

Производная функции

7.2.1 Табличное дифференцирование

Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ - функции от x , а C , a , α - константы. Тогда

- | | |
|--|--|
| 1. $x'_x = 1$ | 7. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ |
| 2. $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$ | 8. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ |
| 3. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ | 9. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$ |
| 4. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ | 10. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$ |
| 5. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$ | 11. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u' \Rightarrow (e^u)' = e^u \cdot u'$ |
| 6. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$ | 12. $(\log u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u' \Rightarrow (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$ |
| 13. $(u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \ln u \cdot v'$ | |

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = 3x^3 5\sqrt[3]{x^5} - 4/x^3$;

б) $y = x^3 \sin x \cdot \ln x$;

в) $y = \sqrt{(x^3 + 1)/(x^3 - 1)}$.

г) $y = \sqrt[7]{x^5} - 2/x^4 + 7x^6$;

д) $y = (x^9 + 1)\cos 5x$;

е) $y = ((x^4 + 1)/(x^4 - 1))^3$.

ж) $y = 4\sqrt{x} + 4/\sqrt{x} + 3x^2$;

з) $y = x^3 \operatorname{tg} x \cdot e^{2x}$;

и) $y = (\sin^2 x)/(x^3 + 1)$.

2. Записать уравнения касательной и нормали к кривой $y = \ln(x^2 - 4x + 4)$ в точке $x_0 = 1$. (Ответ: $2x + y - 2 = 0$; $x - 2y - 1 = 0$.)

3. Воспользовавшись определением производной (см. Формулу (2)), найти производную функции $y = (3x - 1)/(2x + 5)$. (Ответ: $y' = 17/(2x + 5)^2$.)

4. Расстояние, пройденное материальной точкой за время t с, $s = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + 2t + 1$ (s - в метрах). Найти скорость движения данной точки в моменты времени $t = 0$; 1; 2 с. (Ответ: 2 м/с; 2 м/с; 6 м/с.)

5. Найти производные следующих функций.

а) $y = x \sin^3 3x$;

б) $y = \sqrt{\frac{\cos^2 x + 1}{\sin 2x + 1}}$;

в) $y = (2^{\cos 3x} + \sin 3x)^3$; г) $y = x \cos^2 x \cdot \ell^{x^2}$.

д) $y = x^3 e^{tg 3x}$; е) $y = (\sin^3 x + \cos^3 2x)^2$;

ж) $y = \ln(x^4 - \sin^3 x)$; з) $y = x \sin 7x \cdot tg^2 x$.

и) $y = x ctg^2 5x$; к) $y = (x^3 + tg^3 2x)^2$;

л) $y = \sin(x^5 - tg^2 x)$; м) $y = x^3 \cos 2x \cdot e^{-x^2}$.

6. Найти производные указанных функций:

а) $y = 3^{x^2} - tg^4 2x$;

б) $y = x^3 tg^3 x$;

в) $y = \lg^4(x^5 - \sin^5 2x)$;

г) $y = \text{arctg} \sqrt{1 + e^{-x^3}}$.

7. Найти производные следующих функций:

а) $y = (\sin 3x)^{\cos 5x}$;

б) $y = (x^3 + 1)^{tg 2x}$.

8. Найти производные функций y , заданных неявно следующими уравнениями:

а) $e^{xy} - x^3 - y^3 = 3$; б) $xy - \text{arctg} \frac{x}{y} = 3$; в) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = a$.

(Ответ: а) $y' = (3x^2 - \ell^{xy} y) / (-3y^2 + \ell^{xy} x)$; б) $y' = -(x^2 y + y^3 - y) / (x^3 + xy^2 + x)$; в) $y = -\sqrt[3]{(y/x)^2}$.)

Найти y' из уравнения:

568. $x^2 + y^2 - xy = 0$;

569. $x^2 + xy + y^2 = 6$;

570. $x^2 + y^2 = a^2$;

571. $y^2 = 2px$;

572. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

573. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$;

574. $e^y - e^{-x} + xy = 0$;

575. $e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0$;

576. $x = y + \text{arctg} y$;

577. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

578. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$;

579. $ctg y = xy$;

580. $e^{xy} - x^2 + y^3 = 0$;

581. $\text{arctg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$;

582. $\text{arctg} y = x + y$;

583. $x^2 = \frac{y-x}{x+2y}$.