* Коэффициенты A,B,C являются координатами вектора n, перпендикулярного к плоскости, заданной уравнением (1). Он называется *нормальным вектором* этой плоскости и определяет ориентацию плоскости в пространстве относительно системы координат.

Существуют различные способы задания плоскости и соответствующие им виды уравнения.

1*. Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору*. Если плоскость проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярна к вектору $n = (A,B,C)$, то ее уравнение записывается в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (2)$$

2*. Уравнение плоскости в «отрезках»* . Если плоскость пересекает оси координат Ox, Oy, Oz в точках $M_1(a,0,0), M_2(0,b,0), M_3(0,0,c)$ соответственно , то ее уравнение можно записать в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (3)$$

где $a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0.$

3*. Уравнение плоскости по трем точкам.* Если плоскость проходит через точки $M_i(x_i, y_i, z_i) \quad (i = \overline{1,3})$, не лежащие на одной прямой , то ее уравнение можно записать в виде

$$P: \quad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

Рассмотрим простейшие задачи .

1^0. Величина угла φ между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ вычисляется на основании формулы

$$\cos\varphi = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| \cdot |n_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (5)$$

где $n_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $n_2 = (A_2, B_2, C_2) -$ нормальные векторы данных плоскостей. С помощью формулы (5) можно получить *условие перпендикулярности* данных *плоскостей* :

$n_1 \cdot n_2 = 0$ или $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

Условие параллельности рассматриваемых *плоскостей* имеет вид:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$$

2^0. Расстояние d от точки до плоскости , заданной уравнением (1), вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (6)$$

Пример 1 Составить уравнение плоскости, параллельной вектору **s** = (2,1,-1) и отсекающих на осях OX и OY отрезки *a* =3, *b*= -2. (Ответ: 2x-3y+z-6=0)

Искомое уравнение плоскости находим из условия компланарности трех векторов ***M₁M, M₁M₂, s*** , а точки имеет координаты ***M(x,y,z), M₁(a,0,0), M₂(0,в,0)*** . По условию задачи *а*=2, *в*= -3. Тогда

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$ и окончательно получаем ***2x - 3y + z = 0.***

Пример 2. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями ***3x + 3y + 2z – 15 = 0*** и ***3x + 3y + 2z + 13 = 0.***

Для решении задачи находим любую точку принадлежащую на одной из плоскости, например считая ***y = z*** = 0 из уравнения первой плоскости находим , что ***x=5*** Тогда по формуле нахождения расстояния от данной точки ***M_0(5,0,0)*** до второй плоскости находим ***d= 4***

Прямая и плоскость

В зависимости от способа задания прямой в пространстве можно рассматривать различные ее уравнения.

1. Векторно-параметрическое уравнение прямой. Пусть прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $s = (m, n, p)$, а $M(x, y, z)$ – любая точка этой прямой . Если r_0 и r – радиусы-векторы точек M_0 и M , то справедливо векторное равенство

$$r = r_0 + t \cdot s \qquad (-\infty < t < +\infty) \qquad (7)$$

которое получается по правилу сложения векторов. Уравнение (6) называется *векторно-параметрическим уравнением прямой* , s –направляющим вектором прямой (6), t – параметром.

2. Параметрические уравнения прямой. Из уравнения (6) получаем три скалярных уравнения:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + m \cdot t \\ y &= y_0 + n \cdot t \\ z &= z_0 + p \cdot t \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

которые называются *параметрическими уравнениями прямой.*

3. Канонические уравнения прямой. Разрешая уравнения в системе (8) относительно ***t*** и приравнивая полученные отношения, приходим к *конечным уравнениям прямой:*

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \qquad (9)$$

4. Уравнения прямой в пространстве, проходящей через две точки.

Если прямая проходит через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то её уравнения можно записать в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (10)$$

5.Общие уравнения прямой в пространстве. Две пересекающиеся плоскости

$$\left.\begin{matrix} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{matrix}\right\} \qquad n_1=(A_1,B_1,C_1),\quad n_2=(A_2,B_2,C_2) \qquad (11)$$

где n_1 и n_2 не параллельны , определяют прямую. Уравнение (11) называются *общими уравнениями прямой в пространстве*.

Направляющий вектор ***s*** прямой , заданной уравнениями (11), определяется по формуле

$$s=n_1\times n_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

а координаты какой-либо точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$, лежащей на этой прямой , можно найти как решение системы (11). Тогда уравнения данной прямой можно записать в канонической форме (9).

Если прямые заданы каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

то величина угла φ между ними определяется из формулы

$$\cos\varphi=\frac{s_1\cdot s_2}{|s_1|\cdot|s_2|} \qquad (12)$$

Теперь можно записать условие перпендикулярности прямых $s_1\cdot s_2=0$, а условие параллельности $s_1||s_2$, а условия их совпадения $s_1||s_2\,||M_1M_2$, где ***M₁(x₁,y₁,z₁)***, ***M₂(x₂,y₂,z₂)***, а ***s₁,s₂*** – направляющие векторы.

Необходимое и достаточное условие пересечения непараллельных прямых заданных в каноническом виде

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0 \qquad (13)$$

Если условие (13) не выполняется, то прямые скрещивающиеся.

Расстояние ***h*** от точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ до прямой (8) проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ в направлении вектора $s=(m,n,p)$ вычисляется по формуле

$$h=\frac{|\vec{s}\times M_0M_1|}{|\vec{s}|} \qquad (14)$$

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ортогональной проекцией на плоскость.

Величина угла φ между прямой и плоскостью вычисляется по формуле

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \qquad (15)$$

<u>Пример 1.</u> Составить уравнение плоскости, проходящей через точку P(1,0,2) перпендикулярно к двум плоскостям

2x – y + 3z – 1 = 0 и ***3x + 6y + 3z -5 = 0***

Так как коэффициенты плоскостей не пропорциональны, то они пересекаются, тогда направляющий вектор линий пересечения находим из векторного произведения нормалей двух плоскостей т.е.

$$\boldsymbol{s} = [\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 21\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 15\boldsymbol{k}.$$

Тогда этот вектор будет нормалью искомой плоскости и по формуле (2) находим

$$7x - y - 5z = 0.$$

<u>Пример 2.</u> Записать уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$$ перпендикулярно к плоскости x+4y-3z+7=0.

Искомая плоскость проходить через точки прямой $M_0(2,3,-1)$ и через направляющий вектор прямой ***s(5,1,2)*** и через нормали данной плоскости **n**(1,4,-3). Тогда из условия компланарности трех векторов $\mathbf{M_0M}$, **s** и **n** находим

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{и} \quad 11x - 17y - 19z + 10 = 0.$$

Задания:

1. Записать уравнение и построить плоскость:

а) параллельную плоскости OXZ и проходящую через точку $M_0(7,-3,5)$

б) проходящую через ось OZ и точку A(-3,1,-2)

в) параллельную оси OX и проходящую через две точки $M_1(4,0,-2)$, $M_2(5,1,7)$

г) проходящую через точку B(2,1,-1) и имеющую нормальный вектор n=(1,-2,3)

д) проходящую через точку C(3,4,-5) параллельно двум векторам ***а***=(3,1,-1) и ***в***=(1,-2,1)

Ответ: ***а) y+3=0; б) x+3y=0; в)9y-z-2=0; г) x-2y+3z+3=0; д) x+4y+7z+16=0.***

2. Составить уравнение одной из граней тетраэдра, заданного вершинами. A(5,4,3), B(2,3,-2), C(3,4,2),Д(-1,2,1). Проверить правильность полученного уравнения.

3. Составить уравнение плоскости:

а) проходящей через точки $M_1(1,1,1)$, $M_2(2,3,4)$ перпендикулярно к плоскости ***2x-7y+5z+9=0,***

б) проходящей через точку $M_0(7,-5,1)$ и отсекающей на осях координат равные положительные отрезки. (Ответ : а) 31***x + y - 11z – 21 =0 б) x + y + z - 3=0)***

4. Вычислить угол между плоскостями ***x - 2y + 2z – 3=0*** и 3***x - 4y + 5 =0***

(Ответ: $\cos\varphi = 11/15, \quad \varphi \approx 42^\circ 51'$)

5. Записать уравнение плоскостей, делящих двухгранные углы между плоскостями 3x-y+7z-4=0 и 5x+3y-5z+2=0 (Ответ: x+2y-6z=0, 4x+y+z-1=0)

Домашние задания:

1. Составить уравнение плоскости через точку P(1,0,2) перпендикулярно к двум плоскостям **2x-y+3z-1=0** и **3x+6y+3z=0.** **(** Ответ: 7x-y-5x-z+3=0)

2. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости 2x-2y+4z-5=0 и отсекающей на осях OX и OY отрезки a = -2, $в = 2/3$ соответственно. (Ответ: x-3y-2z+2=0)

3. Составить уравнение плоскости, параллельной вектору **s** = (5,0,-2) и отсекающей на осях OX и OY отрезки a = -4, b= 1.

4. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями ***x - 2y + 4z – 1 = 0*** и ***2x -5y + 2z + 12 = 0.***