

## Дифференцирование функции, заданных параметрически

Пусть функция  $y$  от  $x$  задана параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

Пусть  $x = \varphi(t)$  имеет обратную функцию, которая, включая функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$ , дифференцируемы, причем  $\varphi'(t) \neq 0$ . Тогда

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

*Пример 4.* Найти  $y'_x$ .

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

$$x'_t = (a \cos t)' = -a \sin t, \quad y'_t = (a \sin t)' = a \cos t \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a \cos t}{-a \sin t} = -\operatorname{ctgt}.$$

Задания:

Найти  $y'_x(t)$  и  $y''_{xx}(t)$  функции, заданной параметрически

**561.**  $x(t) = 3 \cos t, y(t) = -2 \sin t;$

**562.**  $x(t) = t^2, y(t) = \frac{t^3}{3} - t;$

**563.**  $x(t) = e^{2t}, y(t) = e^{3t};$

**564.**  $x(t) = t^2, y(t) = t^3 + t;$

**565.**  $x(t) = 4 \cos^3 t, y(t) = 4 \sin^3 t;$

**566.**  $x(t) = \frac{1-t}{(t+1)^2}, y(t) = \frac{t(1-t)}{(t+1)^2};$

**567.**  $x(t) = \frac{t}{t^3+1}, y(t) = \frac{t^2}{t^3+1}.$

## Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть  $y = f(x) \in C^1[a; b]$ . Если  $z = f'(x) \in C^1[a; b]$ , то  $z'$  называется второй производной от  $y = f(x)$  и обозначается  $f''(x)$ . Т. е.

$$f''(x) = [f'(x)]' \quad \text{или} \quad y''(x) = [y'(x)]'$$

**Определение 5.** Производной от функции  $y = f(x)$   $n$ -го порядка называется производная от производной  $n-1$ -го порядка, т. е.

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$$

*Пример 6.*  $y = x^2 \Rightarrow y' = 2x \Rightarrow y'' = 2 \Rightarrow y''' = 0 \Rightarrow y^{(n)} = 0 \dots$

Пусть  $dy = f'(x) \in C^1[a; b]$ . Тогда  $d^2y = d(dy)$  называется дифференциалом второго порядка от  $f(x)$ . Отсюда

$$d^2y = d(dy) = [f'(x)dx]' dx = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2.$$

**Определение 6.** Дифференциалом  $n$ -го порядка функции  $y = f(x)$  называется дифференциал от дифференциала  $n-1$ -го порядка, причем

$$d^n y = f^{(n)}(x) dx^n \quad (3)$$

Из (3) следует

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} \quad (4)$$

Задания:

Найти производную второго порядка от функции:

**529.**  $y = e^{-x^2}$ ;

**530.**  $y = \operatorname{tg} x$ ;

**531.**  $y = \arcsin \frac{x}{2}$ ;

**532.**  $y = \sqrt{1+x^2}$ ;

**533.**  $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ .

Найти производную третьего порядка от функции:

**534.**  $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$ ;

**535.**  $y = x e^{-x}$ ;

**536.**  $y = x^2 \sin x$ ;

**537.**  $y = x^3 2^x$ .

Найти дифференциал второго порядка от функции:

**553.**  $y = \operatorname{ctg} x$ ;

**554.**  $y = \cos^2 x$ ;

**555.**  $y = \ln(2x - 3)$ .