

Замечательные пределы

1. Вычислите:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\tan 5x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan 3x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{3x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(2x-2)}{4x-4}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x \cdot \cos 5x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \pi x}{1-x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{1-\cos 2x}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x + \frac{3\pi}{2})}{\sin(\pi - 2x)}$$

2. Вычислите:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x}\right)^x$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x}\right)^x$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x}\right)^{4x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{2x+7}\right)^{2x+5}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-5}{2x+3}\right)^{x+4}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+5}\right)^{3x+1}$$

3. Определить порядок бесконечно малой функции $y = 7x^8 / (x^4 + 1)$ относительно бесконечно малой x при $x \rightarrow 0$.

4. Используя эквивалентности, вычислить:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x};$

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x};$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 5x};$

е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sqrt{x+1}-1};$

в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4^x - 64}{x - 3};$

ж) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(2x-1)}{4x^2-1};$

г) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e};$

з) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1}{\arcsin x};$

4. Дана функция $f(x) = \begin{cases} (x^2 - 9)/(x - 3), & \text{если } x \neq 3 \\ A, & \text{если } x = 3 \end{cases}$. При каких значениях функция $f(x)$ будет непрерывной в точке $x=3$? Построить график функции.

5. Используя эквивалентности, вычислить следующие пределы:

6. Установить область непрерывности функции $y = (3x + 3)/(2x + 4)$ и найти ее точки разрыва.

7. Дана функция $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{если } x < 0 \\ \sin x, & \text{если } 0 \leq x < \pi/2 \\ x - \pi/2 + 1, & \text{если } x \geq \pi/2 \end{cases}$. Найти точки разрыва функции и построить ее график.

8. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = (2x + 4)/(3x + 9)$ в точках $x_1 = -1$ и $x_2 = -3$. Сделать схематический чертеж.

9. Дана функция $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x < 0 \\ \cos x, & \text{если } 0 \leq x < \pi/2 \\ 1 - x, & \text{если } x \geq \pi/2 \end{cases}$. Исследовать ее на непрерывность. Сделать схематический чертеж.